R2. Obrada rezultata mjerenja

1. Pogreške

Zadatak nekoga fizikalnog mjerenja jest utvrditi brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine. Međutim, budući da je svako mjerenje podložno mnogobrojnim, često nekontroliranim vanjskim utjecajima, a k tomu je i oštrina ljudskog razlučivanja kao i razlučivanja mjernih instrumenata ograničena, pojedinačni se rezultati mjerenja neće potpuno podudarati. Ipak, zamišljamo da postoji neka prava vrijednost X^* dotične fizikalne veličine. Tada rezultat pojedinog mjerenja x odstupa od prave vrijednosti X^* te veličine, a odstupanje

$$\Delta X^* = x - X^* \tag{1}$$

naziva se **pravom pogreškom** dotičnog mjerenja. Cilj uzastopnih mjerenja i računa pogrešaka jest što pouzdanije odrediti pravu vrijednost fizikalne veličine, odnosno dati granice pogreške unutar kojih se najvjerojatnije nalazi prava vrijednost. Svako iskazivanje rezultata mjerenja koje uz rezultat ne daje i podatak o njegovoj točnosti, bezvrijedno je.

Razlikujemo tri vrste pogrešaka:

Sistematske pogreške uzrokovane su sistemom mjerenja. One su ponovljive i prilikom ponavljanja mjerenja javljaju se u istom smjeru i iznosu. Primjeri su takvih pogrešaka pogrešno baždarene skale, pomaknuti nulti položaji instrumenata ili promjene duljine skale zbog temperature okoliša. Ove vrste pogrešaka mogu se otkloniti ili smanjiti provjerom i poboljšanjem aparature. Ako smo svjesni mogućnosti nastanka sistematske pogreške u nekome mjerenju, često je moguće osmisliti eksperiment tako da se takve pogreške ponište. Npr., ako sumnjamo u ispravnost nultog položaja instrumenta, mjerit ćemo traženu veličinu jednako puta s obiju strana nultog položaja.

Grube pogreške mogu nastati naglim poremećajem u okolini ili u mjernom uređaju, a mogu nastati i ljudskim propustom, npr. netočnim očitavanjem mjerne skale ili pogrešno upisanim iznosom mjerne veličine.

Slučajne pogreške mogu se smanjivati, ali se ne daju potpuno izbjeći. Njihov je uzrok u nestalnosti okoline i mjernog uređaja. Boljom izolacijom od okoline i savršenijim uređajem mogu se smanjivati slučajne pogreške do granica tehnoloških mogućnosti. Bez obzira na to radimo li manje ili više savršenim uređajem i njegovim okružjem, moramo razmatrati slučajne pogreške koje su preostale. One se unutar jedne mjerne serije razlikuju po smjeru i iznosu. Ponavljanjem mjerenja one se mogu matematički obraditi i odrediti tražene granice unutar kojih najvjerojatnije počiva prava vrijednost dotične fizikalne veličine.

2. Osnovne veličine računa pogrešaka:

2.1. Neovisna mjerenja

Pretpostavimo da nam mjerenje sadrži samo slučajne pogreške. Definirajmo nekoliko veličina u računu pogrešaka:

Srednja vrijednost $\bar{x}$

Izvedemo li niz mjerenja neke veličine, dobit ćemo za tu veličinu različite vrijednosti zbog neizbježnih pogrešaka mjerenja. Obilježimo n pojedinačnih mjerenja s $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Iz tog niza mjerenja izračunava se aritmetička sredina, tj. srednja vrijednost

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \tag{2}$$

koju uzimamo kao najvjerojatniji iskaz nepoznate prave vrijednosti X^*.

Srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja m (nepreciznost uređaja)

Srednja pogreška pojedinog mjerenja jest mjera odstupanja pojedinih vrijednosti x_i od srednje vrijednosti $\overline{x}$ **:**

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \ . \tag{3}$$

Očito je da za dovoljno velik broj mjerenja (obično $n \approx 10$) veličina m poprima ustaljenu vrijednost, tj. ne mijenja se znatno ako dodatno povećavamo broj mjerenja. Ona iskazuje prosječno rasipanje rezultata mjerenja, što je posljedica nesavršene preciznosti uređaja.

Srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine M_n (nepouzdanost)

Ako izvedemo veći broj mjerenja, možemo očekivati da će mjerena fizikalna veličina biti pouzdanije određena. Mjera za nepouzdanost je srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine M_n, koja je za faktor $1/\sqrt{n}$ manja od srednje pogreške pojedinog mjerenja, (nepreciznosti uređaja):

$$M_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \ . \tag{4}$$

Vjerojatnost da se prava vrijednost mjerene veličine nalazi u intervalu $\overline{x} - M_n \le X^* \le \overline{x} + M_n$ iznosi 68,3%, a vjerojatnost da se ona nalazi u intervalu $\overline{x} - 3M_n \le X^* \le \overline{x} + 3M_n$ iznosi 99,9%.

Nepouzdanost M_n ovisi o broju mjerenja pa stoga treba indeksom n naznačiti na koji se broj mjerenja navedena vrijednost odnosi. Većim brojem mjerenja možemo znatno smanjiti M_n, no budući da funkcija $\sqrt{n}$ raste sporije od linearne funkcije n, moramo se mjereći neku fizikalnu veličinu odlučiti za povoljan odnos nepouzdanosti mjerenja (želimo što manji iznos) i broja ponavljanja mjerenja (što uključuje i trajanje mjerenja).

Relativna nepouzdanost definirana je omjerom nepouzdanosti i srednje vrijednosti:

$$R_M = \frac{M_n}{\overline{x}} \cdot 100\% \tag{5}$$

Maksimalna apsolutna pogreška jest najveće odstupanje pojedinačnog mjerenja od srednje vrijednosti (2):

$$\Delta x = \left|\overline{x} - x_i\right|_{\max} \tag{6}$$

Često u nekom nizu mjerenja sve očitane vrijednosti imaju isti iznos. To se primjerice događa ako običnim metrom koji ima milimetarsku podjelu mjerimo geometrijski pravilan predmet. U takvim je slučajevima izračunana srednja kvadratna pogreška M_n jednaka nuli, što ne znači da je predmet izmjeren apsolutnom preciznošću. Tada procjenjujemo maksimalnu pogrešku koju također označavamo s Δx i s njom dalje računamo kao da se radi o maksimalnoj apsolutnoj pogrešci iz jednadžbe (6).

Rezultat mjerenja piše se u obliku

$$x = (\overline{x} \pm M_n) \quad ; \quad R = \frac{M_n}{x} \cdot 100\% \ , \tag{7}$$

ili, ako ne poznajemo M_n, u obliku

$$x = (\overline{x} \pm \Delta x) \quad ; \quad R = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% \ . \tag{8}$$

Primjer: Dužina l izmjerena je deset puta. Mjerenja su prikazana tablicom:

i	l_i [mm]	$(l_i - \bar{l})$ [mm]	$(l_i - \bar{l})^2$ [mm^2]
1	17,5	-0,48	0,2304
2	18,2	0,22	0,0484
3	17,5	-0,48	0,2304
4	18,6	0,62	0,3844
5	18,6	0,62	0,3844
6	18,7	0,72	0,5184
7	17,4	-0,58	0,3364
8	18,2	0,22	0,0484
9	17,3	-0,68	0,4624
10	17,8	-0,18	0,0324
$\sum$	179,8	0	2,6760

Srednja vrijednost jest:

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \qquad ; \qquad \bar{l} = \frac{179{,}8 \text{ mm}}{10} = 17{,}98 \text{ mm} \ . \tag{9}$$

Srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja (nepreciznost uređaja):

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2{,}676}{9}} = 0.545 \approx 0.5 \text{ mm} \ . \tag{10}$$

Srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine (nepouzdanost):

$$M_{10} = \frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{0{,}545}{\sqrt{10}} = 0{,}172 \approx 0{,}2 \text{ mm} \ . \tag{11}$$

Rezultat mjerenja iskazujemo (pišemo) na slijedeći način:

$$\boxed{l = (18{,}0 \pm 0{,}2) \text{ mm}} \tag{12}$$

Izračunata srednja vrijednost zaokružena je na temelju izračunate nepouzdanosti tako da uz pouzdane znamenke pišemo i prvu nepouzdanu, tj. onu koja je na istome decimalnome mjestu kao i prva značajna (različita od nule) znamenka pogreške. Pogreška se uvijek piše zaokružena na prvu značajnu znamenku. Besmisleno je pisanje daljnjih znamenaka.

