ZADACI SA VJEŽBI IZ KOLEGIJA STATISTIKA I OSNOVNA MJERENJA

Teorija slučajnih pogrešaka

1. Dužina l izmjerena je 10 puta. Izračunajte aritmetičku sredinu, preciznost mjerenja (srednju pogreška), standardnu devijaciju (nepouzdanost), relativnu pogrešku i maksimalnu pogrešku. Prikažite rezultat!

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l_i(mm)$	17.5	18.2	17.5	18.6	18.6	18.7	17.4	18.2	17.3	17.8

(R: $\bar{l} = 17.98$ mm; $m = 0.5453$ mm; $M = 0.172$ mm; $l = (18.0 \pm 0.2)$ mm; $R_l = 1.1$ %; $\Delta x = 0.7$ mm.)

2. Šest studenata vagalo je neki predmet neovisno jedan od drugoga. Njihovi su rezultati:

$$m_1 = (3.25 \pm 0.03) \text{ g}$$
$$m_2 = (3.27 \pm 0.06) \text{ g}$$
$$m_3 = (3.28 \pm 0.01) \text{ g}$$
$$m_4 = (3.25 \pm 0.08) \text{ g}$$
$$m_5 = (3.26 \pm 0.06) \text{ g}$$
$$m_6 = (3.297 \pm 0.001) \text{ g}$$

   (a) Izračunajte opću aritmetičku sredinu, nepouzdanost i relativnu nepouzdanost mase predmeta.

   (b) Ustanovljeno je da je šesti student varao. Zanemarite njegov rezultat i ponovo izračunajte veličine iz a)

(R: (a) $m = (3.297 \pm 0.001)$ g; $R = 0.03$ %. (b) $m = (3.277 \pm 0.009)$ g; $R = 0.3$ %

3. Mjerenjem duljine niti l i perioda T titranja matematičkog njihala možemo odrediti gravitacijsku konstantu g. Izmjereno je:

$$l = (0.850 \pm 0.002)\ m; \qquad \Delta l = 0.008 \text{ m}$$
$$T = (1.849 \pm 0.003)\ s; \qquad \Delta T = 0.01 \text{ s}$$

(R: $g = (9.82 \pm 0.04)$ m/s^2; $R = 0.4$ %.)

4. Boltzmannova konstanta k određuje se na osnovi relacije za zračenje crnog tijela $E = kST^4$. Izmjereno je:

$$T = (502.47 \pm 0.04)\ K;$$
$$E = (8.978 \pm 0.008)\ ergs^{-1}$$
$$S = (24.845 \pm 0.002)\ cm^2$$

Izračunajte konstantu k!

(R: $k = (5.669 \pm 0.005) \cdot 10^{-12}$ erg/s cm^2 K^4; $R = 0.09$ %.)

Metoda najmanjih kvadrata

5. Istraživan je broj topoloških defekata n po jedinici volumena u nekoj kristalnoj strukturi. Pretpostavlja se da rezultati slijede izraz

$$n = Ne^{-\frac{E_D}{k_B T}}$$

gdje je N broj atoma po jedinici volumena, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-2}$ J/K Boltzmannova konstanta, T je temperatura, a E_D aktivacijska energija stvaranja defekata. Dobiveni su rezultati

$T(K)$	600	610	620	630	640	650
$n(10^{14} cm^{-3})$	1.21	1.67	2.26	3.05	4.07	5.37

Metodom najmanjih kvadrata nađite E_D.

(R: $E_D = (11620 \pm 20) \cdot k_B$ K; $N = (3.1 \pm 0.1) \cdot 10^{22}$.)

6. Dobiveni su podaci o zavisnosti neke veličine y o nekoj veličini x. Pretpostavlja se da postoji veza

$$y = \frac{1}{ax + b}.$$

Metodom najmanjih kvadrata nađite a i b i njihove pogreške koji najbolje opisuju slijedeće rezultate:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1.02	0.24	0.14	0.10	0.08	0.06	0.05

(R: $a = (3.12 \pm 0.09)$, $b = (0.8 \pm 0.3)$.)

7. Titranje kristalne rešetke na niskim temperaturama doprinosi toplinskom kapacitetu kristala kao

$$C(T) = AT^{\gamma}.$$

Izmjereno je:

$T(K)$	20	30	40	50	60	70
$C(J/Kmol)$	1.94	6.55	15.53	30.34	54.43	83.27

Metodom najmanjih kvadrata nađite γ.

