U V O D:

Poštovani studenti i studentice!

Ovim trenutkom Vi ulazite u četverosemestralni projekt Općih fizika kojim se postavljaju temelji za razumijevanje cjelokupnog materijalnog svijeta na način koji Vas treba pripremiti za samostalno zaključivanje i istraživanje. U ovom kolegiju se ne pretpostavlja srednješkolsko znanje fizike! Svi pojmovi i relacije bit će ovdje izvođeni iz prvih principa.

Tehnički detalji, literatura i savjeti o tome kako postupati u tom projektu iznosit će se na Seminarima.

Studij fizike vodi se u neposrednom ispitivanju uzročno-posljedičnih (kauzalnih) veza među prirodnim pojavama kao i traganja za konstituentima (osnovnim građevnim elementima) materijalnog svijeta. U Vašim trenucima teškoća s razumijevanjem gradiva, imajte na umu da se to znanje čovječanstva akumuliralo i formuliralo kao fizikalne zakone kroz period duži od 6000 godina; Vi ćete pak te temelje usvojiti u periodu od dvije godine!

U studiju fizike bitno je vrlo kvalitetno poznavanje matematike. Fizikalne veličine imaju razna matematička svojstva. Kada se ustanovi matematičko svojstvo fizikalne veličine, tada je već spreman matematički formalizam kako s tom veličinom postupati. Nadalje, ako su poznati odnosi medju fizikalnim veličinama, matematički formalizam spreman je za proračun posljedica odnosa među veličinama. Naime fizika ne samo da objašnjava fenomene, nego daje i numeričko predviđanje posljedica zadanih uzroka.

P O Č E T N A   M A T E M A T I Č K A   P R I P R E M A:

SKALARI, VEKTORI., TENZORI

Poznato je iskustvo da rezultat mjerenja temperature ne zavisi o smjeru orjentacije termometra. Slično svojstvo imaju veličine poput duljine štapa, tlaka u mediju ili mase tijela.
Takve veličine nazivamo skalarima. S matematičkog gledišta (dok ne gledamo detaljnije njihovu dublju prirodu koju ćemo kasnije nazvati dimenzijom te veličine), takve veličine se reprezentiraju realnim brojevima. EKSPERIMENTALNA ILUSTRACIJA:
temperatura,tlak,vlažnost zraka,masa…
Ako radarom ili nekim drugim mjerenjem pratimo položaj aviona prema stalnom objektu, znamo da uz numerički opis udaljenosti trebamo znati i smjer u kojem se avion nalazi u odnosu na stalni objekt. Slično pri opisu brzine vozila u pustinji treba, uz broj kilometara koji se na sat prevaljuje, znati i orjentaciju automobila prema, na primjer, stranama svijeta. EKSPERIMENTALNA ILUSTRACIJA: praćenje tijela radiusvektorom.
Tenzori su još kompleksnije veličine, čija svojstva ne ćemo koristiti operativno u ovom projektu, ali će se pojaviti kasnije tijekom studija. ILUSTRACIJA: precesija zvrka
Pretpostavljam da ste operacije s realnim brojevima savladali u srednjoj školi. Stoga profesionalni posao započinjemo pregledom svojstava i operacija s vektorima.

Vektorska veličina je zadana svojim: iznosom, smjerom i smislom. Na primjer gravitacijska sila vuče tijelo određenom jakošću (mjerljivom istezanjem opruge koja je uravnotežuje), vertikalnim smjerom i smislom prema dolje.

VEKTORSKE OZNAKE

Oznaka $\vec{A}$ podrazumijeva da je veličina po matematičkim svojstvima vektor, to jest da njezin potpuni opis uključuje iznos, smjer i smisao. Iznos vektora se označava na dva načina: $A = |\vec{A}|$. (1.1)

Primjer položajnog vektora: $|\vec{r}| = r = 5m$ označava da je naš objekt udaljen u nekom smjeru 5 metara od točke od koje se udaljenost mjeri.

Jedinični vektor:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1.2}$$

se dobiva od originalnog vektora $\vec{A}$ kad se iznos originalnog vektora dijeljenjem s tim istim iznosom svede na jedinicu. Znači da je preostao samo smjer/smisao . To jest

$$|\hat{A}| = 1 \tag{1.3}$$

ZBRAJANJE DVA VEKTORA:

Zbrajanje dva vektora vrši se poznatim zakonom paralelograma. Na kraj strelice prvog vektora nanosi se translacijom početak drugog vektora. Kako su stranice paralelograma paralelne (a paralelne stranice jednake po iznosu), jasno je da se obratnim poretkom operacija (započinjanjem s drugim vektorom i dodavanjem prvog) dobije isti rezultat. Očit je znači zakon komutacije u vektorskom zbrajanju:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.4}$$

Student se lako uvjerava crtanjem i u zakon asocijacije:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \tag{1.5}$$

Protivni (nasuprotni) vektor : Neka vrijedi $\vec{A} + \vec{B} = 0 \;\; ili \;\; \vec{A} = -\vec{B}$ (1.6)

Tada su $\vec{A} \; i \; \vec{B}$ protivni ili nasuprotni vektori. Sve veličine su im identične osim što imaju suprotni smisao.

ODUZIMANJE VEKTORA:

U potpunoj analogiji s realnim brojevima

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.7}$$

gdje je $(-\vec{B})$ protivni vektor vektora $\vec{B}$.

MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM:

$k\vec{A}$ je vektor čiji iznos je $k\left|\vec{A}\right|$, leži na istom pravcu kao i $\vec{A}$ a smisao mu je isti kao i $\vec{A}$ ako je k pozitivan broj , smisao mu je suprotan od $\vec{A}$ ako je k negativan. OPREZ: k ne mora biti samo realni broj nego i fizikalna veličina koja je skalar (primjer je temperatura).
Pri množenju vektora skalarom vrijedi zakon distribucije:
$k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A}+k\vec{B}$. (1.8)

SKALARNI UMNOŽAK (PRODUKT) DVA VEKTORA:

Po definiciji je $\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$, (1.9)

gdje oznaka $\cos(\vec{A},\vec{B})$ predstavlja kosinus kuta između vektora $\vec{A}\, i\, \vec{B}$. Više je svojstava skalarnog produkta jasno iz ove definicije. Kako je funkcija kosinusa simetrična obzirom na predznak svog argumenta t.j. $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$, to je skalarni produkt komutativan:
$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ (1.10)
Također postoji svojstvo distribucije:
$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ (1.11)
Ponekad je za studenta zgodno prihvaćati skalarni produkt kao umnožak iznosa jednog od vektora s projekcijom drugog vektora na njegov smjer. Ovo će posebno doći do izražaja pri računanju veličine rada koji je skalarni produkt vektora sile i puta.

Primjer kosinusnog poučka:
$\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}$ skalarnim množenjem samim sobom (kvadriranjem) prelazi u :
$A^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}+B^2 = C^2$ to jest: $C^2 = A^2-2AB\cos(\vec{A},\vec{B})+B^2$

Student također može sam provjeriti kako se jednostavno može napisati jednadžba ravnine koju karakterizira vektor $\vec{N}$ koji ima slijedeća svojstva: okomit je na zadanu ravninu a njegov iznos jednak je udaljenosti ravnine od ishodišta. Tada vektor položaja svake točke u ravnini: $\vec{r}$ zadovoljava slijedeću jednadžbu: $\vec{r}\cdot\vec{N} = N^2$!

RASTAVLJANJE VEKTORA NA KOMPONENTE u PROSTORNOM SUSTAVU:

Ako označimo s $\hat{x},\hat{y}, i\ \hat{z}$ jedinične vektore duž osi pravokutnog prostornog sustava,
Tada se svaki vektor može rastaviti u svoje komponente, vektore paralelne osima sustava čiji su iznosi projekcije zadanog vektora na koordinatne osi. Uzmimo primjer vektora položaja proizvoljne točke u prostoru (radijvektor te točke) :
$\vec{r} = r_x\hat{x}+r_y\hat{y}+r_z\hat{z}$ gdje se projekcije vektora dobivaju postupkom $r_x = \vec{r}\cdot\hat{x}$ i analogno za ostale komponente.

VEKTORSKI PRODUKT DVA VEKTORA:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\equiv\hat{C}AB\sin(\vec{A},\vec{B}) \qquad (1.12)$$

gdje je jedinični vektor $\hat{C}$ definiran kao vektor okomit na ravninu definiranu vektorima $\vec{A}\, i\, \vec{B}$, a njegov smisao preko pravila desne ruke. (Prsti desne ruke idu od vektora $\vec{A}$ prema vektoru $\vec{B}$, a palac pokazuje smisao jediničnog vektora $\hat{C}$.)
Iznos vektora $\vec{C}$ je očito produkt iznosa vektora $\vec{A}\, i\, \vec{B}$ i sinusa kuta medju njima. Kako je funkcija sinusa antisimetrična na promjenu predznaka svog argumenta $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ to vrijedi: $\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$ (1.13)
Drugim riječima vektorski produkt je antikomutativan!! Student može provjeriti da je za dva vektora (čija je dimenzija duljina) iznos vektorskog produkta = površina paralelograma čiji su oni stranice. Nadalje , za tri vektora u prostoru $\vec{a},\vec{b}\, i\, \vec{c}$ njihov mješoviti produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ zapravo je volumen paralelopipeda ograničenog trima vektorima.
I za vektorski produkt vrijedi zakon distribucije: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$. (1.14)

FUNKCIJA I NJEZINA DERIVACIJA:

Ukoliko imamo neku varijablu (obično se pretpostavlja da može poprimiti proizvoljnu vrijednost iz kontinuuma realnih brojeva) pod pojmom funkcija podrazumijeva se pravilo kako toj slobodnoj varijabli pridružiti matematičkim opisom postupka neku vrijednost. Dobivene vrijednosti se nazivaju i funkcijskim vrijednostima koje korespondiraju izabranim vrijednostima slobodne varijable. Jednostavan primjer je $y=f(x)=x^2$. Da bi se dobila funkcijska vrijednost, treba argument kvadrirati.

