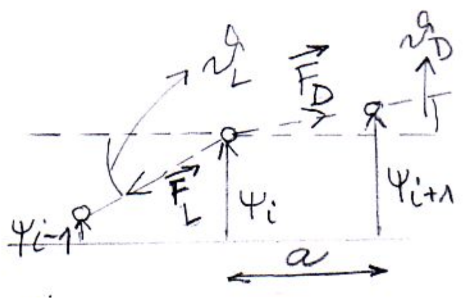
5. Nelinearne disperzijske relacije za elastično povezani sustav N masa i N vezanih krugova vrste LC

Pri titranjima homogenog linearnog medija pokazali smo važno svojstvo linearne veze između kružne frekvencije titranja i valnog broja (4.9) : $\omega = vk \;\; gdje \;\; je \;\; v$ brzina širenja vala. Ovaj izraz je jedan mogući oblik disperzijske relacije. On indicira u ovakvom slučaju da se titranja sviju frekvencija šire istom brzinom po mediju (dokaz će uslijediti kod razmatranja putujućih valova). Ovakva relacija vrijedi i za elektromagnetske valove u vakuumu. Posljedica je da u vakuumu sve frekvencije putuju zajedno. U srednjoj školi su studenti čuli za disperziju svjetlosti (razlaganje svjetla na primjer prizmom) po frekvencijama titranja koja je utemeljena upravo na različitosti brzina svjetla za razne frekvencije. Mi ćemo, naravno to i objasniti kasnije. Na ovom mjestu samo želimo obrazložiti racionalnost imena disperzijska relacija za (4.9) i činjenicu koju ćemo istraživati u ovom poglavlju a koja pokazuje i druge oblike veze, osim proporcionalnosti, između valnog broja i kružne frekvencije.

5.1 Potankosti o titranju sustava titranja N jednakih masa vezanih jednakim oprugama.



Transverzalno titranje:

Sustav prikazan na slici ima mase m koje su u ravnotežnom položaju razmaknute za udaljenost a. Promatramo gibanje mase (i) na koju utječu samo njezini susjedi s lijeva to je masa (i-1) , a s desna je masa (i+1). Rezultantna sila daje masi m transverzalnu akceleraciju:

$$m\frac{d^2\psi_i}{dt^2} = F_D \sin\vartheta_D - F_L \sin\vartheta_L = T_0(tg\,\vartheta_D - tg\,\vartheta_L) = T_0\left(\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{a} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{a}\right)$$
$$= \frac{T_0}{a}(\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i)$$

F s indeksima D i L je oznaka za silu s desne odnosno lijeve strane mase (i) , a T_0 je stalna horizontalna napetost .Tako smo dobili sustav jednadžbi za pomake individualnih masa:

$$\ddot{\psi}_i = \frac{T_0}{ma}(\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i) \tag{5.1}$$

Ako je sustav podvrgnut uvjetu da su rubne opruge učvršćene, tada su $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$.

Ovaj sustav je vrlo blizak sustavu (3.4), koji smo već razmatrali. Analogija se povećava kada potražimo stacionarna rješenja:

$$\psi_i = A_i \cos(\omega t + \varphi) \tag{5.2}$$

gdje su ω *i* φ zajednički svim masama. Uvrštenjem pretpostavke (5.2) u (5.1) , deriviranjem po vremenu i kraćenjem faktora s vremenskom ovisnošću slijedi:

$$-\omega^2 A_i = \frac{T_0}{ma}(A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i) \tag{5.3}$$

Ovaj sustav linearnih jednadžbi za amplitude pojedinih titranja u stacionarnom rješenju pogađamo u analogiji s titranjem kontinuiranog medija gdje smo već koristili pretvorbe između indeksa i kontinuirane varijable: $x = ia$. Tako za M-ti mod titranja pretpostavljamo umjesto $A_M(x) = A^M \sin(k_M x)$

$$A_i^M = A^M \sin(k_M ia) \tag{5.4}$$

i je naravno indeks mase a ne imaginarna jedinica. Kada pretpostavku (5.4) uvrstimo u (5.3) a s ω_M označimo kružnu frekvenciju M-tog moda titranja imat ćemo:

$$-\omega_M{}^2 A^M \sin(k_m ia) = \frac{T_0}{ma}\left\{A^M \sin[k_M (i+1)a] + A^M \sin[k_M (i-1)a] - 2A^M \sin(k_M ia)\right\} \tag{5.5}$$