Relativna nepouzdanost mjerenja jest:

$$R_l = \frac{0{,}2}{18{,}0} \cdot 100\% = 1{,}1\% \ . \tag{13}$$

2.2. Ovisna mjerenja

U pravilu je tražena veličina F u nekom eksperimentu funkcija više neposredno izmjerenih veličina x_i ($F=f(x_1,...,x_i,...x_n)$), od kojih je svaka opterećena nekom pogreškom M_i ili Δx_i .

Najvjerojatnija vrijednost fizikalne veličine F je srednja vrijednost:

$$\overline{F} = f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i, ..., \bar{x}_n) \ . \tag{14}$$

Za određivanje pogreške veličine F moramo uzeti u obzir pogreške svih veličina x_i. U najnepovoljnijem slučaju da sve pogreške djeluju u istom smjeru, **maksimalna apsolutna pogreška** bit će dana relacijom:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta \bar{x}_i \right| \quad . \tag{15}$$

Isti izraz rabimo ako su nam dostupne samo procjene pogrešaka Δx_i .

Uzmemo li u obzir da postoji vjerojatnost djelomičnog poništenja pogrešaka, Gaussova teorija za **srednju kvadratnu pogrešku** veličine F daje nam:

$$M_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} M_i \right)^2} \quad . \tag{16}$$

Rezultat pišemo u obliku:

$$F = (\bar{F} \pm M_F) \tag{17}$$

ili

$$F = (\bar{F} \pm \Delta F) \ . \tag{18}$$

Primjer:
Ubrzanje sile teže g potrebno je odrediti mjerenjem duljine niti l i perioda njihanja T matematičkog njihala, prema relaciji

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad . \tag{19}$$

Veličine $l = (0{,}850 \pm 0{,}002)$ m i $T = (1{,}849 \pm 0{,}003)$ s izmjerene su neovisno. Izravnim uvrštavanjem aritmetičkih sredina u (19) dobivamo vrijednost za

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2} = 9{,}815 \ \text{ms}^{-2}, \tag{20}$$

a nepouzdanost M_g određuje se prema:

$$\begin{aligned} M_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} M_l \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} M_T \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} M_l \right)^2 + \left(2 \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3} M_T \right)^2} \\ &= 0{,}039 \ \text{ms}^{-2} \approx 0{,}04 \ \text{ms}^{-2} \quad . \end{aligned} \tag{21}$$

Rezultat mjerenja pišemo u obliku:

$$g = (9{,}82 \pm 0{,}04) \ \text{ms}^{-2} \ , \tag{22}$$

Zaokruživanje srednje vrijednosti i pogreške provedeno je u skladu s prije navedenim pravilom.
Relativna nepouzdanost mjerenja jest:

$$R_l = \frac{0{,}04}{9{,}82} \cdot 100\% = 0{,}4\% \ . \tag{23}$$

2.3. Opća srednja vrijednost i nepouzdanost

Pretpostavimo da je napravljeno nekoliko nizova mjerenja iste fizikalne veličine i neka je rezultat mjerenja svakog pojedinog niza dan s:

$x_1 = (\bar{x}_1 \pm M_1)$, $x_2 = (\bar{x}_2 \pm M_2)$,..., $x_i = (\bar{x}_i \pm M_i)$,...

Ako su razlike $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ za svaki par mjerenja usporedive s bilo kojim M_k , kažemo da su mjerenja konzistentna.

