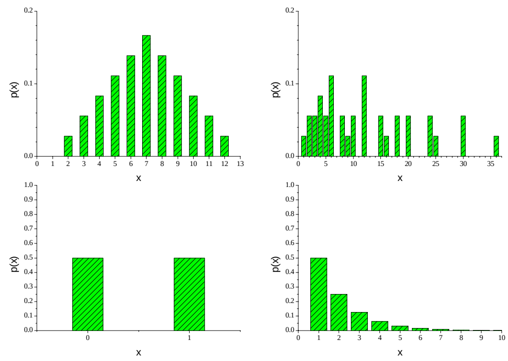
Prošli put:

$$\Omega \xrightarrow{\text{slucajna varijabla}} D \xrightarrow{\text{raspodjela vjerojatnosti}} p(x)$$

Diskretna slučajna varijabla

Raspodjela vjerojatnosti $p(x)$ (tablično ili funkcionalno)

Totalna vjerojatnost $1 = \sum_{x \in D} p(x)$



Funkcija raspodjele (kumulativna funkcija distribucije)

Def:

Za diskretnu slučajnu varijablu koja ima raspodjelu vjerojatnosti $p(x)$ definira se **funkcija raspodjele** $F(x)$ relacijom:

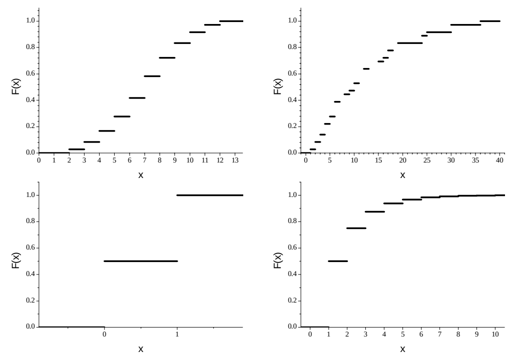
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} p(y)$$

$F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$

Za bilo koja dva broja a i b ($a \le b$) vrijedi

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-),$$

gdje "a-" predstavlja najveću vrijednost varijable X koja je strogo manja od a.



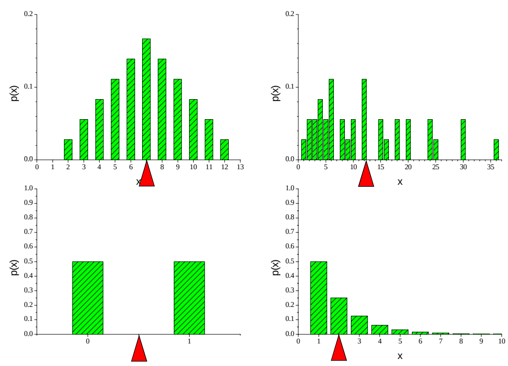
Očekivana vrijednost diskretne slučajne varijable

Def.:

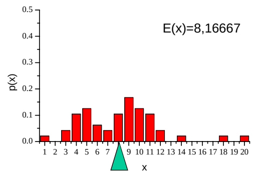
Neka je X diskretna slučajna varijabla sa skupom mogućih vrijednosti D i neka je $p(x)$ njezina raspodjela vjerojatnosti. Tada je **srednja vrijednost** ili **očekivanje** varijable X dano s

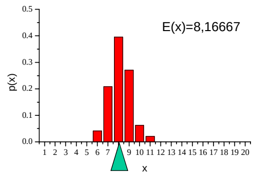
$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$



Varijanca diskretne slučajne varijable





Def.:

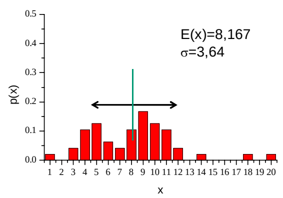
Neka je X diskretna slučajna varijabla i neka je $p(x)$ njezina raspodjela vjerojatnosti. Tada je **varijanca** varijable X dana s očekivanjem kvadrata odstupanja od μ.

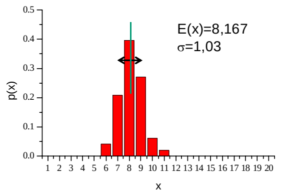
$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in D} (x - \mu_X)^2 p(x) = E[(X - \mu_X)^2]$$

Veličinu $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ nazivamo **standardnim odstupanjem** ili **standardnom devijacijom** slučajne varijable X.

Važno svojstvo varijance koje često olakšava račune je:

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \sum_{x \in D} x^2 p(x) - \mu_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$





Očekivanje funkcije slučajne varijable

Ako je $g(X)$ neka funkcija slučajne varijable X onda je njezino očekivanje

$$E(g(X)) = \sum_{x \in D} g(x) p(x) \quad .$$

Poseban slučaj je linearna funkcija:

$$\boxed{\begin{aligned} &E(aX + b) = aE(X) + b \\ &E(aX) = aE(X) \\ &E(X + b) = E(X) + b \end{aligned}}$$

Samo za linearnu funkciju vrijedi da je očekivanje funkcije jednako funkciji očekivanja!

