7. Kombinacije s ponavljanjem

Imamo skup od n različitih elemenata i neki broj k. Svaka neuređena k-torka elemenata iz skupa u kojoj se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u k-torci nije bitan) zove se **kombinacija s ponavljanjem** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda od n elemenata je

$$\overline{K}_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k} = K_{n+k-1}^{(k)}$$

[1,1,1]	[1,2,2]	[1,3,4]	[2,2,4]	[3,3,3]
[1,1,2]	[1,2,3]	[1,4,4]	[2,3,3]	[3,3,4]
[1,1,3]	[1,2,4]	[2,2,2]	[2,3,4]	[3,4,4]
[1,1,4]	[1,3,3]	[2,2,3]	[2,4,4]	[4,4,4]

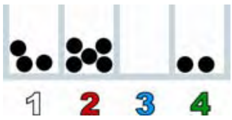
$\updownarrow$

{1,2,3}	{1,3,4}	{1,4,6}	{2,3,6}	{3,4,5}
{1,2,4}	{1,3,5}	{1,5,6}	{2,4,5}	{3,4,6}
{1,2,5}	{1,3,6}	{2,3,4}	{2,4,6}	{3,5,6}
{1,2,6}	{1,4,5}	{2,3,5}	{2,5,6}	{4,5,6}

Pokazali smo da postoji bijekcija između skupa svih kombinacija s ponavljanjem 3. razreda od 4 elementa i kombinacija bez ponavljanja 3. razreda od 6 elemenata.

$$\overline{K}_4^3 = K_6^3$$

Općenito: $\overline{K}_n^k = K_{n+k-1}^k$



$$\overline{P}_{13}^{10,3} = \frac{13!}{10!\cdot 3!}$$

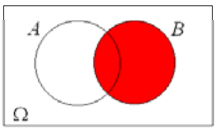
$$\overline{K}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \overline{P}_{n+k-1}^{k,n-1}$$

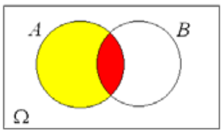
primjeri

Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost događaja B ako se je dogodio A :

$$P(B|A)$$





$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Potpun sistem događaja

Neka za događaje A_i, (i=1,2,...) vrijedi

$A_i \neq \emptyset \quad , \quad \forall i$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad , \quad \forall i,j \quad i \neq j$ (međusobno se isključuju)

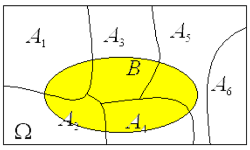
$\bigcup_{\text{svi } i} A_i = \Omega$ (prekrivaju cijeli prostor).

Tada kažemo da skupovi A_i čine **potpun sistem događaja**.

Zakon totalne vjerojatnosti

Neka A_i čine potpun sistem događaja.
Tada za bilo koji događaj B vrijedi

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$



Bayesov teorem

Neka A_i čine potpun sistem događaja. Neka je B neki događaj. Tada vrijedi

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Nezavisnost

Def:

Događaji A i B su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A|B) = P(A)$$

onda vrijedi i $P(B|A) = P(B)$

Propozicija:

Događaji A i B su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

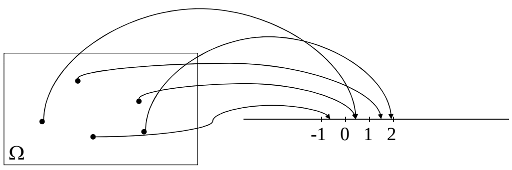
OPREZ! Događaji koji se međusobno isključuju nisu nezavisni

Slučajna varijabla

Def.:

Za dani prostor događaja Ω nekog pokusa, **slučajna varijabla** jest bilo koje pravilo kojim svakom ishodu pokusa pridružujemo neki broj.

$$X: \Omega \rightarrow \Re$$
$$X: s \in \Omega \mapsto x \in \Re$$



Označimo s D skup svih mogućih vrijednosti slučajne varijable X.
$D \subseteq \Re$.

Def:

Događaj koji ima samo dva moguća ishoda zove se **Bernoullijev događaj**, a slučajna varijabla koja ga opisuje zove se **Bernoullijeva slučajna varijabla**.

Def.:

Diskretna slučajna varijabla je ona s.v. za koju je skup mogućih vrijednosti konačan ili prebrojiv.
Kontinuirana slučajna varijabla je ona s.v. za koju je skup mogućih vrijednosti cijeli interval na brojevnom pravcu

Diskretna slučajna varijabla i raspodjela vjerojatnosti

Raspodjela vjerojatnosti

Def:

Raspodjela vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X definirana je za svaki broj $x \in D$ relacijom:

$$p(x) = P(X=x) = P(\text{svi ishodi } s \in \Omega : X(s) = x)$$

tablično ili funkcionalno

$$\boxed{\sum_{x \in D} p(x) = 1}$$

histogrami