Propagacija pogreške

Posredno mjerene veličine.

Npr.:
- Mjerimo debljinu vanjski promjer cijevi D i unutarnji promjer d, a zanima nas debljina stijenke $x=D/2-d/2$.
- Mjerimo promjer kugle d, a zanima nas volumen $V=4\pi(d/2)^3/3$.
- Mjerimo period matematičkog njihala T i duljinu niti l, a zanima nas ubrzanje sile teže $g=4\pi^2 l/T^2$.

Pretpostavke:
- Pogreške su slučajne (normalno raspodijeljene)
- i malene ($M_i << \mu_i$).

Propagacija pogreške

I. Posredna veličina je linearna kombinacija izravno mjerenih veličina

$$h(X,Y) = aX + bY$$

$$\bar{h}(X,Y) = a\bar{x} + b\bar{y} \qquad M_h = \sqrt{a^2 M_X^2 + b^2 M_Y^2}$$

II. Posredna veličina je nelinearna funkcija jedne mjerene veličine $h(X)$

$$\bar{h}(X) \approx h(\bar{x}) \qquad M_h = \left|\frac{dh}{dx}\right|_{x=\mu} \cdot M_X$$

IIa. Posredna veličina je potencija jedne mjerene veličine $h(X) = X^\alpha$

$$\Rightarrow \quad M_h = \alpha\, \bar{x}^{\alpha-1} \cdot M_X$$

relativna pogreška: $\frac{M_h}{\bar{h}} = \alpha \cdot \frac{M_X}{\bar{x}}$

III. Najopćenitiji slučaj: Posredna veličina je nelinearna funkcija dviju ili više mjerenih veličina $h(X,Y)$

Pokazuje se da malena pogreška propagira na sljedeći način:

$$\boxed{M_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \cdot M_X^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial Y}\right)^2_{\bar{x},\bar{y}} \cdot M_Y^2}$$

Općenito za n izravno mjerenih veličina imamo: $h(X_1, X_2, ..., X_n)$

$$\bar{h}(X_1, X_2, ..., X_n) = h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

$$M_h = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial X_i}\right)^2_{\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n} M_{X_i}^2}$$

Primjer iz praktikuma: Modul elastičnosti

Mjeri se ovisnost savijenosti šipke o sili teže utega, zatim debljina i širina šipke te udaljenost potpornja.

Iz dobivenih podataka određuje se modul elastičnosti čelika.

Teorijska formula za savijenost šipke:

$$\lambda = \frac{1}{4E}\frac{L^3}{ab^3}F$$

Izmjerene su sljedeće veličine:

$$A = \frac{\lambda}{F} = (0{,}76 \pm 0{,}01)\,\frac{\text{mm}}{\text{N}} = (7{,}6 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{N}} = \bar{A} \pm M_A$$

$$a = (10{,}26 \pm 0{,}05)\,\text{mm} = (1{,}026 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-2}\,\text{m} = \bar{a} \pm M_a$$

$$b = (1{,}53 \pm 0{,}03)\,\text{mm} = (1{,}53 \pm 0{,}03)\cdot 10^{-3}\,\text{m} = \bar{b} \pm M_b$$

$$L = (29{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm} = (2{,}90 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-1}\,\text{m} = \bar{L} \pm M_L$$

Najvjerojatnija vrijednost za modul elastičnosti čelika je:

$$\bar{E} = \frac{1}{4}\frac{\bar{L}^3}{\bar{a}\bar{b}^3}\frac{1}{\bar{A}} = 2{,}183226 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Varijanca modula elastičnosti je:

$$M_E^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial A}\right)^2 M_A^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 M_a^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 M_b^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 M_L^2 =$$

$$= \left(\frac{\bar{L}^3}{4\bar{a}\bar{b}^3\bar{A}^2}\right)^2 M_A^2 + \left(\frac{\bar{L}^3}{4\bar{a}^2\bar{b}^3\bar{A}}\right)^2 M_a^2 + \left(\frac{3\bar{L}^3}{4\bar{a}\bar{b}^4\bar{A}}\right)^2 M_b^2 + \left(\frac{3\bar{L}^2}{4\bar{a}\bar{b}^3\bar{A}}\right)^2 M_L^2 =$$