Derivacija funkcije različito se označava u literaturi no ima isti smisao: $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$ *ili ako je funkcija zavisna o vremenu* $\dot{f}(t)$. Definicija derivacije funkcije jest:

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim(\Delta x\to 0)\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1.15)$$

Na grafikonu na kojem su vrijednosti argumenta na x-osi a funkcijske na ordinati, derivacija ima značenje tangensa kuta koji tangenta na krivulju f(x) u točki x zatvara s osi x. Ova svojstva su studenti trebali savladati u srednjoj školi. Po potrebi ćemo na seminaru pokazati operativni postupak dobivanja derivacija za nekoliko elementarnih funkcija . Očekuje se da student zna napamet izraze za deriviranje elementarnih funkcija. Dobro je uočiti kako je trenutna brzina objekta (u jednodimenzionalnom gibanju) jednostavno derivacija funkcionalne zavisnosti prijeđenog puta s(t) po proteklom vremenu t .

$$v(t)=\lim(\Delta t\to 0)\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \qquad (1.16)$$

POOPĆENJE BRZINE JEDNODIMEZIONALNOG GIBANJA NA BRZINU U PROSTORU:

Zamislimo da nam je za svaki vremenski trenutak poznat položaj objekta koji se proizvoljno giba . To gibanje opisujemo radijvektorom $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Zasada ne ćemo ulaziti u tehničke detalje opisa tog gibanja (student na primjer može zamisliti da imamo analitički opis ponašanja projekcija vektora na koordinatne osi pravokutnog sustava). Neka je u trenutku t objekt na položaju opisanom vektorom $\vec{r}(t)$. Neka protekne dodatno vrijeme Δt . Tada je novi položaj objekta $\vec{r}(t+\Delta t)$. Pomak vektora između dva trenutka promatranja jest vektor : $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$. Ako vektor pomaka podijelimo s proteklim vremenom Δt dobit ćemo vektor srednje brzine u proteklom intervalu. Uočimo da je taj vektor vrlo kompaktna informacija koja istovremeno govori i o iznosu brzine i o njenom smjeru/smislu. Da bismo imali informaciju o trenutnoj brzini u vremenu t , jasno je da moramo smanjivati vremenski interval. Tako je u procesu limesa :

$$\vec{v}(t) = \lim(\Delta t \to 0)\, \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.17)$$

Početni i konačni gornji izraz močemo i drukčije čitati:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \qquad (1.18)$$

Ovo ima slijedeće značenje: sićušni vektor pomaka $d\vec{r}$ koji nastaje u sićušnom vremenskom intervalu dt dobiva se množenjem trenutne brzine $\vec{v}$ s tim sićušnim vremenskim intervalom dt. Matematičari preciznije definiraju pojam diferencijala, no za naše praktične potrebe mi ćemo se zadržati na ovom intuitivnom nivou navodeći $d\vec{r}$ i dt kao diferencijale pomaka i vremena.

POJAM AKCELERACIJE U PROSTORU:

Sada nam je prirodno nastaviti s istom procedurom za akceleraciju. Već u srednjoj školi učenici su upoznati da je akceleracija kvocijent promjene brzine i proteklog vremena. Doduše, u srednjoj školi se dominantno vježba primjere u kojima je akceleracija stalna, što naravno ne mora biti slučaj. Ako nam je brzina u trenutku t: $\vec{v}(t)$, a u trenutku koji kasni za Δt: $\vec{v}(t+\Delta t)$ tada je analogno proceduri proračuna prostorne brzine trenutna akceleracija:

$$\vec{a}(t) = \lim(\Delta t \to 0)\, \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.19)$$

Ako oznaku $\frac{d}{dt}$ prihvatimo kao naznaku deriviranja, a sjetimo se da je i brzina sama derivacija radijus vektora po vremenu imamo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.20)$$

Svi ovi koraci svode se na očitu činjenicu da je akceleracija druga derivacija vremenske zavisnosti vektora položaja po vremenu.

NEODREĐENI INTEGRAL:

Kada smo jednom savladali pojam derivacije funkcije i naučili tehnike deriviranja, neodređeni integral nije ništa drugo nego operacija inverzna deriviranju. U procesu deriviranja smo poznatim metodama određivali tablicu korespondencije $f(x) \to \frac{df(x)}{dx}$. Procedura povratka od derivacije na funkciju čiji je neki izraz derivacija jest određivanje neodređenog integrala. Ako na primjer imamo funkciju $g(x)$ i znamo da je ona derivacija funkcije $h(x)$, tada to simbolički pišemo: $\int g(x) \cdot dx = h(x)$. Također se profesionalno kaže da je $h(x)$ primitivna funkcija od $g(x)$. Za elementarne funkcije očekuje se da studenti znaju tablicu derivacija. Jasno je da se istom tablicom mogu poslužiti i u obratnom smjeru. Međutim, tijekom studija, studenti će u matematičkim kolegijima naučiti mnogo više o procedurama integriranja.

ODREĐENI INTEGRAL:

Radoznali student će se pitati zašto se pojavljuju oznake integrala i diferencijala u simboličkoj formuli za primitivnu funkciju $h(x)$ gore. To je povezano s problemom određivanja površine koja se nalazi ispod krivulje g(x) iz gornjeg primjera između dvije vrijednosti argumenta (na primjer x_1 i x_2). Vratimo se početnoj vezi funkcijskih vrijednosti prije prijelaza u limes:

$$g(a) \cdot \Delta x = h(a + \Delta x) - h(a) \qquad (1.21)$$

Napišimo analogni izraz za slučaj kada su argumenti u relaciji pomaknuti za još jedan Δx :

$$g(a + \Delta x) \cdot \Delta x = h(a + 2\Delta x) - h(a + \Delta x) \qquad (1.22)$$

Uočimo, ako bismo dva izraza zbrojili, na desnoj strani bi se članovi oblika $h(a + \Delta x)$ poništili!!! To znači ako bismo načinili sumu izraza:

$\sum_{n=0}^{n=N-1} g(a + n\Delta x)\Delta x$, na drugoj strani jednakosti bismo dobili (uz kraticu $N \cdot \Delta x = b$) $h(b) - h(a)$. Tako je naš rezultat:

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} g(a + n\Delta x)\Delta x = h(b) - h(a) \qquad (1.23)$$

Pogledajmo sada geometrijsko značenje lijevog izraza $g(a) \cdot \Delta x$. To je površina stupića koji od osi x ide do funcijske vrijednosti g(a) a ima širinu Δx. Zbrajanjem površina takvih stupića od vrijednosti argumenta a do vrijednosti argumenta b, mi dobivamo približni izraz za površinu ispod krivulje g(x) od točke x=a do točke x=b. Ta je pak površina jednaka razlici funkcijskih vrijednosti primitivne funkcije h(x) na krajnjim točkama : h(b)-h(a)!!! U limesu kada $\Delta x \to 0$ (broj sumanada N ide u beskonačnost) , lijeva strana postaje egzaktan izraz za površinu. Tako se relacija sa sumom pretvara u određeni integral:

$$\int_a^b g(x) \cdot dx = h(b) - h(a) \qquad (1.24)$$

U fizici ćemo često imati potrebu proračuna suma gornjeg oblika. Važno je zapamtiti značenje veze takve sume u procesu limesa (kada intervali postaju sve manji) s funkcijskim vrijednostima primitivne funkcije na krajevima intervala. (primitivna funkcija $\equiv$ neodređeni integral).

PRIMJERI UPOTREBE INTEGRALA ZA JEDNOLIKA GIBANJA:

Slučaj jednolikog gibanja:
Kod jednolikog gibanja (nema akceleracije) brzina je stalna ; označimo je s $\vec{v}_0$. To znači :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \quad \rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_0 dt \rightarrow \int d\vec{r} = \int \vec{v}_0 dt \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{c} \qquad (1.25)$$

Konačni izraz za vektor položaja sadrži dvije činjenice: položaj objekta kod jednolikog gibanja je određen konstantnim vektorom $\vec{c}$ koji ima smisao vektora položaja u trenutku t=0 i promjenljivog vektora koji se u smjeru vektora $\vec{v}_0$ jednoliko produljuje s proticanjem vremena t.

Slučaj jednoliko ubrzanog gibanja (akceleracija je stalna i iznosi $\vec{a}_0$):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0 \rightarrow \vec{v}(t) = \int \vec{a}_0 \cdot dt = \vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0 \rightarrow \vec{r}(t) = \int (\vec{a}_0 t + \vec{v}_0) \cdot dt = \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{c} \quad (1.26)$$

U gornjem smo postupku preskočili korake koje smo svladali kod primjera jednolikog gibanja. U konačnom izrazu za vremensku zavisnost vektora položaja pojavile su se dvije konstante. Značenje $\vec{v}_0$ lako kontroliramo uvrštenjem vremenskog trenutka t=0 u izraz za brzinu: to je brzina u trenutku t=0. Značenje konstante $\vec{c}$ očitavamo uvrštenjem t=0 u izraz ra radijvektor. To je kao i u prijašnjem primjeru vektor položaja objekta u trenutku t=0.

PRIMJER DERIVIRANJA UMNOŠKA U KOJEM SU PRISUTNI VEKTORI:

Ima više mogućnosti potrebe deriviranja umnoška u kojem su prisutni vektori. Najjednostavniji su : $f(t) \cdot \vec{a}(t), \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t), \vec{a}(t) \times \vec{b}(t)...$ Pokazat ćemo na primjeru prvog slučaja ideju postupka, koji u potpunosti oponaša postupak s umnoškom skalarnih funkcija.

$$\frac{d}{dt}\left[f(t) \cdot \vec{a}(t) \equiv \lim(\Delta t \rightarrow 0) \ \frac{f(t+\Delta t) \cdot \vec{a}(t+\Delta t) - f(t) \cdot \vec{a}(t)}{\Delta t} \right] =$$

$$= \lim(\Delta t \rightarrow 0) \left[\frac{f(t+\Delta t) \cdot \vec{a}(t+\Delta t) - f(t) \cdot \vec{a}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{f(t) \cdot \vec{a}(t+\Delta t) - f(t) \cdot \vec{a}(t)}{\Delta t} \right] =$$

$$= \frac{df(t)}{dt} \cdot \vec{a}(t) + f(t) \frac{d\vec{a}}{dt} \qquad (1.27)$$

U ovom izvodu smo u drugom redu dodali i oduzeli isti član u brojnicima, kako bi olakšali put do pravila. Potpuno analogno se dokazuje:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)\right] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt} \qquad (1.29)$$

i također:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt} \qquad (1.30)$$

SVOJSTVA DERIVACIJE VEKTORA STALNOG IZNOSA:

Po pretpostavci vrijedi: $|\vec{r}| = r = kons\tan ta$

Derivirajmo po vremenu $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = (kons\tan ta)^2$ Derivacija konstane je nula:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \qquad (1.31)$$

Slijede dva ekvivalentna zaključka:

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad \text{to jest } \vec{r}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (1.32)$$

Vektor i njegova derivacija su okomiti i vektor i njegov diferencijal su okomiti jedan na drugoga. Ovo je naročito važno kod gibanja po kružnici.

VEKTOR KUTNE BRZINE:

U ravninskom polarnom sustavu položaj je određen s varijablama r (udaljenost od središta sustava) i φ (kut kojeg spojnica središta i promatrane točke zatvara s osnovnom osi sustava; student može tu os zamišljati kao x-os iz pravokutnog ravninskog sustava). Kutna brzina se vrlo kompaktno opisuje vektorom koji je okomit na trenutnu ravninu kretanja, čiji je iznos

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv \lim(\Delta\varphi \to 0)\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \equiv \dot{\varphi} \qquad (1.33)$$

Ako s $\hat{\omega}$ označimo jedinični vektor okomit na ravninu gibanja u trenutku t povezan s gibanjem pravilom desne ruke, tada je vektor kutne brzine:

$$\vec{\omega} = \hat{\omega}\cdot\dot{\varphi} \qquad (1.34)$$

JEDINIČNI VEKTORI POLARNOG RAVNINSKOG SUSTAVA:

Vektor položaja $\vec{r}$ često će se prikazivati preko svog iznosa i jediničnog vektora u svom smjeru: $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$ odakle se dijeljenjem s r lako računa taj jedinični vektor $\hat{r}$. Drugi jedinični vektor polarnog ravninskog sustava jest azimutalni jedinični vektor: $\hat{\varphi}$. On je po definiciji jediničnog iznosa, okomit je na vektor $\hat{r}$, a otklonjen je od njega za $\pi/2$ u smjeru protivnom gibanju kazaljke na satu. (u matematici to je pozitivni smjer). Lako se provjerava:

$$\hat{\varphi} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{r}}{\omega\cdot r} \qquad (1.35)$$

za slučaj gibanja u jednoj ravnini.

