

15.1 Osnovni opis putujućeg linearno polariziranog elektromagnetskog (EM) vala

U poglavlju 9. ponovili smo (9.8) i (9.9) kako izgledaju Maxwellove jednadžbe i za specijalni slučaj plazme izveli diferencijalnu jednadžbu za druge derivacije električnog polja (9.12). Ako iz tog izvoda ispustimo dio koji dolazi od mogućih struja u plazmi, a kojeg nema u vakuumu, slijede valne jednadžbe za komponente električnog i magnetskog polja u obliku poznatih valnih jednadžbi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (15.1)$$

Polazeći od rotora električnog polja iz Maxwellovih jednadžbi analognim postupkom slijedi:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (15.2)$$

Odatle je jasno (može se provjeriti parcijalnim deriviranjem) da je dobro rješenje za (15.1) i prostorni putujući ravni val oblika:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(k\vec{r} - \omega t) \quad (15.3)$$

naravno pod uvjetom da su valni vektor i kružna frekvencija povezani uobičajenom relacijom s brzinom svjetlosti:

$$\frac{\omega}{k} = c \quad (15.4)$$

U stručnoj terminologiji (15.3) je linearno polarizirani ravni val, što ima specifično značenje da električno polje koje je opisano tim izrazom titra u smjeru vektora \vec{E}_0 s amplitudom E_0 . Za linearno polarizirani ravni val čije električno polje titra prema (15.3) pokazat ćemo dodatna svojstva. Bez gubitka općenitosti izaberimo položaj koordinatnog sustava tako da val napreduje duž z osi. Tako električno polje ovisi samo o vremenu i koordinati z:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}E_{x0} \cos(kz - \omega t) + \hat{y}E_{y0} \cos(kz - \omega t) + \hat{z}E_{z0} \cos(kz - \omega t) \quad (15.5)$$

Prema Maxwellovim jednadžbama u vakuumu divergencija električnog polja iščezava:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (15.6)$$

Kako transverzalne komponente ne ovise o x i y, to njihove derivacije u (15.6) iščezavaju. To znači da iščezava i derivacija $\partial E_z / \partial z$. (nismo zainteresirani za eventualnu stalnu vrijednost longitudinalne komponente električnog polja). Znači da električno polje nema longitudinalne komponente u slobodnom prostoru. Ono je transverzalno! Pretpostavljajući da i magnetski dio titra poput (15.3) s eventualnim pomakom u fazi (za koji ćemo smjesta pokazati da u slobodnom prostoru ne postoji) identičnim postupkom slijedi da je i magnetsko polje transverzalno! No rotori polja u Maxwellovim jednadžbama nam pokazuju da su električna i magnetska polja međusobno povezana. Na primjer uzimanjem x komponente električnog polja iz odgovarajuće Maxwellove jednadžbe imamo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad \text{transverzalnost } \vec{B} \rightarrow B_z = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (15.7)$$

Iz eksplicitnog izraza za x komponentu električnog polja u (15.5) deriviranjem imamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E_{x0} \omega \sin(kz - \omega t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_{x0} k \sin(kz - \omega t) \quad (15.8)$$

odakle slijedi njihovom usporedbom:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega \left(-\frac{1}{k} \right) \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (15.9)$$

Korištenjem (15.7) i (15.9) koje obadvije sadrže parcijalnu derivaciju E_x po vremenu :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} c \quad \text{iz čega slijedi} \quad B_y = \frac{E_x}{c} \quad (15.10)$$

Znači da za linearno polarizirani val koji se širi duž z osi a čije električno polje titra u x smjeru pridruženo magnetsko polje u y smjeru titra u fazi s električnim. Naime sličnim se postupkom može pokazati i analogna relacija:

$$B_x = -\frac{E_y}{c} \quad (15.11)$$

što u ovom specijalnom slučaju znači da je $B_x = 0$, a to znači da su komponente električnog i magnetskog polja povezane sa smjerom širenja vala (smjer valnog vektora) relacijom:

$$\hat{E} \times \hat{B} = \hat{k} \quad (15.12)$$

Sada znamo ukupni opis putujućeg ravnog elektromagnetskog vala koji je linearno polariziran. Električni dio opisan je s (15.3) a magnetski s :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (15.13)$$

s time da su im komponente povezane relacijama (15.10) i (15.11). Dručiji način memoriranja jest da imaju međusobni odnos (15.12) i odnos modula u kojem je magnetsko polje jakosti za faktor c slabije od električnog.