(R: $\gamma = (3.01 \pm 0.02)$, $A = (2.3 \pm 0.1) * 10^{-4}$ J/molK^4.)

8. Ovisnost koercitivnog polja nekog materijala o temperaturi dana je sljedećom tablicom:

$T(K)$	4.5	10	20	30	40	50
$H(Oe)$	200.32	139.97	85.24	60.96	51.33	43.23
$T(K)$	60	70	80	90	100	120
$H(Oe)$	37.32	30.48	25.51	20.53	15.87	5.91

Ako pretpostavimo da koercitivno polje opada linearno sa korijenom temperature, pronađite temperaturu na kojoj dolazi do magnetskog uređenja.

(R: $T = (133 \pm 4)$ K.)

9. Polarizacija nekog sustava opisana je izrazom

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

gdje je τ karakteristično vrijeme relaksacije. Metodom najmanjih kvadrata nađite τ.

$t(s)$	60	300	600	900	1200	1500
P/P_0	0.98	0.92	0.85	0.78	0.72	0.66

(R: $\tau = (3640 \pm 30)$ s.)
(Napomena: Rezultat regresije je jako blizu graničnoj vrijednosti 3645 s, moguće rješenje i $\tau = (3650 \pm 30)$ s.)

Vjerojatnost

10. Novčić bacamo 5 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo pritom ostvariti 3 puta pismo i 2 puta glava?

    (R: P = $\frac{5}{16}$.)

11. Nekom studentu preostala su još 4 ispita na koja može izaći na ukupno 6 rokova. Na koliko načina može rasporediti ispite ako:

    (a) u svakom roku može izaći na proizvoljan broj ispita

    (b) u jednom roku može izaći najviše na jedan ispit?

    (c) kolika je vjerojatnost da na sva 4 ispita izađe u različitim rokovima?

    (R: (a) 1296; (b) 360; (c) P = 0.28.)

12. U skupu od 50 proizvoda nalazi se 40 dobrih i 10 loših. Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 proizvoda od kojih su 3 dobra, a 2 loša?

    (R: 444600.)

13. Zgrada ima 10 katova. U lift ulazi 6 ljudi koji slučajno izlaze po katovima neovisno jedni od drugih. Kolika je vjerojatnost da:

    (a) svi izadu na istom katu

    (b) svi izadu na različitim katovima

    (c) izađu na 6 uzastopnih katova

    (d) bar dva izađu na istom katu?

    (R: (a) 10^{-5}; (b) 0.1512; (c) 0.0036; (d) 0.8488.)

14. Kolika je vjerojatnost da će se 7 kuglica različitih boja rasporediti u 7 ćelija tako da

    (a) distribucija bude (1111111) (u svakoj ćeliji po jedna)

    (b) u jednoj budu 2 kuglice, u jednoj niti jedna, a u 5 po jedna (2111110)

    (c) (2211100)

    (R: (a) 0.00612; (b) 0.12852; (c) 0.3213.)

15. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabran dvoznamenkasti broj djeljiv ili sa 2 ili sa 5?

    (R: P = 0.6.)

16. Kocku bacamo ukupno 5 puta. kolika je vjerojatnost da se broj 4

    (a) ne pojavi niti jednom
    (b) pojavi točno 2 puta
    (c) pojavi više od 2 puta
    (d) pojavi bar jednom?

    (R: (a) 0.402 (b) 0.161; (c) 0.035 (d) 0.598.)

17. U jednoj posudi su 4 bijele i 3 crvene kuglice. Nasumice tvorimo uzorak od 3 kuglice. Neka je x broj bijelih kuglica u uzorku, a $P(x)$ vjerojatnost da u uzorku bude x kuglica.

    (a) Kako glasi zakon za $P(x)$?
    (b) Kolike vrijednosti $P(x)$ pripadaju $x = 0, 1, 2, 3$?

    (R: (b) 1/35, 12/35, 18/35, 4/35.)