VEKTORI $\vec{v}\ i\ \vec{\omega}$ PRI GIBANJU PO KRUŽNICI:

Pri gibanju po kružnici iz definicije kuta u radijanima za diferencijal prijeđenog puta ds vrijedi: $ds = r\cdot d\varphi$; ako to podijelimo s diferencijalom proteklog vremena imamo za brzinu:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \dot{\varphi} = r\omega \qquad (1.36)$$

Ako uzmemo u obzir i orijentaciju vektora $\vec{\omega}$, možemo provjeriti da postoji veza:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \hat{\varphi} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \qquad (1.37)$$

OPĆENITI IZRAZI ZA BRZINU I UBRZANJE :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + r \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (1.38)$$

Ovdje smo dobili rastavljanje brzine u radijalnom i azimutalnom smjeru. Derivaciju jediničnog radijalnog vektora (stalni mu je iznos) računamo pravilom koje smo upravo ustanovili:

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r \cdot \vec{\omega} \times \hat{r}$ Korištenjem veze $r \cdot \hat{r} = \vec{r}$ u desnom sumandu slijedi:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1.39)$$

Deriviranjem gornjeg izraza po vremenu dobiva se akceleracija:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{r}\dot{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) =$ (Korištenjem pravila o deriviranju produkata i jediničnih vektora)

$$\vec{a} = \hat{r} \cdot \frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.40)$$

U slijedećem koraku ćemo za posljednji faktor koristiti relaciju za brzinu (1.39). Također ćemo koristiti i izraz za derivaciju jediničnog radijalnog vektora koja je specijalizacija (1.37) za situaciju jediničnog vektora.

$$\vec{a} = \hat{r} \cdot \ddot{r} + \dot{r} \cdot \vec{\omega} \times \hat{r} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{r} \cdot \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{r} \cdot \ddot{r} + 2\dot{r}\vec{\omega} \times \hat{r} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.41)$$

Gornji će izrazi pokazati ogromnu važnost kada budemo razmatrali kako se povezuju sile koje djeluju u različitim koordinatnim sustavima kada se ti sustavi općenito kreću jedan u odnosu na drugi.

BRZINA I UBRZANJE U POLARNOM SUSTAVU RAVNINE:

Specijalizirat ćemo gornja razmatranja na slučaj gibanja unutar ravnine koristeći također jedinične vektore: radijalni i azimutalni! Posebnost tog sustava leži u činjenici da je $\vec{\omega} \cdot \vec{r} \equiv 0$. Prvi izraz za brzinu iz prethodnog odsječka možemo napisati i ovako:

$\vec{v} = \hat{r} \cdot \dot{r} + \vec{\varphi} \cdot r\dot{\varphi}$ (već smo pokazali da je $r \cdot \dot{\varphi}$ obodna brzina).

Da bismo iskoristili gornji izraz za akceleraciju napisat ćemo opći rezultat za dvostruki vektorski produkt; taj ćemo izraz uskoro dokazati u ovom semestru:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Navedenim se pravilom dvostruki vektorski produkt u izrazu za akceleraciju svodi na $-\vec{r}\cdot(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$. Tako akceleracija postaje:

$$\vec{a}=\hat{r}\ddot{r}+2\dot{r}\omega\hat{\varphi}+\dot{\omega}r\hat{\varphi}-\vec{r}\,\omega^2 \tag{1.41}$$

ili razdvajanjem komponenti:

$$\vec{a}=\hat{r}(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)+\hat{\varphi}(2r\dot{\varphi}+\dot{\omega}r) \tag{1.42}$$

Azimutalni dio je katkad zgodno pisati: $\hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$. Navedeni opis akceleracije u polarnom sustavu bit će vrlo koristan pri studiju gibanja pod utjecajem centralnih sila i dobivanja jednog od Keplerovih zakona.

VEKTORI U KARTEZIJEVOM SUSTAVU:

Svojstva vektora su u suštini neovisna o koordinatnom sustavu. Mi ćemo dominantno upotrebljavati Kartezijev sustav s tri međusobno okomite koordinatne osi. U fizici su u opticaju još dva sustava: polarni i cilindrični.

Kod polarnog sustava prva je koordinata udaljenost točke od ishodišta sustava. Kroz ishodište prolazi izabrana ravnina. Kut otklona zrake iz ishodišta prema proizvoljnoj točki od okomice na ravninu je druga koordinata ϑ. Položaj točke se zatim projicira na tu ravninu . U ravnini postoji i izabrana zraka koja prolazi ishodištem. Kut koji projekcija spojnice točke i ishodišta i izabrane zrake u ravnini zatvara jest kut φ .

U cilidričnom sustavu se najprije izabire osnovna ravnina koja ide ishodištem. Udaljenost proizvoljne točke od izabrane ravnine je koordinata z . Iz proizvoljne točke se potom spušta okomica na izabranu ravninu. Ta točka pak ima svoje ravninske polarne koordinate čije određivanje smo već prije opisali.

Jedinični vektori Kartezijevog sustava:
Duž svake od tri okomite osi Kartezijevog sustava su jedinični vektori paralelni trima osima: $\hat{x}, \hat{y} \, i \, \hat{z}$. Kako su ti vektori jedinični po iznosu i međusobno okomiti, to među njima vrijede slijedeće relacije:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \qquad (1.43)$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \qquad (1.44)$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}\, , \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}\, , \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \qquad (1.45)$$

Kartezijeve koordinate vektora
se određuju projiciranjem vektora na pojedine osi. Prikloni kutevi između zrake koja ide promatranom točkom i koordinatnih osi su $\alpha \; za \; x \; os, \beta \; za \; y \; os \; i \; \gamma \; za \; z \; os$. Tako vrijedi za Kartezijeve koordinate:

$$x = r_x = \hat{x} \cdot \vec{r} = r \cos\alpha \;\; , \quad y = r_y = \hat{y} \cdot \vec{r} = r \cos\beta \;\; , \quad z = r_z = \hat{z} \cdot \vec{r} = r \cos\gamma \qquad (1.46)$$

Nadalje očito vrijedi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = r^2 \cos^2\alpha + r^2 \cos^2\beta + r^2 \cos^2\gamma \qquad (1.48)$$

Čime dobivamo relaciju među kutovima:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1.49)$$

Radijvektor možemo prikazati pomoću komponenti:

$$\vec{r} = \hat{x} \cdot x + \hat{y} \cdot y + \hat{z} \cdot z = \hat{x} \cdot (\vec{r} \cdot \hat{x}) + \hat{y} \cdot (\vec{r} \cdot \hat{y}) + \hat{z} \cdot (\vec{r} \cdot \hat{z}) \qquad (1.50)$$

Ovakav prikaz vrijedi općenito za svaki vektor:

$$\vec{a} = \hat{x} \cdot a_x + \hat{y} \cdot a_y + \hat{z} \cdot a_z = \hat{x} \cdot (\vec{a} \cdot \hat{x}) + \hat{y} \cdot (\vec{a} \cdot \hat{y}) + \hat{z} \cdot (\vec{a} \cdot \hat{z}) \qquad (1.51)$$

Zbrajanje vektora preko komponenti:

$$\vec{a} + \vec{b} = \hat{x} \cdot (a_x + b_x) + \hat{y} \cdot (a_y + b_y) + \hat{z} \cdot (a_z + b_z) \qquad (1.52)$$

Množenje vektora skalarom preko komponenti:

$$k \cdot \vec{a} = \hat{x} \cdot (ka_x) + \hat{y} \cdot (ka_y) + \hat{z} \cdot (ka_z) \qquad (1.53)$$

Skalarni produkt vektora preko komponenti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z) \cdot (\hat{x}b_x + \hat{y}b_y + \hat{z}b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1.54)$$

Ovdje smo iskoristili svojstvo distributivnosti i relacije za skalarne produkte okomitih jediničnih vektora. (šest skalarnih produkata je jednako nuli).

Kvadrat iznosa vektora:
Slijedi kao specijalni slučaj gornje relacije kada su vektori jednaki:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 \qquad (1.55)$$

Proračun kuta između dva vektora:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \qquad (1.56)$$

Vektorski umnožak preko determinante Kartezijevih koordinata:
Korištenjem svojstva distribucije i pravila za vektorsko množenje jediničnih vektora imamo:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z) \times (\hat{x}b_x + \hat{y}b_y + \hat{z}b_z) = \\ &= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - b_x a_y) \equiv \qquad (1.57) \\ &\equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Studenti koji gore ne prepoznaju determinantu trećeg stupnja trebaju prihvatiti da je pred njima pokrata pod kojom se podrazumijeva po definiciji raspis s kojim je determinanta povezana znakom definicije red iznad nje.

