# 6. Prisilno titranje gušenog harmoničkog oscilatora

Uvježbavajući primjene 2. Newtonovog zakona u 1. semestru ovaj je problem već bio riješen. Već nam je poznato da se titranje harmoničkog oscilatora guši u vremenu radi unutrašnjeg trenja (ohmskog otpora u slučaju LRC titrajnog kruga). I u mehaničkom i u električkom slučaju smo pokazali da će oscilator jedne vlastite frekvencije „biti prisiljen“ titrati frekvencijom vanjske sile (vanjskog napona u električkom slučaju) , no to novo titranje prihvatit će u stacionarnom smislu tek nakon određenog vremena. Razradit ćemo sada u većim potankostima taj efekt tranzicijskog vremena. Ponovit ćemo i efekt rezonantnog odziva harmoničkog oscilatora za slučaj da prisila pogađa frekvenciju kojom bi titrao slobodni oscilator. Svi su ovi dodaci potrebni da bismo bolje razumjeli transmisiju realnih signala. Naš se opći problem piše u standardnoj notaciji gušenog harmoničkog oscilatora kao:

$$m\ddot{x} = -Kx - m\Gamma\dot{x} + F(t) \tag{6.1}$$

K je naravno konstanta opruge, $m\Gamma$ je konstanta proporcionalnosti između sile trenja i brzine a $F(t)$ je periodička sila koja djeluje na masu m. Uz standardnu vezu:

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{K}{m} \tag{6.2}$$

Slijedi formulacija problema:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^{\ 2} = \frac{F(t)}{m} \tag{6.3}$$

Za početak ćemo razmotriti jednostavniju situaciju F(t)=0, jer nam ona daje ideju o vremenu u kojem se vlastite oscilacije smiruju, što će pomoći razumijevanju tranzicijskog vremena u kojem vanjska sila preuzima kontrolu i nameće svoj ritam titranja. Dodatni argument za rješavanje jednadžbe bez vanjske prisile F(t) u (6.3) daje nam teorija linearnih nehomogenih jednadžbi. Naime student može lako provjeriti važno svojstvo. Svakom se posebnom rješenju nehomogene linearne jednadžbe može dodati opće rješenje homogene jednadžbe i ponovno dobiti rješenje nehomogene jednadžbe. Time se kompleksniji problem nalaženja općeg rješenja nehomogene jednadžbe svodi na (nama već poznato) određivanje općeg rješenja homogene jednadžbe i nalaženje jednog partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe.

## 6.1 Titranje slobodnog gušenog harmoničkog oscilatora

***POKUS***

Jednadžbu (6.3) smo u odsutnosti vanjske sile već tretirali u prvom semestru; za diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^{\ 2}x = 0 \tag{6.4}$$

je jedna varijanta rješenja:

$$x_g(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\omega_g t + \varphi) \tag{6.5}$$

gdje indeks g podsjeća da se radi o rješenju jednadžbe slobodnog gušenog oscilatora. Uvrštavanjem (6.5) u (6.4) može se verificirati da je (6.5) doista rješenje (6.4) pri čemu su A i $\varphi$ integracijske konstante (određuju se na primjer iz početnih uvjeta kao što su pozicija i brzina u određenom vremenu) a vrijedi i

$$\omega_g{}^2 = \omega_0{}^2 - \frac{\Gamma^2}{4} \tag{6.6}$$

Također je vrijedno uočiti vremensku konstantu :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \tag{6.7}$$

koja očito prema (6.5) određuje ritam gušenja oscilacija. Unutar ovog poglavlja pokazat ćemo da je $\tau$ vrijeme u kojem energija oscilatora pada na $\frac{1}{e}$ svoje početne vrijednosti. Zgodno je integracijske konstante podesiti tako da poziciju i brzinu u t=0 možemo direktno upisati u rješenje titranja (6.5). U tu svrhu pišemo rješenje u obliku:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A_g \sin\omega_g t + B_g \cos\omega_g t) \tag{6.8}$$

