1.1 Jednostavno harmonijsko titranje

Pri valnim fenomenima elementi vala izvode titranja. Stoga ćemo u početku razmotriti razne oblike titranja i njihova svojstva.

Ako s $\psi(t)$ označimo opći pomak od ravnoteže, jednostavnim harmonijskim titranjem nazivamo fenomen:

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

A je amplituda titranja; ω je kružna frekvencija; φ je faza titranja. Jasno je da A određuje maksimalni otklon; ω je kutna brzina rotacije vektora čija je projekcija na koordinatnu os $\psi(t)$, a φ je povezan sa vremenskim pomakom konkretnog titranja u odnosu na elementarnu kosinusnu ovisnost položaja objekta o vremenu (na pr. izbor vrijednosti $\psi(t=0)$).

Fenomen jest periodički (t.j. isti položaji se ponavljaju nakon vremena T) . Period T se jednostavno vidi iz zahtjeva:

$\psi(t+T) = \psi(t)$ što povlači: $A\cos[\omega(t+T)+\varphi] = A\cos(\omega t+\varphi)$ ili $\omega T = 2\pi$ t.j.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu} \text{, gdje je } \nu \text{ obična frekvencija titranja.} \tag{1.2}$$

Dvostrukim deriviranjem izraza (1.1) po vremenu dobivamo:

$$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0 \tag{1.3}$$

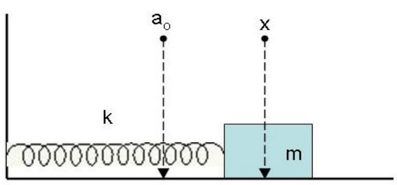
Ovo je generalni oblik diferencijalne jednadžbe jednostavnog harmonijskog titranja. U nastavku poglavlja vidjet ćemo primjere različitih vrsta takvog titranja.

Generalno ćemo vidjeti na primjerima koji slijede da vrijedi :

$$\omega^2 = \frac{Povratna\ \ sila}{(tromost)(pomak)} \tag{1.4}$$

(naravno silu, tromost i pomak treba u nemehaničkim slučajevima generalizirati.)

1.1.1 Harmonički oscilator (slobodni, bez prisile, bez gušenja; horizontalan)



$$F = m\ddot{x} = -k(x - a_0) \tag{1.5}$$

m je masa objekta koji titra, k je konstanta opruge, a_0 je koordinata ravnotežnog položaja.{Sila koja vraća tijelo u položaj ravnoteže [desna strana u (1.5)] se generalno zove povratnom silom.}

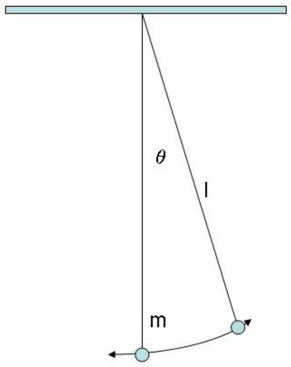
Transformacijama:

$$x - a_0 = \psi \qquad \dot{x} = \dot{\psi} \qquad \ddot{x} = \ddot{\psi} \tag{1.6}$$

(1.5) prelazi u: $\ddot{\psi} + \frac{k}{m}\psi = 0$; $\ddot{\psi} + {\omega_0}^2\psi = 0$ jednadžbu oblika (1.3) s ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} = \frac{kx}{mx}$ potvrđujući oblik (1.4).

POKUS

1.1.2 Matematičko njihalo:

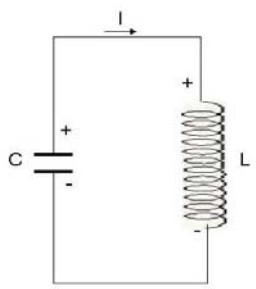


$$F = -mg\sin\vartheta = ml\ddot{\vartheta} \quad \text{za male } \vartheta \text{ i } \vartheta = \psi$$

$$\ddot{\psi} + {\omega_0}^2\psi = 0 \quad \text{gdje je } {\omega_0}^2 = \frac{g}{l} \tag{1.7}$$

POKUS

1.1.3 Električki rezonantni krug:



$$\frac{Q}{C} + \left[-L\left(\frac{dI}{dt}\right)\right] = 0 \;\; ; \;\; I = -\left(\frac{dQ}{dt}\right)$$