Mješoviti umnožak preko determinante Kartezijevih koordinata:
Ako zamislimo da vektorski produkt $(\vec{b} \times \vec{c})$ trebamo pomnožiti skalarno s $\vec{a}$ to jest

izračunati $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, pogledajmo raspis koji bismo dobili za vektorski produkt. Ako bismo ga skalarno množili s $\vec{a}$, prema svojstvima skalarnih produkata jediničnih vektora svaki put bi na mjestu jediničnog vektora u raspisu na njegovo mjesto došla odgovarajuća komponenta vektora $\vec{a}$. Na primjer, u raspisu bi na mjesto $\hat{x}$ došao a_x i analogno za ostale komponente. Sveukupni rezultat jest da bi se u determinanti jedinični vektori zamijenili komponentama vektora $\vec{a}$, dakle:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x\, a_y\, a_z \\ b_x\, b_y\, b_z \\ c_x\, c_y\, c_z \end{vmatrix} \tag{1.57}$$

Dvostruki vektorski umnožak:
Izvest ćemo sada rezultat koji smo koristili pri izvođenju rezultata za akceleraciju.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_yc_z-b_zc_y & b_zc_x-b_xc_z & b_xc_y-b_yc_x \end{vmatrix}= \tag{1.58}$$

Gornji izraz imamo punim korištenjem prvog izraza za vektorski produkt putem determinante. Njegov donji red su pripadne komponente vektorskog produkta iz okrugle zagrade , a prva dva reda su u punom skladu s već poznatim postupkom za računanje vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ s vektorom u okrugloj zagradi. Sada možemo raspisivati determinantu prema pravilima koje smo naučili:

$$\begin{aligned}&=\hat{x}\lfloor a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\rfloor+\\&+\hat{y}\lfloor a_z(b_yc_z-b_zc_y)-a_x(b_xc_y-b_yc_x)\rfloor+\\&+\hat{z}\lfloor a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y(b_yc_z-b_zc_y)\rfloor\end{aligned}$$

Radi štednje prostora pokazat ćemo samo rezultat za x komponentu gornjeg izraza; ta komponenta (uz ispuštanje $\hat{x}$ faktora) se izlučivanjem b_x i c_x faktora može pisati:

$b_x(a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_yb_y+a_zb_z)=$ dodavanjem i oduzimanjem produkta $a_xb_xc_x=$

$b_x(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)=b_x(\vec{a}\cdot\vec{b})-c_x(\vec{a}\cdot\vec{b})$, što je x komponenta vektora :$\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Analognim postupkom se pokazuje i za ostale dvije komponente da su odgovarajuće komponente gornjeg vektora. Tako smo dokazali identitet:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{1.59}$$

DERIVACIJE VEKTORA OPISANOG KARTEZIJEVIM KOORDINATAMA:

Derivacije se u ovom sustavu čine jednostavno, jer su jedinični vektori konstante. Stoga se u procesu deriviranja treba derivirati samo skalar koji opisuje iznos komponente. Uzmimo primjere brzine i ubrzanja.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\hat{x}\cdot x+\hat{y}\cdot y+\hat{z}\cdot z)=\hat{x}\cdot\frac{dx}{dt}+\hat{y}\cdot\frac{dy}{dt}+\hat{z}\cdot\frac{dz}{dt} \tag{1.60}$$

Jasno je da je akceleracija kao druga derivacija položaja po vremenu (prva derivacija brzine):

$$\vec{a}=\hat{x}\frac{d^2x}{dt^2}+\hat{y}\frac{d^2y}{dt^2}+\hat{z}\frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.61}$$

Provjera izraza za brzinu dobivenog na dva načina za slučaj gibanja po kružnici.
Napišimo izraz za radijvektor na dva načina:

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \qquad (1.62)$$

ovdje su r i φ koordinate iste točke u polarnom sustavu i veza Kartezijevih i polarnih koordinata jest:

Brzinu dobivamo deriviranjem radijvektora po vremenu pri čemu ćemo koristiti jedinične vektore Kartezijevog sustava i izraze za x i y preko polarnih koordinata:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\varphi)}{dt} = r\frac{d(\cos\varphi)}{dt} = -r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -y\cdot\omega$$

(1.63)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = x\omega \qquad (1.64)$$

ω je naravno kutna brzina to jest $\dot{\varphi}$.
Možemo to sada usporediti s rezultatom kojeg smo imali prije za kružno gibanje. Vektor $\vec{\omega}$ je usmjeren duž z osi pa vrijedi:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \qquad (1.65)$$

Kada se izvrijedni gornja determinanta dobiju se upravo izrazi dobiveni gore deriviranjem!

Ubrzanje kod kružnog gibanja:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x}\frac{dv_x}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y}{dt} = \hat{x}(-r\omega\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}) + \hat{y}(-r\omega\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}) =$$

korištenjem $\dot{\varphi} = \omega$ i već napisanom vezom Kartezijevih i polarnih koordinata:

$$= -\hat{x}x\omega^2 - \hat{y}y\omega^2 = -\omega^2\cdot\vec{r} \qquad (1.66)$$

Ovo je vrlo važan rezultat. U srednjoj školi ga se eventualno izvodilo uz pomoć geometrijskih crteža. Kada se tijelo giba po kružnici ono doživljava akceleraciju $\omega^2 r$ usmjerenu prema središtu oko kojeg se vrti. Koristeći vezu obodne brzine v i kutne brzine: $v = \omega r$, izraz za akceleraciju se može pisati i kao: $\frac{v^2}{r}$ koji se u srednjoj školi češće sretao.

D I N A M I K A - N E W T O N O V I A K S I O M I

Do sada smo činili matematičke pripreme i opisivali razne veličine povezane s gibanjem. Taj se opisni dio često naziva kinematikom. Uopće nismo ulazili u razloge bilo kakvog gibanja. U antičko doba se razvilo razmišljanje o pojavi gibanja koje je bilo opisno. Ono je zadovoljavalo ljudsku radoznalost, ali je bilo suštinski krivo. Glavni protagonist te slike promatrao je brodove u atenskoj luci i donio na prvi pogled očit zaključak. Da bi se plovilo kretalo, potreban je učinak veslanja (to jest neka posebna prisila). Njegovoj pažnji je izbjegla činjenica da se ta prisila troši na svladavanje otpora vode gibanju. Prošao je ogroman vremenski period dok se uz razmišljanje nije pojavilo i mjerenje fizikalnih veličina i uspoređivanje predikcija teorije i objektivne stvarnosti testirane eksperimentom. Jedan od pionira bio je Galilei, no konačni oblik teorije verificirane u svijetu naših dimenzija i pri našim brzinama dao je Newton.

Prvi Newtonov aksiom: Tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu dok na njega ne djeluje drugo tijelo.
Bile su potrebne tisuće godina da se ovo shvati. Dok je studentu prvi dio očigledan, drugi mu približavamo eksperimentima u kojima je u horizontalno položenim objektima tijelo na zračnom stolu ili zračnoj klupi. To su uređaji koji imaju mnoštvo sitnih otvora kroz koje izlazi komprimirani zrak da bi tijelo držao na zračnom jastuku i tako se bitno umanjilo trenje tijela s podlogom: uzrok radi kojeg tijela u kretanju na kraju bivaju zaustavljena. Astronauti izvan svemirskog broda najbliži su uvjetima u kojima je prvi aksiom očit. Mi živimo u svijetu u kojem je realizacija ovog zakona prikrivena utjecajem sile trenja, koja se opire nastavku gibanja.

Drugi Newtonov aksiom:
Da bismo doista prihvatili drugi Newtonov aksiom moramo oprezno postupiti. Naime u njemu uz akceleraciju koju znamo što znači i kako se mjeri (promjena vektora brzine u jedinici vremena) moramo najprije razumjeti t.j. operativno definirati inercijsku masu tijela. Počinjemo s dnevnim iskustvom. Neka imamo kolica, radi bitnog umanjenja trenja tereta kojeg prevozimo s podlogom. Uzmimo da na kolica stavljamo sve veću i veću količinu istog materijala. Naše iskustvo kaže da i za pokretanje i za zaustavljanje kolica trebamo to veći napor što je više materijala. Ovdje je bitno uočiti da se ne radi o problemu težine tijela, nego jednostavno: što je tijelo masivnije, potrebni je napor veći. Sada možemo prijeći na operativni dio definiranja inercijske mase. Studenti će vidjeti pokus u kojem se među dva identična kolica (istih masa) stavlja opruga koja se komprimira tako da kada ju se oslobodi ona tjera kolica u suprotnim smjerovima. Ta se opruga komprimira i tada se kolica poveže s niti, koja je dovoljno jaka da drži oprugu komprimiranu. Ako kolica miruju i nit se prepali, kolica će krenuti nasuprotno s jednakim brzinama. Sada možemo prijeći na malo drukčije uvjete. Mijenjajmo količine istog materijala na kolicima. Količina materijala se može pratiti volumenom tijela ako se radi o istom materijalu. Eksperimentalno se nalazi slijedeća pravilnost za brzine tijela poslije paljenja niti:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (2.1)$$

gdje su indeksi brzina i masa oznake tijela na koje se odnose. Ako masu tijela 1 uzmemo kao definiciju jedinične mase, gornja relacija daje nam operativni postupak za mjerenje mase. Dakle sada imamo operativnu definiciju akceleracije i mase. Drugi Newtonov zakon kaže u jednostavnijoj formi:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.2}$$

gdje je $\vec{F}$ sila koja akceleraciju uzrokuje. Ovo je široko prihvaćen drugi Newtonov aksiom. (ovdje ne ćemo ulaziti u raspravu da li je pojam sile već intuitivno student prihvatio kao uzrok na primjer rastezanja neke mjerne opruge ili pojam sile prihvaća kroz definiciju sile iz ove relacije kao što to radi dio stručnjaka!) Kako ćemo u relativističkim razmatranjima također trebati silu spomenimo da je Newton drugi zakon napisao zapravo ovako:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{2.3}$$

Ako je masa stalna, dva su izraza naravno identična. Jedinica za silu je Newton (N), koja masi od kilograma daje jediničnu akceleraciju: $1N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ Uređaj za mjerenje sile pomoću rastezanja opruge je dinamometar.

Treći Newtonov aksiom:

Taj aksiom se odnosi na usporedbu sila kojima prvo tijelo djeluje na drugo: $\vec{F}_{1\to 2}$ s onom kojom drugo tijelo istovremeno djeluje na prvo: $\vec{F}_{2\to 1}$.

Treći Newtonov aksiom kaže:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} \tag{2.4}$$

Sile kojima tijela djeluju jedno na druge su po iznosu iste , no suprotnog smisla!

Do identičnog zaključka možemo doći i istovremenim uvažavanjem relacija (1) i (3). Naime u stvarnosti u vektorskom smislu brzine u (1) imaju suprotni smisao stoga modificirana relacija glasi:

$$m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2 \tag{2.5}$$

No na početku su obje brzine bile nula stoga su brzine $\vec{v}_1 \; i \; \vec{v}_2$ ujedno i promjene brzina dva objekta tokom procesa:

$$\vec{v}_1 \equiv \Delta\vec{v}_1 \quad ; \quad \vec{v}_2 \equiv \Delta\vec{v}_2 \tag{2.6}$$

Uvrštenjem (6) u (5) rezultira s :

$$m_1\Delta v_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2 \tag{2.7}$$

Ako se (7) podijeli s proteklim vremenom u kojem se razdvajanje objekata desilo: Δt, dobiva se uz konstantnost masa:

$$\frac{\Delta(m_1\vec{v}_1)}{\Delta t} = -\frac{\Delta(m_2\vec{v}_2)}{\Delta t} \tag{2.8}$$

U limesu $\Delta t \to 0$ relacija (8) prelazi u treći Newtonov aksiom (2.4). Naravno, ovo nije izvod aksioma jer je izvedeno za specijalni slučaj razdvajanja čestica oprugom (vrijedilo bi i za svako razdvajanje bilo kojom silom ali to nismo dokazali za generalni slučaj sudara). Treći Newtonov aksiom naravno vrijedi općenito ali gornja procedura nije općeniti dokaz.

