

FORMULE ZA VJEŽBE IZ KOLEGIJA STATISTIKA I OSNOVNA MJERENJA

Opisna statistika

Populacija od N elemenata (konačna populacija)

1. Očekivanje populacije (aritmetička sredina):

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

2. Standardna devijacija populacije:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Obrada rezultata mjerenja

Obavimo n mjerenja iste veličine: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ (uzorak od n elemenata iz populacije)

3. Najvjerojatnija vrijednost mjerene veličine (aritmetička sredina):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

4. Srednja pogreška, preciznost mjerenja (standardna devijacija uzorka):

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

5. Nepouzdanost mjerenja, standardna pogreška (standardna devijacija aritmetičke sredine):

$$M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n - 1)}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

6. Relativna pogreška:

$$R = \frac{M}{\bar{x}}$$

7. Maksimalna pogreška:

$$\Delta x = |x_i - \bar{x}|_{MAX}$$

8. Mjerenja različitih statističkih težina:

Opća srednja vrijednost (srednja vrijednost aritmetičkih sredina):

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{x}_i}{M_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{M_i^2}}$$

9. Opća nepouzdanost (srednja vrijednost nepouzdanosti):

$$\overline{M}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{M_i^2}}$$

10. Ovisne veličine:

$$x = F(a, b, c, \dots)$$

Najvjerojatnija vrijednost:

$$\bar{x} = F(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$$

Nepouzdanost:

$$M_x^2 = \sum_{k=a,b,c,\dots} \left(\left. \frac{\partial F}{\partial k} \right|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b} \\ c=\bar{c}}} \cdot M_k \right)^2$$

Linearna regresija (metoda najmanjih kvadrata)

11. Koeficijent smjera:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

12. Odsječak:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

13. Pogreška od a :

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left[\frac{n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} - a^2 \right]}$$

14. Pogreška od b :

$$M_b = M_a \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$$

Kombinatorika

15. Permutacije bez ponavljanja:

$$P_n = n!$$

Permutacije s ponavljanjem:

$$P_n^{r_1, r_2, \dots} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots}$$

16. Varijacije bez ponavljanja:

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$$

Varijacije s ponavljanjem:

$$\overline{V}_r^{(n)} = n^r$$

17. Kombinacije bez ponavljanja:

$$K_r^{(n)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Kombinacije s ponavljanjem:

