8. Putujući valovi

Oscilatorni fenomen koji se u vremenu širi medijem noseći impuls i energiju često ćemo nazivati putujućim valom. Da bi val počeo svoje širenje po mediju, koji može imati od jedne do sve tri dimenzije, potreban je izvor koji generira (stvara) titranje. Ako je trenje zanemarivo, putujući val u jednoj dimenziji ne će gubiti energiju; ako je dozvoljen disperzijskim relacijama, njegova će amplituda biti stalna. U više dimenzija u sličnim uvjetima amplituda može opadati tijekom širenja vala.

8.1 Putujući mehanički harmonički val u jednodimenzionalnom modelu sa faznom brzinom neovisnom o frekvenciji

Možemo se podsjetiti valne jednadžbe kakvu smo izveli za transverzalna i longitudinalna titranja : (4.2) i (4.6) za navedeni slučaj koju je ovdje dobro ponoviti:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{8.1}$$

Lako se možemo uvjeriti parcijalnim deriviranjem po vremenu i po prostornoj koordinati da izraz :

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{8.2}$$

zadovoljava valnu jednadžbu (4.2) pod uvjetom da su k i ω povezani relacijom (4.14) koju ćemo ovdje također ponoviti:

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{8.3}$$

Treba pažljivo razumjeti što rješenje (8.2) sve opisuje. Za određeni vremenski trenutak na primjer t=0 to je beskonačna kosinusna funkcija. No kako vrijeme teče ona se pomiče brzinom v prema većim vrijednostima argumenta x . To lako potvrđujemo opažanjem da se ista vrijednost kosinusne funkcije nalazi na mjestima gdje je argument kosinusa stalan: znači $kx - \omega t = const.$ *to jest* $x = \frac{\omega}{k}t + \frac{const}{k}$ ili uz (8.3)

$$x = vt + c_1 \tag{8.4}$$

gdje je $c_1 = \frac{const.}{k}$. Drugim riječima isti odmak od ravnotežnog položaja ostvaruje se duž medija slijedeći relaciju (8.4) koja je jednoliko gibanje brzinom v. Mi smo se upravo uvjerili da, formalno gledajući, od stacionarnog titranja stojnog vala dobivamo putujući val jednostavnom zamjenom $(A\sin kx + B\cos kx)\cos\omega t \to \mathrm{A}\cos(kx - \omega t)$.

DEMONSTRACIJE širenja putujućeg harmoničkog vala na velikom modelu u uvjetima „savršenog završenja“ (ovaj uvjet „savršenog završenja bit će uskoro preciziran; zasad student treba upamtiti da se na takvom kraju putujući valovi ne refelektiraju natrag.)

8.2 Mogućnost mehaničkih harmoničkih putujućih titranja u mediju u kojem postoje granične frekvencije

Do sada smo ustanovili da analitički oblik disperzijskih relacija ne zavisi od rubnih uvjeta. Kako druga parcijalna derivacija po vremenu bilo stacionarnog oblika titranja bilo onog oblika (8.2) rezultira istim rezultatom, jasno je da iste disperzijske relacije vrijede i za putujuće valove. Dok u slučaju disperzijske relacije (8.3) nemamo graničnih frekvencija, pri svim vrstama titranja elastično vezanih objekata imali smo donju i gornju graničnu (kružnu) frekvenciju titranja. Samo između njih mogla su se uspostaviti stacionarna rješenja oblika:

$$\psi(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \tag{8.5}$$

Prema tome je isto tako razumljivo da se sustavom, za koji u disperzijskim relacijama postoje ograničenja na frekvencije, mogu se širiti putujući valovi oblika (8.2) samo ako je kružna frekvencija titranja iz dozvoljenog područja kružnih frekvencija. Kada harmonijski putujući val frekvencije ω naiđe na dio medija u kojem je $\omega^2 < \omega_{donja}{}^2$, u nastavku medija će nastati stacionarno titranje u kojem su vremenska i prostorna zavisnost odvojene i imat će oblik na primjer:

$$\psi(x,t) = Ae^{-\kappa x}\cos\omega t \tag{8.6}$$

Naravno za diskretno razmještene oscilatore koordinata n-tog oscilatora postaje diskretna sukladno izrazu x=na. U slučaju da smo iznad gornje granične frekvencije ;uzmimo opet kao primjer diskretne rezonatore imat ćemo :

$$\psi_n(t) = A(-1)^n e^{-n\kappa a}\cos\omega t \tag{8.7}$$

Podsjećamo da smo potankosti stacionarnih titranja izvan disperzijskih granica prošli u poglavlju 8. Također se mora specificirati da se prostorne koordinate koje se pojavljuju u (8.6) i (8.7) počinju brojati (ishodišnja točka) je mjesto na kojem su se u mediju promijenile vrijednosti od ω_0 koja je promjena izbacila ω iz dozvoljenog područja. Podsjećamo studenta da smo do sada za niz raznih medija (žice, zvuk u zraku, sustave oscilatora raznih konfiguracija i načina titranja našli razne oblike disperzijskih relacija. Preko veze (fazne) brzine (8.3) s $\omega\ i\ k$, možemo za sve te slučajeve naći i ovisnost brzine širenja faze titranja o $\omega\, i\, k$. Zapravo ističemo porijeklo naziva fazne brzine. To je brzina kojom jedna te ista vrijednost faze argumenta kosinusa $(kx - \omega t)$ napreduje, kako je diskutirano oko relacije (8.4).

8.3 Elektromagnetska titranja u slobodnom prostoru i u plazmi

Već u drugom semestru izveli smo valnu jednadžbu za elektromagnetske valove u vakuumu. Ponoviti ćemo najvažnije elemente izvoda da bismo vidjeli utjecaj koji se pojavljuje postojanjem ionosfere to jest dijela Zemljinog omotača u kojem radi zračenja postoji mješavina „slobodnih“ elektrona i iona molekula zraka. Maxwellove jednadžbe su:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{8.8}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad div\vec{B} = 0 \tag{8.9}$$

Lijeva strana lijeve jednadžbe (8.9) standardno se obrađuje deriviranjem:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{B} = rot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot(-rot\vec{E}) = -\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla^2\vec{E} - \nabla(\nabla\vec{E}) \tag{8.10}$$

Kako u plazmi radi neutralnosti divergencija električnog polja iščezava , preostaje samo prvi član rezultata (8.10). S desne strane deriviranog izraza (8.9) pojavljuje se uz poznatu drugu derivaciju po vremenu električnog polja i vremenska derivacija gustoće struje $\vec{j}$. Naravno da u neutralnoj mješavini naboja mogu postojati električne struje. Iz proučavanja mikroskopskog (Drudeovog) modela struja znamo: $\vec{j} = Nq\vec{v}$ gdje su N prostorna gustoća naboja, q naboj nosioca naboja, a $\vec{v}$ njegova brzina. Time potrebni izraz:

$$\mu_0 \dot{\vec{j}} = \mu_0 Nq\dot{\vec{v}} = \mu_0 Nq \frac{\vec{F}}{m} = \mu_0 Nq^2 \frac{\vec{E}}{m} \tag{8.11}$$

Kombiniranjem rezultata (8.10) i (8.11) u deriviranu jednadžbu za rotor magnetskog polja iz (8.9) slijedi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\vec{E} \tag{8.12}$$

Ovako dobivena jednadžba za ponašanje električnog polja u ionosferi u matematičkom je smislu samo proširenje Klein-Gordonove jednadžbe iz prošlog poglavlja. (8.12) je doduše proširenje na ponašanje s jednodimenzionalne veličine ψ na ponašanje vektora električnog polja s tri prostorne komponente ali strukturno imamo uz drugu derivaciju po vremenskoj varijabli i uz drugu derivaciju po prostornoj varijabli i član s desne strane (8.12) koji j u Klein-Gordonovoj jednadžbi do na faktor proporcionalnosti odgovara članu $\omega_0{}^2\psi$. Stoga ćemo sveukupnu konstantu s desne strane (8.12) slično imenovati: $\frac{\omega_p}{c^2}$ gdje je ω_p frekvencija titranja slobodne plazme. Na ovo ime nas navode dvije već naučene stvari. Prva je analogija s Klein-Gordonovom jednadžbom. No još intuitivniji osjećaj stječemo podsjećanjem na studij prisilnih oscilacija sustava oscilatora; tamo smo imali frekvenciju onih posebnih oscilatora koji vežu oscilatore uz ravnotežni položaj paralelno oprugama za međusobno povezivanje oscilatora. Da oscilatori nisu međusobno bili povezani, frekvencija njihovog vlastitog slobodnog titranja bi postojala i to je veličina čiji je analogon ω_0.