Z A K O N   S A Č U V A N J A I M P U L S A:

Relacija (2.7) nam je zgodna kao ilustracija sačuvanja impulsa. Naime umnožak mase i vektora brzine objekta je izvanredno važna veličina u fizici. U ovim predavanjima ćemo tu veličinu zvati impulsom objekta. (Stariji autori su to zvali količinom gibanja prema prijevodu s njemačkog.) Anegdotski možemo spomenuti da su čak i neka najfundamentalnija otkrića u nuklearnoj fizici i fizici elementarnih čestica (otkrića neutrina i W bozona) načinjena upravo na temelju primjene zakona sačuvanja impulsa. Uz nepromjenljivost mase možemo relaciju (2.7) napisati i kao:

$$\Delta(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \qquad (2.9)$$

Za sustav na kojeg ne djeluje vanjska sila (ovdje samo dvoja kolica putem opruge djeluju jedna na drugu), zbroj impulsa je stalan, nepromjenljiv, konstantan!

J E D I N I C E I D I M E N Z I J E:

Veličina pojedinih fizikalnih fenomena se mjeri to jest uspoređuje s izabranom jedinicom za taj fenomen. Udaljenost (dviju točaka na primjer) morala se mjeriti još od pradavnih vremena kada su se razgraničavali posjedi. Mjerenje se sastoji od procesa ustanovljenja koliko mjerena veličina sadrži iznosa ili frakciju mjernog etalona-jedinice mjerenja. Na primjer na našim prostorima su bile uobičajene mjerne jedinice palac i lakat za duljinu, jutro za površinu i t.d. Danas je globalno prihvaćen internacionalni sustav (SI). U mehanici imamo tri osnovne jedinice iz kojih se sve ostale daju izvesti.

Mjerenje duljine:
U Francuskoj (Sevre) se čuva prauzorak duljine jednog metra. Zatim je otkriven kvalitetniji standard utemeljen na određenom broju valnih duljina crvene svjetlost ^{86}Kr koji je stabilniji od komada legure platine i iridija, no razmak je zapravo isti. Najnovijastandardizacija počiva na putu koji svjetlost prijeđe u određenom intervalu vremena.

Mjerenje vremena:
Povijesno se sekunda definirala kao određena frakcija srednje astronomske godine. Danas je standard određeni broj vremena titraja cezijevog atoma no to nije izbacilo uobičajenu sekundu iz upotrebe. Samo je ta sekunda preciznije definirana.

Mjerenje mase: Kao jedinica mase od jednog kilograma uzimala se masa uzorka također deponiranog u Sevre-u. Danas se radi potreba povećane preciznosti kao standard uzima masa neutralnog atoma ugljika ^{12}C , s tim da je kilogram i dalje temeljna jedinica, no pravi standard više nije onaj u Francuskoj; poznata je naime relacija jednog kilograma izražena preko mase jednog atoma ugljika.

PRETVORBA MEĐU JEDINICAMA:

Tijekom kolegija Općih fizika klonit ćemo se izražavanja u drugim jedinicama. Ipak je vrlo signifikantno znati kako se vrše pretvorbe jedinica. (Naravno pretvarati se mogu samo jedinice pripadne istoj fizikalnoj veličini; sekunde se ne mogu pretvarati u kilograme!)

Uzorak za sve pretvorbe:
Neka imamo iznos neke veličine u jedinici a ; želimo ga izraziti preko jedinice b. Tada koristimo identitet:

$$a \equiv \frac{a}{b} b \tag{2.10}$$

Znači da na mjestu jedinice a možemo pisati omjer (poznati numerički omjer) jedinica a i b te iza toga jedinicu b. na primjer:

$$1\,sat = \frac{1\,sat}{sekunda} \cdot sekunda = 3600 sekundi$$

Omjeri jedinica su tabelirani u tablicama jedinica. Naravno, ako je neka veličina izražena numeričkim dijelom i jedinicom, da bi se dobio novi numerički dio u novoj jedinici, treba stari numerički dio množiti s omjerom stare i nove jedinice i tada dopisati novu jedinicu. Na primjer:

$$5\,sati = 5 \cdot \frac{sat}{sekunda} \cdot sekunda = 5 \cdot 3600 \cdot sekunda = 18000\,sekundi$$

DIMENZIJSKA (DIMENZIONALNA) ANALIZA :

Ovo je profesionalni ekvivalent pučkom zahtjevu da se „ne miješa kruške i jabuke“.
Naime po prirodi različite fizikalne veličine ne mogu se zbrajati (metri i sekunde) što onda znači da one ne mogu biti izolirani aditivni termi u nekoj jednadžbi. Fizikalna dimenzija veličine ima sličnosti s jedinicom za veličinu, ali je još općenitija. Uzmimo duljinu . Već smo spomenuli neke stare jedinice za duljinu. Kada ne obraćamo pažnju koja je jedinica upotrebljena već samo naznačujemo prirodu veličine (to jest razmak ili udaljenost) veličinu označavamo s L. Slično za vrijeme uzimamo T a za masu M. Tako je dimenzijski udaljenost L, brzina LT^{-1} , akceleracija LT^{-2} i sila MLT^{-2}. Dimenzijska analiza je od velike pomoći pri provjeri ispravnosti izraza koji povezuje fizikalne veličine. Svi individualni aditivni članovi (to jest oni koji se dodaju) moraju imati istu dimenziju. Također dimenzija jedne strane jednadžbe mora biti jednaka dimenziji druge strane!

G R A V I T A C I J S K A   S I L A :

Ovim odsječkom započinjemo reviju sila koje ćemo koristiti u semestru Mehanika. Gravitacijska sila je među prvima od sila koje susrećemo. U laboratorijskim uvjetima (dok se udaljenost objekta od središta Zemlje ne mijenja bitno, akceleracija koja potječe od gravitacijske sile je stalna. Neočekivano ćemo demonstrirati da u vakuumskim uvjetima, da bismo izbjegli razlike u trenju objekta sa zrakom, sva tijela imaju istu akceleraciju bez obzira na masu, ili oblik. Akceleracija tijela također ne ovisi o brzini tijela! Ovdje ćemo nakratko spomenuti tešku masu za razliku od inercijske mase koju smo diskutirali. Gravitacijska sila djeluje zapravo na svojstvo tijela nazvano teškom masom. Napravit ćemo ovdje paralelu s elementarnim znanjem iz srednje škole. Studenti znaju da u električnom polju E to električno polje djeluje na naboj q silom koja je po iznosu F=qE. Teška masa se pojavljuje u izrazu za gravitacijsku silu na način koji oponaša naboj u slučaju električnog polja:

$$\vec{F}_g = m_g \cdot \vec{g} \qquad (3.1)$$

U gornjem izrazu je $\vec{F}_g$ gravitacijska sila, čiji dominantni učinak možemo demonstrirati istezanjem opruge na koju tijelo objesimo. m_g je spomenuta teška masa, a $\vec{g}$ je gravitacijska akceleracija koja je u našim krajevima 9.81 metara u sekundi kvadratnoj; uvijek usmjerena prema dolje; (otprilike) u smjeru centra Zemlje. Iako poznajemo vrlo dobro svojstva gravitacijske sile, mi nemamo jednostavno i očito objašnjenje zašto su (prema svim dosadašnjim mjerenjima) teška i troma masa proporcionalne, što nam ostavlja mogućnost da ih jednostavno izjednačimo. Dakle:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{gdje sada m inercijska masa.} \qquad (3.2)$$

Ovo nam sad omogućuje usporedbu drugih sila s gravitacijskom, a također i uspoređivanje masa preko gravitacijskih sila koje na temelju tih masa djeluju!

Gibanje tijela u homogenom gravitacijskom polju:
Već smo spomenuli da u sobnim uvjetima sva tijela doživljavaju jedinstvenu gravitacijsku akceleraciju:

$$\vec{a} = \vec{g} \qquad (3.3)$$

Ako z os sustava orijentiramo prema gore, slijedi:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\hat{z}g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad (3.4)$$

Prvim integriranjem gornjih jednadžbi slijedi:

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_{z,0} \qquad \frac{dx}{dt} = v_{x,0} \qquad \frac{dy}{dt} = v_{y,0} \qquad (3.5)$$

Ponovnim integriranjem imamo konačne izraze za koordinate:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0 \qquad x = v_{x,0}t + x_0 \qquad y = v_{y,0}t + y_0 \qquad (3.6)$$

Simboli u (3.6) bivaju očiti ako se u (3.5) i (3.6) ubacuje vrijeme t=0 $v_{x,0}$, $v_{y,0}$ $v_{z,o}$ su komponente brzine u trenu t=0 a x_0 , y_0 z_0 koordinate u istom trenu. U suštini smo ponovili rezultat (1.26) kada smo studirali primjenu integriranja na jednoliko ubrzano gibanje, što gibanje u homogenom gravitacijskom polju i jest. Jedina je razlika u činjenici da ovdje znamo uzrok akceleracije: gravitacijska sila! Simboli u dvjema izrazima (1.26) i (3.6) različito izgledaju, no njihovo fizikalno značenje je identično!

Mirovanje tijela na horizontalnoj podlozi (bez trenja) u gravitacijskom polju.

Opisano tijelo miruje jer na njega uz gravitacijsku silu djeluje i normalna reakcija podloge. Ova intuitivno trivijalna situacija zaslužuje pažnju jer vježba primjenu Newtonovih zakona, a s druge strane upozorava na razlog zašto tijelo na pada iako je u gravitacijskom polju. Redom: na tijelo djeluje gravitacijska sila

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{3.7}$$

Sada u igru ulazi podloga. Tijelo svojom težinom pritišće podlogu. U mikroskopskoj slici čestice tijela pokušavaju prodrijeti među molekule podloge. Ukoliko je podloga dovoljno čvrsta, njene molekule će se oduprijeti prodoru. (U bogatijim laboratorijima studenti imaju priliku vidjeti da se podloga često i malo deformira kao rezultat sile $\vec{F}_g$). Po trećem Newtonovom zakonu, sila kojom tijelo pritišće podlogu, podloga jednakom ali nasuprotnom silom djeluje na tijelo. Ova se sila zove normalnom reakcijom podloge (okomito ili normalno na horizontalnu površinu; reakcija, jer to jest sila iz trećeg Newtonovog aksioma : akcija i reakcija). U literaturi je rašireno ovu silu označavati s $\vec{N}$. Tijelo je u ravnoteži i miruje jer na njega djeluju protivne sile:

$$\vec{F}_g + \vec{N} = 0 \qquad \text{To jest,} \qquad \vec{N} = -\vec{F}_g \tag{3.8}$$

Gibanje na kosini (bez trenja i kotrljanja):

Podloga je nagnuta prema ravnini za kut ϑ. Paralelno kutu nagiba podloge postavljamo os z (izabrana tako da duž nje djeluje rezultanta sila). Y os postavljamo horizontalno a x os okomito na ostale dvije. Duž x osi nemamo rezultantne sile (tijelo ne propada kroz podlogu, nego se po njoj giba). Nadalje duž x-osi djeluje jedna komponeta gravitacijske sile: $-mgco\vartheta$.

