

## 14. Valovi u tri dimenzije

U tri dimenzije možemo imati veliko bogatstvo mogućnosti; na primjer putujući val u jednom smjeru, stojni val u okomitom smjeru i eventualno eksponencijalni val u trećem okomitom smjeru. No nas najprije zanima generalizacija ravnog vala iz poglavlja prije ovog

### 14.1 Harmonički ravni val u prostoru

Promotrimo sinusoidalno/kosinusoidalno koje se širi u smjeru opisanim valnim vektorom  $\vec{k}$  koji za razliku od prijašnjeg poglavlja ima i z komponentu. Ravnine istog stanja titranja su položene okomito na smjer valnog vektora. Student će lako provjeriti da titranje :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (14.1)$$

opisuje za  $t=0$  slijedeću situaciju. Val ima maksimum u ishodištu, a istu vrijednost val ima za sve točke u kojima je  $\vec{k}\vec{r} = 0$ . To je ravnina koja ide ishodištem a okomita je na vektor  $\vec{k}$ . Sada možemo ponoviti argumentaciju iz prošlog poglavlja. Pođimo u smjeru valnog vektora za iznos  $r = \frac{2\pi}{k}$ . Ta točka ima ponovno maksimalnu vrijednost u titranju. Sve točke koje su

u ravnini okomitoj na valni vektor  $\vec{k}$  a uključuje navedenu točku imaju slijedeći trbuh vala. To znači da je razmak dvije paralelne ravnine trbuha:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (14.2)$$

Tako izraz (14.1) opisuje za  $t=0$  kosinusoidalni oblik raspodjele amplituda u prostoru smješten tako da je maksimum u ishodištu i u cijeloj ravnini koja ide ishodištem te u svim ravninama koje su za višekratnik od (13.2) udaljene od ravnine trbuha koja ide ishodištem. Ako sada počnemo uključivati i vremensku zavisnost jasno je da se ove ravnine trbuha, a tako i sve druge ravnine istog stanja titranja miču u smjeru valnog vektora  $\vec{k}$  koja se dobiva iz zahtjeva:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{kons tan ta} \quad (14.3)$$

Iz (14.3) je jasno da je brzina napredovanja tih ravnina  $v = \frac{\omega}{k}$  (kao i u jednodimenzionalnom i dvodimenzionalnom slučaju!!!)

### 14.2 Veza disperzijske relacije i valne jednadžbe u slučaju elektromagnetskih valova u vakuumu

U vakuumu nema plazme pa frekvencija plazme u disperzijskoj relaciji (9.14) iščezava. Tako je disperzijska relacija elektromagnetskih valova u vakuumu:

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (14.4)$$

Ovu relaciju možemo množiti s amplitudom  $\psi$  i rezultat usporediti s drugim derivacijama putujućih valova (14.1):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi \quad (14.5)$$

Očito rješenja oblika (14.1) zadovoljavaju jednadžbu dobivenu iz disperzijske relacije; s druge strane diferencijalna jednadžba koje je nastala iz disperzijske relacije (14.4) jest:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (14.6)$$

Tako za dobivanje valne jednadžbe za komponente električnog i magnetskog polja imamo osim Maxwellovih jednadžbi i kraticu preko disperzijskih relacija! Naravno da isti pristup možemo primijeniti i pri nalaženju valne jednadžbe za valove u plazmi polazeći od originalne disperzijske relacije za valove u plazmi: (9.14).

### 14.3 Elektromagnetski val unutar pravokutnog valovoda (u vakuumu)

Disperzijska relacija (14.4) i valna jednadžba (14.6) mogu biti početna točka i za razmatranje putujućih valova duž valovoda konstruiranog od vodičkog materijala formiranog iz pravokutnog profila širine  $\check{s}$  i razmaka  $r$ , čije su dužinske dimenzije daleko veće tako da u smjeru osi  $z$  uzimamo da su beskonačne. Kako u  $x$  smjeru visine  $i$  y smjeru širine imamo rubni uvjet postojanja vodiča, u tim smjerovima se formira stojni val, dok se elektromagnetski val širi duž osi  $z$ . Tako je rješenje(\*) za ponašanje elektromagnetskog titranja u ovom valovodu:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \quad (14.7)$$

Radi rubova imamo diskretizaciju spektara  $k_x$  i  $k_y$  vrijednosti:

$$k_x r = \pi, 2\pi, \dots, m\pi \dots \quad k_y \check{s} = \pi, 2\pi, \dots, n\pi \dots \quad (14.8)$$

Time se disperzijska relacija svodi na:

$$\omega_{m,n}^2 = c^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{r} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\check{s}} \right)^2 + k_z^2 \right] \quad (14.9)$$