POKUS

Demonstriranje linearno polariziranog EM vala izvorom i detektorom mikrovalova i polarizacijskim komponentama

15.2 Tok energije u ravnem putujućem valu

Iz drugog semestra znamo da je prostorna gustoća energije :

$$\frac{dEnerg}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c^2} E^2 = \epsilon_0 E^2 \quad (15.14)$$

Kao što električno polje putuju prostorom brzinom c , isto se dešava i s energijom! Ako se prostorna gustoća energije pomnoži s brzinom svjetlosti kojom se ta energija pronosi, dobiva se snaga koja prolazi jedinicom površine. Znači da je tok snage:

$$\frac{\partial^2 Energ}{\partial t \partial A} = \epsilon_0 c E^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{E}{c} E = \frac{1}{\mu_0} |B||E| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| \quad (15.15)$$

Kako je Pointingov vektor (15.16) usmjeren upravo u smjeru širenja ravnog vala,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (15.16)$$

to je upravo Pointingov vektor puni opis toka snage po jedinici površine. Nešto strožiji izvod toka energije načinit ćemo upotrebom pojednostavljenog opisa linearno polariziranog ravnog vala iz gornjeg teksta u kojem električno polje titra u x smjeru a magnetsko u y smjeru. Ovo ne smanjuje općenitost zaključka jer se koordinatni sustav možemo takvom opisu prilagoditi. Polazimo od prostorne gustoće energije elektromagnetskog polja (15.14). Promatrajmo dio volumena površine ΔA i debljine Δz u kojem je gustoća energije (15.14). Tada je vremenska derivacija energijskog sadržaja tog volumena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{\text{Energ}}}{\partial t} &= \Delta A \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right) = \Delta A \Delta z (\epsilon_0 E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial B_y}{\partial t}) = \\ &= \Delta A \Delta z \left[\epsilon_0 E_x (-c^2) \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0} B_y \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \right] = -\Delta A \Delta z \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z}\end{aligned}\quad (15.17)$$

Pri prijelazu iz gornjeg u donji red relacije (15.17) koristili smo relacije (15.9) i (15.10) kao i njihove analogone. Derivacija produkta komponenti električnog i magnetskog polja u (15.17) pomnožena s Δz može se prikazati kao razlika funkcija vrijednosti primitivne funkcije uzetih na krajevima intervala Δz znači:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{Energ}}}{\partial t \partial A} = -\frac{1}{\mu_0} \left[(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[(E_x B_y)_{\text{ulaz}} - (E_x B_y)_{\text{izlaz}} \right] \quad (15.18)$$

I u slučaju specijalnog izbora koordinatnog sustava to je upravo:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{Energ}}}{\partial t \partial A} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{E} \times \vec{B})_{\text{smjer } \vec{k}}^{\text{ulaz}} - (\vec{E} \times \vec{B})_{\text{smjer } \vec{k}}^{\text{izlaz}} \right] \quad (15.19)$$

Odavle je također očito da Pointingov vektor (15.16) predstavlja tok snage elektromagnetskog vala (energija na jedinicu površine i jedinicu vremena koja tom površinom protjeće). Na seminaru će studenti sresti vrlo strogi izvod za Pointingov vektor (udžbenik Elmore...); on zahtijeva dobro poznavanje manipulacija vektorskim operatorima i dobru prostornu vizualizaciju ; taj izvod se neće zahtijevati na ispitu.

POKUS

Demonstriranje unosa energije svjetлом u uređaj koji obasjan zračenjem radi toga počinje vrtnju.

15.3 Impulsni tok koji nosi linearne polarizirani putujući ravni val

Gornji tok energije se moglo egzaktno demonstrirati pomoću poznatog izraza za gustoću energije polja. Situacija s impulsom je malo kompleksnija. Naime da bi se pokazao efekt impulsa dolazimo na njegovu predaju materiji i pitanje kvalitetnog tretmana interakcije putujućeg polja i primatelja impulsa (generalno nakupine naboja i struja). Ovdje ćemo dati dva nivoa indikacije impulsnog toka. Kao i kod Pointingovog vektora skrećemo pažnju da se najstroži izvod impulsnog toka može naći u udžbeniku Elmore...

Najjednostavniji argument za izraz pronosa impulsa možemo dobiti upotrebom svojstva fotona iz relativističkih razmatranja u prvom semestru. Kako je masa mirovanja fotona nula, to za impuls vrijedi:

$$p = \frac{E_{\text{Energ}}}{c} \quad (15.20)$$

Relativno plauzibilno (razumljivo/prihvatljivo) objašnjenje gornje relacije dobivamo razmatranjem efekta polja na elektron koji je elastično vezan i prisilnim titranjem prihvata energiju i impuls od elektromagnetskog vala. Na elektron djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.21)$$

