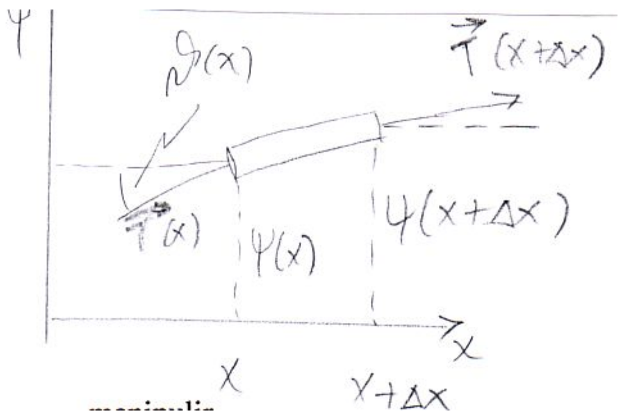
4. *Slobodno titranje kontinuiranog medija.*

Dosadašnja razmatranja bila su ograničena na longitudinalna i transverzalna titranja masa povezanih elastičnim oprugama. Varijable kojima smo opisivali stanja titranja bile su jednodimenzionalni kontinuum za varijablu pomaka i prirodni broj za oznaku mase čije titranje studiramo. U prirodi su fenomeni često mnogo kompleksniji. Na primjer u slučaju elektromagnetskih valova u prostoru , električno polje $\vec{E}$ više nije jednodimenzionalno odstupanje od ravnotežnog položaja, nego opis fenomena ima vektorsku prirodu. Domena razmatranja fenomena više se ne može indeksirati; prostor u kojem promatramo pojavu je kontinuiran u tri dimenzije. Dok je do sada naša notacija bila $\psi_i(t)$ od sada ćemo napredovati prema opisu na primjer: $\vec{E}(\vec{r},t)$, gdje je ψ zamijenjen s $\vec{E}$, a indeks mase (i) je zamijenjen s trodimenzionalnim vektorom položaja $\vec{r}$. Ovaj prijelaz s diskretnih indeksa na kontinuum možemo jednostavno ilustrirati na mogućem opisu transverzalnog titranja jednakih masa koje su u ravnotežnom položaju njihovih jednakih opruga tako da su razmaci ekvidistantni (jednaki) i iznose a. Tada umjesto indeksa (i) , masu možemo karakterizirati položajem u odnosu na početak sustava a koji je $x = ia$. Tako opis stanja titranja postaje $\psi(x,t)$. Ovakvo opisivanje se koristi na primjer u slučaju transverzalnog titranja kontinuirane žice.

4.1 Transverzalno titranje homogene, napete žice.

Pretpostavljamo da žica ima jednoliko raspoređenu gustoću: $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ po svojoj duljini. Ako smo se ograničili na transverzalno titranje, tada je komponenta napetosti niti duž niti uravnotežena. Uočimo segment žice između lokacija $x \; i \; x + \Delta x$. Njegova je masa $\Delta m = \rho \Delta x$.



U transverzalnom smjeru djeluju na njegove krajeve y komponente napetosti niti s rezultantom: $F_y = T(x+\Delta x)\sin\vartheta(x+\Delta x) - T(x)\sin\vartheta(x)$ gdje je T napetost niti žice a ϑ je kut otklona žice od ravnotežnog smjera. Istu veličinu možemo dalje manipulirati:

$$F_y = T(x+\Delta x)\cos(x+\Delta x) tg\vartheta(x+\Delta x) - T(x)\cos\vartheta(x) tg\vartheta(x)$$

No po našoj pretpostavci napetost niti duž žice je uravnotežena:

$$T(x+\Delta x)\cos\vartheta(x+\Delta x) = T(x)\cos\vartheta(x) = T_0$$

Također je $tg\vartheta(x) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$. Time je :

$$F_y = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x+\Delta x) - T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = T_0 \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Delta m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

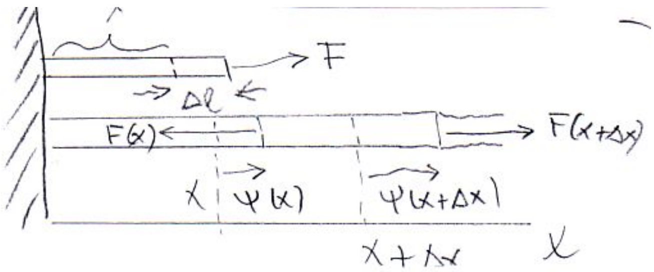
Gdje je posljednja jednakost unutar (4.1) posljedica drugog Newtonovog zakona za transverzalni smjer. Posljednja jednakost u (4.1) je ujedno i jednodimenzionalna valna jednadžba. Možemo je napisati i u drugom obliku:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{gdje je} \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho} \tag{4.2}$$