Iz (14.9) je jasno da svaki mod  $(m,n)$  ( rasporeda  $\psi_{m,n}$  po  $x-y$  ravnini ) koji prema (14.7) putuju duž valovoda ima graničnu frekvenciju :

$$\omega_{m,n}^2(\text{graničra}) = c^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{r} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\check{s}} \right)^2 \right] \quad (14.10)$$

Dok  $\omega$  nije veći od  $\omega_{m,n}$ , mod  $(m,n)$  [ to jest površinska raspodjela amplitude zadana kvantiziranim vrijednostima  $k_{xm}$  i  $k_{yn}$  sukladno uvjetima (14.8), a koja se pojavljuje u (14.7) ] ne može se širiti duž  $z$  smjera. Naime da bi se mod širio duž osi  $z$ , mora  $k_z^2$  biti pozitivan. Vratimo se još jednom stvaranju slike o valu (14.7). On za  $t=0$  i  $z=0$  predstavlja produkt sinusne raspodjele  $i$  u  $x$  i u  $y$  koordinati. Kad uključimo vrijeme  $i$  os  $z$ , vidimo da taj profil koji smo upravo razmatrali putuje duž osi valovoda. To je način transporta titranja visoke frekvencije bez gubitaka na zračenje.

Naime električna i magnetska polja su zatvorena unutar vodičkih zidova valovoda. Kada bi ta polja u značajnom iznosu prodirala izvan valovoda, valovod bi se ponašao poput radio-antene i postojali bi radi toga veliki radijativni gubici.

(\*) *Korektnosti radi moramo spomenuti da postoje i rješenja  $\psi$ , koja u  $x$  i u  $y$  smjeru zavise kosinusno o položaju. Odluka o kojoj se raspodjeli radi zavisi o rubnom uvjetu koji želimo ispuniti. Diskusija rubnih uvjeta na valovodu, međutim, tražila bi mnogo opširniji tekst i nije na direktnoj liniji sadašnjeg razmatranja. U jednom od kasnijih kolegija tome se posvećuje veća pažnja kada se valovod diskutira u kontekstu mikrovalne tehnologije.*

## 14.4 Potankosti prijelaza elektromagnetskih valova iz jednog sredstva u drugo

U našem prvom susretu s lomom svjetlosti sreli smo pojam graničnog kuta u smislu da svjetlost ne može prijeći iz optički gušćeg sredstva u optički rjeđe sredstvo ako dolazi pod kutom većim od graničnog. Taj smo zaključak izveli iz Snellovog zakona ; zaključak je makroskopski točan no ne i mikroskopski kako ćemo sad pokazati. Promatramo optička sredstva 1 i 2 s odgovarajućim indeksima lomova. Apsolutne vrijednosti valnih vektora se mogu proračunati standardnom vezom s kružnom frekvencijom i brzinom širenja svjetla u sredstvu, koja je povezana s indeksom loma.

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = n_1 \frac{\omega}{c} \quad (14.11)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (14.12)$$

Razdijelimo valne vektore u komponente: n-normalna na površinu i p-paralelna s površinom kontakta. Kao i prije kut theta se mjeri u odnosu na normalu na površinu kontakta. Imamo četiri relacije za te komponente dobivene projiciranjem

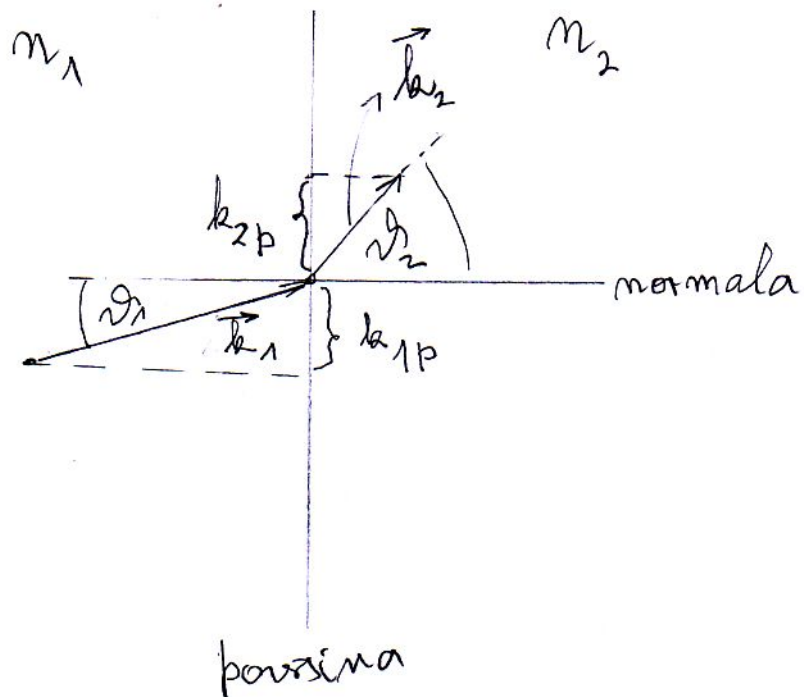
$$k_{1n} = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta_1 \quad k_{2n} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta_2 \quad k_{1p} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1 \quad k_{2p} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_2 \quad (14.13)$$

