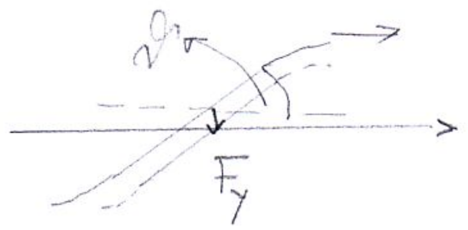
10. Definicija i uloga impedancije pri širenju valova

Do sada smo zapravo istraživali područje titranja i valova služeći se pojmovima iz mehanike i elektromagnetizma. Pojam impedancije pri širenju valova je zapravo prvi novi fizikalni koncept u kolegiju. Uvodno počinjemo s činjenicom koju je student do sada treba već prihvatiti. Pri širenju valova ne prostire se neko tijelo, ne širi se dio medija, miče se duž medija stanje titranja. To vrijedi za sve do sada razmatrane valove: mehanička titranja, akustične valove i titranja elektromagnetskih polja. Kao što ćemo uskoro vidjeti, pri tome se duž medija transportira (pronosi) impuls i energija. No zapravo možemo govoriti i o pronosu sile kroz medij.

10.1 Definicija impedancije za mehaničke valove na jednodimenzionalnom mediju

Ovdje ćemo pokušati izbjeći zbrku s konvencijama u oznakama sile i dok se drukčije ne izreče razmatrat ćemo sinusoidalne (uključujući naravno i kosinusnu ovisnost o vremenu) koji se kreću u pozitivnom smislu orijentacije medija. Razmatramo dakle titranje oblika:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{10.1}$$



Potrebno je dobro se koncentrirati na crtež i razmotriti silu koja prema crtežu tjera pretpostavljeni oblik u pozitivnom smjeru orijentacije medija. Očito da bismo pozitivni nagib medija tjerali u pozitivnom smjeru x osi treba nam pogonska sila u negativnom smjeru y osi. Ako je ukupna napetost u mediju F i modul napetosti u x smjeru F_0, tada je ta pogonska sila:

$$F_y = -F\sin\vartheta = -F_0 tg\,\vartheta = -F_0\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{10.2}$$

Između parcijalnih derivacija po x i po t iz (10.1) slijedi:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{10.3}$$

Napomena: i ova relacija kao i gornja oslanja se na konvenciju širenja opisanu s (10.1).
Za suprotan smjer širenja, predznaci se mijenjaju!
Time nam je pogonska sila postala:

$$F_y = F_0\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv Z\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{10.4}$$

Tako je impedancija Z definirana kao konstanta proporcionalnosti između pogonske sile koja se pronosi medijem i brzine koju kao rezultat te sile ima trenutno promatrana točka medija.

POKUS

Demonstrira se na valostroju da se pri promjeni impedancije tijekom putovanja pulsa lokalna brzina titranja mijenja na mjestu promjene impedancije.

Kako Ohmov zakon daje sličnu vezu između napona (prisile) i struje (rezultata), često se govori o rezistivnosti medija. Naime, očito što je impedancija veća, to je postignuta brzina micanja medija manja. Treba strogo razlikovati ovu transverzalnu brzinu micanja medija od uzdužne brzine širenja vala: v!!! Još jednom upozoravamo da se relacije (10.2) i (10.3) odnose na širenje vala u pozitivnom smjeru orijentacije medija i da razmatramo pogonsku silu koja se pronosi kroz medij. Ovdje smo izveli izraz (10.4) za slučaj transverzalnih oscilacija. Identična veza onoj u (10.4) vrijede i u slučaju longitudinalnih putujućih valova. Jedina se promjena odnosi na izraz za brzinu širenja vala v koja drukčije zavisi o svojstvima medija nego izraz za v u transverzalnom slučaju. Radi kompletnosti izlaganja i kasnije potrebe mora se kompletirati popis sila koje se javljaju pri transportu valnog fenomena. Jasno je iz trećeg Newtonovog zakona da dok dio medija iz kojeg val dolazi tjera medij na titranje pogonskom silom (10.4) u točki promatranja, istovremeno medij djeluje na dio iz kojeg dolazi val silom koja je po iznosu jednaka a predznakom suprotna sili u (10.4). Ovu silu iz trećeg Newtonovog zakona spominjat ćemo samo kada moramo kako bismo maksimalno standardizirali predznake i smisao koncentrirajući se na pogonsku silu vala, a ne na reakciju na tu pogonsku silu (preuzimamo aktivno gledište).

