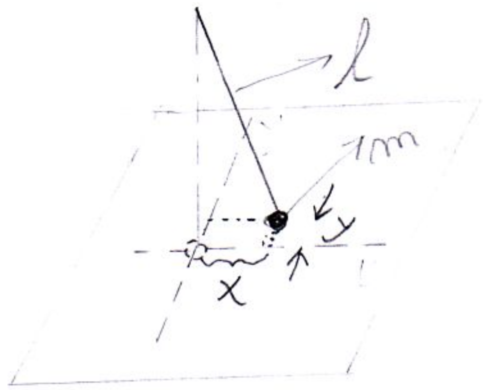
2. Proširivanje jednostavnog harmonijskog titranja na dvije dimenzije i/ili 2 tijela

U slijedećim ćemo poglavljima poopćavati jednostavno harmonijsko titranje na sve kompleksnije situacije. S jedne strane ta titranja ne moraju biti ograničena na samo jednu dimenziju; mogu biti i u ravnini (2D) ili u prostoru (3D). S druge strane uvodit ćemo više tijela u titrajući sustav što je prirodan put prema titranju kontinuiranih medija i valnih fenomena.

2.1 Matematičko njihalo u prostoru (za male pomake)

Pomake u horizontalnoj ravnini titranja možemo pratiti Kartezijevim koordinatama; u tu svrhu možemo upotrijebiti formule i notaciju oko izvoda izraza (1.17) i napisati za obadvije dimenzije



$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l} \tag{2.1}$$

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{l} \tag{2.2}$$

Podsjećajući se da je kvadrat kružne frekvencije za gornja titranja :

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{g}{l}$$

imamo rješenja za titranje u obadvije dimenzije.

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \tag{2.3}$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \tag{2.4}$$

Amplitude i faze titranja su naravno određene početnim uvjetima za koordinate x i y (na primjer položajima i brzinama u t=0). Superponiranjem rješenja (2.3) i (2.4) dobivamo opće rješenje 2D titranja matematičkog njihala. Zanimljiv slučaj je na primjer: iste amplitude a faze različite za $\pi/2$. Tada dobivamo kruženje tijela s radijusom jednakim zajedničkoj amplitudi.

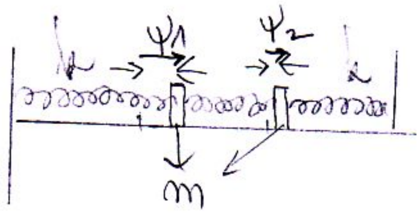
POKUS

Sličnu bismo situaciju imali i kombiniranjem harmoničkih sila koje bi u Kartezijevom sustavu bile proporcionalne s pomacima u x i y smjeru. U tom slučaju imamo čak i mogućnost da se izborom različitih konstanti opruga u dvije dimenzije kružne frekvencije gibanja u x smjeru i gibanja u y smjeru razlikuju.

POKUS

2.2 Titranje dva tijela povezanih trima oprugama (jednake mase i opruge; longitudinalni slučaj)

Pomake masa od ravnotežnog položaja označavamo s $\psi_1 i \psi_2$. Drugi Newtonov zakon za pojedine mase daje:



$$m\ddot{\psi}_1 = -k\psi_1 + k(\psi_2 - \psi_1) = -2k\psi_1 + k\psi_2 \tag{2.5}$$

$$m\ddot{\psi}_2 = -k\psi_2 + k(\psi_1 - \psi_2) = -2k\psi_2 + k\psi_1 \tag{2.6}$$

Jednadžbe (2.5) i (2.6), matematički gledano, predstavljaju sustav vezanih linearnih diferencijalnih jednadžbi. Teorija za njihovo rješavanje postoji i nije komplicirana. No radi fizikalne razumljivosti, mi ćemo pribjeći jednostavnim manipulacijama koje imaju jasnu fizikalnu interpretaciju da bi dobili rješenja koja se lako interpretiraju. Zbrajanje (2.5) i (2.6) rezultira u:

$$m(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) = -k(\psi_1 + \psi_2) \tag{2.7}$$

A uvođenjem nove veličine $\psi_i = \psi_1 + \psi_2$ (ψ_i je usko povezan s koordinatom težišta sustava) (2.7) prelazi u

$$m\ddot{\psi}_i = -k\psi_i \quad ; \quad \ddot{\psi}_i + \omega_i^2 \psi = 0 \qquad \omega_i^2 = \frac{k}{m} \tag{2.7a}$$

