Najvjerojatnija vrijednost mjerene veličine

Mjerimo veličinu X, a njezina prava vrijednost je x_p koju ne znamo.
Mjerni instrument daje standardna odstupanja σ.
Obavimo n mjerenja i rezultati su je $x_1, x_2, \ldots x_n$.
Tražimo najvjerojatniju vrijednost za x_p.
Vjerojatnost da je x_p u intervalu $(x, x+\Delta x)$ iznosi:

$$\Delta P = \Delta P_1 \cdot \Delta P_2 \cdots \Delta P_n = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2} \cdot (\Delta x)^n$$

Najvjerojatnija vrijednost x_p je onaj x za koji je $\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2 = \min$

To zovemo "**princip najmanjih kvadrata**".

Za najvjerojatniji x_p^* vrijedi:

$$\boxed{x_p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}}$$

Osnove teorije pogrešaka

1. Najvjerojatnija vrijednost na osnovi n mjerenja jest ona pri kojoj je zbroj kvadrata odstupanja mjerenih veličina najmanji.

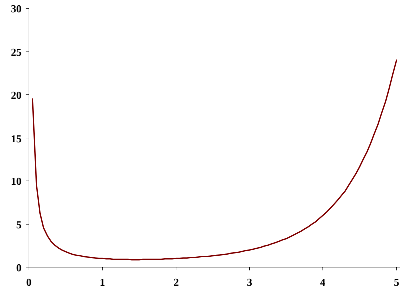
2. Ako je prava vrijednost x_p neke veličine nepoznata, onda se kao najvjerojatnija vrijednost koju x_p poprima uzima aritmetička sredina svih mjerenja.

Konzistentna i nekonzistentna mjerenja

Sistematske pogreške

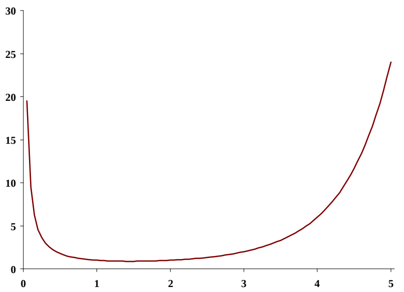
Gama funkcija

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \alpha > 0$$



Svojstva:

1. $\forall \alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
2. $\forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$



1. Izvod Stirlingove formule

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

Γ raspodjele

Standardna Γ raspodjela

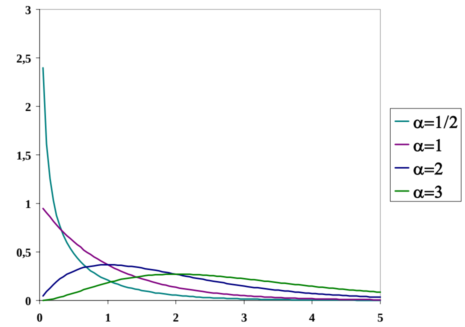
Kontinuirana slučajna varijabla X ima **standardnu gama raspodjelu** ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti dana s

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

gdje je α parametar raspodjele (α>0).

Zadovoljava osnovne uvjete za raspodjelu vjerojatnosti:

1. $f(x;\alpha)\ge 0 \quad , \quad \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\alpha)dx=1$



Općenita Γ raspodjela

Kontinuirana slučajna varijabla X ima **gama raspodjelu** ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti dana s

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

gdje su α i β>0.

Očekivanje i varijanca:

$$E(X)=\alpha\beta \qquad V(X)=\alpha\beta^2$$ (sami izvedite)

Općenita gama raspodjela postaje standardna za β =1.

poseban slučaj je $\alpha=1 \quad , \quad \beta=\frac{1}{\lambda}$:

Eksponencijalna raspodjela

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

Vjerojatnosti u eksponencijalnoj raspodjeli lako se računaju.

Očekivanje i varijanca: $E(X)=\dfrac{1}{\lambda} \qquad V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

Funkcija raspodjele:

$$F(x;\lambda)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

Primjena:
Kad promatramo vrijeme između dva događaja u Poissonovim procesima.

Ako imamo Poissonovu raspodjelu s parametrom $\lambda\, t$, onda su vremena između događaja raspodijeljena eksponencijalno s parametrom λ .

χ^2 raspodjela

Def:

Kontinuirana slučajna varijabla X ima χ^2 **raspodjelu** s parametrom $n\in$N ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti dana s

$$f(x;n)=\begin{cases}\dfrac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

Parametar n zove se "broj stupnjeva slobode" varijable X.

α=n/2; β=2

χ^2 raspodjela je važna za primjenu statističkih testova.