10.2 Snaga koja se pronosi kroz medij za mehaničke valove

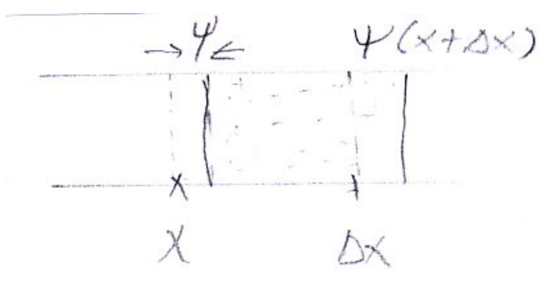
Uobičajeni produkt sile i brzine ovdje uzima oblik:

$$P = F_y \frac{\partial \psi}{dt} = Z\left(\frac{\partial \psi}{dt}\right)^2 \qquad (10.5)$$

I ovdje se vidi puna analogija Z s ohmskim otporom.

10.3 Zvučni valovi i njihova impedancija

Frekvenciju akustičkog rezonatora smo izveli već u (1.11). Koristit ćemo dio rezultata iz tog razmatranja da bismo izveli i valnu jednadžbu valova zvuka u plinu i pokazali izraz koji jedinstvenu definiciju impedancije (10.4) (doduše bez oznake za transverzalnost y) povezuje sa specifičnim svojstvima plina kojim se zvučni valovi šire. U prvom poglavlju je naš stupić zraka titrao na račun adijabatskih promjena u rezonatorovom cilindru.



I sada će nam koristiti adijabatske veze tlaka i volumena no u ovom izvodu zvučnog vala unutar šupljeg cilindra stupić zraka sam nema stalni volumen. On se pri titranju rasteže imajući na koordinati x odstupanje od položaja ravnoteže $\psi(x)$, a na položaju $x+\Delta x$ je njegovo odstupanje od ravnoteže $\psi(x+\Delta x)$.

Već smo spominjali da je zvuk u suštini titranje akustičkog nadtlaka (tlaka iznad ravnotežnog tlaka). Taj se pak nadtlak pojavljuje kao drugi pribrojnik u slijedećoj relaciji za ukupni tlak:

$$p = p_0 + \frac{\partial p}{dV} dV = p_0 + V \frac{\partial p}{dV} \frac{dV}{V} \tag{10.6}$$

Uzimajući u obzir adijabatsku relaciju između tlaka i volumena iz prvog poglavlja možemo analogno izvodu relacije (1.11) pokazati da je

$$V \frac{\partial p}{\partial V} = -\gamma p \qquad \text{dok je} \quad \frac{dV}{V} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10.7}$$

radi stalnosti presjeka cilindra. Uvrštavanjem u (10.6) dobiva se:

$$p = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10.8}$$

Sila koja stupić plina tjera na titranje je najprije razlika sila na krajevima. Svaka sila na kraju stupića je umnožak lokalnog tlaka i površine cilindra S:

$$F(x,t) - F(x+\Delta x,t) = SV \frac{\partial p}{\partial V} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x+\Delta x)}{\partial x}\right) = SV \frac{\partial p}{\partial V} \left(-\Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \tag{10.9}$$

S druge strane ta pogonska sila rezultira po drugom Newtonovom zakonu u :

$$F(x,t) - F(x+\Delta x,t) = S\Delta x \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{10.10}$$

Izjednačavanjem dviju posljednjih relacija uz uvažavanje prve relacije iz (10.7) imamo:

$$p_0 \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.11}$$

što je valna jednadžba za zvuk u plinu iz koje očitavamo brzinu zvuka:

$$v_{zvuk}{}^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho} \tag{10.12}$$

Da bismo dobili impedanciju plina u odnosu na valove zvuka očitamo silu akustičkog nadtlaka iz 10.6:

$$Sila \;\; nadtlaka = SV \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial x} = S\gamma p_0 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = S\sqrt{\gamma p_0 \rho} \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10.13}$$