Uvjetna vjerojatnost

18. U prvoj posudi nalazi se 7 bijelih i 5 crvenih kuglica, a u drugoj 6 bijelih i 3 crvene. Na sreću izaberemo jednu kuglicu iz prve posude i prebacimo ju u drugu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga od ukupno 3 kuglice izvučene jedna za drugom iz druge posude bar jedna bude bijela?

    (R: P = 0.98.)

19. Tri igrača međusobno dijele karte obilježene brojevima 1, 2, 3. Igrači također nose brojeve od 1 do 3.

    (a) Kolika je vjerojatnost da bar jedan dobije svoj broj?
    (b) Kolika je vjerojatnost da niti jedan ne dobije svoj broj?

    (R: (a) P = 2/3; (b) P = 1/3.)

20. Na avion su ispaljena tri pojedinačna metka. Vjerojatnost pogotka prvim metkom je 0.5, drugim 0.6, a trećim 0.8. Od jednog pogotka avion će biti oboren s vjerojatnošću 0.3, od dva pogotka s vjerojatnošću 0.6, dok će od tri pogotka sigurno biti oboren. Naći vjerojatnost da će avion biti oboren.

    (R: P = 0.594.)

21. U jednoj velikoj seriji 96% proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju gruboj kontroli koja proglašava proizvod dobrim uz vjerojatnost 0.98 ako je proizvod stvarno dobar i uz vjerojatnost 0.05 ako je proizvod stvarno loš. Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila dobrim?

    (R: P = 0.998.)

22. Dva strijelca gađali su istu metu neovisno jedan od drugog. Svaki je ispalio jedan hitac. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi cilj je 0.8, a da drugi pogodi 0.4. Poslije gađanja ustanovljeno je da je meta pogođena jednim metkom. Kolika je vjerojatnost da je metu pogodio prvi strijelac?

    (R: P = 6/7.)

23. Prilikom eksplozije granata se raspada na komade tri težinske kategorije: krupne, srednje i male. Od ukupnog broja komada 5% je krupnih, 25 % srednjih i 70% malih. Ako udari u oklop, krupni ga komad probada sa vjerojatnošću 0.8, srednji sa vjerojatnošću 0.4, a mali sa vjerojatnošću 0.1. U trenutku eksplozije na oklop je pao samo jedan komad i probio ga. Izračunajte vjerojatnosti da se radilo o:

    (a) srednjem
    (b) krupnom komadu.

    (R: (a) P=0.476; (b) P=0.19.

Geometrijska vjerojatnost

24. Broj x se bira na slučajan način iz intervala $0 \leq x \leq 10$. Odredite vjerojatnost da je $x \geq 7$ ako je x:

    (a) cjelobrojna varijabla
    (b) realna varijabla

    (R: (a) P = 4/11; (b) P = 3/10.)

25. Brojevi x i y biraju se na slučajan način iz intervala $-2 \leq x \leq 0$ i $0 \leq y \leq 3$. Odredite vjerojatnost da je razlika $y - x$ veća ili jednaka 3

   (a) ako su x i y cijeli brojevi

   (b) ako su x i y realni brojevi.

   (R: (a) P = 1/2; (b) P = 1/3.)

26. Nađite vjerojatnost da su riješenja jednadžbe $x^2 + 2lx + k = 0$ realna ako $|l| < 4$ i $|k| < 7$.

   (R: P = 0.78.)

27. Na dužini $\overline{AB}$ nasumično odabiremo dvije točke. Kolika je vjerojatnost da od tri dobivena dijela možemo sastaviti trokut?

   (R: P = 1/4.)

28. Novčić polumjera r bačen je na ravninu popločenu pravilnim šesterokutima stranica duljine $6r$. Odredite vjerojatnosta da novčić ne siječe ni jedan šesterokut?

   (R: P = 0.652.)

29. Mirko i Slavko su zakazali sastanak između 0 i 1 sat uz obavezu čekanja 20 minuta. Kolika je vjerojatnost susreta ako je dolazak svake osobe nezavisan i slučajan u toku dogovorenog vremena?

   (R: P = 5/9.)

30. Dva broda pristaju na isti vez. Vremena dolaska brodova su neovisna i slučajna u toku 24 sata. Odredite vjerojatnost da jedan od brodova čeka na oslobađanje veza, ako se zna da jedan brod stoji na vezu 1 h, a drugi 2 h.

   (R: P = 0.121.)