Kao i gore pretpostavljamo da je elektromagnetski val usmjeren duž osi z a da električno polje titra duž osi x a magnetsko duž osi y. Ako smo daleko od rezonancija elastična je amplituda dominantna ali titranje električnog polja koje stalno mijenja predznak zapravo nema rezultantne sile kad se efekt usrednji po periodu. Najprije podsjećamo:

$$\vec{F} = \hat{x}qE_x + q(\hat{x}\dot{x} + \hat{y}\dot{y} + \hat{z}\dot{z}) \times (\hat{y}B_y) = \hat{x}qE_x + \hat{z}q\dot{x}B_y - \hat{x}q\dot{z}B_y \quad (15.22)$$

U gornjem izrazu je dobro uočiti slijedeće. Rezultat titranja električnog polje u uprosječenoj sili je nula. $\dot{x}B_y$ doprinos nije velik ali je stalnog predznaka jer brzina i magnetsko polje titraju zajedno mijenjajući predznak. Kako je s jedne strane \dot{z} mali a s druge strane ne titra, to uprosječena vrijednost odgovarajućeg člana jest zanemariva. Tako zaključujemo

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle \frac{d\vec{p}}{dt} \rangle = \hat{z}q \langle \dot{x}B_y \rangle = \frac{\hat{z}}{c} \langle q\dot{x}E_x \rangle \quad (15.23)$$

Istovremeno je apsorpcija energije koju iz vala uzima elektron prosječno po periodu:

$$\langle \frac{dEnerg}{dt} \rangle = \langle \vec{F}\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rangle = q \langle \dot{x}E_x \rangle \quad (15.24)$$

Usporedbom (15.23) i (15.24) očitavamo odnos brzine promjene impulsa i brzine promjene energije:

$$\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \rangle = \frac{\hat{z}}{c} \langle \frac{dEnerg}{dt} \rangle \quad (15.25)$$

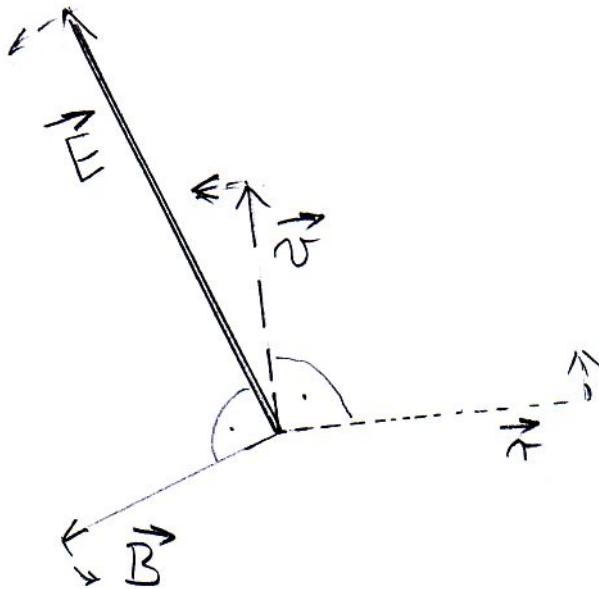
Znači, dok elektron iz vala vadi energiju, on vadi i impuls, pri čemu među energijom i impulsom postoji proporcionalnost već indicirana kroz jednadžbu (15.20). To je ekvivalentno izjavi da zračenje pronosi impuls i proizvodi tlak.

15.4 Cirkularno polarizirani ravni val pronosi i kutnu količinu gibanja

Polariziranom svjetlu i manipulacijama s polarizacijom bit će posvećeno posebno poglavljje. Ovdje je dovoljno reći da se posebnim postupcima može proizvesti svjetlo čiji električni vektor a time i magnetski rotiraju kružnom frekvencijom ω . Tada govorimo o cirkularno polariziranoj svjetlosti. Ovdje ćemo pokazati postupkom analognim gornjem da se u tom slučaju kroz medij također pronosi i kutna količina gibanja (sposobna proizvesti rotaciju).

Polazi se od razmatranja naboja q koji je pod utjecajem rotirajućih polja \vec{E} i \vec{B} . Promatranje činimo u ravnini koja je okomita na smjer širenja vala. U istoj ravnini nalazi se i vektor trenutne brzine naboja $q : \vec{v}$. On rotira istom kružnom frekvencijom kao i vektori polja malo zaostajući za vektorom električnog polja. Kako su pri kružnom gibanju položaj i trenutna brzina okomiti, to isto tako rotira na istom radijusu $v = \omega r$ i vektor $\omega\vec{r}$ također unutar ravnine svih ostalih rotacija. Pogledajmo moment sile kojeg daje Lorenzova sila na naboju q smješten na položaj \vec{r} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{r} \times q\vec{E} + \vec{r} \times (q\vec{v} \times \vec{B}) \quad (15.26)$$