Veze novih i starih integracijskih konstanti dobivamo raspisivanjem (6.5) po adicijskom teoremu i usporedbom s (6.8):

$$A_g = -A\sin\varphi \qquad\qquad B_g = A\cos\varphi \tag{6.9}$$

Odakle su kvadriranjem i zbrajanjem s jedne strane , te dijeljenjem (6.9) jasne i obratne transformacije. Želimo konstante u (6.8) izraziti preko početnih uvjeta $x_g(0)\, i\, \dot{x}_g(0)$ to jest položaja i brzine oscilatora u t=0. Uvrštavanjem u (6.8) t=0 imamo:

$$x_g(0) = B_g \tag{6.10}$$

A deriviranjem (6.8) i ubacivanjem istog vremena slijedi:

$$\dot{x}_g(0) = -\frac{\Gamma}{2}B_g + A_g\omega_g \tag{6.11}$$

Iz (6.11) i (6.10) dobivamo drugu konstantu:

$$A_g = \frac{1}{\omega_g}\left[\ \dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2}x_g(0)\ \right] \tag{6.12}$$

Time smo u slučaju potkritičkog gušenja

$$\omega_g{}^2 > 0 \tag{6.13}$$

dobili rješenje izraženo početnim uvjetima u vrijeme t=0 kao:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left\{x_g(0)\cos\omega_g t + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2}x_g(0)\right]\frac{\sin\omega_g t}{\omega_g}\right\} \tag{6.14}$$

Čijom specijalizacijom u slučaju kritičkog gušenja,

$$\omega_g = 0 \tag{6.16}$$

proučavanjem limesa nastalih s $\omega_g \to 0$ slijedi ponašanje:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left\{x_g(0) + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2}x_g(0)\right]t\right\} \tag{6.17}$$

Za nadkritično gušenje:

$$\omega_g^{\ 2} < 0 \tag{6.18}$$

Slijedi iz općeg oblika (6.8):

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left\{x_g(0)ch|\omega_g|t + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2}x_g(0)\right]\frac{sh|\omega_g|t}{|\omega_g|}\right\} \tag{6.19}$$

Relacija je (6.19) dobivena i preko poznatih veza sinusa i kosinusa imaginarnih argumenata i njihovih hiperbolnih ekvivalenata. U slučaju slabog gušenja možemo izračunati ponašanje energije sustava pod pretpostavkom da se tijekom jednog titraja amplituda titranja nije bitno promijenila. Ova pretpostavka nam pomaže i da odredimo vrlo poznati i često upotrebljavani Q faktor gušenog oscilatora.

## 6.2 Energija gušenog slobodnog oscilatora za malo gušenje.

Gore je opisan uvjet malog gušenja, a tijekom izvoda izraza za prosječnu energiju vidjet ćemo direktno i mjesto na kojem se ta pretpostavka koristi. Izraz za energiju oscilatora dobivamo počevši od zbroja njegovih trenutnih iznosa kinetičke i potencijalne energije:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \quad \text{ili ekvivalentno} \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^{\ 2}x^2 \tag{6.20}$$

Ako za opis gibanja upotrijebim varijantu (6.8) deriviramo je po vremenu i kvadriramo koordinatu i brzinu, te nakon toga izvršimo uprosječivanje po periodu titranja te koristimo činjenice da prosječne vrijednosti $\sin^2 \ i \ \cos^2$ po periodu iznose $\frac{1}{2}$ dobit ćemo:

$$<E>= \frac{1}{2}me^{-\Gamma t}(A_g^{\ 2}\omega_g^{\ 2}\frac{1}{2} + B_g^{\ 2}\omega_g^{\ 2}\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}m\omega_0^{\ 2}(\frac{1}{2}A_g^{\ 2} + \frac{1}{2}B_g^{\ 2})e^{-\Gamma t} \tag{6.21}$$

Oznaka <E> predstavlja prosječnu vrijednost energije tijekom jednog perioda titranja s frekvencijom $\omega_g$ i dobivena je uz pretpostavku da je faktor $e^{-\Gamma t}$ približno stalan tijekom perioda! (To je pretpostavka slabog gušenja). Vidimo da energija ovakvog gušenog oscilatora, kojeg ne tjera vanjska sila, opada u vremenu eksponencijalno gdje je $\tau$ iz (6.7) u stručnom rječniku relaksacijsko vrijeme.(Kada god neki fizikalni fenomen trne eksponencijalno na način $e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau$ je relaksacijska konstanta). Možemo (6.12) opisati i s pokratom:

$$<E>= E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.22}$$

gdje smisao i vrijednost $E_0$ vidimo iz (6.21). To je energija oscilatora u vrijeme t=0.