31. Pravac p rotira jednolikom brzinom u (x, y) ravnini oko točke $T = (0, a)$ za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Rotacija se zaustavlja u slučajnom trenutku.

   (a) Odredite gustoću vjerojatnosti da pravac siječe os x na udaljenosti b od ishodišta.

   (b) Odredite vjerojatnost da je $a \leq b \leq \sqrt{3}a$

   (R: (a) $\frac{2a}{\pi} \frac{1}{a^2+b^2}$; (b) P = 0.1667.)

32. (Buffonov problem) Pod je popločen paralelnim pravcima udaljenim za 2a. Na pod nasumično bacamo iglu duljine 2ℓ, $\ell < a$. Izračunajte vjerojatnost da igla presjeca neki pravac.

(R: $P = \frac{2\ell}{\pi}$.)

Diskretna ili diskontinuirana slučajna varijabla

33. Za odvijanje jednog proizvodnog procesa potrebno je da istovremeno radi 10 istovrsnih strojeva. Vjerojatnost da jedan stroj prestane raditi je 0.05. Rad pokvarenog stroja nastavlja rezervni stroj.

 (a) Koliko treba imati rezervnih strojeva da uz vjerojatnost 0.99 možemo očekivati kontinuirani proizvodni proces?

 (b) U koliko posto slučajeva bi proces bio prekinut ako ne bi bilo niti jednog rezervnog stroja?

 (R: (a) 3; (b) P = 40 % .)

34. Pri svakom gađanju cilja iz oružja, vjerojatnost promašaja je 0.9. Naći vjerojatnost da od 20 gađanja broj pogodaka ne bude manji od 6 niti veći od 10.

 (R: P = 0.0117.)

35. Naći vjerojatnost da u nekoj obitelji od 4 djece bude:

 (a) najmanje jedan dječak

 (b) najmanje 1 dječak i 1 djevojčica.

 Vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice je ista.

 (R: (a) P = 0.9375; (b) P = 0.875.)

36. Koliko puta moramo baciti kocku (d6) da bi najvjerojatniji broj ponavljanja šestice bio 10?

 (R: $59 \leq n \geq 65$.)

37. Postotak loših proizvoda je 5%. Koji je najvjerojatniji broj loših proizvoda u uzorku od 100 slučajno odabranih proizvoda? Kolika je pripadna vjerojatnost?

 (R: x = 5; P = 0.18.)

38. Teleskop Hubble snima vrlo udaljenu galaksiju. Iz to izvora detektira prosječno 100 fotona po danu. Koja je vjerojatnost da detektira 10 fotona u sat vremena?

    (R: P = 0.00674.)

39. Vjerojatnost pogotka u cilj pri svakom gađanju je 0.001. Naći vjerojatnost pogotka cilja s najmanje 2 zrna ako je broj gađanja 5000.

    (R: B = 0.95964; P = 0.95957.)

40. Pri prijevozu nekog proizvoda procjenjuje se da oko 0.3% nesipravnih komada stigne na odredište. Naručioc zahtijeva da mu se u pošiljci dostavi 1000 ispravnih proizvoda. Ako radnici isprva zapakiraju 1000 komada, koliko ispravnih proizvoda moramo dodati da bi vjerojatnost da se u pošiljci nalazi 1000 ispravnih komada bila veća od 97%?

    (R: 7.)

41. Izračunati vrijednosti Poissonove raspodjele za $m = 1.2$ i $x = 0, 1, 2, 3, 4$ kao i odgovarajuće parametre raspodjele $(E(x), V(x), \alpha_3, \alpha_4)$.

    (R: E(x) = V(x) = m = 1.2; α_3 = 0.91; α_4 = 3.83.)

42. U snopu od 10 ključeva, samo jedan otključava vrata. Nasumce uzimamo ključ, isprobavamo otključava li vrata ili ne i vraćamo ga u snop.

    (a) U kojem pokušaju očekujemo da ćemo otvoriti vrata?
    (b) Kolika je vjerojatnost da ćemo iz prve otvoriti vrata?
    (c) Ako prvih pet puta nismo uspjeli otvoriti vrata, kolika je vjerojatnost da uspijemo 6 put.
    (d) Kolika je vjerojatnost da iz desetog pokušaja otvorimo vrata

    Što ako ključ ne vraćamo u snop?