U ovom dijelu studija smo zainteresirani iz pedagoških razloga razmatrati samo stacionarna rješenja valne jednadžbe (4.2) t.j. ona u kojima je zavisnost transverzalnog pomaka faktorizirana u separiranu zavisnost o vremenu i separiranu zavisnost o koordinati x. No jednadžba (4.2) je temelj promatranja i transmisije valnog fenomena t.j. o promatranju širenja valnog profila duž medija. No najprije ćemo pokazati da se potpuno analogna jednadžba dobije i pri razmatranju pojava povezanih s lokalnim produljenjima i skraćenjima elastičnog medija kada je titranje usmjereno duž žice i/ili motke:

4.2 Longitudinalno titranje elastičnog medija:

Najprije se podsjetimo Hook-ovog zakona iz 1. semestra.



Ako na motku duljine l načinjenu iz elastičnog materijala djelujemo silom F; neka je presjek motke S, a materijal ima Youngov modul E, izazvat ćemo produljenje Δl :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \tag{4.3}$$

S druge strane, ako unutar motke uočimo dio dužine Δx između koordinata $x \; i \; x+\Delta x$, označavajući s $\psi(x) \; i \; \psi(x+\Delta x)$ uzdužna odstupanja koordinata deformiranog štapa od njihovih originalnih položaja vrijedi :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.4}$$

Kombiniranjem (4.3) i (4.4) , s time da ulogu sile rastezanja u (4.3) preuzima razlika napetosti $F(x+\Delta x) - F(x)$ sila , dobivamo:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = ES\frac{\partial \psi}{\partial x}(x+\Delta x) - ES\frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = ES\Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{4.5}$$

Ta razlika sila daje segmentu akceleraciju, što izraženo drugim Newtonovim zakonom rezultira u :

$$ES\Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = S\Delta x \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

Sređivanjem (4.6) i uvođenjem pokrate $v^2 = \dfrac{E}{\rho}$ dobiva se ponovno jednadžba (4.2). Pri tome je izraz za brzinu novi a i značenje odstupanja od ravnoteže je sada drukčije (dešava se duž motke), no valna jednadžba ima isti oblik. Suočeni s problemom njenog rješavanja možemo koristiti ideju koju smo naučili kod titranja sustava s velikim brojem masa povezanih oprugama. Tamo smo upotrijebili korisnu i uspješnu pretpostavku određivanja vlastitih rješenja titranja pretpostavkom: $\psi_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$. Sada je indeks (i) zamijenjen kontinuiranom varijablom x. Stoga se vlastita rješenja titranja traže analognom pretpostavkom da sve točke kontinuuma titraju istom frekvencijom ω. Rješenja valne jednadžbe za početak tražimo u obliku

$$\psi(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi) \tag{4.7}$$

Dvostrukim deriviranjem po vremenu imamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(x)\cos(\omega t + \varphi) \tag{4.7a}$$

Čijim uvrštavanjem u valnu jednadžbu i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{1}{v^2} A(x) = 0 \tag{4.8}$$

diferencijalnu jednadžbu za prostornu raspodjelu amplitude harmonijskog titranja.

Možemo sada uvesti novu standardnu oznaku iz titrajno-valne terimnologije:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \tag{4.9}$$

Time (4.8) poprima standardnu i otprije poznatu formu:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)A(x) = 0 \tag{4.10}$$

Ovo je jednadžba formalno identična onoj za jednostavno harmonijsko titranje s time da je sada slobodna varijabla prostorna koordinata umjesto vremenske. Mi znamo rješenja jednadžbe (4.10) . Ona se mogu pisati na dva ekvivalentna načina; obadva ćemo upotrebljavati zavisno o trenutnoj upotrebljivosti:

$$A(x) = A_0 \cos(kx + \varphi) \tag{4.11}$$

ili :

$$\text{A(x) = A sin(kx) + B cos(kx)} \tag{4.12}$$

Veze između integracijskih konstanti A_0 i φ s A i B studenti znaju otprije ili ih mogu reproducirati preko adicijskog teorema u (4.11).