$$E_0 = \frac{1}{4}m(\omega_g^{\ 2} + \omega_0^{\ 2})(A_g^{\ 2} + B_g^{\ 2}) \tag{6.23}$$

## 6.3 Q faktor kvalitete gušenog oscilatora.

Dio literature o titranju ističe kombinaciju karakterističnih vrijednosti oscilatora $\omega_0$ $i$ $\Gamma$ koja ima vrlo intuitivno značenje:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} \tag{6.24}$$

Pokazat će se da ova kombinacija kružne frekvencije oscilatora i konstante njegovog gušenja pomaže boljem razumijevanju svojstava konkretnog oscilatora. Veličina (6.24) je očito bezdimenzionalan broj. Nadalje uvrštenjem (6.24) , definicije Q faktora, u (6.6) izraz za kružnu frekvenciju gušenog oscilatora imamo:

$$\omega_g^{\ 2} = \omega_0^{\ 2}(1 - \frac{1}{4Q^2}) \tag{6.25}$$

Ako je Q velik u usporedbi s jedinicom , što je ispunjeno u brojnim uređajima u realnoj upotrebi, $\omega_g \cong \omega_0$, tada se oblik ponašanja amplitude gušenog oscilatora može pisati i kao:

$$x_g(t) = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{6.26}$$

čime možemo uočiti da Q određuje broj oscilacija kružne frekvencije $\omega_0$ potreban da se amplituda titranja smanji za faktor e . Prema (6.26) svaki vremenski period t$\approx \frac{2\pi n}{\omega_0}$ se može opisati i pomoću n , gdje je n broj proteklih perioda. Time je amplitudu titranja moguće pisati kao funkciju broja titraja:

$$A(n) \approx Ae^{-\frac{n\pi}{Q}} \tag{6.27}$$

Očito da bi amplituda pala za faktor e potrebno je :

$$n \approx \frac{Q}{\pi} \tag{6.28}$$

oscilacija. U dijelu literature o vibracijama posvećenom upravo situaciji sa slabim gušenjem, čak se i početna diferencijalna jednadžba (6.4) piše u obliku:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_o^{\ 2} x = 0 \tag{6.29}$$

Pri studiju rezonantnih fenomena dio literature upotrebljava upravo Q kao mjeru uskoće rezonancije umjesto veličine $\Gamma$ koja će se tamo inače prirodno pojaviti.

## 6.4 Prisilno titranje gušenog harmoničkog oscilatora jedne frekvencije

U ovom dijelu poglavlja obavljamo analizu na relativno transparentnom slučaju odziva oscilatora na djelovanje harmonijske sile jedne frekvencije. Poznavanje toga rješenja ima dalekosežne posljedice. Naime , radi linearnosti diferencijalne jednadžbe problema, rješenja različitih frekvencija se mogu superponirati ako se vanjska sila sastavlja superpozicijom sila raznih frekvencija. To na primjer znači da u slučaju svake periodičke prisile možemo za tu prisilu (radi periodičnosti) načiniti Fourierov razvoj. Znanjem rješavanja prisilnog titranja za jednu frekvenciju znamo rješenje i za sve članove Fourierovog razvoja. Tako će se ukupno rješenje sastojati od Fourierove superpozicije rješenja za pojedine frekvencije s istim koeficijentima s kojim je izgrađena periodička sila. Kako ne bismo upotrebljavali simboliku linearnih diferencijalnih operatora pokazat ćemo temelj gornje tvrdnje o superponiranju na najjednostavnijoj situaciji. Pretpostavimo da poznajemo dva specijalna rješenja jednadžbi:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_1}{dt} + \omega_0{}^2 x_1 = \frac{F_1}{m}\cos(\omega_1 t) \tag{6.30}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega_0{}^2 x_2 = \frac{F_2}{m}\cos(\omega_2 t) \tag{6.31}$$