Ovu komponentu uravnotežuje normalna reakcija podloge: N, tako da za rezultantnu silu $\vec{F}$ vrijedi:

$$F_x = -mg\cos\vartheta + N = 0 \tag{3.9}$$

Okomito na ravninu nema sile; tijelo početno nije imalo brzinu okomito na ravninu, dakle u smjeru x-osi ne će biti gibanja (to jest odstupanja od x=0)

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = v_{y,0}t + y_0 \tag{3.10}$$

$$F_z = -mg\sin\vartheta \;\Rightarrow\; m\frac{dv_z}{dt} = -mg\sin\vartheta \;\Rightarrow\; z = -\frac{1}{2}g\sin\vartheta t^2 + v_{z,o}t + z_0 \tag{3.11}$$

Pokusom ćemo demonstrirati paraboličnu prirodu gibanja opisanog gornjim izrazima.

NEWTONOV ZAKON OPĆE GRAVITACIJE:

Vrlo velikim brojem mjerenja je demonstrirano, a i astronomskim opažanjima potvrđeno da se dvije sferne mase privlače silama:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -Gm_1m_2\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \qquad \vec{F}_{2\to 1} = -Gm_1m_2\frac{(\vec{r}_1-r_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \tag{3.12}$$

G je gravitacijska konstanta: $G = 6.671\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^2$

Gravitacijska konstanta ubrzanja $\vec{g}$:

Ako promatramo tijelo mase m pod utjecajem gravitacijske sile Zemlje $\vec{F}$ i označimo masu Zemlje s M i udaljenost tijela od centra Zemlje s $\vec{r}$ (tijelo nije u untrašnjosti Zemlje), tada iz (3.12) slijedi da je sila na tijelo:

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} = (-GM\frac{\vec{r}}{r^3})m \tag{3.13}$$

Izraz u zagradi predstavlja vrijednost gravitacijske akceleracije na danom radijusu r. Treba zapamtiti da sveukupna akceleracija tijela za objekt koji se nalazi na Zemlji treba biti korigirana (iznos nije velik) za činjenicu da Zemlja rotira. O tome se govori u odsječku o inercijskim silama neinercijskih sustava.

Frekvencija obilaska Zemljinog satelita:
Iz (3.13) slijedi izraz za iznos akceleracije kojeg Zemlja daje u radijalnom smjeru satelitu mase m koji kruži nana radijusu r. Da bi gibanje bilo kružno mi smo u (1.66) iznijeli kolika je radijalna akceleracija potrebna da bi gibanje bilo kružno.
Izjednačavanjem ta dva izraza imamo:

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r \tag{3.14}$$

Kako je kutna brzina povezana s frekvencijom ophodnje jednostavno:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{3.15}$$

Kombiniranjem (3.14) i (3.15) imamo:

$$\nu^2 = \frac{GM}{4\pi^2 r^3} \tag{3.16}$$

Ova relacija je povezana s povijesno važnim 3. Keplerovim zakonom jer na jednostavnom slučaju kružnog gibanja pokazuje vezu vremena ophodnje $T = 1/\nu$ s radijusom kruženja u gravitacijskom slučaju.

DJELOVANJE ELEKTRIČNE SILE:

Elektromagnetizam ćemo studirati slijedeći semestar na fundamentalan način uz mnogo dublje razumijevanje njegovih potankosti. Ovdje će se upotrijebiti samo nekoliko konfiguracija električnih sila s dvije namjere. S jedne strane različiti primjeri poslužit će nam za vježbe kako proračunati gibanje tijela kada imamo matematički opis sile koja na tijelo djeluje. S druge strane steći ćemo sposobnost razumijevanja rada osciloskopa, jednog od vrlo važnih laboratorijskih instrumenta i sprave kojom ćemo često demonstrirati na ekranu ponašanje veličine u vremenu ili pak međuzavisnost veličina.

Coulombov zakon:
Ako imamo dva električna naboja označena s q_1 i q_2 s položajnim vektorima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ tada među njima vladaju sile:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = kq_1q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad (3.17)$$

slično gravitacijskoj sili, gdje je $k = 8.988 \cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$; C je oznaka za jedinicu naboja.
Uvodimo pojam električnog polja:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad (3.18)$$

Dakle to je sila na jedinični naboj. Također se kaže da se djelovanje sile faktorizira u naboj na kojeg ona djeluje i električno polje. Koncept polja je od ogromne važnosti u fizici , ne samo u elektromagnetizmu. Naime on udaljava izvor (razlog djelovanja – u ovom slučaju naboje koji djeluju) iz našeg daljnjeg razmišljanja i ostavlja da se fizičar suoči sa stanjem prostora – poljem- u kojem na svaki naboj djeluje sila proporcionalno jakosti tog naboja! Očito je polje točkastog naboja Q smještenog u ishodište u točki s radijvektorom $\vec{r}$:

$$\vec{E} = kQ\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (3.19)$$

Gibanje u homogenom električnom polju:
Ovo pretpostavlja da je polje istog smjera i jakosti i prostoru.
$\vec{E} = \vec{const}$ povlači da je sila konstantna pa prema tome i akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = konst.\ vektor \qquad (3.20)$$

Situaciju konstantne akceleracije smo sreli već dva puta i znamo da se integriranjem dobiva zavisnost položajnog vektora o vremenu (1.26):

$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_o$ gdje su značenja početne brzine i položaja ista kao u (1.26) (3.21)

Ako specijaliziramo situaciju na slučaj kad vrijeme počinjemo mjeriti u trenutku kad iz ishodišta kreće čestica bez brzine imamo:

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 \quad \vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m}t \qquad (3.21)$$

Izborom da električno polje koincidira s osi z slijedi :

$$v_z = \frac{qE}{m}t \quad z = \frac{qE}{2m}t^2 \qquad (3.22)$$

Kombiniranjem dviju relacija unutar (3.22):

$$z = \frac{m}{2qE} v^2 \quad \text{što je ekvivalentno} \quad qEz = \frac{1}{2} m v^2 \tag{3.23}$$

Ovako usputno dobivenu relaciju (3.23) studenti će kasnije prepoznati kao zakon sačuvanja energije. Naime lijeva strana druge relacije u (3.23) predstavlja rad koje je polje izvršilo na naboju, a desna strana kinetičku energiju koju je time naboj stekao. Komentar relacija (3.23) student koji se nije sretao s pojmovima energije može jednostavno za sada preskočiti!

Otklanjanje čestica u homogenom električnom polju.
Ova situacija još uvijek podliježe obliku rješenja problema sa stalnom akceleracijom, čije je opće rješenje izraz (1.26). Specijalni su uvjeti sada da se čestica kreće stalnom brzinom $\vec{v}_0$ u smjeru osi z, a električno polje djeluje u smjeru osi y. U smjeru osi x nema brzine. Dakle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_x = konst = 0 \Rightarrow x = konst_1 = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_z = v_0 \tag{3.25}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} \Rightarrow v_y = \frac{qE}{m} t \tag{3.26}$$

Znači naboj putuje u y-z ravnini. Komponenta brzine u z smjeru je stalna, a u y smjeru raste proporcionalno vremenu. Trenutni nagib putanje naboja prema z osi ϑ je jasno određen omjerom pripadnih brzina:

$$tg\,\vartheta = \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{qE}{m} t}{v_o} \tag{3.27}$$

Ako sada pretpostavimo da je naboj putovao između pločica koje su stvarale homogeno električno polje put L (duljina pločica duž osi z) tada je vrijeme t u (3.27) u kojem traje otklanjanje putanje od smjera z:

$$t = \frac{L}{v_0} \tag{3.28}$$

Sada možemo ući s (3.28) u (3.27):

$$tg\,\vartheta = \frac{qEL}{m v_0^2} \tag{3.28}$$

Ovo nalazi primjenu u radu osciloskopa. Naime, koristi se točkasti izvor elektrona koji ih izbacuje stalnom brzinom v_0. Na pločicama za otklanjanje daje se željena vrijednost E da bi se na ekranu udaljenom za stalnu udaljenost kutom određenim s (3.28) osvijetlila točka koordinate determinirane tim kutom. Uobičajeno je horizontalnu koordinatu snopa upravljati tako da raste linearno u vremenu, a vertikalnu predati na upravljanje fizikalnoj veličini koju želimo ispitivati. Tako u tom slučaju slika na ekranu predstavlja prikaz:

$y = f(t)$, gdje je f ispitivana veličina. (3.29)

DJELOVANJE MAGNETSKE SILE:

Od studenta se u ovom semestru ne će tražiti razumijevanje zašto magnet na relativno neočekivan način djeluje na naboj u gibanju. Ako se naboj giba brzinom $\vec{v}$ a magnetsko polje ima jakost $\vec{B}$, tada na naboj q djeluje sila:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.30)$$

Razmotrit ćemo najjednostavniji slučaj u kojem su brzina naboja i magnetsko polje okomiti.
Iz izraza za silu u drugom Newtonovom zakonu i ovog eksplicitno izraza za magnetsku silu imamo:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.31)$$

Pomnožimo posljednju jednakost skalarno s $\vec{v}$. Tada mješoviti produkt $(\vec{v} \times B) \cdot \vec{v}$ iščezava radi kolinearnosti dva faktora u njemu. (ovo se vidi ili iz „geometrijske interpretacije mješovitog produkta kao volumena zadanog s tri vektora“ ili kroz izraz s determinantom koja iščezava ako su joj dva retka identična). Znači iz (3.31) s navedenim množenjem slijedi:

$$0 = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.32)$$

Svojstvo da skalarni produkt vektora i njegove derivacije iščezava sreli smo kod vektora stalnog iznosa. (vidi razmatranja (1.31), (1.32).

Na istom mjestu smo zaključili da se u tom slučaju ponašanje vektora stalnog iznosa dade opisati kao:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (3.33)$$

Ako se s ovim vratimo u (3.31) i u vektorskom produktu brzine i polja zamijenimo poredak,

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (-\frac{q\vec{B}}{m}) \times \vec{v} \qquad (3.34)$$

Jedna od mogućnosti da ova relacija bude ispunjena jest:

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m} \qquad (3.35)$$

Fizikalna posljedica ove relacije jest rotacija naboja u homogenom magnetskom polju frekvencijom (3.35), koju mnogi zovu ciklotronskom frekvencijom, radi njene primjenljivosti u radu klasičnog ciklotronu u kojem je magnetsko polje homogeno i vremenski nepromjenljivo.

OSNOVNE SILE U PRIRODI:

Nakon uvida u gravitacijsku i elektromagnetsku silu spominjemo još dvije osnovne sile u prirodi. U četvrtom semestru ćemo susresti nuklearne sile koje se javljaju unutar atomske jezgre : nuklearna jaka sila i nuklearna slaba sila. Kako im kažu i imena , one se prvenstveno razlikuju svojom jakošću unutar jezgre. Slikovito možemo reći da jaka sila kontrolira staze nukleona (protona i neutrona) u jezgri, dok slaba sila vrši pretvorbe među njima. Ovu će materiju studenti postepeni učiti na višim godinama. Ovdje smo nabrojali temeljne sile samo radi opće fizičarske kulture. U nastavku teksta još ćemo upoznati netemeljne sile koje su međutim od velike praktične važnosti.

