Prošli put:

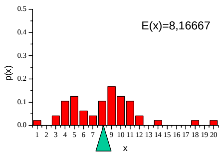
Diskretna slučajna varijabla

Raspodjela vjerojatnosti $p(x)$

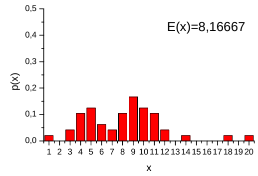
Totalna vjerojatnost $1 = \sum_{x \in D} p(x)$

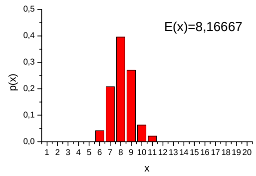
Očekivana vrijednost diskretne slučajne varijable

$$E(x) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$



Varijanca diskretne slučajne varijable





Def.:

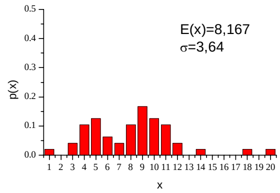
Neka je X diskretna slučajna varijabla i neka je $p(x)$ njezina raspodjela vjerojatnosti. Tada je **varijanca** varijable X dana s očekivanjem kvadrata odstupanja od μ.

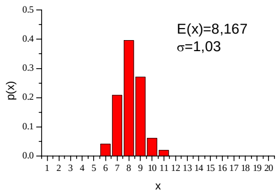
$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in D} (x - \mu_X)^2 p(x) = E[(X - \mu_X)^2]$$

Veličinu $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ nazivamo **standardnim odstupanjem** ili **standardnom devijacijom** slučajne varijable X.

Važno svojstvo varijance koje često olakšava račune je:

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \sum_{x \in D} x^2 p(x) - \mu_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$





Očekivanje funkcije slučajne varijable

Ako je $g(X)$ neka funkcija slučajne varijable X onda je njezino očekivanje

$$E(g(X)) = \sum_{x \in D} g(x) p(x) \quad .$$

Poseban slučaj je linearna funkcija:

$$\boxed{\begin{aligned} &E(aX + b) = aE(X) + b \\ &E(aX) = aE(X) \\ &E(X + b) = E(X) + b \end{aligned}}$$

Samo za linearnu funkciju vrijedi da je očekivanje funkcije jednako funkciji očekivanja!

Varijanca funkcije slučajne varijable

Def: $V(g(X)) = \sum_{x \in D} (g(x) - E(g(X)))^2 p(x)$

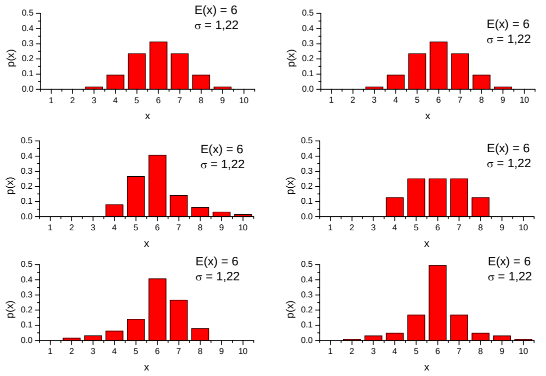
Svojstvo: $V(g(X)) = E(g^2(X)) - (E(g(X)))^2$

Poseban slučaj:
linearna funkcija $g(X) = aX + b$

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

$$\boxed{\sigma_{aX+b} = a \cdot \sigma_X}$$

Momenti višeg reda



Def:
Središnji (centralni) moment *r*-tog reda jest

$$M_r = \sum_{x \in D} (x-\mu)^r \, p(x)$$

Def:
Pomoćni (ishodišni) moment *r*-tog reda jest

$$m_r = \sum_{x \in D} x^r \, p(x)$$

$M_0 = m_0 = 1$

$M_1 = 0$ $\qquad m_1 = E(X) = \mu$

$M_2 = V(X) = \sigma^2$

$$M_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\boxed{M_r = \sum_k (-1)^k \binom{r}{k} m_{r-k} m_1^k}$$

