Propagacija pogreške

I. Posredna veličina je linearna kombinacija izravno mjerenih veličina

$$h(X,Y) = aX + bY$$

$$\bar{h}(X,Y) = a\bar{x} + b\bar{y} \qquad M_h = \sqrt{a^2 M_X^2 + b^2 M_Y^2}$$

II. Posredna veličina je nelinearna funkcija jedne mjerene veličine $h(X)$

$$\bar{h}(X) \approx h(\bar{x}) \qquad M_h = \left|\frac{dh}{dx}\right|_{x=\mu} \cdot M_X$$

IIa. Posredna veličina je potencija jedne mjerene veličine $h(X) = X^{\alpha}$

$$\Rightarrow \quad M_h = \alpha\, \bar{x}^{\alpha-1} \cdot M_X$$

relativna pogreška: $\dfrac{M_h}{\bar{h}} = \alpha \cdot \dfrac{M_X}{\bar{x}}$

III. Najopćenitiji slučaj: Posredna veličina je nelinearna funkcija dviju ili više mjerenih veličina $h(X,Y)$

Pokazuje se da malena pogreška propagira na sljedeći način:

$$\boxed{M_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \cdot M_X^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial Y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \cdot M_Y^2}$$

Općenito za n izravno mjerenih veličina imamo: $h(X_1, X_2, ..., X_n)$

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{h}(X_1, X_2, ..., X_n) = h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \\ M_h = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial X_i}\right)^2_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n} M_{X_i}^2}\end{gathered}}$$

Primjer: volumen bakrene žice

Mjerimo promjer d i duljinu L: $V = \dfrac{\pi}{4} d^2 L$

Izmjerene su sljedeće vrijednosti:

$$d = (1{,}01 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$$
$$L = (1200 \pm 1)\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{V = (0{,}96 \pm 0{,}02) \cdot \mathrm{dm}^3}$$

Mjerenja različitih statističkih težina

Fizikalnu veličinu mjerimo u više navrata (na više načina).
Dobivamo različite rezultate.
Zanima nas koja je prava, ili barem najvjerojatnija, vrijednost te fizikalne veličine.
Mjerenja se obično izvode na različite načine i s različitim pouzdanostima pa ih ne smijemo tretirati ravnopravno.
Kažemo da mjerenja imaju *različite statističke težine*.

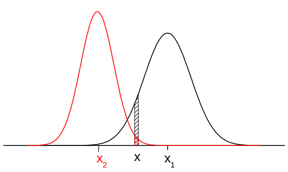
Jedna takva serija mjerenja daje rezultat u obliku

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm M_1$$

gdje M_1 predstavlja interval 68% pouzdanosti za nalaženje prave vrijednosti x_p.

Učinimo li još jednu seriju mjerenja, njezin rezultat imat će oblik:

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm M_2$$



Opća srednja vrijednost

Ako istu veličinu x mjerimo u raznim prigodama dobivamo različite rezultate s različitim pouzdanostima.

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm M_1$$
$$x_2 = \bar{x}_2 \pm M_2$$
$$\vdots$$
$$x_k = \bar{x}_k \pm M_k$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti za x_p:

$$f(x_p; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) = \frac{1}{M_1 M_2 \cdots M_k \left(\sqrt{2\pi}\right)^k} e^{-\sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{x}_i - x_p)^2}{2M_i^2}}$$

Tražimo onaj x_p za koji je ova f maksimalna.

Najvjerojatnija vrijednost je:

$$\boxed{x_p^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{x}_i}{M_i^2}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{M_j^2}}}$$

Definiramo **statističku težinu:**

$$w_i = \frac{\frac{1}{M_i^2}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{M_j^2}}$$

$$\boxed{x_p^* = \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{x}_i}$$

<u>Nepouzdanost opće srednje vrijednosti</u>

Procjenjitelj prave vrijednosti mjerene veličine jest linearna kombinacija prosjeka iz k mjerenja:

$$X_p^* = \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{X}_i$$

Varijancu linearne kombinacije znademo izračunati:

$$M^2 = V\left(X_p^*\right) = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 V\left(\bar{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 M_i^2$$

<u>nepouzdanost opće srednje vrijednosti:</u>

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{M_i^2}}}$$

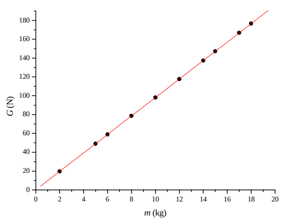
To je bilo za konzistentna mjerenja!