Ako u (8.12) uvrstimo pretpostavku stacionarnog titranja električnog polja:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o \cos(kx - \omega t) \tag{8.13}$$

za širenje polja duž x osi, imat ćemo poslije kraćenja vremenske zavisnosti:

$$\omega^2 = \omega_p{}^2 + c^2 k^2 \tag{8.14}$$

za disperzijsku relaciju širenja elektromagnetskog vala ionosferom. Jasno je da će kroz ionosferu penetrirati valovi s frekvencijom iznad granične dok oni ispod toga ne će. Ovo ima fundamentalne posljedice u komunikacijama radiostanicama. Za velike valne dužine emisija dugovalnih radiostanica obilazi globus, jer se radi premale ω valovi ne mogu transmitirati ionosferom; oni se na njoj reflektiraju. S druge strane UKW emisija prolazi ionosferom i njezinu emisiju ne opažamo iza linije horizonta!

8.4 Frekvencija titranja slobodne plazme

U ovom odjeljku direktno opravdavamo ime za veličinu ω_p. U plazmi , koja je mješavina pokretnih elektrona i praktički nepokretnih iona mogu se spontano razviti stojni valovi slijedećim mehanizmom. Neka se u jediničnom volumenu nalazi N elektron-ion parova.

Zamislimo da su svi elektroni pomaknuti od iona za odmak od ravnoteže x.. Njihova površinska gustoća stvorena tim odmakom je:

$$\sigma = \frac{NqxA}{A} \tag{8.15}$$

Naboj elektrona q i gustoća N su kao i u prethodnom odjeljku. Pretpostavljena površina po kojoj su smješteni po pomaku je A. Time je nastalo (povratno) električno polje:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Nqx}{\varepsilon_0} \tag{8.16}$$

i povratna sila:

$$m\ddot{x} = -\frac{Nq^2}{\varepsilon_0} x \tag{8.17}$$

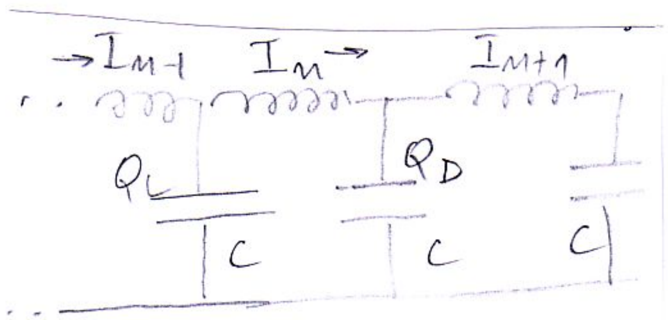
Odavle je jasno da je vlastita frekvencija kojom bi plazma spontano titrala:

$$\omega_p{}^2 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \tag{8.18}$$

Što je upravo vrijednost koju smo upotrijebili tijekom izvoda od (8.12) do (8.14).

8.5 Transmisijska linija koja je kombinacije kapacitora i zavojnica

Promatranjem dijagrama takve transmisijske linije i pisanjem diferencijalne jednadžbe elementarnog titrajnog kruga unutar transmisijske, linije ubrzo vidimo punu analogiju sa sustavom masa povezanih elastičnim oprugama.