Moment trećeg reda

koeficijent asimetrije

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

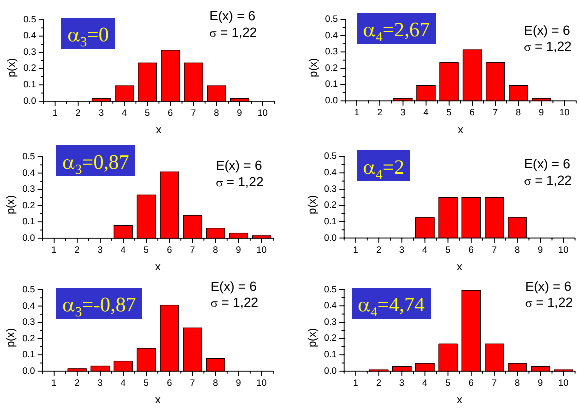
$\alpha_3 = 0$ simetrična raspodjela
$\alpha_3 > 0$ nagnuta udesno
$\alpha_3 < 0$ nagnuta ulijevo.

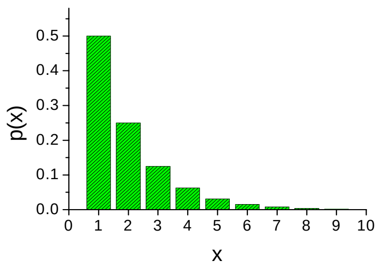
Moment četvrtog reda

koeficijent spljoštenosti

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

$\alpha_4 = 3$ normalno spljoštena raspodjela
$\alpha_4 > 3$ šiljata raspodjela
$\alpha_4 < 3$ široka raspodjela





Binomna raspodjela

Bernoullijev pokus

Def.:

Binomni pokus (eksperiment) je pokus koji zadovoljava uvjete:

1. Sastoji se od *n* pokušaja, a *n* je određen prije početka pokusa.
2. Pokušaji su međusobno identični Bernoullijevi pokusi s mogućim ishodima '*uspjeh*' (A) i '*neuspjeh*' ($\overline{A}$).
3. Pokušaji su nezavisni. Ishod bilo kojeg pokušaja ne utječe na ishod drugog.
4. Vjerojatnost '*uspjeha*' jednaka je za sve pokušaje i označavamo ju s *p*.

Galtonova daska (F. Galton)

http://atsosxdev.doit.wisc.edu/~blongoria/gasp/galton_board/

Def:

Ako imamo binomni eksperiment koji se sastoji od *n* pokušaja, onda slučajnu varijablu *X* definiranu kao

X = broj uspjeha u n pokušaja

nazivamo **binomna slučajna varijabla** i označavamo je

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

Binomna raspodjela vjerojatnosti

Ako imamo binomni eksperiment i binomnu slučajnu varijablu $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, njezinu raspodjelu vjerojatnosti $p(x)$ nazivamo **binomna raspodjela** i označavamo ju s

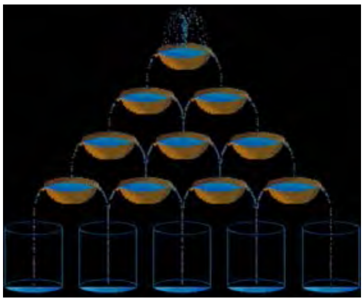
$$b(x;n,p)$$

slučajna varijabla x	putevi	vjerojatnost
0	LLLL	q^4
1	LLLD LLDL LDLL DLLL	$p \cdot q^3$
2	LLDD LDLD LDDL DLLD DLDL DDLL	$p^2 \cdot q^2$
3	LDDD DLDD DDLD DDDL	$p^3 \cdot q$
4	DDDD	p^4

$$b(x;n,p) = \left\{ \begin{matrix} \text{broj} \quad \text{ishoda} \\ \text{koji} \quad \text{imaju} \\ x \quad \text{uspjeha} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{vjerojatnost} \\ \text{svakog} \quad \text{takvog} \\ \text{ishoda} \end{matrix} \right\} = K_n^x p^x q^{n-x}$$

Binomna raspodjela vjerojatnosti je

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{za} \quad x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{in ace} \end{cases}$$



Funkcija raspodjele

$$F(x)=B(x;n,p)=\sum_{y=0}^{x} b(y;n,p)$$

Rekurzivna formula

$$b(x;n,p)=\frac{n-x+1}{x}\cdot\frac{p}{q}\cdot b(x-1;n,p)$$

Za koju vrijednost x_M slučajne varijable X je vjerojatnost najveća? Mora vrijediti:

$$b(x_M-1;n,p) \le b(x_M;n,p) \ge b(x_M+1;n,p)$$

$$np-q \le x_M \le np+p$$