$$= \bar{E}^2\left[\left(\frac{M_A}{\bar{A}}\right)^2 + \left(\frac{M_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(3\frac{M_b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(3\frac{M_L}{\bar{L}}\right)^2\right] =$$

$$= \bar{E}^2\left[1{,}73\cdot 10^{-4} + 2{,}37\cdot 10^{-5} + 3{,}46\cdot 10^{-3} + 1{,}07\cdot 10^{-4}\right]$$

Standardna pogreška je: $M_E = \bar{E}\sqrt{3{,}76\cdot 10^{-3}} = 0{,}13\cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Rezultat za modul elastičnosti pišemo: $\boxed{E = (2{,}2 \pm 0{,}1)\cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$

Mjerenja različitih statističkih težina

Fizikalnu veličinu mjerimo u više navrata.
Dobivamo različite rezultate.
Zanima nas koja je prava, ili barem najvjerojatnija, vrijednost te fizikalne veličine.
Mjerenja se obično izvode na različite načine i s različitim pouzdanostima pa ih ne smijemo tretirati ravnopravno.
Kažemo da mjerenja imaju *različite statističke težine*.

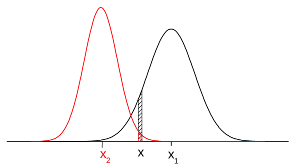
Jedna takva serija mjerenja daje rezultat u obliku

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm M_1$$

gdje M_1 predstavlja interval 68% pouzdanosti za nalaženje prave vrijednosti x_p.

Učinimo li još jednu seriju mjerenja, njezin rezultat imat će oblik:

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm M_2$$



Opća srednja vrijednost

Ako istu veličinu x mjerimo u raznim prigodama dobivamo različite rezultate s različitim pouzdanostima.

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm M_1$$
$$x_2 = \bar{x}_2 \pm M_2$$
$$\vdots$$
$$x_k = \bar{x}_k \pm M_k$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti za x_p:

$$f\left(x_p; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\right) = \frac{1}{M_1 M_2 \cdots M_k \left(\sqrt{2\pi}\right)^k} e^{-\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\bar{x}_i - x_p\right)^2}{2M_i^2}}$$

Tražimo onaj x_p za koji je ova f maksimalna.

Najvjerojatnija vrijednost je:

$$\boxed{x_p^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{x}_i}{M_i^2}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{M_j^2}}}$$

Definiramo **statističku težinu:**

$$w_i = \frac{\frac{1}{M_i^2}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{M_j^2}}$$

$$\boxed{x_p^* = \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{x}_i}$$

Nepouzdanost opće srednje vrijednosti

Procjenitelj prave vrijednosti mjerene veličine jest linearna kombinacija prosjeka iz k mjerenja:

$$X_p^* = \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{X}_i$$

Varijancu linearne kombinacije znademo izračunati:

$$M^2 = V\left(X_p^*\right) = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 V\left(\bar{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} w_i^2 M_i^2$$

nepouzdanost opće srednje vrijednosti:

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{M_i^2}}}$$

To je bilo za konzistentna mjerenja!

Ako mjerenja nisu konzistentna, uzimamo srednje vrijednosti svake serije i tretiramo ih kao pojedinačna mjerenja.

