Aksiomatsko zasnivanje teorije vjerojatnosti

A. N. Kolmogorov, 1933.

Poznajemo li prostor elementarnih događaja Ω za neki pokus, svrha teorije vjerojatnosti je da svakom događaju $A \subseteq \Omega$ pridruži broj $P(A)$ koji će biti precizna mjera šanse da se A ostvari.
Svako takvo pridruživanje mora zadovoljavati sljedeće aksiome:

A1. Za svaki događaj A vrijedi $P(A) \geq 0$

A2. $P(\Omega) = 1$

A3. a)Ako se konačan broj događaja $A_1, A_2,... A_n$ međusobno isključuje (tj. ako su u parovima disjunktni), vrijedi:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

b) Ako se prebrojivo beskonačan broj događaja $A_1, A_2,...$ međusobno isključuje, vrijedi:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Svojstva vjerojatnosti:

P1. $\forall A \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$

P2. Ako se A i B isključuju, onda je $P(A \cap B) = 0$.

P3. Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P3a. Vrijedi i za više događaja:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C)$$

Sustavno određivanje vjerojatnosti

Neka neki pokus ima velik broj mogućih ishoda (elementarnih događaja) E_i.
Želimo odrediti vjerojatnost nekog složenog događaja A.
Najprije odredimo vjerojatnosti svih elementarnih događaja E_i.

Mora vrijediti:

$$\forall E_i \quad \Rightarrow \quad P(E_i) \geq 0$$

$$\sum_{\text{svi } i} P(E_i) = 1 \; .$$

Vjerojatnost složenog događaja A dana je zbrajanjem

$$P(A) = \sum_{\text{svi } E_i \text{ iz } A} P(E_i) \; .$$

Jednako vjerojatni ishodi

Imamo n mogućih ishoda, a vjerojatnost svakog od njih je

$$P(E_i) = \frac{1}{n} \quad , \quad \forall i$$

Vjerojatnost događaja A je

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Prebrojavanje!

KOMBINATORIKA (pravila prebrojavanja)

1. Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Proučavamo uređene parove. Neka prvi element uređenog para možemo izabrati na n_1 načina, a za već izabrani prvi element, drugi možemo izabrati na n_2 načina. Tada uređeni par možemo izabrati na $N=n_1 \cdot n_2$ načina.

Općenito:

Proučavamo uređene k-torke. Neka prvi element uređene k-torke možemo izabrati na n_1 načina, a za već izabrani prvi element, drugi možemo izabrati na n_2 načina i tako dalje do k-tog koji možemo izabrati na n_k načina. Tada uređenu k-torku možemo izabrati na $N=n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ načina.

2. Permutacije

Iz skupa od n različitih elemenata sastavljamo uređene n-torke. Svaka uređena n-torka zove se **permutacija** n-tog razreda. Broj svih permutacija n-tog razreda je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! \quad (\textit{en faktorijela})$$

Dogovorno: $0! = 1$ (često će nam trebati)

Stirlingova formula

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

3. Varijacije

Iz skupa od n različitih elemenata sastavljamo uređene k-torke ($k \le n$). Svaka uređena k-torka zove se **varijacija** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih varijacija k-tog razreda je

$$V_n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Kombinacije

Iz skupa od n različitih elemenata odabiremo k-člane podskupove ($k \le n$) (redoslijed elemenata u skupu nije bitan). Svaki k-člani podskup zove se **kombinacija** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija k-tog razreda je

$$K_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Binomni razvoj:

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \cdots (a+b)$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

5. Varijacije s ponavljanjem

Iz skupa od n različitih elemenata sastavljamo uređene k-torke, ali tako da se elementi mogu i ponavljati (k može biti i veće od n). Svaka takva uređena k-torka zove se **varijacija s ponavljanjem** k-tog razreda od n elemenata. Broj varijacija s ponavljanjem je

$$\overline{V}_n^{(k)} = n^k$$

6. Permutacije s ponavljanjem

Imamo skup od n elemenata od kojih je m_1 jedne vrste, m_2 druge vrste, ... , m_k k-te vrste. Sastavljamo uređene n-torke. Svaka takva uređena n-torka zove se **permutacija s ponavljanjem**. Broj permutacija s ponavljanjem je

$$\overline{P}_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$$

7. Kombinacije s ponavljanjem

Imamo skup od n različitih elemenata i neki broj k. Svaka neuređena k-torka elemenata iz skupa u kojoj se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u k-torci nije bitan) zove se **kombinacija s ponavljanjem** k-tog razreda od n elemenata. Broj svih kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda od n elemenata je

$$\overline{K}_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k} = K_{n+k-1}^{(k)}$$

[1,1,1]	[1,2,2]	[1,3,4]	[2,2,4]	[3,3,3]
[1,1,2]	[1,2,3]	[1,4,4]	[2,3,3]	[3,3,4]
[1,1,3]	[1,2,4]	[2,2,2]	[2,3,4]	[3,4,4]
[1,1,4]	[1,3,3]	[2,2,3]	[2,4,4]	[4,4,4]

{1,2,3}	{1,3,4}	{1,4,6}	{2,3,6}	{3,4,5}
{1,2,4}	{1,3,5}	{1,5,6}	{2,4,5}	{3,4,6}
{1,2,5}	{1,3,6}	{2,3,4}	{2,4,6}	{3,5,6}
{1,2,6}	{1,4,5}	{2,3,5}	{2,5,6}	{4,5,6}

$$\overline{K}_4^3 = K_6^3$$

[1,1,1]	[1,2,2]	[1,3,4]	[2,2,4]	[3,3,3]
[1,1,2]	[1,2,3]	[1,4,4]	[2,3,3]	[3,3,4]
[1,1,3]	[1,2,4]	[2,2,2]	[2,3,4]	[3,4,4]
[1,1,4]	[1,3,3]	[2,2,3]	[2,4,4]	[4,4,4]

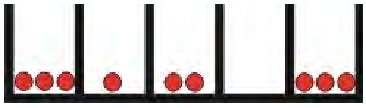
$$\updownarrow$$

{1,2,3}	{1,3,4}	{1,4,6}	{2,3,6}	{3,4,5}
{1,2,4}	{1,3,5}	{1,5,6}	{2,4,5}	{3,4,6}
{1,2,5}	{1,3,6}	{2,3,4}	{2,4,6}	{3,5,6}
{1,2,6}	{1,4,5}	{2,3,5}	{2,5,6}	{4,5,6}

Pokazali smo da postoji bijekcija između skupa svih kombinacija s ponavljanjem 3. razreda od 4 elementa i kombinacija bez ponavljanja 3. razreda od 6 elemenata.

$$\overline{K}_4^3 = K_6^3$$

Općenito: $\overline{K}_n^k = K_{n+k-1}^k$



$$\overline{P}_{13}^{9,4} = \frac{13!}{9!\cdot 4!}$$

$$\overline{K}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \overline{P}_{n+k-1}^{k,n-1}$$

primjeri