Prvi sumand stalno je usmjeren duž osi napredovanja vala (z os). Drugi sumand oscilira periodički u x-y ravnini i njegova, po periodu rotacije uprosječena vrijednost, je nula. Prvi sumand ima zgodno svojstvo da mu je modul povezan sa skalarnim produktom električnog polja i brzine naboja:

$$\omega \vec{r} \times \vec{E} = \hat{z} \vec{v} \vec{E} \quad (15.27)$$

Relacija (15.27) je neobičnog izgleda ali je od velike pomoći i lako se verificira. Da joj je smjer korekstan je izvjesno jer \vec{r} i \vec{E} kruže sinkrono u ravnini okomitoj na z os. Jednakost modula potječe od već gornjem tekstu spomenute relacije kutne i obodne brzine. Uz to se dodaje da su vektori brzine i položaja okomiti pa se to odražava u činjenici da je sinus relativnog kuta u vektorskem produktu jednak kosinusu relativnog kuta u skalarnom produktu. Konačni rezultat naše diskusije jest da se uprosječena vrijednost momenta sile iz (15.26) može napisati kao:

$$\langle \vec{M} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \frac{\hat{z}}{\omega} \langle q\vec{v}\vec{E} \rangle \quad (15.28)$$

Relacijom (15.24) smo pokazali da je to s faktorom $1/\omega$ upravo brzina apsorpcije energije. Tako je konačni rezultat

$$\vec{L} = \hat{\omega} \frac{Energ}{\omega} \quad (15.29)$$

Ova relacija nam također ukazuje da se apsorpcijom cirkularno polariziranog zračenja apsorbira i kutna količina gibanja. To znači da se može proizvesti i rotiranje objekata. Kada student bude upoznat s konceptom kvanta svjetlosti: fotona, ova će relacija ukazivati da cirkularno polarizirani fotoni nose kvant kutne količine gibanja: spin.

15.5 Stvaranje elektromagnetskih valova titranjem naboja

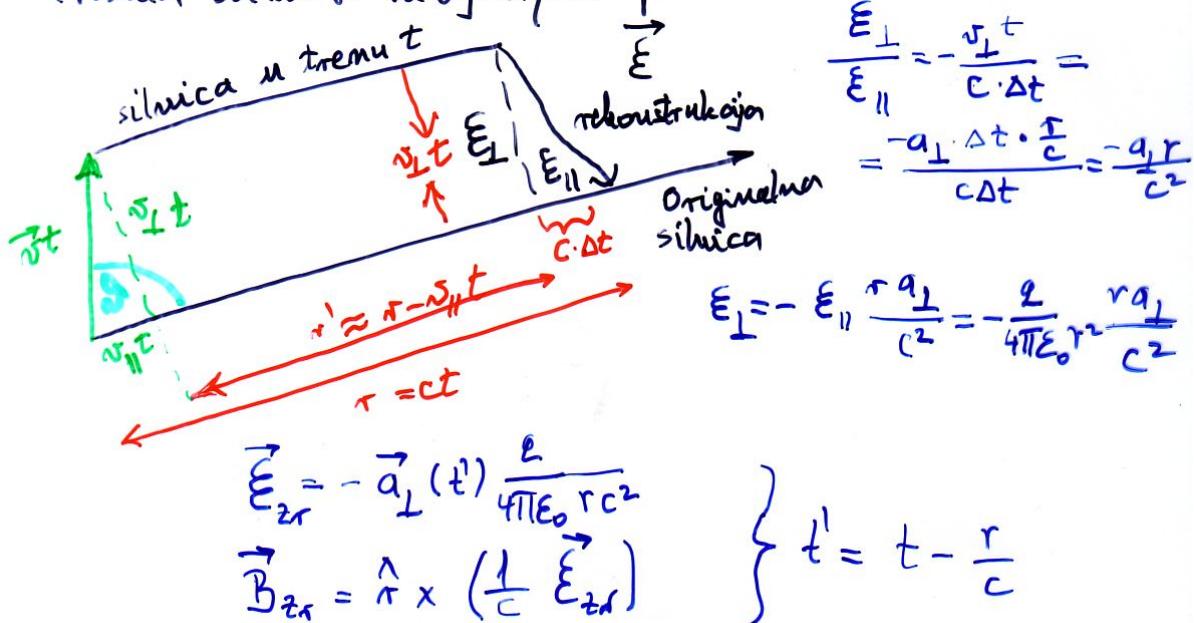
Dok smo za mehaničke i zvučne valove dali objašnjenja kako ih se pokreće to još nismo načinili za EM valove. Koristeći poznati princip vremenske inverzije (proces koji može teći u jednom smjeru toka vremena treba moći teći i obratno) možemo se vratiti procesu apsorpcije