Uvest ćemo i koncept valne duljine iako na prvi pogled nije jasno da valna duljina iz stojnih valova odgovara valnoj duljini iz putujućih valova. Ovdje definiramo valnu duljinu kao razmak na kojem se pri stacionarnom rješenju periodički ponavlja vrijednost valne funkcije. T.j. traži se $\psi(x) = \psi(x + \lambda)$, što u (4.11) znači $\cos(kx + \varphi) = \cos(kx + k\lambda + \varphi)$ odnosno $k\lambda = 2\pi$. Sada je moguće izraziti k koji se često zove i valnim brojem preko valne duljine.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4.13}$$

Moguće je kombinirati i (4.9) i (4.13) da se dobije :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu \tag{4.14}$$

Ovo je relativno plauzibilna (lako prihvatljiva) veza između (fazne) brzine širenja valova v i umnoška valne duljine λ s frekvencijom titranja ν. Podsjećamo, međutim da još nismo dokazali da je v iz valne jednadžbe ujedno i (fazna) brzina širenja valova u vremenu. To je istina, ali će taj dokaz će uslijediti kada budemo razmatrali širenje valova, dok zasada promatramo samo stacionarna stanja, koja se u slučaju kontinuuma još nazivaju i stojnim valovima.

Možemo zaključiti ovo razmatranje izrazom za opće (stacionarno) rješenje titranja kontinuiranog jednodimenzionalnog medija homogenih svojstava (svojstva medija se ne mijenjaju od položaja do položaja):

$$\psi(x,t) = (A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x + B\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\omega t + \varphi) \tag{4.15}$$

To je opće (stacionarno) rješenje valne jednadžbe (4.2)

POKUSI

Na Hertzovom valostroju demonstrira se razne mogućnosti stacionarnih rješenja. Studenti mogu uočiti stalne odnose amplituda u titranju. Ukoliko se međutim na Hertzovom valostroju generira na primjer puls titranja, koji se propagira kroz sustav, jasno je da u tom slučaju postoji vremenska dinamika u smislu da se odnosi amplituda titranja raznih masa u vremenu drastično mijenjaju. To je ta bitna razlika između stacionarnih i vremenski promjenljivih titranja. Student može pitati razlog za upoznavanje sa stacionarnim rješenjima. Vrlo će se brzo pokazati kako se svako titranje sustava može opisati kao superpozicija stacionarnih rješenja. S druge strane upozoravamo da su u kvantnoj fizici upravo stacionarna rješenja (na primjer Schroedingerove jednadžbe) opisuju stanja u kojima mikrosistem može boraviti.

4.3 Utjecaj rubnih uvjeta, definiranih za krajeve medija, na dozvoljene vrijednosti valne duljine i/ili valnog broja k:

Ako se krajevi medija ne mogu micati, tada je valna jednadžba (4.2) podvrgnuta uvjetima na svom rubu (rubni uvjeti). Ako je medij dužine L, tada su rubni uvjeti oblika:

$$\psi(x=0,t) = 0 \quad i \quad \psi(x=L,t) = 0 \tag{4.16}$$

Uvidom u analitički oblik općeg rješenja titranja (4.15) a s obzirom na vremenski titrajući faktor i vrijednosti koje funkcije sinusa i kosinusa poprimaju na krajevima medija, za slučaj rubnog uvjeta (4.16), koeficijent B u (4.15) mora iščeznuti dok za valnu duljinu vrijedi:

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = M\pi \quad to\ jest \quad \lambda = \frac{2L}{M} \tag{4.17}$$

gdje je M cijeli broj. Time je i valni broj k prisiljen imati samo diskretne vrijednosti. Naime prema (4.13) , svojoj vezi s valnom duljinom, i (4.17) slijedi i za valni broj k:

$$k_M = \frac{M\pi}{L} \tag{4.18}$$

uočimo da smo valnom broju dodali indeks M radi naglašavanja o kojem se načinu (modu) titranja radi. Iz izraza (4.17) i (4.18) jasno je da valne duljine λ i valni brojevi k mogu biti samo iz diskretnog skupa definiranog s (4.17) odnosno (4.18). Ako s k_1 označimo:

$$k_1 = \frac{\pi}{L} \tag{4.19}$$

Tada se opća rješenja, za rubne uvjete specijalizirane gore (4.16), stacionarnog oblika mogu izraziti preko dozvoljenih vrijednosti valnog vektora kao:

$$\psi_M(x,t) = A_M \sin(Mk_1 x)\cos(\omega_M t + \varphi_M) \tag{4.20}$$

Uočimo da je i frekvencija titranja postala diskretna i dobila je indeks M. Naime kružna frekvencija titranja i valni broj vezani su relacijom (4.9) s (faznom) brzinom v iz valne jednadžbe. Odatle slijedi:

$$\omega_M = k_M v = \frac{M\pi}{L} v \tag{4.21}$$

A_M je pak amplituda M-tog moda titranja. Opće nestacionarno rješenje valne jednadžbe (4.2) uz rubne uvjete (4.16) jest superpozicija različitih modova:

$$\psi(x,t) = \Sigma A_M \sin(Mk_1 x)\cos(\omega_M t + \varphi_M) \tag{4.22}$$

Mod s indeksom M=1 naziva se i osnovnim modom. Na monokordu on odgovara titranju s trbuhom titranja na sredini monokorda i čvorovima na rubovima koji fiksiraju položaje žice. Titranja s višom (cjelobrojnom) vrijednosti indeksa M se (posebno u glazbi) nazivaju višim harmonicima. Za gornje rubne uvjete očita je veza između indeksa višeg harmonika i broja čvorova stacionarnog titranja:

$$broj\ \check{c}vorova\ - 1 = M$$

U gornjim primjerima transverzalnog i longitudinalnog titranja medija pretpostavili smo idealni slučaj koji se očituje kroz proporcionalnost valnog broja k i kružne frekvencije ω izraženom preko (4.9). Općenito se veza valnog broja i kružne frekvencije zove disperzijskom relacijom i generalno nema tako jednostavan oblik. Vrlo brzo ćemo u našem napredovanju sresti i drukčije oblike disperzijskih relacija.

POKUSI

Studenti promatraju titranje elastične niti; mijenjanje broja stojnih valova na istom razmaku rubnih čvorova preko promjena zategnutosti niti. Monokord: mijenjanje frekvencije osnovnog tona povećanjem napetosti žice i/ili promjenom razmaka rubnih čvorova. Princip rada puhačkih instrumenata kod kojih se promjenom mjesta na kojem instrument ima slobodan kontakt s okolnim zrakom mijenja visina tona zvuka (frekvencija).

4.4 Prikaz titranja elastičnog medija s učvršćenim krajevima pomoću Fourierovog reda

Izaberimo takvo rješenje u kojem za t=0 cijeli medij miruje to jest $\frac{\partial\psi}{\partial t}(t=0) = 0$ Ovakvo početno stanje medija možemo realizirati pripremom profila koji do početka brojenja vremena deformira medij a zatim se u trenutku t=0 uklanja i prepušta medij vlastitom titranju. U generalnom izrazu (4.22) to ima za posljedicu da su svi $\varphi_M = 0$. Naime ako tome ne bi bilo tako, tada bi mod koji ima φ_M različit od nule generirao u t=0 brzinu medija različitu od nule koju drugi modovi radi svoje linearne nezavisnosti ne bi mogli poništiti da bi se ispunio početni uvjet da medij na početku miruje. (Argumenti svih sinusnih doprinosa nastalih vremenskim deriviranjem moraju biti nula!). Tim izborom početnih uvjeta (4.22) se reducira na:

$$\psi(x,t) = \Sigma A_M \sin(Mk_1 x)\cos(M\omega_1 t) \tag{4.23}$$

U vremenu t=0 taj profil se opisuje:

$$\psi(x,t=0) = A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \sin(2k_1 x) + A_3 \sin(3k_1 x) + ... + A_N (k_N x) + ... \tag{4.24}$$

Ovaj oblik je specijalni slučaj Fourierovog prikaza funkcije na konačnom intervalu od $od\ \ x = 0\ \ do\ x = L$ na čijim krajevima funkcija iščezava. Teoriju Fourierovih redova studenti uče tijekom druge godine studija i ovdje ćemo spomenuti samo minimalne činjenice o toj materiji. Uobičajene „ glatke“ funkcije definirane na konačnom intervalu mogu se razviti u red analogan (4.24), s time da se u red uključe i odgovarajući analogni kosinusni termi. Tada razvoj funkcije ima generalni oblik :

$$\psi(x) = \Sigma\left[A_n \sin(nk_1 x) + B_n \cos(nk_1 x)\ \right] \tag{4.25}$$