Tada definiramo opću aritmetičku sredinu kao

$$\bar{x} = \frac{1}{M_1^{-2} + M_2^{-2} + \ldots + M_i^{-2} + \ldots}\left(\frac{\bar{x}_1}{M_1^2} + \frac{\bar{x}_2}{M_2^2} + \ldots. + \frac{\bar{x}_i}{M_i^2} + \ldots.\right), \quad (24)$$

a nepouzdanost kao

$$M = \frac{1}{\sqrt{M_1^{-2} + M_2^{-2} + \ldots + M_i^{-2} + \ldots}} \quad . \quad (25)$$

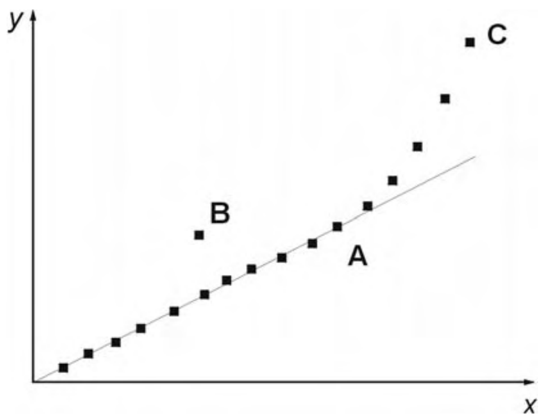
Poseban slučaj konzistentnog mjerenja jest kad postoji neki M_k koji je mnogo manji od svih ostalih M_i, tj. jedno je mjerenje provedeno mnogo preciznije od svih ostalih. Tada vrijedi $M \approx M_k$, a rezultat pišemo u obliku

$$x = \left(\bar{x} \pm M_k\right) \quad . \quad (26)$$

Nekonzistentnim mjerenjima nazivamo ona za koja vrijedi $\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right| >>$ (od bilo kojeg) M_k. Tada zanemarujemo pojedinačne nepouzdanosti M_k, a veličine $\bar{x}_k$ smatramo neovisnim mjerenjima te primjenjujemo izraze (2)-(8) za određivanje fizikalne veličine.

3. Grafičko prikazivanje rezultata mjerenja

Grafičko prikazivanje vrlo je važan način prikazivanja rezultata mjerenja. Iz grafa se zorno vidi kako jedna fizikalna veličina ovisi o drugoj ili više veličina. Pretpostavimo da smo mjerenjem fizikalnih veličina x i y dobili niz parova točaka (x_i, y_i). Iz grafičkog prikaza ovih točaka možemo donijeti niz zaključaka o odnosu veličina x i y. Uobičajeno je da se kao x odabire veličina koju preciznije mjerimo, odnosno veličina koju mjerimo neovisno, te da se nanosi na apscisu.
Poslužimo se primjerom prikazanim na slici 1. Već letimičnim pogledom na graf možemo pretpostaviti neka svojstva ovisnosti izmjerenih veličina $y=f(x)$:



Slika 1. Grafičko prikazivanje rezultata

1) Linearnost u području od ishodišta do točke A. Uočavamo izravnu proporcionalnost veličina x i y.
2) Nelinearnost od točke A do točke C. Ovakva promjena ponašanja ovisnosti $y=f(x)$ često upućuje na nastupanje različite fizikalne pojave od one koja postoji od ishodišta do točke A.
3) Rasipanje točaka od zamišljenog pravca u linearnom dijelu daje uvid u veličinu slučajnih pogrešaka prilikom mjerenja. Kasnije ćemo pokazati kako izračunavamo taj pravac.
4) "Sumnjiva" točka B odstupa od pravca mnogo više od svih ostalih vrijednosti. Ona je najvjerojatnije posljedica grube pogreške u mjerenju pa se ne uzima u obzir prilikom izračunavanja pravca. Ako se sumnjiva točka nađe na kraju grafa, ne smije se zanemariti jer ona može upućivati na novu fizikalnu pojavu (npr. točka C).

Prednost grafičkog prikazivanja očituje se i u tome što se interpolacijom ili ekstrapolacijom mogu dobiti vrijednosti veličine y i za one vrijednosti x koje nisu izmjerene. Međutim, dok interpolacija (točka između dviju mjerenih točaka) u pravilu daje ispravne vrijednosti, kod ekstrapolacije (protezanje grafa izvan područja mjerenih točaka) valja biti oprezan jer uvijek postoji mogućnost da promatrana fizikalna pojava počinje odstupati od uočenog ponašanja.
Vrlo je važan pravilan odabir mjerila na koordinatnim osima grafa. Mjerilo odabiremo tako da imamo što veći raspon između najmanje i najveće mjerene vrijednosti, a skala mora biti takva da jediničnoj mjeri mjerene veličine odgovara višekratnik brojeva 1, 2 ili 5 milimetara na grafu. Preporučljivo je izbjegavati odnose kao npr. $1\mathrm{N} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}34\ \mathrm{mm}$.