elektromagnetskog zračenja kada vezani elektron titra. Elektron prisiljen na titranje apsorbira dio elektromagnetskog vala. Očito je moguć obrat. Ako elektron titra, mora proizvoditi elektromagnetski val. S druge strane elektromagnetski val ne može biti posljedica jednolikog gibanja elektrona. Naime invarijantnost fizikalnih događaja na jednoliku translaciju to sprečava. U sustavu u kojem elektron miruje on ne proizvodi EM val. Kako val predstavlja pronos energije, i tog pronaša nema dok elektron miruje, isto mora vrijediti i u svim sustavima koji se jednoliko gibaju. Znači da jednoliko gibanje ne može proizvoditi elektromagnetske valove. Jasno dakle, da samo akceleriranje (jednako u svim inercijskim sustavima) može proizvoditi zračenje. Iz već spomenutog slučaja međudjelovanja naboja i vala sjećamo se također da elektron prisiljen na titranje titra okomito na smjer širenja vala. Tako očekujemo da elektronovo titranje proizvodi val usmjeren okomito na smjer titranja naboja.

Koncept koji izvrsno pomaže u izvodu izraza za zračenje je koncept silnica električnog polja: zamišljenih niti koje izlaze iz pozitivnog naboja i odlaze ili prema beskonačnosti ili prema nekim drugim nabojima. U drugom smo semestru obrazlagali njihovu upotrebljivost u slijedećem smislu. Gustoća silnica u prostoru odražava jakost električnog polja u tom dijelu prostora. Radi $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ u prostoru bez naboja, silnice se ne mogu prekidati niti nastajati dok ne nađemo na novi naboј. Sve nas to navodi na model praćenja pojave zračenja promatranjem što se dešava sa silnicom kada se naboј pomiče. Pretpostavljamo da iz stanja mirovanja, u ishodištu, u $t = 0$ naboј q doživljava kratko vrijeme Δt snažnu akceleraciju \vec{a} koja je pod kutom ϑ orijentirana u odnosu na položaj \vec{r} točke u kojoj ćemo izračunavati efekt te kratkotrajne akceleracije; točka s radiusvektorom \vec{r} je vrlo daleko od ishodišta. Nakon toga naboј nastavlja jednoliko gibanje brzinom $\vec{v} = \vec{a}t$. Dodatna je pretpostavka da je brzina jednolikog gibanja zanemariva prema brzini svjetlosti c. Pogledajmo što se dešava sa silnicom koja iz naboјa q teče prema udaljenoj točki promatranja. Silnica se u fazi jednolikog gibanja praktički translatira paralelno svojoj osnovnoj orijentaciji u vrijeme $t = 0$. Vijest o promjeni položaja naboјa putuje puno brže (s brzinom c) nego što se naboј miče! Vidi sliku:

Scenarij događaja: Naboj q miruje u ishodištu od $t = -\infty$ do $t=0$. U kratkom intervalu Δt naboj se jednako ubrzava do brzine $\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$ preko ravniči ravnanja put. Potom putuje vrijeme t jednako put $\vec{v} \cdot t$ mactan zeleno na crtežu. Promatra se efekt scenarija u dalekoj točki \vec{r} pod kutem θ .

Posljedice na silnici: Radi Gaussovog teorema / sacuvanja naboja / silnice se ne \rightarrow kidaju nego prenijetaju. U $t=0$ silnica ide do točke $\vec{r} = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. U točki \vec{r}' je polje $\frac{q \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$. Relativistički faktor u limesu $v \ll c$ postaje jedinica. Stoga polje naboja ravničenog u točki \vec{r}' ima silnicu paralelnu stanicu do točke \vec{r}' . Informacija o promjeni nije dospjela iza točaka daljih od $r=ct$. Stoga je u \vec{r}' i dalje silnica podnena kao prije. Radi nebitnosti silnice moramo je rekonstruirati između \vec{r} i \vec{r}' ; i iz sličnosti trebata odrediti radijacijski puls.



Ključan za naše razmatranje jest trokut koji započinje u točki do koje je vijest o promjeni položaja došla; slijedeća točka je na presjeku okomice spuštene iz te točke na pravac originalne silnice i točka na staroj silnici u kojoj informacija o promjeni u izvoru upravo stiže. Hipotenuza tog trokuta je komada silnice između krajnje točke nove silnice i krajnje točke stare silnice u koju informacija upravo stiže. Student može provjeriti da se jakost električnog polja duž smjera silnice nije u suštini promijenila, čak ako se uzme u obzir relativistički efekt iz drugog semestra tako dugo dok je omjer $\beta = v/c$ zanemariv. Trokut kojeg zatvaraju silnica i njezine komponente (okomito i paralelno smjeru stare silnice) sličan je trokutu kojeg čine komad silnice između stare i nove silnice, puta kojeg je u međuvremenu u transverzalnom smjeru prevalio izvor ($v_{\perp}t$) i vremena i puta kojeg je svjetlosti trebalo da se informacija o efektu nastalom akceleracijom proširi od okomice iz novog položaja do položaja promatrana efekta ($c\Delta t$) duž stare silnice. Iz sličnosti pravokutnih trokuta komponenti polja i trokuta koji je sastavljen od navedenih putova, slijedi:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = -\frac{v_{\perp}t}{c\Delta t} = -\frac{a_{\perp}\Delta t(r/c)}{c\Delta t} = -\frac{a_{\perp}r}{c^2} \quad (15.30)$$