Ako mjerenja nisu konzistentna, uzimamo srednje vrijednosti svake serije i tretiramo ih kao pojedinačna mjerenja.

Linearna regresija

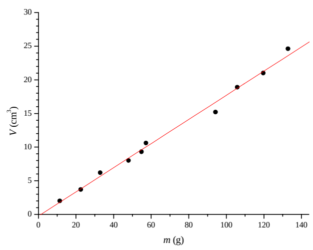
Deterministički povezane varijable:

Masa i težina predmeta na površini Zemlje:



Nedeterministički povezane varijable:

Masa i volumen kamena na plaži:



Nedeterministički:

Nezavisna varijabla X , vrijednosti x_i

Za određeni x_i, **zavisna varijabla** Y_i je slučajna varijabla.

Poprima vrijednost y_i

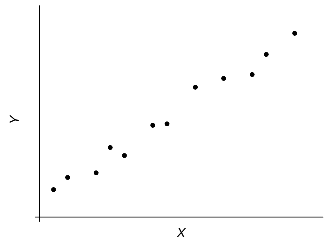
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - vrijednosti nezavisne varijable

Y_i slučajna varijabla pridružena x_i-u.

y_i opažena vrijednost pridružena x_i-u.

n opaženih parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

→ graf



linearno?

a=?

b=?

tražimo najvjerojatnije!

Određivanje koeficijenata metodom najmanjih kvadrata

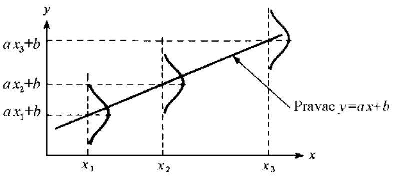
Pretpostavka:

Postoje parametri a i b takvi da za svaku vrijednost x_i nezavisne varijable X, zavisnu varijablu Y_i možemo pisati:

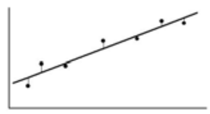
$$Y_i = ax_i + b + \hat{\varepsilon}$$

gdje je $\hat{\varepsilon}$ normalna slučajna varijabla s očekivanjem $E(\hat{\varepsilon}) = 0$ i varijancom $V(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2$.

σ^2 je jednaka za sve vrijednosti x.



Za izmjerene (opažene) parove vrijedi:



$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

Princip najmanjih kvadrata:

Od svih pravaca $y = ax + b$, najvjerojatniji pravac regresije jest onaj za koji je suma kvadrata odstupanja

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

minimalna.

normalne jednadžbe

Suma kvadrata odstupanja je minimalna kada istodobno vrijedi:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0$$

rješenje:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$N_z = n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad a = \frac{n}{N_z}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Napomene:

- Prije računanja pravca regresije treba u grafu provjeriti ima li smisla linearna regresija i jesu li podaci podjednako raspršeni.
- Rezultate sumiranja ne smije se zaokruživati jer pogreška zaokruživanja bitno utječe na razliku velikih sličnih brojeva.

Tražimo nepouzdanosti parametara *a* i *b*

$$V(\hat{a}) = \frac{n^2}{N_z^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 V(Y_i)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{n^2}{N_z^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sigma^2 = n\frac{\sigma^2}{N_z}$$

Nepristrani procjenjitelj za σ^2 dan je izrazom:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{n-2}$$

Konačni rezultati:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)}\left[\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} - a^2\right]} \qquad M_b = M_a\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$$