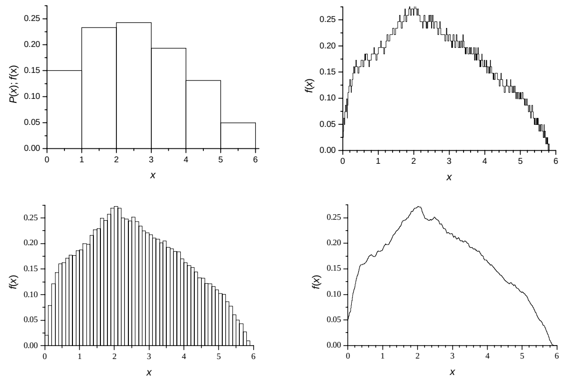
Kontinuirana raspodjela vjerojatnosti

Def:
Slučajna varijabla X je **kontinuirana** ako skup njezinih mogućih vrijednosti čini cijeli interval brojeva, t.j. ako je za neke A i B ($A<B$), svaki $x \in [A,B]$ moguć.

duljina, masa, vrijeme



Prijelaz s diskretne na kontinuiranu: $p(x) \rightarrow f(x)\cdot dx$ $\qquad \sum_{x\in D} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$

Funkcija gustoće vjerojatnosti

Def: Neka je X kontinuirana slučajna varijabla. **Raspodjela vjerojatnosti** ili **funkcija gustoće vjerojatnosti** varijable X je funkcija $f(x)$ takva da za bilo koja dva broja $a \leq b$ vrijedi

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \ .$$

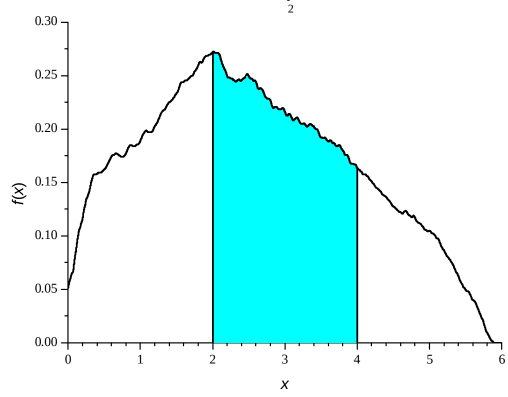
Riječima: Vjerojatnost da vrijednost varijable X bude u intervalu $[a,b]$ dana je površinom ispod funkcije gustoće vjerojatnosti u tom intervalu.

Uvjeti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$f(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 f(x)dx = 0.436$$



Funkcija raspodjele

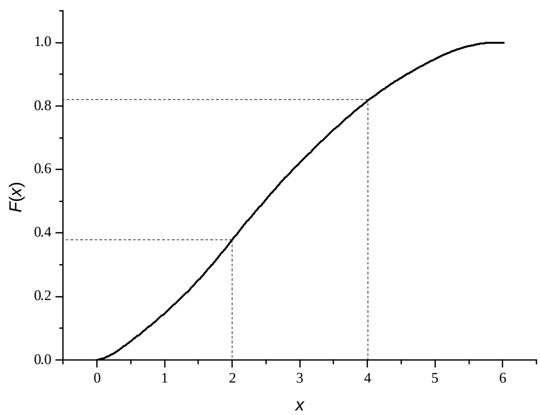
Def: **Funkcija raspodjele** $F(x)$ za kontinuiranu slučajnu varijablu X definirana je:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \ .$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ako poznajemo $F(x)$, onda lako određujemo:

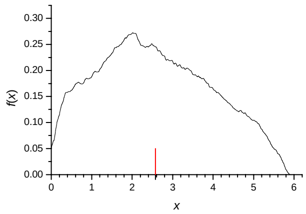
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



Očekivanje kontinuirane slučajne varijable

Def: Ako je X kontinuirana slučajna varijabla i $f(x)$ njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, onda je njezino **očekivanje**

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$



Varijanca kontinuirane slučajne varijable

Def: Ako je X kontinuirana slučajna varijabla, $f(x)$ njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, a μ njezino očekivanje, onda je njezina **varijanca** dana relacijom

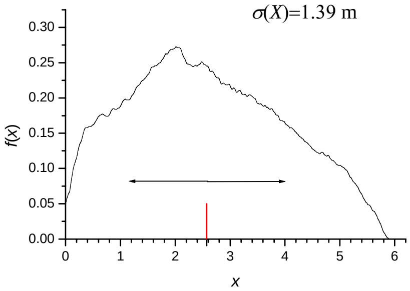
$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx = E\left((X-\mu)^2\right).$$

Standardna devijacija je $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

$V(X)$=1.94 m^2

$\sigma(X)$=1.39 m



Očekivanje funkcije kontinuirane slučajne varijable

Def:
Ako je X kontinuirana slučajna varijabla i $f(x)$ njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, a $h(X)$ bilo koja funkcija od X, onda je

$$E(h(X)) = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx$$

Za linearnu funkciju $h(X) = aX + b$ vrijedi

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Varijanca funkcije:

$$V(h(X)) = E\left[\left(h(X) - \mu_{h(X)}\right)^2\right] = E\left(h^2(X)\right) - \left(E(h(X))\right)^2$$

Linearna funkcija: $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Momenti:

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \qquad M_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

Normalna (Gaussova) raspodjela

Premda postoje mnoge druge raspodjele, normalna raspodjela objašnjava najveći broj statističkih opažanja.

Dva primjera:

•Raspodjela visina odraslih ljudi

•Rezultati mjerenja fizikalnih veličina

http://www.kleinbottle.com/gauss.htm

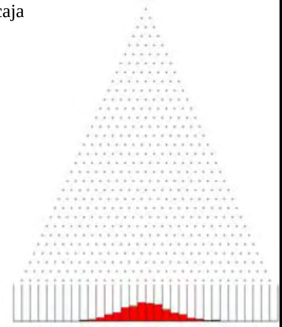
Raspodjela pogrešaka mjerenja:

•mnoštvo sitnih pogrešaka utječe na rezultat.

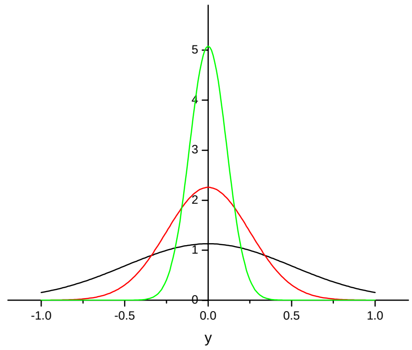
•Svaka pogreška= čavlić u Galtonovoj dasci

•konačna pogreška = zbroj svih tih utjecaja

Ako sitnih pogrešaka ima jako mnogo, Gaussova krivulja dobro opisuje raspodjelu.

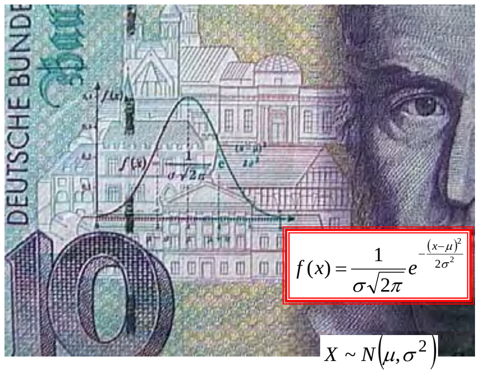


$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(2\sigma^2)} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_p)^2/(2\sigma^2)}$$



$$\mu = E(X) = x_p$$

$$V(X) = \sigma^2$$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$