Varijanca funkcije slučajne varijable

Def: $$V(g(X)) = \sum_{x \in D} (g(x) - E(g(X)))^2 p(x)$$

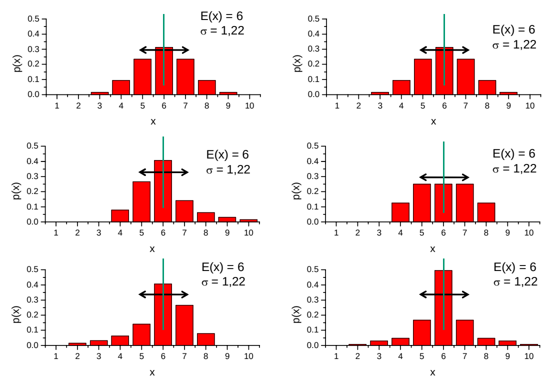
Svojstvo: $$V(g(X)) = E\left(g^2(X)\right) - \left(E\left(g(X)\right)\right)^2$$

Poseban slučaj:
linearna funkcija $g(X) = aX + b$

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

$$\boxed{\sigma_{aX+b} = a \cdot \sigma_X}$$

Momenti višeg reda



Def:

Središnji (centralni) moment *r*-tog reda jest

$$M_r = \sum_{x \in D} (x-\mu)^r \, p(x)$$

Def:

Pomoćni (ishodišni) moment *r*-tog reda jest

$$m_r = \sum_{x \in D} x^r \, p(x)$$

$M_0 = m_0 = 1$

$M_1 = 0$ $\qquad m_1 = E(X) = \mu$

$M_2 = V(X) = \sigma^2$

$$M_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\boxed{M_r = \sum_k (-1)^k \binom{r}{k} m_{r-k} m_1^k}$$

Moment trećeg reda

koeficijent asimetrije

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$\alpha_3 = 0$ simetrična raspodjela

$\alpha_3 > 0$ nagnuta udesno

$\alpha_3 < 0$ nagnuta ulijevo.

Moment četvrtog reda

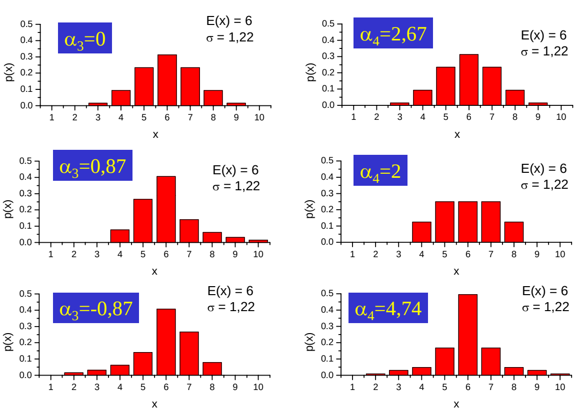
koeficijent spljoštenosti

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

$\alpha_4 = 3$ normalno spljoštena raspodjela

$\alpha_4 > 3$ šiljata raspodjela

$\alpha_4 < 3$ široka raspodjela



Funkcija izvodnica (generatrisa) diskretne s.v.

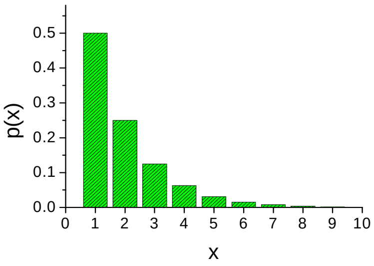
Def: $\quad g(t) = \sum_{x \in D} e^{t \cdot x} p(x)$

Svojstva:

$$g'(t)\big|_{t=0} = \sum_{x \in D} x \cdot p(x) = m_1$$

$$g''(t)\big|_{t=0} = \sum_{x \in D} x^2 \cdot p(x) = m_2$$

$$g^{(r)}(t)\big|_{t=0} = m_r$$



Binomna raspodjela

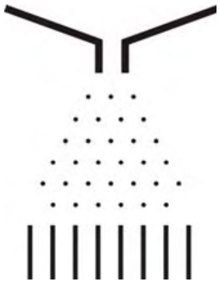
Bernoullijev pokus

Def.:

Binomni pokus (eksperiment) je pokus koji zadovoljava uvjete:

1. Sastoji se od n pokušaja, a n je određen prije početka pokusa.
2. Pokušaji su međusobno identični Bernoullijevi pokusi s mogućim ishodima '*uspjeh*' (A) i '*neuspjeh*' ($\overline{A}$).
3. Pokušaji su nezavisni. Ishod bilo kojeg pokušaja ne utječe na ishod drugog.
4. Vjerojatnost '*uspjeha*' jednaka je za sve pokušaje i označavamo ju s p.

Galtonova daska (F. Galton)



http://atsosxdev.doit.wisc.edu/~blongoria/gasp/galton_board/

Def:

Ako imamo binomni eksperiment koji se sastoji od n pokušaja, onda slučajnu varijablu X definiranu kao

X = broj uspjeha u n pokušaja

nazivamo **binomna slučajna varijabla** i označavamo je

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

Binomna raspodjela vjerojatnosti

Ako imamo binomni eksperiment i binomnu slučajnu varijablu $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, njezinu raspodjelu vjerojatnosti $p(x)$ nazivamo **binomna raspodjela** i označavamo ju s

$b(x;n,p)$