Transverzalni puls električnog polja možemo sada izračunati iz longitudinalne komponente koju znamo iz Coulombovog zakona:

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (15.31)$$

$$E_{\perp} = -E_{\parallel} \frac{a_{\perp}r}{c^2} = -\frac{a_{\perp}q}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \quad (15.32)$$

U (15.32) treba još pamtitи da polje zračenja opisano s (15.32) i vrijednost transverzalne akceleracije ne potječe od istog vremenskog trenutka. Vrijeme za koje treba vrijednost akceleracije je ranije od posljedice u točki r za iznos r/c . U najvećem broju slučajeva se ovo može zanemariti, no studenti će u kasnijim godinama sresti i posljedice ovog kašnjenja (stručno nazvano retardacije). Ovdje smo izračunali posljedicu kratkotrajne akceleracije naboja na jakost električnog polja u daljini. Možemo ići i korak dalje i generalizirati naš rezultat (15.32) na svako akceleriranje naboja kada se efekt promatra u vrlo dalekoj točki.

Izraz (15.32) vrijedi i dalje, iako se akceleracija u vremenu mijenja. Određenu vizualnu analogiju u ponašanju silnice imamo s transverzalnim pulsom kojeg generiramo na početku elastične žice i koji se brzinom određenom uvjetima medija širi longitudinalno kao transverzalni puls. Analogija nije potpuna jer u mehaničkom slučaju sva energija pulsa ide jednim smjerom i stoga se ne smanjuje. U električnom slučaju energija odlazi u cijeli prostor što se odražava u faktoru $1/r$ u (15.32). Konačni rezultat našeg razmatranja jest:

$$\vec{E}_{zrac}(\vec{r}, t) = -\vec{a}(\vec{r}, t - \frac{r}{c}) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \quad (15.34)$$

Magnetsko polje dobijemo uzimanjem u obzir relacije stečene kod putujućeg EM vala (15.10) i (15.11) :

$$\vec{B}_{zrac} = \hat{r} \times \left(\frac{1}{c} \vec{E}_{zrac} \right) \quad (15.35)$$

15.6 Snaga i energija koju zrači titranje električnog naboja

Već smo pokazali kako se tok snage (energija u jedinici vremena koja prolazi jediničnom površinom izražava Pointingovim vektorom:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \hat{r} \varepsilon_0 c E^2 = \hat{r} \frac{\varepsilon_0 q^2 a_{\perp}^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^2 c^3} \quad (15.37)$$

Ovaj nam je izraz pogodan za izračunavanje najprije snage koja prolazi površinom dA okomitom na tok zračenja da bismo potom izračunali totalnu snagu izračenu u prostor.

$$dP = S dA = \frac{q^2 a_{\perp}^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{4\pi} \frac{dA}{r^2} \quad (15.38)$$

U gornjem izrazu je posljednji razlomak element prostornog kuta $d\Omega$; zajedno s faktorom prije $1/(4\pi)$ to je priprema za proračun srednje vrijednosti prvog razlomka po svim smjerovima zračenja. Kako je jedina o smjeru zavisna veličina transverzalna akceleracija (koja sinusno ovisi o kutu emisije theta) to će integral ukupne snage značiti zapravo određivanje srednje vrijednosti od $\sin^2 \theta$ (po kugli), koja iznosi $2/3$.

$$P(t) = \int dP = \frac{q^2 a^2(t')}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{d\Omega} \sin^2(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2(t')}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (15.39)$$

Ovo je iznos snage koja se akceleracijom a naboja q ukupno zrači u prostor. Iz (15.38) je jasno da ta snaga emitirana u površinu dA opada s udaljenošću od izvora s kvadratom udaljenosti! U (15.39) se pojavljuje za akceleraciju vrijeme $t' = t - r/c$ kao i u izrazu (15.34).

Najjednostavniji i prvi uređaj za proizvodnju EM valova ostvario je Hertz. Za to mu je poslužio LC krug. Kapacitor kruga je primao veliku količinu naboja, dok kroz zračni raspored nije potekla struje. Kroz tako ionizirani plin struja je nastavljala teći i nakon ispraznjenja kapacitora jer je energija uložena u stvaranje magnetskog polja induktiviteta to omogućivala. Tako se kapacitor punio na obratni polaritet. Tada bi struja potekla kroz ionizirani plin u obratnom smjeru. Nastalo titranje je bilo visokofrekventno i gušeno, jer se energija trošila na tok struje kroz ionizirani plin. Praktički poučak za studente: iskršta su često izvori elektromagnetskih valova. Da svjećice u automobilima ne bi ometale radioprijemnike dodaju se u električki krug posebne komponente.