Korištenjem adicijskog teorema gdje argument sinusa odjeljujemo u $ik_M a$ *te* $k_M a$ dobivamo poslije sređivanja i kraćenja s faktorom $\sin(k_M a)$:

$$\omega_M{}^2 = 2\frac{T_0}{ma}(1 - \cos(k_M a)) \tag{5.6}$$

i daljim sređivanjem:

$$\omega_M{}^2 = 4\frac{T_0}{ma}\sin^2\frac{k_M a}{2} \tag{5.7}$$

$$\omega_M = 2\left(\frac{T_0}{ma}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{k_M a}{2} \tag{5.7a}$$

Ovo je ponovno direktna veza kružne frekvencije i valnog broja (disperzijska relacija) no uočavamo da je ta veza mnogo kompleksnija.

5.2 Utjecaj (čvrstih) rubnih uvjeta na valni broj i ostale povezane veličine.

Kao i u slučaju kontinuiranog medija i u slučaju diskretnih masa (N masa s razmacima a rezultira u ukupnoj duljini sustava: (N+1)a) s time da su $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$ u općem rješenju

$$A_i^M = A\sin(ik_M a) + B\cos(ik_M a) \tag{5.8}$$

Gornji uvjet za i=0 povlači da B iščezava. Na drugom kraju uvjet za i=N+1 kvantizira valni broj:

$$(N+1)k_M a = M\pi \quad \text{to jest} \quad k_M = \frac{M\pi}{(N+1)a} \tag{5.9}$$

POKUS

Drugačiji rubni uvjet na krajevima proizveo bi i drugačije odnose u (5.9). Zgodno je ustanoviti da sada imamo i eksplicitnu analitičku formulu o odnosu amplituda susjednih masa koje učestvuju u titranju. Omjer amplituda titranja susjednih masa je omjer sinusa koji se u fazi razlikuju za stalni razmak:

$$\Delta\vartheta_M = k_M a = \frac{M}{(N+1)}\pi \tag{5.10}$$

Grafički prikaz disperzijske relacije $\omega(k)$ ((5.7a) nakon kvantizacije valnog broja k_M, danog uvjetom (5.9), sastoji se od krivulje proporcionalne prvoj četvrtini sinusoide na kojoj se nalaze diskretne vrijednosti ordinate krivulje dobivene presjecanjem sinusoide na mjestima koja odgovaraju kvantiziranoj apscisi k_M. Da se radi samo o prvoj četvrtini sinusoide jasno je iz činjenice da u (5.9) karakteristični broj moda M ne može doseći vrijednost N+1. Fizikalno je to povezano s činjenicom da se sa zadanim rubnim uvjetom čvrstih krajeva između tih krajeva ne može napraviti stacionarno rješenje titranja s rasporedom trbuha gušćim od razmaka među masama. Vrijedno je još uočiti činjenicu koju ćemo uskoro i više razmatrati: i za k_M *i za* ω_M postoje maksimalne vrijednosti!

Aproksimacija velikih valnih duljina:

Pretpostavlja se da je $\Delta\vartheta_M = k_M a << 1$ u kojem slučaju je $\sin\frac{k_M a}{2}$ približno $\frac{k_M a}{2}$.

Tom pretpostavkom se disperzijska relacija (5.7) linearizira i pretvara u :

$$\omega_M = \sqrt{\frac{T_0}{ma}}k_M \tag{5.11}$$

A to odgovara disperzijskoj relaciji dobivenoj pri transverzalnom titranju homogene žice.
Longitudinalno titranje:

Taj smo slučaj već vidjeli pa možemo prepisati jednadžbu za i-tu masu (3.4) u modificiranom obliku:

$$\ddot{\psi}_i = \frac{K}{m}(\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i) \tag{5.12}$$

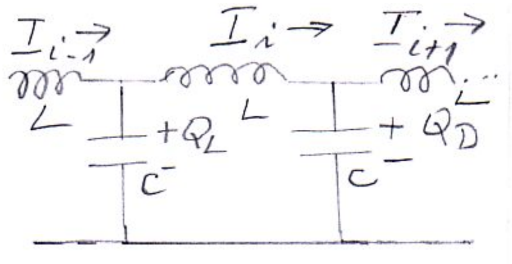
To je zapravo gotovo identično polaznoj jednadžbi (5.1), samo je sklop konstanti $\frac{K}{m}$ u (5.12) preuzeo ulogu sklopa $\frac{T_0}{ma}$ iz (5.1). To znači da se cijela procedura može analogno provesti odnosno da je nova disperzijska relacija u longitudinalnom slučaju titranja:

$$\omega_M = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\frac{k_M a}{2} \tag{5.13}$$