ELASTIČNA SILA:

U čvrstim tijelima (za razliku od plinova i tekućina) postoje među molekulama materijala relativno jake privlače sile. Radi njih na primjer ne možemo s jednim tijelom bez velikog napora prodrijeti u drugo tijelo. Kada se tijela podvrgnu različitim vanjskim utjecajima kao što su : istezanje, sabijanje, torzija (zakretanje jednog presjeka tijela u odnosu na drugi), smicanje (translacija jednog presjeka u odnosu na drugi)… tijela u početku reagiraju elastičnom deformacijom koja se sastoji od produljenje, kompresije, zaokreta… koji su proporcionalni vanjskoj prisili. U elastičnom režimu tijela se vraćaju nedeformiranom obliku kada vanjska prisila prestane. U elastičnom istezanju tijela Hook je otkrio jednostavnu pravilnost za tijelo duljine l:

$$\Delta l = kF \tag{3.36}$$

Produljenje tijela Δl je proporcionalno vanjskoj sili F. U Hookovom zakonu vrši se parametrizacija ovog rastezanja na slijedeći način:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \tag{3.37}$$

Naime produljenje tijela je proporcionalno ne samo sili nego i duljini tijela a obrnuto proporcionalno površini S poprečnog presjeka tijela koje se rasteže. Konstanta proporcionalnosti se unosi preko Youngovog modula E , po konvenciji napisanog u nazivniku izraza (3.37). Youngov modul karakterističan je za materijal i može se naći u odgovarajućim tablicama.

Izraz (3.37) može se intuitivno približiti studentima. Zamislimo da na tijelu označimo n poprečnih oznaka. Time je njegova originalna duljina razdijeljena u n segmenata duljine l/n. Ako tijelo podvrgnemo rastezanju sile F , svi će se mali segmenti duljine l/n produljiti za isti iznos. Ukupno produljenje cijelog tijela je to veće što ima više segmenata upravo te duljine l/n (pri tome ne bi pomoglo umjetno povećanje broja n gušćim postavljanjem oznaka, nego stvarno dodavanje novih segmenata). Tako razumijemo proporcionalnost produljenja tijela s njegovom duljinom. Pojavu površine S u nazivniku objašnjavamo ovako: Ako bi isto tijelo uzdužno razrezali na m štapića materijala, jasno je da svaki od njih uravnotežuje silu F/m. Dodavanjem još takvih segmenata , da bismo zadržali isto produljenje, morali bismo povećati silu proporcionalno povećanju broja štapića. Drugim riječima povećali bi silu proporcionalno načinjenom povećanju presjeka tijela. Dakle relativno produljenje jest proporcionalno omjeru F/S. Relacija (3.37) vrijedi samo u t.zv. elastičnom području. Ponašanje materijala prati se dijagramom kidanja produljenjem na apscisi i silom na ordinati. Na početku vrijedi proporcionalnost (3.37). Na kraju tijelo popušta i prekida se. U međuintervalu nastaju pojave specifične za materijal.

SILA TRENJA:

Sila trenja pojavljuje se neizbježno u svim našim dnevnim aktivnostima. Silu trenja upotrebljavamo i za pokretanje i za zaustavljanje. Prisutna je unutar svih strojeva koje koristimo. Ovdje ćemo se koncentrirati na fenomenološke aspekte (opis bez dubokog teorijskog uvida) , ali ćemo pružiti studentu ipak sliku o njenom porijeklu. Zamislimo dvije površine predmeta u kontaktu (na primjer knjiga koja leži na horizontalnom stolu) uz prisutnost okomitog pritiska okomitog na kontaktnu plohu. Ma kako glatke bile te površine, pod mikroskopom bismo uočili izbočenja iz osnovne plohe. Ako su plohe makroskopski ravnine, (ravnina je određena s tri točke) postoje tri mjesta na kojima neravnine izbočene iz jedne plohe u drugu zaprečavaju klizanje među plohama kada ako gornje tijelo silom nastojimo pomaknuti horizontalno preko donjeg tijela. Ipak, ako je horizontalna sila dovoljno jaka, doći će ili do mikroskopskog izdizanja tijela i zaobilaženja neravnine ili do lomljenja mikrozapreke. Nadalje je intuitivno prihvatljivo da će jednom pokrenuto tijelo trebati manju silu za nastavak gibanja nego za pokretanje. Konačno, ako sada počnemo velikom brzinom prelaziti preko tijela, frekvencija sudara mikrozapreka će se povećati i bit će ponovno potrebna veća sila za to brže gibanje; to veća što je gibanje brže. Ovo razmatranje je dobra podloga da lakše prihvatimo eksperimentalno utvrđena pravila o svojstvima sile trenja. Silom trenja općenito zovemo silu koja se javlja prilikom pokretanja ili tijekom gibanja objekta. Ovdje ćemo detaljnije razmatrati trenje među plohama materijala, no trenje se događa i pri gibanju tijela u tekućini ili u plinu!

Koeficijent trenja mirovanja:
Ako odaberemo dvije plohe nekih materijala u kontaktu, opišemo silu kojom se djeluje normalno na podlogu (težina knjige u prošlom pasusu) s N i označimo maksimalnu silu kojom tijelo vučemo paralelno kontaktnoj plohi, prije nego što se tijelo pokrenulo s $(F_t)_{\max}$ eksperimentalna je činjenica da su te dvije sile međusobno proporcionalne. Neočekivano je studentima, a demonstrira se pokusom, da za iste materijale sila trenja ne zavisi o kontaktnoj površini nego samo o normalnoj sili N . Sjećajući se mikroskopske slike ovo je sasvim razumljivo, jer u tvorbi sile učestvuju svega tri točke (neravnine) , a dubina propadanja neravnina jednih u druge zavisi samo o sili N ! Za opis ove činjenice se koristi koeficijent trenja mirovanja definiran s :

$$\mu = \frac{(F_t)_{\max}}{N} \tag{3.38}$$

Postoji i koeficijent trenja gibanja:

$$\mu' = \frac{(F_t)_{v=const}}{N} \tag{3.39}$$

Za silu trenja kod neke relativne brzine ploha. Pred studentima će se pokusom demonstrirati:

$$\mu > \mu' \tag{3.40}$$

U primjeru knjige na stolu, da bi došlo do gibanja, mora sila F , koja uzrokuje gibanja biti veća od sile trenja:

$$F - (F_t)_{\max} > 0 \qquad \text{ili} \qquad F - \mu N > 0 \tag{3.41}$$

Naravno, akceleracija tijela (koje je već u gibanju) bit će rezultat djelovanja rezultantne sile na masu tijela m :

$$F - \mu' N = ma \tag{3.42}$$

Trenje će načiniti i zaustavljanje tijela, ako je pa primjer sila F=0 u gornjem slučaju.

Mjerenje μ pomoću kosine:

Osim mjerenja sila u (3.38) i (3.39) , može se koeficijent trenja mirovanja odrediti i postavljanjem tijela na kosinu, povećavanjem kuta nagiba kosine do situacije u kojoj se tijelo pokreće. Ako je kut nagiba kosine α , tada je normalna reakcija podloge jednaka komponenti gravitacijske sile okomite na podlogu:

$$N = mg\cos\alpha \tag{3.43}$$

$$(F_t)_{\max} = mg\sin\alpha_{\max} \tag{3.44}$$

Gdje je na desnoj strani sinus maksimalnog kuta do kojeg se tijelo još nije pokrenulo. Tada je prema (3.38) i (3.44) :

$$\mu = tg\alpha_{\max} \tag{3.45}$$

Da bismo odredili korespondentni koeficijent trenja za gibanje, odredit ćemo za izabranu brzinu kut pod kojim kosina treba biti nagnuta da bi se realiziralo jednoliko gibanje tom brzinom. Tangens toga kuta analogno (3.45) odgovara koeficijentu trenja gibanja za tu brzinu.

Gibanje tijela na kosini uz trenje:

Tijelo je na kosini, os y je horizontalna, a os x je također u ravnini kosine okomita na y-os s pozitivnim smislom prema dolje. Newtonove jednadžbe gibanja u komponentama glase:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu' mg\cos\alpha \cdot \frac{v_x}{v} \tag{3.46}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu' mg\cos\alpha \frac{v_y}{v} \tag{3.47}$$

Faktori $\frac{v_x}{v}$ i $\frac{v_y}{v}$ u gornjim jednadžbama se pojavljuju kao rezultat projiciranja sile trenja koja se opire ukupnom vektoru brzine v duž smjera te brzine. Gornje jednadžbe su matematički vrlo komplicirane i mi ih ne ćemo rješavati. Radi se o komplicirano vezanim diferencijalnim jednadžbama a njihova kompliciranost je skrivena u nazivniku v koji je zapravo drugi korijen kvadrata prvih derivacija koordinata x i y po vremenu! Možemo međutim riješiti u kojoj je postoji samo komponenta brzine duž x osi. Tada se problem reducira na samo:

$$\frac{dv_x}{dt} = g\sin\alpha - \mu' g\cos\alpha = g\sin\alpha(1 - \frac{\mu'}{tg\alpha}) \tag{3.48}$$

Tijelo se ubrzava ako je član $\frac{\mu'}{tg\alpha} < 1$.

Općenito trenje nastojimo smanjiti. U strojevima to se čini podmazivanjem uljima. S druge strane ima situacija i kada ga nastojimo povećati (padobran, povećanje pritiska guma trkaćih automobila na podlogu…) .

I N E R C I J S K I   I   N E I N E R C I J S K I   S U S T A V I

Poznato nam je dnevno iskustvo pri vožnji nekim vozilom da pri promjeni iznosa brzine vozila ili promjeni smjera vozila osjećamo neočekivano djelovanje, koja traje tako dugo dok vozilo ponovno ne ide jednoliko po pravcu. U ovom dijelu predavanja ćemo izvesti upravo oblike tih prividnih sila koje nisu rezultat sila koje smo do sada upoznali, nego načina gibanja sustava u kojem se promatrano tijelo promatra. Pođimo od jednostavne usporedbe sila koje djeluju na tijelo u dva različita fizikalna i koordinatna sustava.

Sustav S je inercijski i u njemu vrijedi drugi Newtonov zakon koji smo prihvatili:

$$\vec{F} = m\vec{a}_I \qquad (4.1)$$

Sila $\vec{F}$ je stvarna,realna sila , jedna od onih iz prošlog poglavlja ili sila koju na primjer proizvodi živo biće svojim djelovanjem na tijelo. Indeks I u (4.1) nas podsjeća na činjenicu da se radi o akceleraciji u inercijskom sustavu S.