gdje je masa u oscilatoru, F-ovi su snage dviju sila: 1 i 2 a $\omega_1\ i\ \omega_2$ su kružne frekvencije djelovanja tih sila. Zbrajanjem jednadžbi (6.30) i (6.31) i grupiranjem posebno članova s istim stupnjem deriviranja te uzimajući u obzir da je derivacija sume jednaka sumi derivacija te da operacija množenja brojem ima svojstvo distributivnosti u odnosu na zbrajanje, slijedi:

$$\frac{d_2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \Gamma \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + \omega_0{}^2 (x_1 + x_2) = \frac{F_1}{m}\cos(\omega_1 t) + \frac{F_2}{m}\cos(\omega_2 t) \tag{6.32}$$

Jednadžba (6.32) pokazuje da je odgovor oscilatora na silu dobivenu superponiranjem sila rješenje koje je rezultat superponiranja odgovora na te individualne sile! Tako se pitanje rješavanja problema prisilnog titranja s periodičkim oblikom prisile svodi na rješavanje diferencijalne jednadžbe u kojoj prisila ima jednu frekvenciju.

Prije primjene matematičkog algoritma možemo formulirati fizikalna očekivanja o ponašanju gušenog harmoničkog oscilatora kojeg se prisiljava na titranje frekvencijom različitom od vlastite. U problemu su upletena tri aspekta istovremeno:

1) slobodni bi oscilator pokrenut titrao vlastitom frekvencijom $\omega_0$.

2) Gušenje kroz parametar $\Gamma$ uklanja to titranje kako vrijeme teče.

3) Oscilator je prisiljen titrati frekvencijom vanjske prisile kako ćemo sada objasniti.

Započnimo stanjem u kojem je samo efekt 1) to jest jednom pokrenut oscilator titra zauvijek frekvencijom $\omega_0$. Ako sada uključimo i prisilu frekvencije $\omega$, oscilator će prihvatiti titrati i njenom frekvencijom (to se lako potvrđuje i inspekcijom nehomogene jednadžbe u kojoj nema gušenja: rješenju homogene može se pridodati rješenje nehomogene; svako titra svojom frekvencijom). Konačno, uključenje gušenja parametrom $\Gamma$, uklanja titranje frekvencijom $\omega_0$ nakon dovoljno dugo vremena. Kako rješenje koje titra s $\omega$ preostaje nakon dugo vremena, naziva ga se opravdano stacionarnim i obilježava indeksom S. To je još više podržano činjenicom da je to Specijalno rješenje koje nam jedino treba da bismo preko općeg rješenja homogene diferencijalne jednadžbe dodatkom specijalnog rješenja dobili opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe.

***POKUSI*** *Demonstrira se pojava udara između* $\omega$ *i* $\omega_g$.

Sada imamo razlog zašto tražimo rješenje jednadžbe prisilnog titranja gušenog oscilatora koje titra samo frekvencijom prisile $\omega$ :

$$\ddot{x}_S + \Gamma \dot{x}_S + \omega_0^{\,2} x_S = \frac{F}{m}\cos\omega t \qquad (6.33)$$

Postoje dvije notacije za rješenje:

$$x_S = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (6.34)$$

i

$$x_S = a\sin\omega t + b\cos\omega t \qquad (6.35)$$

Svaka od notacija ima svoje prednosti pri interpretaciji i obadvije ćemo upotrebljavati. Adicijski teorem za $\cos(\omega t + \varphi)$ nam omogućuje uspostaviti veze među konstantama:

$$a = -A\sin\varphi \qquad b = A\cos\varphi \qquad A^2 = a^2 + b^2 \qquad tg\varphi = -\frac{a}{b} \qquad (6.36)$$

Ako počnemo od notacije (6.35) načinimo potrebne derivacije po vremenu i rezultate uvrstimo u (6.33) te grupiramo članove uz sinus i kosinus, imat ćemo:

$$\sin\omega t(-a\omega^2 - b\omega\Gamma + \omega_0^{\,2} a) + \cos\omega t(-b\omega^2 + a\omega\Gamma + \omega_0^{\,2} b - \frac{F}{m}) = 0 \qquad (6.37)$$