POKUS

5.3 Diferencijalna jednadžba za i-tu struju u LC prijenosnoj liniji serijski povezanih zavojnica čije spojeve presijecaju paralelno spojeni kapacitori, te disperzijska relacija za tu konfiguraciju

Ako s Q_L i Q_D označimo naboje na lijevom i desnom kapacitoru među kojima teče struja I_i,



dok svi kapacitori imaju kapacitet C a sve zavojnice imaju induktivitet L možemo izreći veze među njima:

$$\frac{dQ_L}{dt} = I_{i-1} - I_i \qquad \frac{dQ_D}{dt} = I_i - I_{i+1} \tag{5.14}$$

Primjenom Kirchoffovih pravila za centralnu petlju za i-tu struju slijedi:

$$\frac{Q_L}{C} - L\frac{dI_i}{dt} - \frac{Q_D}{C} = 0 \tag{5.15}$$

Deriviranjem (5.15) po vremenu uz korištenje (5.14) i sređivanjem nakon toga dobiva se:

$$\ddot{I}_i = \frac{1}{LC}(I_{i+1} + I_{i-1} - 2I_i) \tag{5.16}$$

To je pak matematički analogno već studiranoj relaciji (5.1) s time da je ulogu sklopa veličina $\frac{T_0}{ma}$ preuzeo sklop: $\frac{1}{LC}$. Potpunom analogijom ponavlja se i procedura za disperzijsku relaciju:

$$\omega_M = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin(\frac{\Delta\vartheta_M}{2}) \tag{5.17}$$

Još kompliciraniju vezu između kružne frekvencije stacionarnog stanja i valnog broja dobivamo ako se elastična sila sastoji iz više različitih doprinosa.

5.4 Elastično vezana njihala

Ostavlja se studentu da počne s 2. Newtonovim zakonom pisati analogon jednadžbe (5.12) s time da će se osim $-\frac{2K}{m}\psi_i$ člana sada tamo naći i dodatni član: $-g\sin\vartheta_i$ koji u aproksimaciji malih kuteva/pomaka prelazi u $-\frac{g}{l}\psi_i$. Nakon provođenja već pokazane procedure puta do disperzijske relacije dobit će se:

$$\omega_M{}^2 = \frac{g}{l} + 4\frac{K}{m}\sin^2\frac{\Delta\vartheta_M}{2} \tag{5.18}$$

Iako je ovo vrlo jednostavan primjer za rješavanje, u sadržaju jednadžbe (5.18) su velike posljedice. Naime iz (5.10) znamo da je valni broj k_M povezan s $\Delta\vartheta_M$ pa se time pojavljuje i u (5.18). Dok u nedisperzivnim medijima k_M prati ω_M linearno, pa i bez ograničenja, u slučaju elastično vezanih njihala postoje jasne granice za proračun i $\Delta\vartheta_M$ *i* k_M ; granične vrijednosti kružne frekvencije ${\omega_M}^2$ unutar kojih postoje mogućnosti realnih vrijednosti za k_M jesu: $\frac{g}{l}$ kao donja granica i $\frac{g}{l}+\frac{4K}{m}$ kao gornja granica.

Ovo će se pokazati sudbonosnim za frekventne mogućnosti transporta signala duž medija i biti će naročito važno u analognom slučaju transmisijske linije elektromagnetskog valovoda.

Sve do sada bili smo zainteresirani za efekte u kojima se promatra titranja sve kompleksnijih idealnih sustava no nismo razmatrali dva bitna realna aspekta koji su prisutni u titranju pa onda i u transmisiji mehaničkih, akustičkih i elektromagnetskih signala. Pri titranju postoje i gubici energije koji se daju elegantno tretirati ako se u mehaničkim titranjima radi o sili otpora proporcionalnoj brzini . S druge strane da bi signal počeo putovati, potreban je izvor titranja. Taj se dio matematičkog opisa naziva prisilnim titranjem (gušenog) harmoničkog oscilatora.