POKUS

Demonstriranje Hertzovih valova dobivenih titranjem električnog naboja

15.7 Primjena rezultata o energiji emitiranoj zračenjem na konfiguraciju dipola

Rezultati koje smo izveli u osječku 15.5 su vrlo općeniti. U praksi postaje mnogi oblici nakupina naboja (podsjetnik: multipolni razvoj kao moguća karakterizacija). Prirodno, svaka karakteristična konfiguracija pri prostornom titranju ima svoju karakterističnu raspodjelu intenziteta zračenja po prostoru. U nuklearnoj fizici, na primjer, kvadrupolna komponenta može postati važna radi geometrijskih ograničenja u raspodjeli nuklearnih naboja. Mi ćemo se radi jednostavnosti ograničiti na najjednostavniju geometriju izvora: dipol. Jednodimenzionalno titranje točkastog naboja q ima karakteristike dipolnog zračenja. Ako smjer titranja ograničimo na x-os i ograničimo ga na harmonijsko titranje kružnom frekvencijom ω imamo:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad i \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (15.40)$$

Uvrštavanjem gornje akceleracije (i oznakom kuta između smjera titranja i smjera promatranja ϑ) u (15.38) slijedi izraz za diferencijal snage u geometriji dipola :

$$dP = \frac{a^2(t')q^2}{4\pi\varepsilon_0c^3} \sin^2 \vartheta(t') \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{q^2\omega^4}{4\pi\varepsilon_0c^3} x^2(t') \sin^2 \vartheta(t') \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (15.41)$$

t' je naravno vrijeme koje se od t razlikuje za interval potreban da signal stigne od izvora do točke promatranja kao i u prošlom odsječku. Uzimanjem prosječne vrijednosti po periodu titranja i po smjerovima emisije slijedi:

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega^4}{4\pi\varepsilon_0c^3} \langle x^2(t') \rangle \quad (15.42)$$

15.8 Procjena vremena života i spektralne širine zračenja pri emisiji atomskog elektrona. (Klasični pristup)

U klasičnom modelu je elektron vezan elastično na ostatak atoma „konstantom opruge“:

$$k = m\omega_0^2 \quad (15.43)$$

Pri titranju frekvencijom ω_0 u (15.42) smo ustanovili snagu koja se pri tome emitira u prostor. Znači, ako je na početku atom imao energiju E_{energ} , on tu energiju gubi zračenjem. Dvije su posljedice: pojavit će se karakteristično relaksacijsko vrijeme; ritam gubljenja energije, a to znači i da slijedi preko Fourierove transformacije i odgovarajući spektralni interval frekvencija koje se u zračenju pojavljuje! Napišimo najprije izraz za prosječnu energiju tijekom perioda titranja:

$$\langle E_{energ}(t) \rangle = \langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \rangle = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle \quad (15.44)$$

Prema (15.42) je energija koja se zrači:

$$P = -\frac{dE_{energ}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^4}{4\pi\varepsilon_0c^3} \frac{\langle E_{energ}(t) \rangle}{m\omega_0^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0c^3 m} \langle E_{energ}(t) \rangle \quad (15.45)$$

Integriranjem diferencijalne jednadžbe (15.45) po vremenu:

$$\langle E_{energ}(t) \rangle = E_{energ}(t=0)e^{-t/\tau} \quad (15.46)$$

gdje je relaksacijsko vrijeme τ jasno iz (15.46)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^2}{m4\pi\varepsilon_0c^3} = \Delta\omega \quad (15.47)$$

Jednakost početka i kraja (15.47) potječe iz veze neodređenosti u vremenskom trajanju τ i $\Delta\omega$ frekventne širine potrebne da se opiše eksponencijalni pad energije iz (15.46). U kvantnoj fizici to korespondira vremenu života stanja koje emitira frekvenciju ω_0 i energijskoj širini emitiranog spektra.