Naime za petlju koja sadrži struju I_n vrijedi:

$$\frac{Q_L}{C} - L\frac{dI_n}{dt} - \frac{Q_D}{C} = 0 \tag{8.19}$$

iz čega deriviranjem po vremenu i očitih veza vremenskih derivacija naboja na kapacitorima sa strujama koje pune te kapacitore slijedi:

$$\frac{I_{n-1} - I_n}{C} - L\frac{d^2 I_n}{dt^2} - \frac{I_n - I_{n+1}}{C} = 0 \tag{8.20}$$

Što nakon sređivanja daje:

$$\ddot{I}_n = \frac{1}{LC}(I_{n+1} + I_{n-1} - 2I_n) \tag{8.21}$$

Ova diferencijalna jednadžba je pojednostavljena varijanta mehaničkog ekvivalenta (8.35) s time da nema ni dodatnih opruga osim onih koje povezuju tijela međusobno niti su tijela obješena da budu i njihala. Punom analogijom tražimo rješenje u obliku putujućeg vala oblika:

$$I_n = A\sin(nka - \omega t) \tag{8.22}$$

gdje je kao i u mehaničkom slučaju a prostorna dimenzija duljine elementarnog kruga. Dvostrukim deriviranjem (8.22) po vremenu i uvrštavanjem u (8.21) te kraćenjem vremenske zavisnosti slijedi:

$$-\omega^2 I_n = \frac{2}{LC} I_n \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2I_n} - 1\right) \tag{8.23}$$

odakle se primjenom adicijskog teorema pogodnom separacijom argumenta sinusa iz (8.22) kakvu smo već vidjeli u proceduri od (8.37) do (8.39) dobivamo:

$$\omega^2 = \frac{2}{LC}(1 - \cos ka) = \frac{4}{LC}\sin^2\frac{ka}{2} \tag{8.24}$$

Odmah je jasno da ćemo moći imati putujuće valove samo uz uvjet :

$$\omega^2 \leq \frac{4}{LC} \tag{8.25}$$

Za frekvencije iznad te granice može proći samo rješenje oblika:

$$I_n = (-1)^n e^{-\kappa n a}\cos\omega t \tag{8.26}$$

koje više nije putujući prostorno oscilatorni val, nego niz stacionarnih titranja struja koje amplitudom u prostoru eksponencijalno trnu a smjerom su jedna suprotne. Prostorno oscilatorni val putujući val nije moguć u tom frekventnom području. Procedurom analognom onoj od (8.44) do (8.45) disperzijska relacija je sada:

$$\omega^2 = \frac{4}{LC} ch^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \tag{8.27}$$

Ako se vratimo na propusni dio frekvencijskog spektra i disperzijsku relaciju (8.24) možemo za male vrijednosti k valnog broja (dugovalna aproksimacija) sinus zamijenit argumentom, to jest:

$$\omega^2 = \frac{4}{LC}(ka/2)^2 \tag{8.28}$$

čime fazna brzina postaje:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{a}\frac{C}{a}}} \tag{8.29}$$

Ovo je ključni izraz za proračun faznih brzina transmisijskih linija za „standardne frekvencije“, to jest za one iz dugovalne aproksimacije. Također je odmah očito da u tom dijelu frekvencijskog spektra sve frekvencije putuju istom brzinom. Znači nema disperzije po frekvenciji!

UMETAK I KOMENTAR O STRUKTURI I ULOZI DISPERZIJSKIH RELACIJA

Disperzijske relacije povezuju kružnu frekvenciju ω i k valni broj koji se pojavljuju i u stojnim valovima i u putujućim valovima. Struktura ovih valova ima slijedeće forme:

STOJNI $\rightarrow (A\sin kx + B\cos kx)\cos\omega t$

PUTUJUĆI $\rightarrow A\cos(kx - \omega t)$

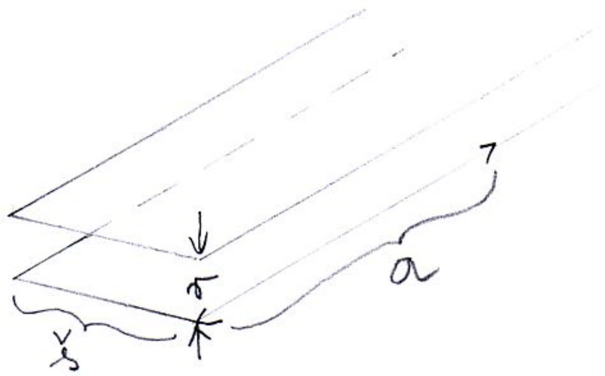
Mi smo disperzijske relacije računali za stojne valove. Tipični izraz koji je prethodio konačnoj formi za disperzijsku relaciju je bila diferencijalna jednadžba za titranje n-tog oscilatora koja ga je povezivala s okolinom (na primjer (8.35))