Dvodimenzionalne raspodjele

Def:

Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable definirane na prostoru elementarnih događaja nekog eksperimenta. **Združena raspodjela vjerojatnosti** $p(x,y)$ definirana je za svaki par točaka (x,y) kao vjerojatnost da istodobno varijabla X poprimi vrijednost x i varijabla Y poprimi vrijednost y:

$$p(x,y)=P(X=x \text{ i } Y=y)$$

	M	Ž	
Matematika	0,151	0,105	
Fizika	0,125	0,079	
Kemija	0,069	0,074	
Biologija	0,062	0,153	
Geo-znanosti	0,124	0,058	

Def:

Rubne (marginalne) raspodjele vjerojatnosti za varijable X i Y označavamo $p_X(x)$ i $p_Y(y)$, a dane su izrazima:

$$p_X(x)=\sum_{y\in D_Y} p(x,y) \qquad i \qquad p_Y(y)=\sum_{x\in D_X} p(x,y)$$

	M	Ž	ukupno
Matematika	0,151	0,105	0,256
Fizika	0,125	0,079	0,204
Kemija	0,069	0,074	0,143
Biologija	0,062	0,153	0,215
Geo-znanosti	0,124	0,058	0,182
ukupno	0,531	0,469	1

Def:

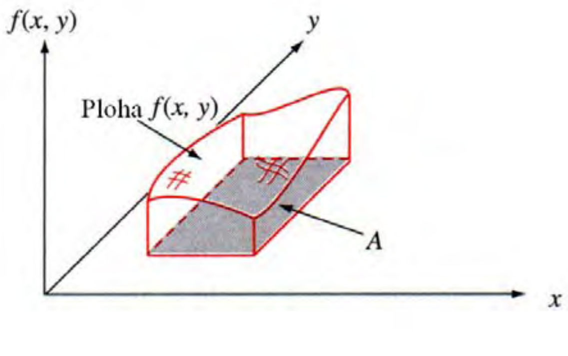
Neka su X i Y dvije kontinuirane slučajne varijable. Funkcija $f(x,y)$ je njihova **združena funkcija gustoće vjerojatnosti** ako za bilo koji dvodimenzionalni skup $A\subseteq \mathrm{R}\times\mathrm{R}$ vrijedi

$$P((X,Y)\in A)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

Posebno, ako je A dvodimenzionalni pravokutnik $A=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$, tada je

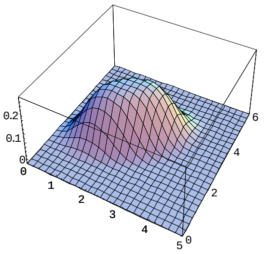
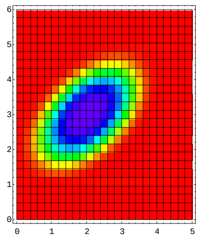
$$P((X,Y)\in A)=P(a\le x\le b, c\le y\le d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$f(x,y)\ge 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$



PRIMJER

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}e^{-\frac{(x-2)^2+(y-3)^2-(x-2)(y-3)}{2}}$$

Def:

Rubne (marginalne) funkcije gustoće vjerojatnosti za varijable X i Y označavamo $f_X(x)$ i $f_Y(y)$, a dane su izrazima:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad i \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Nezavisne slučajne varijable

Def:

Slučajne varijable X i Y su **nezavisne** ako za svaki par vrijednosti x i y vrijedi

$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$ (za diskretne varijable)

ili

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ (za kontinuirane varijable).

Ako ti uvjeti nisu ispunjeni za sve (x,y), kažemo da su X i Y **zavisne**.

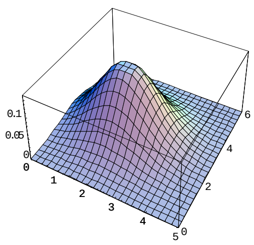
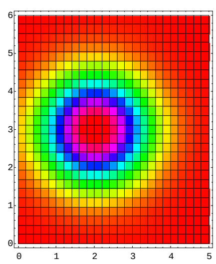
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Provjeriti nezavisnost!

	M	Ž	ukupno
Matematika	0,151	0,105	0,256
Fizika	0,125	0,079	0,204
Kemija	0,069	0,074	0,143
Biologija	0,062	0,153	0,215
Geo-znanosti	0,124	0,058	0,182
ukupno	0,531	0,469	1

Calculator

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-2)^2+(y-3)^2}{2}}$$

Očekivanja

$$\mu_X=\sum_{x\in D_X} x\cdot p_X(x)=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} x\cdot p(x,y) \qquad ili$$

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)dxdy$$

$$\mu_Y=\sum_{y\in D_Y} y\cdot p_Y(y)=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} y\cdot p(x,y) \qquad ili$$

$$\mu_Y=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)dxdy$$

Momenti 2D raspodjele

Pomoćni momenti

$$m_{rs} = \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} x^r y^s p(x, y) \qquad ili$$

$$m_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x, y) dxdy$$

Središnji momenti

$$M_{rs} = \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s p(x, y) \qquad ili$$

$$M_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f(x, y) dxdy$$

$m_{10} = \mu_X$

$m_{01} = \mu_Y$

očekivanja

$M_{20} = V(X) = \sigma_X^2$

$M_{02} = V(Y) = \sigma_Y^2$

varijance

$M_{11} = \sigma_{XY} = Cov(X, Y)$ kovarijanca