Broj valova na kontaktnoj površini mora biti stalan to komponente valnih vektora paralelne kontaktnoj površini moraju biti jednake

$$k_{1p} = k_{2p} \quad (14.14)$$

što iz (13.26) povlači:

$$n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_2 \quad (14.15)$$



Ovo je poslije kraćenja zajedničkih faktora zakon loma koji smo već izveli. Možemo sada krenuti od disperzijskog izraza u sredstvu 2, za koje pretpostavljam da je rjeđe ( $n_1 > n_2$ ):

$$n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} = k_{2p}^2 + k_{2n}^2 = \text{prema (14.14) i (14.13)} = (n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1)^2 + k_{2n}^2 \quad (14.16)$$

odakle proizlazi:

$$k_{2n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1) \quad (14.17)$$

Dok vrijede uvjeti prije graničnog kuta kvadrat komponente (14.17) je pozitivan i titranje se nastavlja u drugom sredstvu. Povećanjem kuta iza veličine graničnog kuta je  $k_{2n}^2$  negativan \* (\* Naime kod graničnog kuta, uz uvjet da je sredstvo 1 većeg indeksa loma od sredstva 2, vrijedi  $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2$ . Za veći upadni kut  $\vartheta_1$ , izraz  $n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1$  u (14.15) premašuje  $n_2 \frac{\omega}{c}$  što je modul valnog vektora  $k_2$  i time automatski  $k_{2n}^2$  postaje negativan.)

To znači da smo u situaciji eksponencijalnog vala! Dalje je ponašanje:  $e^{-\kappa x}$  ako s  $x$  označimo koordinatu u smjeru normale na kontaktnu površinu. To je veoma važno. Val se ne prekida smjesta kontaktom s drugim medijem. On se u njemu nastavlja ali ne kao putujući val nego kao stacionarno titranje koje eksponencijalno zamire. Ova pojava ima fundamentalne posljedice: Mi možemo modulirati jakost reflektiranog elektromagnetskog signala mijenjajući razmak raspore između ploča istog prozirnog materijala ako zračenje dolazi pod kutom većim od graničnog. Naime mijenjanjem tog razmaka mi odlučujemo debljinu kojom u rasporu upadni signal trne. Domogavši se ponovno sredstva indeksa loma prve ploče, signal se dalje transmitira kao putujući val oslabljen eksponencijalnim faktorom trnjenja.

## 14.5 Tuneliranje

Izvadili smo ova razmatranja u posebni pasus iako su ona samo nastavak gornje materije. Gore opisani efekt je oslabljenja signala prolaskom kroz sloj materijala s indeksom loma manje vrijednosti od materijala kroz koji se signal normalno širi kao putujući val kada zračenja pada na graničnu plohu pod kutom većim od graničnog kuta. Tada se u tom međusloju javlja eksponencijalni atenuirajući val. Spoznajno je ova mogućnost strahovito bitna. Naime ona ima pandan u kvantnoj mehanici kada val materije (slikovito čestica) nailazi na potencijalnu barijeru koja je viša od njene kinetičke energije. Klasična bi se čestica odbila od barijere. No u punoj analogiji s gornjim primjerom, u kvantnoj fizici se javlja eksponencijalno trnjenje vjerojatnosti da će se čestica naći u ili iza barijere ali situacija nije kompletno determinirana. Kako se ide dublje u barijeru, vjerojatnost penetracije eksponencijalno opada ali nije automatski jednaka nuli. Slikovito se kaže da čestica tunelira kroz barijeru .

### ***POKUS***

*Pokazuje se studentima kako mikrovalovi bivaju reflektirani ako naiđu pod kutom većim od graničnog. Štoviše rezanjem parafinske ploče i mijenjanjem razmaka među tim dijelovima pokazuje se da val doista može proći kroz zračni raspor ako može nakon njega nastaviti u istom sredstvu i ako taj razmak nije prevelik s obzirom na brzinu atenuacije.*