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^{\,2}\psi_n + \frac{K}{m}\psi_n \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{\psi_n}$$

Ponavljamo argument da disperzijske relacije ne zavise o rubnim uvjetima; rubni uvjeti se manifestiraju kod stojnih valova formom koja je ili sinusoidalna ili kosinusna u prostornom dijelu, no mi smo u analizi između (8.35) i (8.40) pokazali da je rezultat za razlomak u gornjoj relaciji uvijek isti i iznosi 2(coska-1). Ako u analognoj proceduri uz prostornu zavisnost amplitude o kx dodamo i zajedničku fazu -ωt (kada sa stojnih prelazimo na putujuće valove) rezultat za razlomak se neće promijeniti. S druge strane druga derivacija po vremenu amplitude ψ_n daje isti rezultat bilo da se radi o obliku stojnog ili putujućeg vala. Znači da disperzijske relacije vrijede i za putujuće valove! Kako se , pak, prostorno titrajući (stojni val) može uspostaviti samo u frekvencijskom pojasu zadanom disperzijskim relacijama, jasno je da i putujući valovi jesu mogući samo u tom istom frekvencijskom području. TEMELJNA ULOGA DISPERZIJSKIH RELACIJE JEST ODREĐENJE FREKVENCIJSKOG POJASA UNUTAR KOJEG JE MEDI J TRANSPARENTAN ZA PUTUJUĆI VAL. Može se još dodati da ćemo otkriti važnost disperzijskih relacija i pri širenju superpozicije valova raznih frekvencija koji na primjer predstavljaju „puls“. Pojava disperzije (ovisnosti k o ω) mijenjat će oblik tog pulsa u vremenu.

8.6 Primjer proračuna fazne brzine širenja elektromagnetskog vala duž linije koja se sastoji od dvije paralelne vodljive trake

Na crtežu su paralene trake širine š razmaknute za razmak r .



Segment duž kojeg razmatramo pojavu struja je dugačak a. Kapacitet ovako definiranog kapacitora je:

$$C = \varepsilon_0 \frac{a\check{s}}{r} \tag{8.30}$$

Tok magnetskog polja prouzročenog strujom koja teče po trakama je :

$$raB = LI \tag{8.31}$$

gdje je B magnetsko polje, L je traženi induktivitet a I je struja koja teče trakama.

B se nadalje može izraziti plošnom strujom dobivenom dijeljenjem struje i širine š.

Time je :

$$ra\mu_0 \frac{I}{\check{s}} = LI \tag{8.32}$$

(8.30) i (8.32) sadrže omjere L/a i C/a potrebne u (8.29) pa imamo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 r}{\check{s}} \varepsilon_0 \frac{\check{s}}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_o}} = c \tag{8.33}$$

Student može provjeriti da se analognim proračunom može dobiti ista fazna brzina i za geometriju koaksijalnog kabla (jedna tanka vodljiva žica ide kroz os vodljivog cilindra).

Naravno gornji proračun je načinjen u vakuumskim uvjetima među trakama. Identični rezultat se dobiva i za koaksijalni kabel kad bi u unutrašnjosti cilindra bio vakuum. No tamo se nalazi dielektrik tako da je brzina svjetlosti značajno reducirana. Anegdotsko-profesionalni standard nuklearnih fizičara je 10 ns koaksijalni kabel za kašnjenje. Kako svjetlo u nanosekundi prevali 30 cm jasna je duljina takvog kabla u vakuumskim uvjetima. Komercijalni koaksijalni kabel za kašnjenje je međutim reda veličine duljine 1 m!!!

MOGUĆI POKUS

Na osciloskopu opaziti stvarno kašnjenje od 10 ns produžnog kabla; izmjeriti mu duljinu!