15.9 Boje vedrog neba i neba pri zalasku sunca

POKUS

Vodom u kojoj se nalaze molekularni raspršivači svjetla imitira se nebo. Prati se rezultat obasjanja mješavine običnom svjetlošću i opaža raspršenje svjetla veće frekvencije i dublji prolaz svjetla niže frekvencije

Zadržimo oznake gornjeg slučaja s tim da elektron prisilno titra frekvencijom vanjskog električnog polja $E_x(t) = E_0 \cos \omega t$ koja je mnogo manja od frekvencija rezonantnog područja. To znači da je $\omega \ll \omega_0$ i da je pri interakciji svjetla i elektrona elektron prisiljen titrati:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad \text{što povlači} \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (15.48)$$

Ako je, kao i prije elektron za atom elastično vezan, tada je jednadžba gibanja:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x(t) = -m\omega_0^2 x(t) + qE_x(t) \quad (15.49)$$

Odatle slijedi:

$$x(t) = \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (15.50)$$

Uvrštenjem (15.50) u izraz za emitiranu snagu (15.39) imamo:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4 < x^2 >}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2 < E_x^2(t) > \quad (15.51)$$

Dok smo daleko od rezonancije nazivnik u (15.51) je praktički konstantan pa je emitirana snaga proporcionalna s ω^4 (Rayleigh-ev zakon). Jasno je da će se plava svjetlost mnogo jače raspršivati od crvene svjetlosti (njih dvije simboliziraju ekstremne krajeve spektra). To konkretno znači da se na elektronima vezanim uz molekule zraka plava svjetlost jako raspršuje dajući nebu obasjanom suncem plavu boju. Na zapadu sunčana svjetlost prolazi kroz debeli sloj atmosfere, mnogo deblji od onog u podne, pa do nas dopire u direktnom smjeru samo najmanje raspršena svjetlost crvene boje. NAPOMENA: gledanje sunca pri zapadu može trajno oštetiti vid. Iako je svjetlo relativno mnogo slabije od onog u podne, direkstan pogled i u sunce na zapadu ugrožava vid čovjeka!

16.10 Pojam udarnog presjeka i njegov iznos za raspršenje svjetla na elektronima (klasično)

Mikrosvijet nije dostupan našem oku. Koristeći znanje stečeno u klasičnim uvjetima mi prodiremo u područje nevidljivog pogodnim eksperimentima. Poslužimo se naivnim modelom. Skriveno od našeg pogleda nalazi se zapreka kojoj ne možemo doprijeti mjernim instrumentima. Na zapreku međutim možemo puštati homogene rojeve loptica koje se od zapreke elastično odbijaju. Iz omjera reflektiranih loptica i onih koje su ukupno bačene prema zapreci (ako su loptice jednolikom raspoređene po presjeku snopa) možemo odrediti dimenzije zapreke. Štoviše, iz kutne raspodjele reflektiranih loptica, za elastične sudare, možemo odrediti i oblik zapreke! Tako metoda raspršivanja snopa na objektima našeg istraživanja postaje najmoćnije istraživačko oruđe u mikrosvijetu. (Tako je i napredak u akceleratorskoj tehnici temelj našeg prodora u mikrosvijet).

Pođimo od opisa objekata našeg istraživanja. Neka je njih N raspoređeno na površini A . Neka je poprečni presjek svakog objekta σ . Tada je omjer površina od kojih jedna predstavlja zapreke (ukupno $N\sigma$) a druga ukupnu površinu jednak: $N\sigma/A$. Taj omjer predstavlja ujedno i vjerojatnost da roj upadnih projektila zanemarivih dimenzija pogodi jednu od čestica zapreka. Stoga će omjer toka raspršenih čestica: dn/dt i toka upadnih čestica dn_{upadno}/dt koji upravo eksperimentalno utvrđuje tu vjerojatnost biti:

$$\frac{dn/dt}{dn_{upadno}/dt} = \frac{N\sigma}{A} \quad (15.52)$$

Napisano zgodnije,

$$dn/dt = \frac{N\sigma}{A} \frac{dn_{upadno}}{dt} \quad (15.53)$$

Ovaj općeniti izraz možemo sada primijeniti na međudjelovanje svjetlosti i elektrona propitujući elektronove efektivne dimenzije! Izraz (15.53) pomnožimo s energijom koju nosi pojedini projektil. S lijeve strane tako dobivene relacije bit će ukupno raspršena snaga na N objekata:

$$P_{raspršeno}(N) = N\sigma \left(\frac{1}{A} \frac{dn_{upadno}}{dt} \right) \text{Energija projektila} \quad (15.54)$$

Izraz u zagradi na desnoj strani predstavlja upadnu snagu u snopu po jedinici površine. Snaga raspršena na jednom projektilu $P_{raspršeno}(1)$ dobije se iz izraza (15.54) dijeljenjem s brojem projektila N .

Tako je iz (15.54) očito:

$$P_{raspršeno}(1) = \sigma S \quad (15.55)$$

Gdje je S Poyntingov vektor upadnog zračenja. Mi međutim znamo raspršenu snagu na elektronu iz (15.51). Vezom Poyntingovog vektora i kvadrata električnog polja imamo konačno:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (15.56)$$

U visokoenergijskom limesu kada možemo zanemariti ω_0 izraz se simplificira na:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^{-2} \quad (15.57)$$

odakle je značenje r_0 jasno povezano s dimenzijom kojom zračenje „vidi“ elektron!