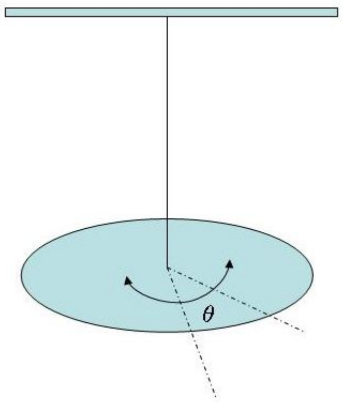
gdje je Q naboj na kapacitoru C, I je struja kroz zavojnicu induktiviteta L i ima suprotni predznak od promjene naboja na kapacitoru. Sređivanjem dobivamo:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \;\; ili \;\; \ddot{Q} + {\omega_0}^2 Q = 0 \tag{1.8}$$

$$\text{gdje je } {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

POKUS u prošlom semestru

1.1.4 Torzijsko njihalo:



$$M = \frac{dL}{dt} = I\ddot{\vartheta} = -D\vartheta$$

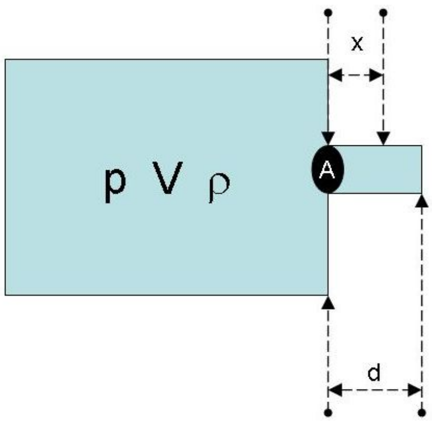
M je moment sile, L je kutna količina gibanja, I je moment inercije, ϑ je kut zaokreta pri torziji, D je konstanta proporcionalnosti između momenta sile i kuta zaokreta. Sređivanjem gornjeg analogona drugog Newtonovog zakona za rotacijski stupanj slobode dobivamo:

$$\ddot{\vartheta} + {\omega_0}^2\vartheta = 0 \quad gdje\ je\ {\omega_0}^2 = \frac{D}{I} \tag{1.9}$$

POKUS

1.1.5 Akustički rezonator:

Volumen same boce Vo. Volumen boce zajedno s dijelom grla boce ispunjenog plinom V. Površina presjeka grla boce A. Gustoća plina u boci ρ. Duljina grla boce d. Koordinata prodora plina iz boce u grlo boce x. Tlak u ravnoteži unutar Vo je Po. Tlak plina u volumenu V je P. Iz drugog Newtonovog zakona slijedi za plin u grlu boce:



$$(dA\rho)\ddot{x} = (P - P_0)A \tag{1.10}$$

Termodinamički gledano (OF4) promjene u boci su adijabatske. Stoga vrijedi:

$$PV^{\gamma} = P_0{V_0}^{\gamma}$$

γ je adijabatska konstanta karakteristična za plin.

Nadalje su volumeni povezani relacijom:

$$V = V_0 + Ax$$

Sada se desna strana relacije (1.10) može modificirati kako slijedi:

$$P - P_0 = P_0\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) = P_0\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} - 1\right] = P_0\left\{\frac{1}{\left[1 + \frac{Ax}{V_0}\right]}^{\gamma} - 1\right\} \doteq P_0\left(1 - \gamma\frac{Ax}{V_0} - 1\right) = -\gamma P_0\frac{Ax}{V_0}$$

Time drugi Newtonov zakon (1.10) poprima oblik:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma P_0 A}{V_0 \rho d}x = 0 \qquad (1.11)$$

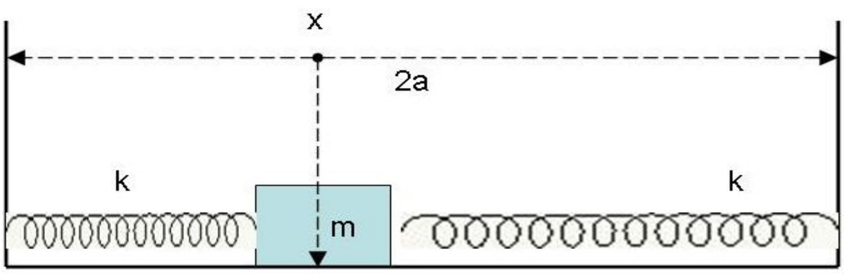
To je ponovno diferencijalna jednadžba jednostavnog harmonijskog titranja. Kasnije ćemo demonstrirati da je zvuk titranje (akustičkog nad)tlaka. Dobivena diferencijalna jednadžba pokazuje kako frekvencija tog zvuka zavisi o parametrima boce i svojstvima plina, jer je faktor uz x u gornjoj jednadžbi kvadrat kružne frekvencije titranja zvuka. Pokusom demonstriramo kako se ta frekvencija mijenja dolijevanjem vode u bocu (promjenom Vo).

POKUS

[Na seminarskim satovima studenti mogu obraditi i druga harmonijska titranja:
Titranje tekućine u U cijevi, vertikalno titranje aerometra u tekućini ili kotrljanje kugle na satnom staklu.]