    (R: E(x) = 10; 1/10; 1/10; $(9/10)^9(1/10)$)

Kontinuirana slučajna varijabla

43. Kontinuirana slučajna varijabla poprima vrijednosti iz intervala $(0, \infty)$, a njena funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = ax^2 e^{-kx} \quad .$$

    (a) Nađite konstantu a.

(b) Izračunajte $P(0 < x < \frac{1}{k})$.

(c) Nađite očekivanje i varijancu.

(R: (a) $a = \frac{k^3}{2}$; (b) P = $8.03 \cdot 10^{-2}$; (c) E(x) = 3/k, V(x) = 3/k^2.)

44. Slučajna varijabla x ima funkciju gustoće vjerojatnosti (Cauchyjeva raspodjela)

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti varijable $y = \frac{1}{x}$.

45. Nađi konstantu normiranja A, očekivanje, varijancu i funkciju razdiobe eksponencijalne raspodjele pri čemu je $x \epsilon (0, \infty)$:

$$f(x) = Ae^{-\lambda x} \quad .$$

Pored geometrijske rapodjele, ovo je jedina kontinuirana raspodjela koja nema pamćenje, primjer eksponencijalne raspodjele u fizici je beta raspad.

46. Pretpostavimo da je uvjetna vjerojantost pojavljivanja događaja u vrlo kratkom intervalu $< x, x + \Delta x >$, ako je poznato da se događaj nije pojavio do trenutka x, proporcionalna duljini tog i ne ovisi o x:

$$P(X < x + \Delta x | X > x) = \lambda \Delta x \quad \Delta x \to 0.$$

Dokaži da je X slučajna varijabla s eksponencijalnom distribucijom.

47. Neki je uređaj u godini dana bio deset puta u kvaru. Kolika je vjerojatnost da će prvi mjesec iduće godine raditi ispravno?

Gaussova raspodjela

48. Slučajna varijabla x ima Gaussovu raspodjelu s parametrima μ i σ. Izračunajte vjerojatnosti da je $\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma$ $(k = 1, 2, 3)$.

49. U proizvodnji nekog proizvoda propisana tolerancija za jednu dimenziju je u granicama od 4 do 16 mm. Postotak škarta ispod donje granice tolerancije je 3%, a iznad gornje 8%. Uz pretpostavku da je dimenzija slučajna varijabla s Gaussovom raspodjelom, naći μ i σ.

(R: $\mu = 10.86$, $\sigma = 3.65$.)

Aproksimacija binomne raspodjele normalnom

50. Istovremeno bacamo 10 idealnih novčića. Odredite vjerojatnost da pismo padne:

    (a) točno 6 puta

    (b) ne manje od 6 puta.

    Zadatak riješite "egzaktno", a zatim provjerite da li je moguće primijeniti Gaussovu aproksimaciju, te je, ako je moguće, primijenite.

    (a) B = 0.2051, N=0.2034; (b) B = 0.376953, N=0.3742.)

51. Kocku bacamo 100 puta. Kolika je vjerojatnost da se dvojka okrene 17 puta? Kolika je vjerojatnost da se okrene više od 4 puta, a manje od 25 puta?

    (R: P = 0.107, P = 0.9816.)

52. Test na klasifikacijskom ispitu za fiziku sadrži 40 zadataka. Za svaki zadatak ponuđeno je 5 odgovora, od kojih je samo jedan točan. Točan odgovor donosi 15 bodova, a netočan -4 boda. Izračunajte vjerojatnost da ispitanik koji nasumice odgovara na pitanja prijeđe upisni prag od 135 bodova.

    (R: P = 0.00154.)

Aproksimacija Poissonove raspodjele normalnom

53. Godišnji broj potresa jačine barem 2.5 na Richterovoj skali za neko područje ima Poissonovu distribuciju sa m=6.5.
    Odredite vjerojatnost da će dogodine područje biti pogođeno sa barem 9 potresa te jačine.

    (R: P = 0.2084, N = 0.2177.)

Dvodimenzionalne raspodjele, kovarijanca i korelacija

54. Slučajna varijabla (X,Y) ima združenu funkciju gustoće vjerojatnosti zadanu sa

$$f(x, y) = \frac{1}{2}$$

za $(x, y) \epsilon S$, gdje je S kvadrat sa središtem u (0,0), kojem dijagonale duljine 2 leže na koordinatnim osima. Pronađite rubne funkcije gustoće vjerojatnosti i provjerite zavisnost.

R:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

55. Slučajna varijabla X ima uniformnu gustoću vjerojatnosti na intervalu [0,2], a varijabla Y funkciju gustoće vjerojatnosti $f_Y(y) = 2y$ u intervalu [0,1]. Ako znamo da su varijable nezavisne, izračunajte vjerojatnost da Y poprimi vrijednost manju od X.

    (R: P = 2/3.)

56. X i Y imaju združenu funkciju gustoće vjerojatnosti $f(x, y) = x + y$ za $0 \leq x \leq 1$ i $0 \leq y \leq 1$. Pronađite rubne funkcije gustoće vjerojatnosti i provjerite zavisnost.

    (R: $f_X(x) = x + 1/2$ za $0 \leq x \leq 1$. Analogno za y. Varijable su zavisne.)

57. Zadana je združena funkcija gustoće vjerojatnosti $f(x, y) = 4xy$ za $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$.

    (a) Ispunjava li $f(x, y)$ potrebne uvjete?
    (b) Izračunajte P(Y<X).
    (c) Nađite rubne funkcije i provjerite zavisnost.
    (d) Izračunajte E(X) i E(Y).
    (e) Izračunajte V(X) i V(Y).

    (R: (b) $P(Y < X) = 1/2$; (c) $f_X(x) = 2x$; (d) E(X)=E(Y) = 2/3; (e) V(X) = V(Y)=1/18.)

58. Na uzorku od pet studenata ispituje se odnos broja sati učenja dnevno (X) i broj sati spavanja (Y). Izračunajte korelaciju.

$X(h)$	2	4	6	8	10
$Y(h)$	10	9	8	7	6

    (R: ρ = -1.)

59. Zadana je združena funkcija gustoće vjerojatnosti $f(x, y) = Csin(x + y)$ za $0 < x < \pi/2$ i $0 < y < \pi/2$.

  (a) Pronađite konstantu C.

  (b) Nađite rubne funkcije i provjerite zavisnost.

  (c) Izračunajte $f_X(x)$ za $y = \pi/4$.

  (d) Izračunajte kovarijancu i korelaciju.

  (R: (a) C=1/2; (b) $f_X(x) = 1/2(sinx+cosx)$; (c) $f_X(x)|_{y=\pi/4} = 1/2(sinx+cosx)$; (d) cov(X,Y)=$\pi/2 - 1 - \pi^2/16$; (e) corr(X,Y)=$\frac{\pi-2-\pi^2/8}{\pi-4+\pi^2/8}$)

60. Na intervalu [0,1] definirane su varijabla X sa uniformnom raspodjelom i fiksna točka a.
  Odredite kovarijancu između X i udaljenosti x od a zadanom sa Y=$|x - a|$. Pronađite a za koji su X i Y nekorelirane.

  (R: $cov(X, Y) = a^3/3 - a^2/2 + 1/12$; $a_0 = 1/2$.)

61. Zadana je dvodimenzionalna normalna raspodjela $(X, Y) \sim N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$. Pokažite da X i Y također imaju normalnu raspodjelu, tj. da vrijedi $X \sim N(a_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$. Pokažite da je r koeficijent korelacije X i Y.

Centralni granični teorem

62. Teretno dizalo maskimalno može podići 20 tona. Dizalom je potrebno prenijeti teret koji se sastoji od 49 kutija. Masa pojedine kutije slijedi normalnu raspodjelu sa $\mu = 397$ kg i $\sigma = 67$ kg. Kolika je vjerojatnost da ćemo sigurno prenijeti teret?

  (R: P=0.879.)

63. Poznato je da broj kupljenih ulaznica po gledatelju za nogometnu utakmicu slijedi normalnu raspodjelu sa $\mu = 2.4$ i $\sigma = 2.0$. Pola sata prije utakmice 100 ljudi stoji u redu da kupi karte. Ako je ostalo još 250 karata, kolika je vjerojatnost da će svi uspješno kupiti karte?

  (R: P=0.6915.)