Ovaj prikaz ima radi periodičnosti funkcija sinusa i kosinusa svojstvo periodičnosti i obnavlja se na svakom slijedećem intervalu L. Studentu je to jasno jer se za svaki član višeg k argumenta već u intervalu unutar L dešavaju potpuni titraji i sinusa i kosinusa i istom se periodičnošću ponavljaju i izvan intervala duljine L. Student može lakše prihvatiti činjenice oko Fourierovih redova ako pojedine terme u gornjem razvoju interpretira kao komponente baznih vektora u vektorskom prostoru koji ima (diskretno) beskonačno mnogo dimenzija. Funkcija $\psi(x)$ je tada proizvoljni vektor unutar vektorskog prostora razapetog vektorima $\sin(nk_1 x)\ \ i\ \cos(nk_1 x)$ gdje indeks n ide od 1 do beskonačnosti. Naravno u matematičkoj terminologiji vektorskih prostora postavlja se pitanja recepta za pravljenje skalarnog produkta da bismo preko njega mogli iz $\psi(x)$ isprojicirati komponentu u smjeru pojedine sinusne ili kosinusne funkcije. To je drugim riječima pitanje određivanja koeficijenata $A_n\ \ i\ B_n$ u razvoju (4.25). Taj se skalarni produkt u tom vektorskom prostoru definira kao integral produkta dviju funkcija preko intervala L. U tako definiranom skalarnom produktu, navedene funkcije imaju očito svojstvo ortogonalnosti, jer integral produkta svakog od različitih sinusnih funkcija oblika $\sin(nk_1 x)$ sa sinusnom i/ili kosinusnom funkcijom drugog cjelobrojnog indeksa (na primjer m) načinjen preko intervala (periodičnosti) L iščezava. Radi navedene ortogonalnosti funkcija po kojima razvijamo i radi poznatih rezultata integriranja kvadrata sinusa i kosinusa po intervalu periodičnosti imamo za koeficijente:

$$B_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x)dx \qquad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\cos(nk_1 x)dx \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin(nk_1 x)dx \tag{4.26}$$

Podsjećamo da su k_1 i L povezani izrazom (4.19).

Studenti će na vježbama razvijati različite profile u Fourierove redove. Fourierova analiza ima široke primjene u mnogim granama fizike i uopće u prirodnim znanostima. S druge strane, na primjer, boja tona jednog muzičkog instrumenta uključuje prvenstveno relativno učešće osnovne frekvencije (visine tona) i ostalih viših harmonika koje instrument istovremeno emitira. (Najnovija istraživanja na ljudima su indicirala da registriramo i karakteristične tranzijente nastale pri aktivaciji tona pojedinog instrumenta ; o tranzijentnim fenomenima bit će kasnije govora) .

4.5 Analiza vremenski periodičkih fenomena pomoću Fourierovih redova

U odsječku (4.4) Fourierovi redovi su imali ulogu baze po kojoj se opisivala svaka funkcija na konačnom intervalu. Konstatirali smo doduše da se taj opis u prostoru periodički ponavlja , no periodičnost nije bila temeljna točka u razmatranju jer se radilo o traženju rješenja valne jednadžbe s uvjetom da to rješenje iščezava na krajevima intervala. Nakon prvog takvog opisa (4.22) s (4.25) proširili smo klasu funkcija koje se opisuju Fourierovim redovima i uvjet da funkcija iščezava na krajevima za poopćenje (4.25) više nije potreban. Operativa postupka je vrlo precizno dana s (4.26).

U prirodi smo vrlo često u kontaktu s periodičkim fenomenima (koji nemaju jednostavan sinusoidalan karaker. No upravo nađena tehnika Fourierovih redova nam je najprirodnija baza za opis vremenski periodičkih fenomena. Studenti su na seminaru upoznati s elementarnim transducerima (engleski termin za pretvarač ulaznog signala u uređaj u dominantno električki izlaz, koji je proporcionalan ulaznom signalu) za pretvorbu akustičkog nadtlaka (zvuka) u električki napon, to jest razne vrste mikrofona. Tijekom predavanja studenti će vidjeti instrumente koji proizvode približno čistu sinusoidu i one koji za istu frekvenciju imaju daleko kompleksniji oblik s istim periodom. Taj period kompleksnog fenomena određuje visinu glazbenog tona. Jednostavnom analogijom s prostornom Fourierovom analizom zaključujemo da je za kompletan opis potrebno uključiti uz osnovnu frekvenciju ν_0 *i višekratnike* $2\nu_0$, $3\nu_0$ *...i t.d.*

