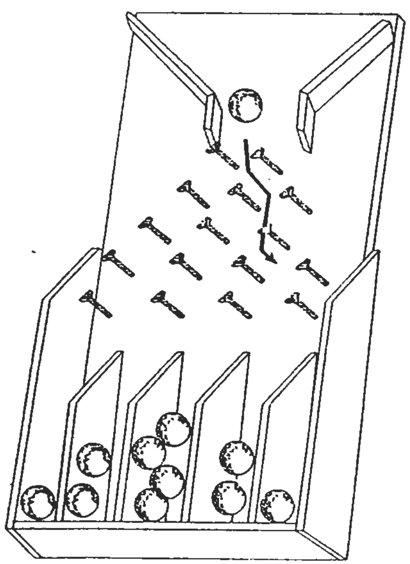
Galtonova daska

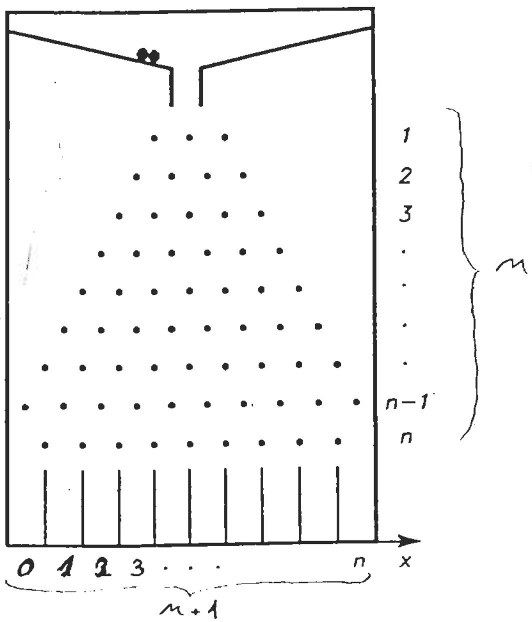
Da li fizici treba statistika? Nemoguće je razumjeti najvažnija pitanja suvremene fizike bez nekih, bar najosnovnijih predodžbi o statističkim zakonitostima. Razmatranje plina kao sustava golemog broja čestica zahtijeva da na pristupačan način stvorimo predodžbe o vjerojatnosnom, statističkom karakteru zakonitosti takvih sustava, o statističkim raspodjelama koje nam pokazuju kojom vjerojatnošću čestice sustava imaju ovu ili onu vrijednost parametara koji određuju njihovo stanje. Time možemo objasniti osnovne postavke kinetičke teorije plinova, na primjer ravnomjernu raspodjelu molekula plina po čitavom volumenu: takva raspodjela pokazuje se najvjerojatnijom. Ili zaključak da veći dio molekula plina, pri danoj temperaturi ima brzine koje se grupiraju oko neke određene vrijednosti objasnit ćemo najvjerojatnijom brzinom.

Da bi sve te pojmove lakše usvojili izradit ćemo model za zorni prikaz događaja slučajnog karaktera.

Nagnuta ploča s nekoliko redova čavlića zabijenih u pravilnom poretku mreže istostraničnih trokuta (Sl.1) čini uređaj koji zovemo Galtonova[1] daska. Kroz lijevak na vrhu daske puštamo kuglice da se kotrljaju između čavlića. Njihov promjer mora biti manji od prolaza među čavlićima. Kuglica pri svakom sudaru s čavlićem ima mogućnost da ga obiđe slijeva ili zdesna, na primjer kuglica koja naleti na tri čavlića može se očito tri puta "odlučiti" kako će se dalje kotrljati. Sve one na kraju završavaju svoje putanje u pretincima na dnu uređaja i tako podijeljene čine vizualni prikaz distribucije vjerojatnosti koji obično zovemo – **histogram**.



Sl. 1.



Sl. 2.

[1]Sir Francis Galton (1822–1911). Engleski antropolog. Među prvim znanstvenicima koji je naglasio važnost primjene statističkih metoda u biologiji nasljednih osobina.

Pokušajmo sada odgovoriti na pitanje: Ako kroz lijevak pustimo N kuglica, i one prođu kroz n redova čavlića, koliko će ih dospjeti u pojedini pretinac?

Označimo pretince brojevima od 0 do n počevši slijeva na desno (imamo dakle n redova čavlića i $n+1$ pretinac. Sl.2). Možemo zaključiti da će pojedina kuglica nakon nalijetanja na n čavlića pasti u pretinac označen onim brojem koliko joj se desilo desnih obilazaka. Na primjer da bi dospjela u 0-ti pretinac ne smije imati niti jedan desni obilazak, i općenito da bi dospjela u x-ti pretinac mora joj se desiti x desnih obilazaka i naravno $n-x$ lijevih. Bavimo se samo s dvije mogućnosti koje se sastoje u tome da se neki događaj pojavi (desni obilazak) ili se ne pojavi (lijevi obilazak), pa možemo označiti vjerojatnost desnog s p, a lijevog s $q = (1-p)$. Kod precizno izrađene daske $p = 1/2$ i $q = 1/2$, to jest vjerojatnost lijevog i desnog obilaska su jednake, $p + q = 1$. To dalje znači da je vjerojatnost da od n obilazaka njih x bude desnih (pričemu je svejedno kojim su se redoslijedom smjenjivali desni i lijevi obilasci) dana funkcijom $f(x)$

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x \cdot q^{n-x}$$

odnosno

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Raspodjela kuglica u pretincima je binomna, pa za dasku s, na primjer, pet redova čavlića ($n = 5$) i šest pretinaca ($n+1$) očekujemo da se kuglice raspodjele po sljedećim dijelovima od ukupnog broja kuglica N:

$$\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}$$

Brojnici ovih razlomaka su u stvari poznati binomni koeficijenti iz Pascalovog trokuta.

Za one koji nemaju strpljenja izraditi pravu Galtonovu dasku bit će zanimljiv zadatak da na računalu napišu program koji će ju simulirati i animirati kotrljanje kuglice.

Hrvoje Mesić, Zagreb