Iz (2.7a) proizlazi da težište sustava dvije mase titra frekvencijom koju bi imala jedna od tih masa s jednom oprugom. Odbijanjem (2.6) od (2.5) dobivamo:

$$(\ddot{\psi}_1 - \ddot{\psi}_2) = -\frac{3k}{m}(\psi_1 - \psi_2) \tag{2.8}$$

Uvođenjem druge veličine: $\psi_{ii} = \psi_1 - \psi_2$ (ψ_{ii} je razmak masa) dobivamo :

$$\ddot{\psi}_{ii} = -\frac{3k}{m}\psi_{ii} \quad ; \quad \ddot{\psi}_{ii} + \omega_{ii}^2 \psi_{ii} = 0 \quad ; \quad \omega_{ii}^2 = \frac{3k}{m} \tag{2.8a}$$

Fizikalno značenje ove relacije jest da razmak masa titra frekvencijom koja je za korijen iz 3 viša od one za titranje težišta. Matematički aspekt: Rješenja jednadžbi (2.7a) i (2.8a) su jednostavna harmonijska titranja (s različitim frekvencijama). Njihova linearna superpozicija

$$C_i\psi_i + C_{ii}\psi_{ii}$$

jest također rješenje sustava jednadžbi (2.5) i (2.6). To je također i opće rješenje tog sustava. Opće rješenje jednadžbe (2.7a) jest:

$$\psi_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \tag{2.9}$$

Opće rješenje od (2.8a) jest:

$$\psi_{ii} = A_{ii} \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \tag{2.10}$$

Amplitude i faze određuju se iz početnih uvjeta za sustav dviju masa.

Matematički rječnik naziva ψ_i *i* ψ_{ii} *vlastitim rješenjima problema, a odgovarajuće kvadrate kružnih frekvencija vlastitim vrijednostima problema. Taj jezik koriste i fizičari i u titranjima i u kvantnoj fizici. Ponekad se sva moguća rješenja zovu i vektorskim prostorom, a* ψ_i *i* ψ_{ii} *predstavljaju jednu od mogućih baza u tom prostoru. Student ne mora memorirati ništa od ovih matematički orijentiranih komentara; međutim uz poznavanje osnovnih pojmova o vektorskim prostorima ovi komentari mu mogu pomoći u usvajanju temelja za apstraktnu intuiciju pri radu s titrajno-valnim fenomenima. Ta generalizacija je osobito korisna tijekom povećanja broja masa koje titraju; imamo posla s vektorskim prostorima sve većih dimenzija ; kada prijeđemo na titranja kontinuiranih medija imat ćemo posla kao i u kvantnoj fizici s vektorskim prostorima s kontinuirano mnogo dimenzija.*

Fizikalni komentar: ψ_i $(dok\ je\ \psi_{ii} = 0)$ razmak među masama se ne mijenja, titra samo težište. Obratno, u rješenju ψ_{ii} $(dok\ je\ \psi_i = 0)$ težište miruje a titra samo razmak.

POKUSI

2.3 SAŽETAK i KOMENTAR

Studentima će biti eksperimentalno demonstrirani i matematički obrađeni i drugi slučajevi oscilacija dva podsistema : dvije jednake mase s tri jednake opruge koje transverzalno titraju, dva vezana torzijska njihala, C-L-C-L-C elektromagnetski krug… Dok će simboli biti drukčiji, srž problema ne će se mijenjati: imat ćemo vezane diferencijalne jednadžbe a metoda rješavanja , supstitucije analogne upravo načinjenima, bit će putovi za dobivanje vlastitih rješenja i odgovarajućih frekvencija. Za seminarsku radnju student može izabrati slučaj titranja u kojem ni mase ni opruge nisu identične. Ova komplikacija i generalizacija je na liniji ilustracije općeg traženja vlastitih vrijednosti sustava diferencijalnih jednadžbi i pripadajućih titranja. No u toj rigoroznosti teže se snalazimo , posebno u intuitivnom smislu. Vratimo se sada originalnom problemu titranja sustava dviju masa s tri opruge opisanom vezanim diferencijalnim jednadžbama (2.5) i (2.6). Već smo prije spomenuli da rješenja tog sustava ψ_i $i\,\psi_{ii}$ možemo superponirati; to jest da je najopćenitije rješenje:

$$C_i\psi_i + C_{ii}\psi_{ii} \tag{2.11}$$

Kako su $\psi_1\, i\, \psi_2$ *linearnim transformacijama* $\left[vidi\ tekst\ oko\ (2.7) i (2.8)\right]$ *povezani s* $\psi_i\ i\,\psi_{ii}$ to za mase 1 i 2 možemo naći obratnim transformacijama i participiranje tih masa u ukupnom rješenju.