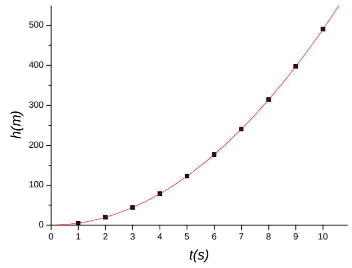
Linearna regresija

Parovi varijabli:

opažanje	*X*	*Y*
elastična sila	masa utega	duljina opruge
slobodni pad	vrijeme	prijeđeni put
topovsko tane	masa eksploziva	domet
studenti	uspjeh na prijemnom	uspjeh na studiju
ljudi	visina	masa
automobili	snaga	potrošnja goriva

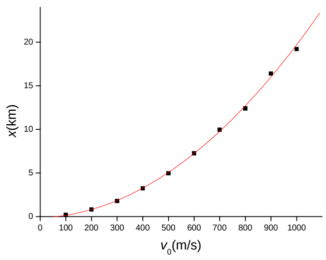
Deterministički povezane varijable:

Vrijeme i put u slobodnom padu:

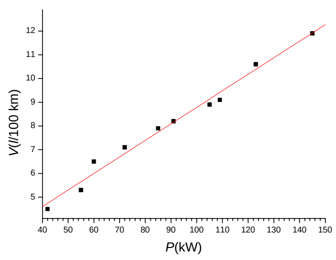


Nedeterministički povezane varijable:

Početna brzina i domet topovske granate:



Snaga automobila i potrošnja goriva



Linearan odnos

Deterministički: $y = ax + b$

Npr.: poznata opruga: $l = \frac{g}{K} m + l_0$

Nedeterministički:

Nezavisna varijabla X , vrijednosti x_i

Za određeni x_i, **zavisna varijabla** Y_i je slučajna varijabla.

Poprima vrijednost y_i

Npr.: opruge iz iste serije

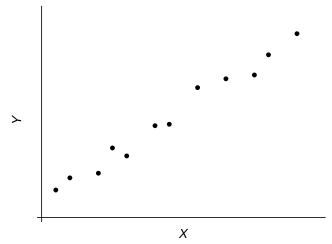
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - vrijednosti nezavisne varijable

Y_i slučajna varijabla pridružena x_i-u.

y_i opažena vrijednost pridružena x_i-u.

n opaženih parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

→ graf



linearno?

a=?
b=?

tražimo najvjerojatnije!

Određivanje koeficijenata metodom najmanjih kvadrata

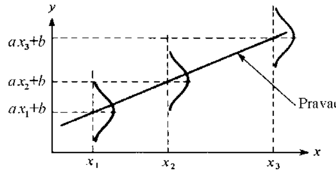
Pretpostavka:

Postoje parametri a i b takvi da za svaku vrijednost x_i nezavisne varijable X, zavisnu varijablu Y_i možemo pisati:

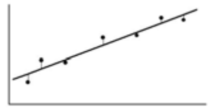
$$Y_i = ax_i + b + \hat{\varepsilon}$$

gdje je $\hat{\varepsilon}$ normalna slučajna varijabla s očekivanjem $E(\hat{\varepsilon}) = 0$ i varijancom $V(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2$.

σ^2 je jednaka za sve vrijednosti x.



Za izmjerene (opažene) parove vrijedi:



$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

Princip najmanjih kvadrata:

Od svih pravaca $y = ax + b$, najvjerojatniji pravac regresije jest onaj za koji je suma kvadrata odstupanja

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

minimalna.

normalne jednadžbe

Suma kvadrata odstupanja je minimalna kada istodobno vrijedi:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0$$

rješenje:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$N_z = n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad a = \frac{n}{N_z}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Napomene:

- Prije računanja pravca regresije treba u grafu provjeriti ima li smisla linearna regresija i jesu li podaci podjednako raspršeni.
- Rezultate sumiranja ne smije se zaokruživati jer pogreška zaokruživanja bitno utječe na razliku velikih sličnih brojeva.

Tražimo nepouzdanosti parametara a i b

$$V(\hat{a}) = \frac{n^2}{N_z^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 V(Y_i)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{n^2}{N_z^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sigma^2 = n\frac{\sigma^2}{N_z}$$

Nepristrani procjenjitelj za σ^2 dan je izrazom:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2}{n-2}$$

Konačni rezultati:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)}\left[\frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} - a^2\right]} \qquad M_b = M_a\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$