64. Na tržištu nasumično biramo 100 pari tenisica s očekivanjem cijene 500 kn i standardnom devijacijom 80 kn.

  (a) Izračunajte vjerojatnost da će prosjek uzorka biti u cjenovnom rangu (490, 510) kn.

(b) Izračunajte interval koji simetrično obuhvaća 95% očekivanja uzorka.

(R: P=0.7888; P($484.32 < x < 515.68$)=0.95.)

χ^2 test

65. U 200 bacanja novčića dobili smo 117 glava i 83 pisma. Na razini signifikantnosti od 0.05, imamo li razloga posumnjati da je novčić pošten?
(R: $\chi^2 = 5.78$, odbacujemo H_0.)

66. Kocka je bačena 360 puta. Provjeri da li je kocka poštena na razini signifikantnosti od 0.01.

i	1	2	3	4	5	6
f_i	51	52	74	62	71	50

(R: $\chi^2 = 9.45$.)

67. Teleskop Hubble snima vrlo udaljenu galaksiju 12 sati. Ukupno je detektirao $3 \cdot 10^3$ fotona. Frekvencija opažanja u intervalima od jedne minute je dana u tablici.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
f_i	48	170	394	570	602	476	342	195	112	91

(a) Provjeri da li dolazak fotona prati Poissonovu raspodjelu na razini signifikantnosti od 0.01.

(b) Provjeri da li dolazak fotona prati Poissonovu raspodjelu sa očekivanjem $\lambda = 4.1$ na razini signifikantnosti od 0.01.

(R: $\chi^2_a = 6.291$, $\chi^2_b = 14.23$)

68. Farmaceutska kompanija testira dvije verzije novog lijeka protiv gripe. Kontrolna grupa prima placebo. Na razini signifikantnosti od 0.005 odredi ima li lijek utjecaja na vjerojatnost obolijevanja?

i	lijek 1	lijek 2	placebo
Oboljeli	74	123	97
Neoboljeli	426	377	403

(R: $\chi^2 = 15.26$.)

Dodatni zadaci

69. U telefonsku centralu stiže u prosjeku 6 poziva u minuti. Počevši od nekog fiksnog trenutka mjerimo vrijeme do prvog poziva. Pokaži da tako dobivena slučajna varijabla ima eksponencijalnu raspodjelu. Nađi očekivano vrijeme do prvog poziva.

    (R: E(x) = 10 s.)

70. Gustoća vjerojatnosti nalaženja neinteragirajuće čestice s impulsima p_x, p_y, p_z dana je s:

$$f(p_x, p_y, p_z) = Ce^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mkT}}, \quad -\infty < p_x, p_y, p_z < \infty.$$

    (a) nađite konstantu C
    (b) uzimajući u obzir samo jednu dimenziju, nađite funkciju gustoće vjerojatnosti energije
    (c) nađite srednju vrijednost energije
    (d) nađite funkciju gustoće vjerojatnosti za brzinu

71. Sistematska greška održavanja aviona na danoj visini je +100 m, a slučajna greška je normalna varijabla s devijacijom 200 m. Nađite vjerojatnost da:

    (a) avion leti kroz koridor širine 500 m
    (b) iznad koridora ako mu je rečeno da leti sredinom koridora

    (R: $P_a = 0.7333$, $P_b = 0.2266$.)

72. Proizvođač poznate marke čokolade jamči 100 komada grožđica u pakiranju čokolade od 250 g. U proizvedenoj čokoladi ne smije biti manje od 95 niti više od 107 grožđica da bi bila puštena u prodaju. Postotak čokolada s manje od 95 grožđica je 0.8 % dok je postotak čokolada s više od 107 grožđica 0.6 %.

    (a) nađite μ i σ
    (b) koja je vjerojatnost da kupljena čokolada ima 100 grožđica?

    (R: $\mu = 100.868$, $\sigma = 2.64$, $P_b = 0.1428$)

73. Unutarnja kontrola proizvođača čokolade iz prethodnog zadatka na uzorku od 10000 čokolada provjerava da li proizvodni proces radi sa zadanom točnošću broja grožđica. Da li je proizvodnja odgovara očekivanju na razini signifikantnosti 0.05?

broj grožđica	$x < 95$	$95 \leq x \leq 107$	$x > 107$
broj čokolada	95	9834	71

(R: $\chi^2 = 4.898$)