4.6 Komplementaran rubni uvjet: slobodni kraj

Najveći dio poglavlja je bio posvećen posljedicama zahtjeva da titranja medija nema na njegovim krajevima. U stručnom žargonu taj kraj medija zove se čvrstim krajem. Postoji i drugi , suprotni zahtjev. Intuitivno on kaže da sile koja bi sprečavala titranje (u smjeru promatranja) nema. Mi smo kod transverzalnog titranja napete žice ustanovili:

$$F_y = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad .$$

Kako prvi faktor u izrazu za transverzalnu silu ne iščezava, uvjet slobodnog kraja se formulira kao:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (4.27)$$

POKUSI

U slučaju transverzalnog titranja, student može predočiti realizaciju uvjeta (4.27) ili prstenom koji bez trenja klizi po transverzalno orijentiranoj osi ili, što je realnije , točkićem koji se bez trenja kotrlja po transverzalnoj osi , a za čije središte simetrije je vezana nit medija. Demonstrirat će se i nekoliko najjednostavnijih modova titranja za koje je jedan kraj slobodan. Student se može sjećati da su (orguljaške) svirale na klin upravo primjer takvog titranja kod kojeg je jedan kraj čvrst a drugi slobodan. Osnovno titranje je naravno ono s četvrtinom valne duljine.

4.7 Dalekosežnost važnosti stacionarnih stanja i Fourierovog razvoja

Pri gornjim razmatranjima ne mora odmah biti očita temeljna uloga koju stacionarna stanja imaju ne samo u razumijevanju valova općenito nego i u širem fizikalnom kontekstu. Već je bilo spomenuto da se u kvantnoj fizici stacionarna stanja-vlastita stanja-modove može uzeti kao intelektualni model za diskretna stanja mikrosistema kakav je na primjer atom. I u klasičnom slučaju i u kvantnom analogonu ta diskretna stanja (ovdje je značenje diskretnosti kao suprotnosti kontinuiranosti) potječe od rubnih uvjeta zadanih na medij. S druge strane izraz (4.23) ima u sebi nevjerojatan potencijal. Vratimo se na trenutak problemu s kojim smo započeli korake Fourierove analize. Imali smo početni proizvoljan profil, prema njemu formirali medij i odredili Fourierove koeficijente. U tom trenutku mi kroz (4.23) imamo u rukama opis sudbine kontinuiranog medija za sva vremena. Naime s poznatim koeficijentima znamo opis sustava u trenutku kad ga prepuštamo samog sebi, no ponašanje svake komponente posebno određeno je vlastitom frekvencijom moda i kosinuidalnom ovisnošću o vremenu. Time je izraz (4.23) opis sustava u svakom drugom trenutku vremena. Prigovor da smo upotrijebili rubni uvjet mirovanja krajeva medija je lako eliminirati. Generalizacija tako limitiranog opisa tipa (4.24) opisom koji uključuje i kosinusno titranje s istim frekvencijama kroz Fourierov red (4.25) poopćuje mogućnost primjene i na druge rubne uvjete. Konačno, zasad nije jasno imaju li stojni valovi bilo kakvu povezanost s transmisijom titranja kroz medij. I ovdje već postoji odgovor samo nije eksplicitan. Zamislimo da je u sredini medija formiran jedan titraj ali da je njegova duljina (valna duljina) daleko manja od dimenzija na kojima medij ima rubne uvjete. Mi imamo: $\psi(x,t=0)$, te $\dot{\psi}(x,0)=0$ To je jedan sinusoidin titraj i $\psi=0$ po ostatku područja. Načinimo preko cijelog područja medija proceduru opisanu za koeficijente (4.26). Naravno L je interval rasprostiranja medija , a ne područje sinusoidinog titraja. Izraz

$$\psi(x,t)=\Sigma\left[A_n\sin(nk_1x)\cos(\omega_nt)+B_n\cos(nk_1x)\cos\omega_nt\ \right] \tag{4.28}$$

Opisivat će vremensku dinamiku medija nakon što smo ga u t=0 oslobodili od početnog oblika. Studentima bi trebalo biti intuitivno jasno da vremenski razvoj sustava ne će rezultirati stacionarnim titranjem medija nego jednom vrlo pokretljivom dinamikom. Odgodit ćemo eksplicitni odgovor na to što se dešava do trenutka kada ćemo demonstrirati da se stojni val može dobiti superpozicijom dva vala jednakog oblika koji putuju u suprotnim smjerovima brzinom v iz valne jednadžbe.