Ako se (10.13) podijeli s površinom S dobiva se nadtlak koji igra ulogu pogonske sile i u definiciju akustičke impedancije prirodno ne ulazi nebitna veličina površine cilindra.

$$Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho} \tag{10.14}$$

10.4 Intenzitet zvuka

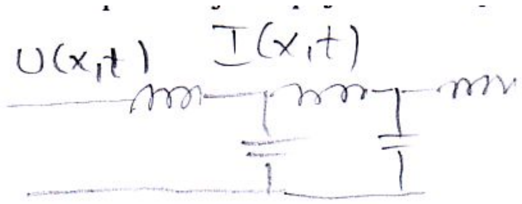
Sada je prilika iskoristiti izvedene relacije za mjeru intenziteta zvuka: Ako se pomnoži pogonski akustički nadtlak: $V \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *s brzinom* $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ dobiva se snaga na jedinicu površine koja medijem trenutno prolazi dok kroz njega putuju akustički val:

$$\frac{Snaga}{Površina} = V \frac{\partial p}{\partial V} \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 \tag{10.15}$$

Jasno je da postoje SI jedinice za intenzitet zvuka (w/kvadratni metar). No ljudsko uho ima logaritamsku osjetljivost i k tome je najosjetljivije oko 440 Hz. Stoga se uzima kao početak skale granica čujnosti ljudskog uha (na 440 Hz) od $10^{-12}\, W/m^2$. Logaritam omjera stvarnog intenziteta i ovog standarda je intenzitet u belima. Bel pak ima 10 decibela, što je prakticirana jedinica za mjerenje intenziteta zvuka. Tako je normalna čujnost negdje oko 100 db (odgovara $10^{-2} Wm^{-2)}$. Granica bola nastupa u blizini 130 db (oko 10 W/m^{-2}). Edukativno moramo spomenuti da pri ovim intenzitetima u uhu nastaju trajna oštećenja koja se više ne mogu izliječiti.

10.5 Impedancije LC prijenosnih linija

Pretpostavimo da LC prijenosnu liniju progonimo naponom $U_0 \cos \omega t$ koji niz liniju šalje napon $U_0 \cos(\omega t - kx)$ u skladu s našim poznavanjem takvog titrajućeg sustava.



Općeniti strujni odgovor je oblika:

$$I(x,t) = I_0 \cos(\omega t - kx) + I_1 \sin(\omega t - kx) \tag{10.16}$$

Analogon mehaničkoj impedanciji bi se pojavio kao vremenski stabilan omjer napona i struje; to znači da bi trebalo dokazati $I_1 = 0$. Na svakom kapacitoru je odnos napona i naboja isti:

$$Q(x,t) = CU(x,t) \tag{10.17}$$

čijim deriviranjem po vremenu i uvođenjem razlike struja koje hrane/prazne isti kapacitor : ΔI imamo:

$$C\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \Delta I = -\frac{\partial I}{\partial x}a \tag{10.18}$$

gdje je a prostorna dimenzija jedne LC petlje. Deriviranjem struje po prostornoj koordinati dobiva se pak:

$$-\frac{\partial I}{\partial x}a = -ak\sin(\omega t - kx) + ak\cos(\omega t - kx) \tag{10.19}$$

Uvrštenjem početne pretpostavke o obliku napona i njenim deriviranjem u (10.18) i unošenjem rezultata (10.19) imamo:

$$-\omega CU_0 \sin(\omega t - kx) = -aI_0 k\sin(\omega t - kz) + aI_1 k\cos(\omega t - kz) \tag{10.20}$$

što je jedino moguće uz $I_1 = 0$. Također dobivamo da je traženi faktor proporcionalnosti napona i struje Z:

$$Z = \frac{a}{C}\frac{k}{\omega} = \frac{a}{C}\sqrt{\frac{CL}{aa}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Također i} \quad Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} \tag{10.21}$$

Impedancija prijenosne linije je u Ω.
Za prenesenu snagu imamo također očekivani rezultat:

$$P = UI = ZI^2 \tag{10.22}$$

Analogija mehaničkih odnosa pogonske sile i brzine s odnosima u Ohmovom zakonu ide eto i u LC titrajne linije.