$$\overline{K}_r^{(n)} = \binom{n+r-1}{r}$$

Uvjetna vjerojatnost

18. Definicija:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

19. Svojstvo presjeka:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

20. Bayesov teorem:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

Nezavisnost

21. Definicija:

$$P(A|B) = P(A) \quad ; \quad P(B|A) = P(B)$$

22. Nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Diskretne raspodjele

23. Očekivanje:

$$E(x) = \sum xp(x) = \mu$$

24. Varijanca:

$$V(x) = \sum (x - \mu)^2 p(x) = \sigma^2$$

Binomna raspodjela

25. Općenita formula::

$$B(n, x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

26. Isključivi događaji:

$$p + q = 1$$

27. Očekivanje:

$$E(x) = n \cdot p = \mu$$

28. Varijanca:

$$V(x) = n \cdot p \cdot q$$

29. Koeficijent asimetrije:

$$\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}$$

30. Koeficijent spljoštenosti:

$$\alpha_4 = \frac{1 - 6pq}{npq} + 3$$

31. Rekurzivna formula:

$$B(n, x) = \frac{n - x + 1}{x} \frac{p}{q} B(n, x - 1)$$

32. Binomna raspodjela je monotono rastuća funkcija ako vrijedi:

$$p \geq \frac{n}{n + 1}$$

33. Binomna raspodjela je monotono padajuća funkcija ako vrijedi:

$$p \leq \frac{1}{n + 1}$$

34. Binomna raspodjela ima maksimum ako vrijedi:

$$\frac{1}{n + 1} \leq p \leq \frac{n}{n + 1}$$

35. Za maksimum funkcije $B(n, x = x_0)$ vrijedi:

$$np - q \leq x_0 \leq np + p$$

Hipergeometrijska raspodjela

36. Općenita formula::

$$H(N, M, n, x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

37. Vjerojatnosti:

$$p = \frac{M}{N}, \quad q = 1 - p$$

38. Očekivanje:

$$E(x) = n \cdot p = \mu$$

39. Varijanca:

$$V(x) = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

40. Rekurzivna formula:

$$H(x) = \frac{(M-x+1)(n-x+1)}{x(N-M-n+x)} H(x-1)$$

Poissonova raspodjela

41. Općenita formula::

$$P(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}, \quad m = n \cdot p$$

42. Očekivanje:

$$E(x) = m$$

43. Varijanca:

$$V(x) = m$$

44. Koeficijent asimetrije:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

45. Koeficijent spljoštenosti:

$$\alpha_4 = \frac{1}{m} + 3$$

46. Rekurzivna formula:

$$P(x) = \frac{m}{x} P(x - 1)$$

47. Aproksimacija binomne raspodjele Poissonovom je zadovoljavajuća ako vrijedi:

$$p \leq 0.1 \quad \wedge \quad m \leq 5$$

Kontinuirane raspodjele

48. Očekivanje:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

49. Varijanca:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

50. Izračunavanje vjerojantosti:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Gaussova raspodjela

51. Općenita formula:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

52. Koeficijent asimetrije:

$$\alpha_3 = 0$$

53. Koeficijent spljoštenosti:

$$\alpha_4 = 3$$

54. Izračunavanje vjerojatnosti:

$$P(a < x < b) = \int_a^b G(x) dx = \int_{-\infty}^b G(x) dx - \int_{-\infty}^a G(x) dx = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

55. Aproksimacija binomne raspodjele Gaussovom je zadovoljavajuća ako vrijedi:

(a) velik broj događaja $n \rightarrow \infty$

(b) binomna raspodjela ima tjeme $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$

(c) binomna raspodjela nije jako asimetrična $|\alpha_3| < \frac{1}{3} \implies npq > 9|q - p|^2$

(d) binomna raspodjela je po spljoštenosti bliska normalnoj $|\alpha_4 - 3| < \frac{1}{9} \implies npq > 9|1 - 6pq|$

Uvjeti c) i d) su sigurno zadovoljeni ako vrijedi $npq > 9$

$$\mu = np \quad \sigma^2 = npq$$

$$B(n, y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \approx P(y - 0.5 \leq x \leq y + 0.5)$$

$$\sum_{x=y_1}^{y_2} B(n, y) \approx P(y_1 - 0.5 \leq x \leq y_2 + 0.5)$$

Dvodimenzionalne raspodjele

56. Združena funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$P(X, Y \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy$$

zadovoljava $f(x, y) \geq 0$ i $\int \int f(x, y) dx dy = 1$.

57. Rubne funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

58. Uvjet nezavisnosti:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

59. Pomoćni momenti:

$$m_{rs} = \int \int x^r y^s f(x, y) dx dy$$

Očekivanja su $\mu_X = m_{10}$ i $\mu_Y = m_{01}$.

60. Centralni momenti:

$$M_{rs} = \int \int (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f(x, y) dx dy$$

Varijance su $V(X) = M_{20}$ i $V(Y) = M_{02}$.

61. Kovarijanca:

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{xy} = M_{11}$$

62. Korelacija:

$$\text{corr}(X, Y) = \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{20} M_{02}}}$$

63. Normalna raspodjela dvije varijable:

$$N = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]}$$

gdje je $N = N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$.

Centralni granični teorem

64. Prosjek slučajnog uzorka:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

65. Total slučajnog uzorka:

$$T_0 = \sum_{i=1}^n x_i = N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$$

gdje su μ i σ parametri populacije.

χ^2 test

66. Definicija:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$$