3.1 Analiza linearnoga grafa

Ako je iz grafa očito da postoji linearna ovisnost $y=ax+b$, obično nas zanimaju parametri a i b. Za određivanje tih parametara moguće je primijeniti grafički postupak ili metodu najmanjih kvadrata.

Grafički postupak: prozirnim ravnalom povučemo od oka pravac koji najbolje prolazi kroz mjerene točke. Odredimo nagib tog pravca a i odsječak na ordinati b. Zatim povučemo ispod i iznad tog pravca još dva pravca koji su u “razumnu” slaganju s mjerenim točkama. Na taj način procijenimo pogrešku parametara a i b. Takav je postupak podložan subjektivnoj procjeni pa je uvijek poželjno primijeniti strožu matematičku metodu. ***Ovaj postupak neće se priznavati u praktikumu. On služi samo za provjeru jesu li rezultati u razumnom rasponu!***

Linearna regresija metodom najmanjih kvadrata: Za n parova točaka (x_i,y_i) koeficijenti a i b određeni su formulama

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{27}$$

i

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad , \tag{28}$$

a njihove nepouzdanosti jesu:

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} - a^2\right]} \tag{29}$$

i

$$M_b = M_a \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2} \ . \tag{30}$$

3.2. Nelinearni zakoni

Nakon što se mjerene točke unesu u graf, lako se uočava linearna ovisnost ako takva postoji. Međutim, ako opazimo da veličina y nema linearnu ovisnost o x, moramo pokušati odrediti o kakvoj je nelinearnoj ovisnosti riječ.

Ako na osnovi poznavanja sličnih fizikalnih zakona očekujemo neku određenu nelinearnu ovisnost, onda uvođenjem pomoćnih varijabli pokušamo mjerenu fizikalnu veličinu prikazati u linearnom grafu. Ako npr. očekujemo da veličina y ima kvadratnu ovisnost o x ($y \propto x^2$), onda tu pretpostavku možemo provjeriti tako da na apscisu nanosimo varijablu $t=x^2$ kako bismo u grafičkom prikazu dobili pravac. Nakon što su točke unesene u graf, lako se uočava leže li one doista na pravcu ili ne. Sličn možemo provjeriti i za druge potencije.

U slučaju kada nam potencija nije poznata, a ne želimo nasumce isprobavati razne supstitucijske varijable, možemo iskoristiti pravilo logaritmiranja:

Logaritamsko-logaritamski grafovi

Ako je funkcionalna ovisnost oblika $y=ax^b$, logaritmiranjem dobivamo linearnu ovisnost između $\log x$ i $\log y$:

$$\log y = \log a + b \log x \quad . \tag{31}$$

Prikazivanje u log-log grafu posebno je korisno kada nepoznati eksponent b nije cijeli broj pa ga supstitucijskom varijablom nije lako pogoditi. U log-log grafu, b jednostavno određujemo kao koeficijent nagiba pravca koristeći se prije opisanim grafičkim postupkom ili metodom najmanjih kvadrata.

Uz navedene nelinearne zakone u kojima fizikalnu veličinu potenciramo nekim brojem, javljaju se u fizici i bitno drukčiji nelinearni zakoni. Ako u log-log grafu ne dobijemo pravac, možemo provjeriti jednu drugu, također čestu, nelinearnu ovisnost u kojoj se veličina x javlja kao eksponent:

Logaritamsko-linearni grafovi

Ako je funkcionalna ovisnost oblika $y = ae^{bx}$, logaritmiranjem dobivamo linearni odnos varijabli x i $\log y$:

$$\log y = \log a + xb \log e \quad . \tag{32}$$

Ako sada na apscisi nanosimo varijablu x, a na ordinati varijablu $t = \log y$, nagib pravca dat će nam vrijednost za $b \log e$, a odsječak na ordinati daje $\log a$.