1.1.6 Tijelo vezano dvjema (jednakim) oprugama (longitudinalno titranje)

$$F = -k(x - a_0) + k(2a - x - a_0) \qquad (1.12)$$

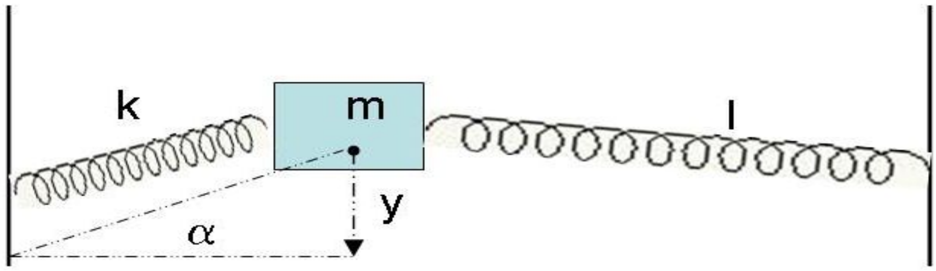


2a je razmak između rubova oscilatora a_0 je udaljenost na kojoj sila pada na nulu. Supstitucijom : ψ = x-a $\dot{\psi} = \dot{x}$ $\ddot{\psi} = \ddot{x}$ slijedi ponovno isti oblik diferencijalne jednadžbe:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^{\,2}\psi = 0 \qquad \omega_0^{\,2} = \frac{2k}{m} \qquad (1.13)$$

POKUS

1.1.7 Tijelo vezano dvjema oprugama (transverzalno titranje)



$$\left|F_{jedne\ \ opruge}\right| = k\left|l - a_o\right|$$; l je trenutna duljina opruge.

$$F_{ukupno} = -2F\sin\alpha = -2k(l - a_0)\frac{y}{l}$$

Za transverzalno titranje (y koordinata) drugi Newtonov zakon daje:

$$m\ddot{y} = -2k\frac{l - a_o}{l}y \qquad (1.13a)$$

Za a_0 mnogo manje od l jednadžba (1.13a) se svodi na (1.13), no u svakom slučaju imamo harmonijsko titranje u transverzalnom smjeru.

1.2 Linearnost diferencijalnih jednadžbi i princip superpozicije rješenja

Diferencijalne jednadžbe u kojima se tražena funkcija i njene derivacije pojavljuju linearno (s eksponentom 1) su linearne. Jednadžbe titranja u kojima je povratna sila linearna su u toj klasi. Takve linearne diferencijalne jednadžbe imaju važno svojstvo: njihova se rješenja mogu superponirati. To znači: ako su ψ_1 $i\,\psi_2$ različita rješenja diferencijalne jednadžbe, tada je i

$C_1\psi_1 + C_2\psi_2$ rješenje diferencijalne jednadžbe (C_1 i C_2 su proizvoljne konstante).

Ovo svojstvo lako ilustriramo na slučaju homogene jednadžbe 2. stupnja. Neka istu jednadžbu zadovoljavaju i ψ_1 $i\psi_2$ t.j. vrijedi:

$$f\ddot{\psi}_1 + g\dot{\psi}_1 + h\psi_1 = 0 \tag{1.14}$$

(f,g,i h su faktori nezavisni od ψ.) te

$$f\ddot{\psi}_2 + g\dot{\psi}_2 + h\psi_2 = 0 \tag{1.15}$$

Množenjem (1.14) s C_1 i (1.15) s C_2 i njihovim zbrajanjem uz sređivanje dobivamo:

$$f(C_1\ddot{\psi}_1 + C_2\ddot{\psi}_2) + g(C_1\dot{\psi}_1 + C_2\dot{\psi}_2) + h(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = 0 \tag{1.16}$$

čime smo pokazali da i linearna kombinacija rješenja jest rješenje. Ilustrirali smo u suštini princip superponiranja rješenja koji je zajednički za mnoge valne fenomene. Između linearnosti diferencijalnih jednadžbi i principa superpozicije postoji ekvivalentnost. Ne samo da iz linearnosti diferencijalnih jednadžbi slijedi superponiranje nego i iz postojanja superponiranja slijedi linearnost jednadžbi. Ilustrirat ćemo to na najjednostavnijem slučaju proširenja povratne sile nelinearnim članovima. Pretpostavimo da imamo dva rješenja koja zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu koji u povratnoj sili imaju više potencije u ψ od linearnog člana:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega^2\psi_1 = a\psi_1{}^2 + b\psi_1{}^3 + \ldots \tag{1.17}$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega^2\psi_2 = a\psi_2{}^2 + b\psi_2{}^3 + \ldots \tag{1.18}$$

Da bi suma $\psi_1 + \psi_2$ bila također rješenje trebalo bi biti ispunjeno:

$$(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) + \omega^2(\psi_1 + \psi_2) = a(\psi_1 + \psi_2)^2 + b(\psi_1 + \psi_2)^3 + \ldots \tag{1.19}$$

Oduzimanjem (1.17) i (1.18) od (1.19) lako vidimo da to zahtijeva iščezavanje koeficijenata a,b, …T.j. sila smije biti samo linearna u ψ.