$$\psi_i(1,t) = A_i(1)\cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad \psi_i(2,t) = A_i(2)\cos(\omega_i t + \varphi_i) \tag{2.11a}$$

$$\psi_{ii}(1,t) = A_{ii}(1)\cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \qquad \psi_{ii}(2,t) = A_{ii}(2)\cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \tag{2.11b}$$

Oznake u skupu jednadžbi (2.11a) su na primjer:

$\psi_i(1,t)$ je onaj dio vremenske zavisnosti ukupnog titranja čestice 1 koji dolazi od titranja težišta to jest od rješenja jednadžbe (2.7a) ; amplituda tog dijela titranja čestice 1 je $A_i(1)$. Analogno vrijedi za sve druge oznake u jednadžbama (2.12).

Tako su opća rješenja za pojedine čestice:

$$\psi_1(t) = A_i(1)\cos(\omega_i t + \varphi_i) + A_{ii}(1)\cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \tag{2.12}$$

$$\psi_2(t) = A_i(2)\cos(\omega_i t + \varphi_i) + A_{ii}(2)\cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \tag{2.13}$$

Fenomen prijenosa energije:

Ako u gornjim općim rješenjima za titranje dviju masa povezanih trima oprugama specijaliziramo da su sve faze jednake nuli i da su prve tri amplitude titranja u (2.12) i (2.13) jednake A/2 , a četvrta da je –A/2 imamo najprije:

$$\psi_1(t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_i t) + \cos(\omega_{ii} t)\right] \qquad \psi_2(t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_i t) - \cos(\omega_{ii} t)\right] \tag{2.14}$$

Korištenjem poznatih relacija za zbroj i razliku kosinusa slijedi:

$$\psi_1 = A\cos\left[\frac{(\omega_i + \omega_{ii})t}{2}\right]\cos\left[\frac{(\omega_{ii} - \omega_i)t}{2}\right] \tag{2.15}$$

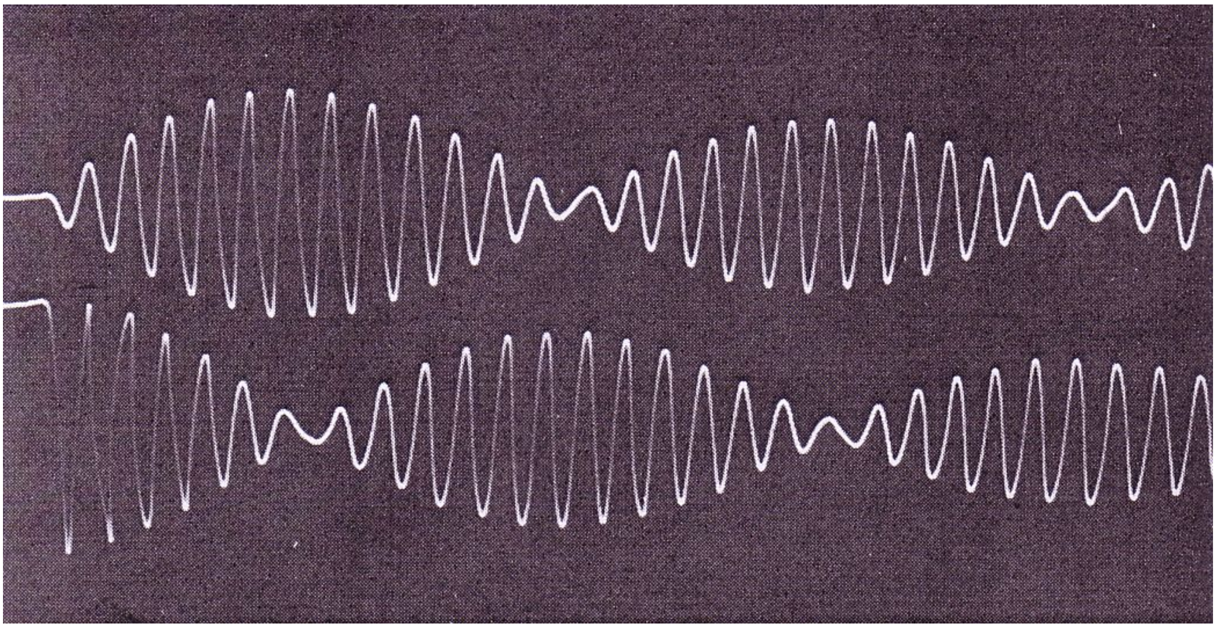
$$\psi_2 = A\sin\left[\frac{(\omega_{ii} - \omega_i)t}{2}\right]\sin\left[\frac{(\omega_{ii} + \omega_i)t}{2}\right] \tag{2.16}$$