Radi linearne nezavisnosti sinusa i kosinusa, faktori u zagradama moraju iščezavati pa se dijeljenjem prvog faktora s $\omega\Gamma$ *a drugog s* $(\omega_0^{\,2} - \omega^2)$ dobiva:

$$\frac{a(\omega_0^{\,2} - \omega^2)}{\omega\Gamma} - b = 0 \qquad (6.37a)$$

$$a\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^{\,2} - \omega^2} + b = \frac{F}{m}\frac{1}{\omega_0^{\,2} - \omega^2} \qquad (6.37b)$$

čijim zbrajanjem dobivamo najprije a, a onda i b:

$$a = \frac{F}{m}\frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (6.38)$$

$$b = \frac{F}{m}\frac{\omega_0^{\,2} - \omega^2}{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (6.39)$$

Funkcionalna zavisnost koeficijenata o frekvenciji se i grafički prikazuje.

Koeficijent a ima karakeristično zvonoliko ponašanje u blizini $\omega_0$, dok b ima nultočku i oblik jednog sinusnog titraja. Obadvije amplitude, međutim ostaju konačne i trnu izvan rezonantnog područja. Fazni kut $\varphi$ se preko (6.36) i izraza za amplitude (6.38) i (6.39) može također pratiti i grafički prikazati. U notaciji (6.34) on ima vrijednosti počevši od 0 do $-\pi$. Također je jasno da za male frekvencije pomak samo malo kasni za silom. U rezonanciji to kašnjenje dosiže $\frac{\pi}{2}$ da bi na velikim frekvencijama to kašnjenje dosegnulo $\pi$; to jest pomak je suprotnog predznaka od sile.

**POKUSI**

Nizom matematičkih njihala raznih frekvencija tjeranih s jednom $\omega$ ilustrira se gornje rezultate. (Bartonovo njihalo)

Koeficijent a često se naziva apsorpcijskim ; koeficijent b ,pak, elastičnim dijelom ukupnog rješenja problema. Porijeklo ovih naziva bit će jasnije nakon što ustanovimo kako se troši rad vanjske sile tijekom jednog perioda titranja. Pogledat ćemo prosječnu snagu po titraju:

$$< P >=< F\cos(\omega t)\dot{x}_S(t) > \qquad (6.40)$$

Nakon deriviranja i usrednjavanja uz poznate rezultate o srednjim vrijednostima kvadrata harmonijskih funkcija slijedi:

$$< P >= \frac{1}{2}Fa\omega \qquad (6.41)$$

čime jasno pokazujemo da amplituda a određuje iznos energije koju oscilator prima i za svoje trenje troši od vanjske sile. To je apsorpcijski dio karakteriziran apsorpcijskom amplitudom a.. Amplituda b uopće ne sudjeluje u potrošnji. Općenito takve procese, u kojima se ne troši energija zovemo elastičnim pa će se u literaturi naći i odgovarajuće ime za koeficijent b, elastična amplituda. U proučavanju slobodnog harmoničkog oscilatora smo naučili da je u njemu ukupna mehanička energija stalna. Kako nam (6.41) kaže, gušeni harmonički oscilator prisiljen na titranje upija energiju. Ona se naravno troši na trenje . Dio opisa dinamike prisilnih oscilacija u (6.33) koji potiče od trenja je $-m\Gamma\dot{x}$; sila trenja. Pokazat ćemo sada da snaga trošena na trenje upravo odgovara snazi koji je utrošila vanjska sila!

Prosječna snaga sile trenja:

$$<\mathrm{P}\, trenje>=< m\Gamma\dot{x}_S\dot{x}_S = m\Gamma < (a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t)^2 >= m\Gamma\omega^2(a^2+b^2)\frac{1}{2} \qquad 6.42)$$

$$<\mathrm{P}\, trenje>=\frac{1}{2}m\Gamma\omega^2 a^2(1+\frac{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2}{\omega^2\Gamma^2}) \qquad (6.43)$$

Gdje smo pri izlučivanju a iz zagrade za omjer b i a koristili (6.38) i (6.39). Ako nadalje za a koristimo još jednom (6.38) dobit ćemo

$$< Ptrenje >= \frac{1}{2}F\omega a \qquad (6.41a)$$

identično izrazu (6.41).

