

Linearna regresija

Parovi varijabli:

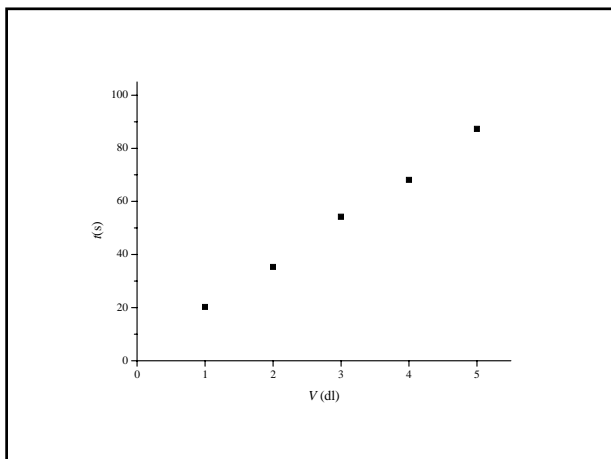
opažanje	X	Y
elastična sila	masa utega	duljina opruge
slobodni pad	vrijeme	prijeđeni put
topovsko tane	masa eksploziva	domet
studenti	uspjeh na prijemnom	uspjeh na studiju
ljudi	visina	masa
automobili	snaga	potrošnja goriva

Primjer mjerenja:

V (dl)	t (s)
1	20,2
2	35,3
3	54,2
4	68,1
5	87,3

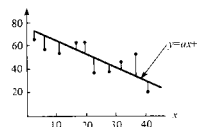
Odabir nezavisne i zavisne varijable.

Crtanje grafa!



Za izmjerene (opažene) parove vrijedi:

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$



Princip najmanjih kvadrata:

Od svih pravaca $y = ax + b$, najvjerojatniji pravac regresije jest onaj za koji je suma kvadrata odstupanja

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

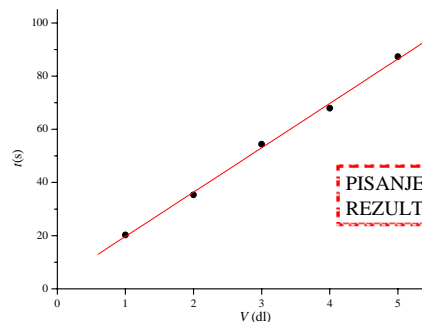
minimalna.

Konačni rezultati:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \left[\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} - a^2 \right]} \quad M_b = M_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

$$a = 16,70 \text{ s/dl} \quad b = 2,92 \text{ s} \quad M_a = 0,4534 \text{ s/dl} \quad M_b = 1,5038 \text{ s}$$



Nelinearne regresije

Zavisna varijabla nelinearno ovisi o nezavisnoj

Npr.: tjerani prigušeni harmonički oscilator

$$y = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad \text{parametri } A, \omega_0 \text{ i } \tau$$

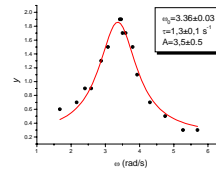
Suma kvadrata odstupanja minimalna: $f(A, \omega_0, \tau) = \sum_i \left(y_i - \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + (\omega_i/\tau)^2}} \right)^2$

Tri jednadžbe:

$$\frac{\partial f(A, \omega_0, \tau)}{\partial A} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f(A, \omega_0, \tau)}{\partial \omega_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f(A, \omega_0, \tau)}{\partial \tau} = 0$$

⇒ računalom!

Primjer s naprednog praktikuma:



$$y = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

Regresija s transformiranim varijablama

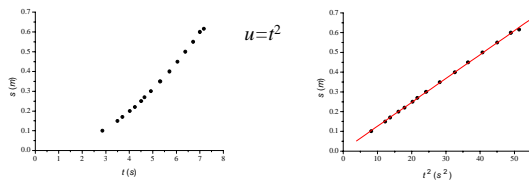
nelinearnu ovisnost prikazati u linearnom obliku:

- Mogu se primijeniti jednadžbe za linearnu regresiju.
- Takav grafički prikaz zorno potvrđuje (ili odbacuje) ispravnost primijenjene teorije.

Primjer iz praktikuma:

Dubina poniranja Maxwellova diska

$$s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I_z}{r^2}} t^2$$



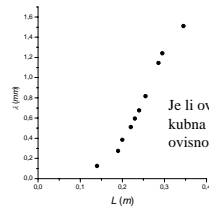
Logaritamski grafovi

$Y = X^\alpha$ α ne znamo ili želimo provjeriti

Primjer iz naprednog praktikuma: Modul elastičnosti čelika.

Savijenost šipke je:

$$\lambda = \frac{1}{4E} \frac{L^3}{ab^3} F$$



Logaritamski grafovi

$Y = X^\alpha$ α ne znamo ili želimo provjeriti

Primjer iz praktikuma (vježba 8): Modul elastičnosti čelika.

Savijenost šipke je:

$$\lambda = \frac{1}{4E} \frac{L^3}{ab^3} F$$

$$\log \lambda = \log \frac{1}{4E} \frac{F}{ab^3} + 3 \log L$$

$$x = \log L \quad y = \log \lambda$$