Bilo grafičkim prikazom bilo pažljivom analizom vremenske zavisnosti (2.15) i (2.16) zaključujemo da su se u titranjima masa pojavile dvije frekvencije. To je s jedne strane usrednjena frekvencija (brzog) titranja:

$$\omega_{sr} = \frac{\omega_i + \omega_{ii}}{2} \tag{2.17}$$

i modulacijska frekvencija (modulacijski faktor određuje vremensku zavisnost amplitude brzog titranja):

$$\omega_{\mathrm{mod}} = \frac{\omega_{ii} - \omega_i}{2} \tag{2.18}$$



Napomena: kako će se vidjeti u energijskoj analizi, energijska se situacija obnavlja dvostruko bržom frekvencijom; sukladno tome neki autori ispuštaju faktor dva u nazivniku relacije (2.18) !

Načinit ćemo kratku analizu „položaja energije“ u gornjem primjeru. Ta analiza, naime, može biti od pomoći studentima u četvrtom semestru kada se budu sretali s „paketima energije“ – fotonima, koji ne će biti dobro lokalizirani.

Jasno je da svaki objekt i 1 i 2 ima svoju trenutnu energiju. Nadalje je jasno još iz prvog semestra kako se kinetičke i potencijalne energije objekata izražavaju preko mase i parametara titranja:

$$E_1 = E_1(kin) + E_1(pot) = E_1(pot.\ \ Maks.) = \frac{k}{2}(A\ \ \text{mod}.\,faktor)^2$$

$$E_1 = (\frac{k}{2})[A\ \cos(\omega_{\text{mod}} t)]^2 \qquad (2.19)$$

Potpuno analogno tome :

$$E_2 = (\frac{k}{2})[A \sin(\omega_{\text{mod}} t)]^2 \qquad (2.20)$$

Zbrajanjem (2.19) i (2.20) naravno konstatiramo da je ukupna mehanička energija sustava dviju masa s tri opruge stalna što smo i očekivali (zbroj kvadrata sinusa i kosinusa jednak je jedinici). S druge strane opažamo da je taj ukupni paket energije raspodijeljen među objekte 1 i 2 i da se u jednom trenutku (na pr. t=0) energija nalazi u objektu 1 , dok se u nekom drugom trenutku $(na\ pr.\, t = \frac{\pi}{2\omega_{\text{mod}}})$ može naći kompletno u objektu 2. U proizvoljnom trenutku paket energije je dijelom u jednoj i dijelom u drugoj komponenti!

U ovom dijelu gradiva gornja činjenica je potpuno prihvatljiva; s druge strane u četvrtom semestru studenti će(biti primorani argumentima) prihvatiti da je foton obrok energije. Ovaj im primjer daje model neodređenosti položaja za paket energije i jedan mogući opis načina titranja položaja takvog paketa energije.

Postoji još jedan spoznajni aspekt u analizi gornjeg problema titranja. Rješenja $\psi_i\, i \psi_{ii}$ s jedne strane nazivamo vlastitim rješenjima no ona u svim titrajućim situacijama uključujući kasnije i kvantnu mehaniku zovemo i stacionarnim. Naime za svako takvo rješenje, dok nema drugih primjesa, titraju zauvijek sa stalnom frekvencijom sve komponente sustava, a to znači da se odnosi među koordinatama učesnika u titranju periodički obnavljaju. S druge strane, kod linearne superpozicije rješenja , kakvu smo vidjeli pri gornjem posebnom izboru faza i amplituda, postoji dinamičan razvoj u vremenu za komponente $\psi_1\ i\, \psi_2$ (u početku dominira titranje objekta 1 da bi kasnije dominiralo titranje objekta 2). Takva rješenja više nisu stacionarna.