Prosječna energija tijekom perioda titranja:

$$\begin{aligned} < E > &=< \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0{}^2x^2 >= \frac{1}{2}m\omega^2\frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}m\omega_0{}^2\frac{1}{2}(a^2+b^2) \\ < E > &= \frac{1}{4}m(\omega^2+\omega_0{}^2)(a^2+b^2) \end{aligned} \qquad (6.44)$$

Dio koji je uz $\omega^2$ je član kinetičkog dijela a onaj uz $\omega_0{}^2$ ide kao potencijalna energija.

Radi rezonantnog dijela amplituda jasno je da i energija kao i amplitude ima rezonantni oblik.
Rezonancija i njena svojstva:

Zbog pojave razlike kvadrata kružnih frekvencija u nazivnicima izraza snage i energije sve navedene veličine imaju maksimum u području u kojem $\omega\ dosi\check{z}e\ \omega_0$. To je pojava rezonancije: sustav i prisila su u takvom odnosu da je rezultat njihovog zajedničkog djelovanja u maksimumu ; dosiže se rezonantna vrijednost. Ponašanje u rezonantnom dijelu ćemo pažljivije razmotriti. Naime na njemu učimo standardno izražavanje u jeziku fizike za pojave s maksimumima. Takvu pojavu je zgodno opisati kvantitativno pojmovima/brojevima.

Rezonantna (kružna) frekvencija na kojoj se dešava fenomen $\omega_0$ se ne treba dalje karakterizirati. Visina maksimuma je visina rezonancije. Širinu maksimuma se opisuje terminom puna širina na polovici visine ( Full Width at the Half Maximum-FWHM). Krasan je rezultat da je ta veličina u slučaju gornje rezonancije upravo $\Gamma$. Krenut ćemo od rezultata (6.41) koji daje po periodu usrednjenu vrijednost snage potrošene od vanjske prisile i uvrstiti eksplicitni izraz za amplitudu a (6.38)

$$< P >= \frac{1}{2} F\omega \frac{F}{m} \frac{\Gamma\omega}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = P_0 \frac{\Gamma^2\omega^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (6.45)$$

gdje je $P_0$ snaga na $\omega = \omega_0$. Da bismo našli FWHM očito treba naći točke na kojima rezonantni faktor uz $P_0$ u (6.45) padne na vrijednost 0.5 :

$$\frac{\Gamma^2\omega^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = \frac{1}{2} \qquad (6.46)$$

Rješavanjem gornje bikvadratne jednadžbe za kružnu frekvenciju dobivaju se dvije fizikalno prihvatljive vrijednosti za kružnu frekvenciju:

$$\omega_{viša} = \frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} + {\omega_0}^2} \qquad \omega_{niža} = -\frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} + {\omega_0}^2} \qquad (6.47)$$

Očito je FWHM, puna širina rezonancije na mjestima na kojima vrijednosti padaju na polovicu (razlika frekvencija iz (6.47) ), upravo $\Gamma$. U jeziku faktora kvalitete ta je širina

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{\omega_0}{Q} \qquad (6.48)$$

Imamo i drugu važnu relaciju koja povezuje širinu rezonancije s relaksacijskim vremenom neprisiljenog oscilatora $\tau$ preko (6.7)

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau} \qquad \text{to jest:} \qquad \Delta\omega\tau = 1 \qquad (6.49)$$

Ova relacija ima u kvantnoj fizici ogromnu važnost, njen analogon reflektira neodređenosti u energiji i neodređenost u trajanju koje su povezane na upravo analogan način.

## Diskusija relativne težine amplituda titranja

Pokazuje se da izvan područja rezonancije dominira amplituda b, elastični doprinos. Naime omjer b i a može se procijeniti preko njihovog omjera načinjenog prema (6.38) i (6.39):

$$\frac{b}{a} = \frac{(\omega_0 - \omega)}{\Gamma} \frac{\omega_0 + \omega}{\omega} \qquad (6.50)$$

Za velike vrijednosti $\omega$ dominira lijevi faktor (desni je reda veličine 1) a sličan je i rezultat za male vrijednosti $\omega$. Elastičan doprinos u rezonantnom području prolazi kroz nulu; jasno je da mu je samo u tom području uloga malena!

## Alternativni oblik rezonantnog nazivnika

U rezonantnom području se $\omega$ kreće u blizini vrijednosti $\omega_0$ pa se rezonantni nazivnik u (6.45) može pisati aproksimativno: $4\omega_0{}^2\left[(\omega_0-\omega)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2\right]$ čime se za desni faktor u (6.45) dobiva novi analitički oblik

$$<P>=P_0\frac{\frac{1}{4}\Gamma^2}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} \tag{6.51}$$

U nuklearnoj fizici je to poznati Breit-Wignerov oblik rezonancije za udarni presjek nuklearnih reakcija.

## 6.5 Prijelazne pojave (tranzicijski fenomeni; tranzijenti) kod prisilnog titranja gušenog harmoničkog oscilatora.

Do sada smo egzaktno obradili ponašanje jednostavnog (slobodnog) harmoničkog titranja uključujući i početne uvjete. Početne smo uvjete eksplicitno uključili i u izraz za titranje gušenog oscilatora. Sada ćemo proći kroz nekoliko tipičnih situacija prisilnog titranja gušenog oscilatora s jednostavnim početnim uvjetom za pomak x: x(0)=0 i $\dot{x}(0)=0$. Dakle tijelo početno miruje u ravnotežnom položaju. Zanima nas prijelazno ponašanje dok ne dođe u svoje stacionarno stanje. Otprije je jasno da se superponiraju rješenje homogene jednadžbe (gušeni oscilator) i stacionarno (ili specijalno) rješenje nehomogene jednadžbe:

$$x(t)=a\sin\omega t+b\cos\omega t+e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A_g\sin\omega_g t+B_g\cos\omega_g t) \tag{6.52}$$

U izrazu (6.52) treba uočiti da postoje samo neodređene integracijske konstante u gušenom dijelu rješenja dok su konstante stacionarnog rješenja određene s (6.38) i (6.39).

Iz uvjeta x(0)=0 slijedi:

$$b+B_g=0 \qquad\qquad B_g=-b \tag{6.53}$$

a iz početnog mirovanja $\dot{x}(0)=0$

$$a\omega-\frac{\Gamma}{2}B_g+A_g\omega_g=0 \tag{6.54}$$

što daje:

$$A_g=\frac{1}{\omega_g}\left(-a\omega-b\frac{\Gamma}{2}\right) \tag{6.55}$$

S (6.53) i (6.55) imamo egzaktno rješenje titranja gušenog oscilatora s prisilom koja uključuje početne uvjete nultog položaja i brzine. Međutim , već iz (6.52) možemo načiniti zaključke o kvalitativnom izgledu općeg rješenja.

i) Slučaj bez gušenja. U (6.52) imamo superpoziciju dva titranja frekvencija titranja frekvencija $\omega$ $i$ $\omega_g$, što vodi na poznati slučaj udara.

ii) Postojanje slabog gušenja i frekvencije $\omega$ bliske $\omega_g$. Tada je u tranzicijskom vremenu prisutan fenomen udara , koji se u vremenu gubi da bi prevladalo stacionarno stanje.

iii) Situacija s gušenjem ali $\omega = \omega_g$. Tada u rezonantnom području dominira a dok iz (6.49) vidimo da je $A_g \cong a$, čime (6.52) poprima oblik:

$x(t) = (1 - e^{-\frac{\Gamma}{2}t})x_S$. To znači da umjesto faktora gušenja imamo faktor koji postepeno dozvoljava sve veće amplitude konačnog stacionarnog titranja.

iv) Vrijedno je još uočiti situaciju rezonancije u limesu iščezavajućeg gušenja blizu rezonancije $\Gamma \to 0$ $\omega \to \omega_0$. U toj situaciji amplitude titranja odlaze u beskonačnost. Primjer tog ponašanja je čuveni raspad Tacoma mosta koji se raspao kada je titranje dosegnulo vlastitu frekvenciju mosta.

***POKUSI***

*Prisilne oscilacije rade se s raznim frekvencijama radi opažanja raznih tranzijenata.*

*(Pogon prisile je rotacija elektromotora varijabilne frekvencije koji se štapićem povezanim s oprugom pretvara u sinusoidalni pogon)*