Neinercijski sustav S' giba se u odnosu na S (relativnom, dakle onom u odnosu na S) akceleracijom : $\vec{a}_R$. Tada je jasno da se ukupna akceleracija u inercijskom sustavu može rastaviti u dva vektorska doprinosa (ovu izjavu ćemo u nastavku i pokazati i dokumentirati):

$$\vec{a}_I = \vec{a}_R + \vec{a}_{NI} \qquad (4.2)$$

gdje je $\vec{a}_{NI}$ akceleracija u neinercijalnom sustavu. Ako relaciju (4.2) pomnožimo s masom tijela koje promatramo u oba sustava, i uzmemo u obzir (4.1), imamo:

$$\vec{F} - m\vec{a}_R = m\vec{a}_{NI} \qquad (4.3)$$

Desna strana u (4.3) je uzrok akceleracije u neinercijskom sustavu. Odavle je jasno: čak i iako na tijelo ne djeluje stvarna sila $\vec{F}$, u neinercijskom sustavu djeluje sila: $-m\vec{a}_R$. U neinercijskom sustavu, radi specifičnosti gibanja tog sustava prema inercijskom, javlja se, ponavljamo prividna ili pseudo sila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_R \qquad (4.4)$$

Ilustracija zaključka o neinercijskoim silama Atwoodovim padostrojem.

Atwoodov padostroj se sastoji od koloture s horizontalnom osi rotacije čije je trenje s osi zanemarivo. Preko koloture je prebačena nit , čije trenje sa kotačem koloture je zanemarivo. Nit ima zanemarivu masu i jedina joj je uloga osigurati prijenos sile kroz nit napetošću niti. Znači da se sila koja djeluje na jednom kraju niti pronosi bez promjene do točke na kojoj je nit pričvršćena na drugo tijelo. Prirodno nit pronosi silu i sa drugog kraja na prvi kraj. Važno je uočiti da u napetoj niti postoji jedna jedinstvena sila N koja se njome pronosi. Na niti vješamo dva tijela različitih masa (nit se postavlja vertikalno). Mase tijela označimo indeksima 1 i 2 s tim da je masa 2 veća od mase 1. Odaberimo smjer rezultantne akceleracije niti kao pozitivan. Primjenom Newtonovih zakona imamo:

$$m_2 a = m_2 g - N \qquad (4.5)$$

$$m_1 a = N - m_1 g \qquad (4.6)$$

Izračunom N iz obadvije relacije slijede:

$$N = m_2 g - m_2 a = m_1 g + m_1 a \qquad (4.7)$$

Iz gornjih relacija dobivamo:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \qquad (4.8)$$

$$N = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (4.9)$$

Na ovom mjestu je zgodno komentirati (4.8). Sustav masa se kreće akceleracijom koja je rezultanta suprotnih sila težina dva tijela , a ta rezultanta tjera obadvije mase (vidi nazivnik u (4.8)). Konačni je zaključak: tijela u Atwoodovom padostroju su tijela u akceleriranom sustavu. Na predavanju ćemo ilustrirati uključenjem dinamometra, koji mjeri napetost niti, efekt prividnih sila koje nastaju u ubrzanom sustavu. Usporedit će se napetost niti u mirovanju za obadva tijela, s onom koja je prisutna u ubrzanom sustavu.

ODNOS VEKTORA POLOŽAJA;BRZINE I UBRZANJA INERCIJSKOG I NEINERCIJSKOG SUSTAVA:

Inercijski sustav S miruje i njegovi su jedinični vektori nepromjenljivi. Položaj promatrane točke u prostoru opisuje njen radijvektor $\vec{r}_I$. Ishodište drugog sustava S' opisano je vektorom $\vec{r}_{IO}$ gdje indeks I podsjeća da je početak vektora ishodište inercijskog sustava, a O označuje da se prati ishodište (obično označeno kao O) proizvoljnog sustava. U tom proizvoljnom sustavu položaj iste promatrane točke mjeren od ishodišta O je opisan vektorom $\vec{r}$. Jasno da vrijedi temeljna veza vektora položaja u dvama sustavima:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_{I0} + \vec{r} \qquad (4.10)$$

Sustav S' ne samo da proizvoljno mijenja svoj položaj , kako prati vektor $\vec{r}_{IO}$, nego i rotira oko proizvoljne osi kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Napisat ćemo niz relacija u inercijskom sustavu, koje smo već imali prije ((1.50) za kordinate, (1.60) za brzine i (1.62) za akceleracije:

$$\vec{r}_I = \hat{x}_I x_I + \hat{y}_I y_I + \hat{z}_I z_I \qquad (4.11)$$

Jedinični vektori imaju indeks I da se naglasi njihova pripadnost inercijskom sustavu.

$$\frac{d\vec{r}_I}{dt} = \hat{x}_I \dot{x}_I + \hat{y}_I \dot{y}_I + \hat{z}_I \dot{z}_I = \vec{v}_I \qquad (4.12)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_I}{dt} = \hat{x}_I \ddot{x}_I + \hat{y}_I \ddot{y}_I + \hat{z}_I \ddot{z}_I = \vec{a}_I \qquad (4.13)$$

Potpuno analogne relacije vrijede za položajni vektor ishodišta proizvoljnog sustava i pripadne vremenske drivacije:

$$\vec{r}_{IO} = \hat{x}_I x_{IO} + \hat{y}_I y_{IO} + \hat{z}_I z_{IO} \qquad (4.14)$$

$$\frac{d\vec{r}_{IO}}{dt} = \hat{x}_I \dot{x}_{IO} + \hat{y}_I \dot{y}_{IO} + \hat{z}_I \dot{z}_{IO} = \vec{v}_{IO} \qquad (4.15)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{IO}}{dt} = \hat{x}_I \ddot{x}_{IO} + \hat{y}_I \ddot{y}_{IO} + \hat{z}_I \ddot{z}_{IO} = \vec{a}_{IO} \qquad (4.16)$$

Sve gornje veličine su veličine opisane u inercijskom sustavu S.

U sustavu S' su jedinični vektori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Kao i cijeli S' sustav oni su rotirani vektorom $\vec{\omega}$. Iz tog razloga možemo za njihove derivacije po vremenu pisati izraz analogan (1.37):

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x} \qquad \frac{d\hat{y}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y} \qquad \frac{d\hat{z}}{dt} = \hat{\omega} \times \hat{z} \tag{4.17}$$

Radijvektor točke u neinercijskom sustavu opisan je s jediničnim vektorima neinercijskog sustava:

$$\vec{r} = \hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z \tag{4.18}$$

Znajući kako se derivira produkt i vodeći računa o derivacijama jediničnih vektora kroz relacije (4.16)-(4-18), imamo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\, \hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z\,) + \hat{x}\dot{x} + \hat{y}\dot{y} + \hat{z}\dot{z} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v} \tag{4.19}$$

Gdje je $\vec{v}$ vektor brzine gibanja promatrane točke kako ga vide jedinični vektori sustava koji se okreće s $\vec{\omega}$. Druga derivacija po vremenu vektora $\vec{r}$ slijedi deriviranjem (4.19) upotrebom pravila za deriviranje produkta i uvažavanjem opisa vektora $\vec{r}$ i $\vec{v}$ u (4.18) i (4.19) te pravila za deriviranje jediničnih vektora (4.17):

Rezultat jest:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{a} \tag{4.20}$$

Gdje je $\vec{a}$ akceleracija toče kako je u rotirajućem sustavu vide jedinični vektori tog sustava:

$$\vec{a} = \hat{x}\ddot{x} + \hat{y}\ddot{y} + \hat{z}\ddot{z} \tag{4.21}$$

Znajući vezu među vektorima položaja (4.10) možemo ga derivirati po vremenu i za desnu stranu koristiti izraze (4.15) i (4.19).

$$\vec{v}_I \equiv \frac{d\vec{r}_I}{dt} = \vec{v}_{IO} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v} \tag{4.22}$$

I postupajući analogno pri još jednom deriviranju:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_{IO} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{a} \tag{4.23}$$

Student će lako usporediti ovaj izraz s izrazom (1.41) koji mu je strukturno vrlo blizak. Razlike su male. Nastaju samo od činjenice da se udaljavanje od ishodišta (neinercijskog sustava) drukčije prati u dva slučaja.

Sada možemo pratiti nastanak raznih prividnih ili pseudosila. Slučaj $\vec{a} = 0, \vec{\omega} = 0, \vec{v} = 0$ koji nastupa samo pri translacijskoj akceleraciji ishodišta smo već konzumirali, samo podsjećamo da po receptu (4.4) nastupa u neinercijskom sustavu pseudosila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_{IO} \tag{4.24}$$

Anegdotalno možemo studenta podsjetiti pitanja koje je Nobelovac Feynman kao dijete postavljao svom ocu: „Zašto se lopta postavljena na kolica počne gibati prema kraju kolica ako kolica povučemo (akceleriramo) prema naprijed?“. Odgovor je naravno pojava pseudosile u akceleriranom sustavu.

Coriolisova sila

Slijedeća je sila ona u kojoj su $\vec{a}_{OI} = \vec{a} = 0$. Tada nastupa Coriolisova pseudosila:

$$\vec{F}_p = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} \quad (4.25)$$

Ova se sila manifestira na slijedećim primjerima:Foucaultovo njihalo i uočeno pravilo da rijeke koje teku prema jugu na našoj polutci deru desnu obalu. Pojavu da se ravnina gibanja njihala rotira kao rezultat rotacije Zemlje se demonstrira studentima.

Centrifugalna sila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad (4.26)$$

je poznata svakom tko se vozio na vrtuljku.

Težina tijela koje na Zemlji miruje:

Po definiciji je težina tijela sila koju u (neinercijskom) sustavu treba uravnotežiti da bi tijelo mirovalo.

$$\vec{F}_{tež} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_p \quad (4.27)$$

gdje je u slučaju mirnog tijela na površini Zemlje (koje s njom rotira) $\vec{F}_p$ dan s (4.26).

To je razlogom da težina tijela varira s geografskom širinom pozicije na kojoj se mjeri!

Težina tijela u jednostavnim akceleriranim sustavima:

Razmotrimo dizalo koje se akcelerira prema gore i uzmimo pozitivni smjer prema gore: $\vec{a}_{OI}$ je usmjeren prema gore i pozitivan i iznosom jednak iznosu stvarne akceleracije dizala a. Pseudosila je tada

$$\vec{F}_p = -ma \quad (4.27)$$

Kako je i gravitacija istog smjera imamo:

$$F_{tež} = -ma - mg \quad (4.28)$$

U dizalu koje akcelerira prema gore osjećamo se težim. Obratom predznaka akceleracije svi fenomeni povezani s njom mijenjaju predznak i mi se osjećamo lakši.

U posebnom slučaju naša težina (u neinercijskom sustavu) iščezava. Iz na primjer (4.28) iščitavamo da je to situacija kada dizalo slobodno pada. (u sustavu u kojem je pozitivni smjer prema gore tada je $a = -g$).

Pokus s Coriolisovom silom:

Prati se ravnina njihanja njihala koje se sastoji od teške kugle na vrlo dugoj žici. Početna ravnina se utvrđuje laserskom zrakom koja obasjava žicu i u položaju ravnoteže i u položaju odmaknutom od ravnoteže određenim niti koja je izvukla kuglu iz položaja ravnoteže. Prepaljivanjem niti oslobađa se njihalo. U početku njihalo titra tako da ga obasjava laserska zraka. Nakon nekog vremena opaža se osvjetljenje žice samo u trenucima prolaska kroz položaj ravnoteže.

GALILEIeve TRANSFORMACIJE I GALILEIeva INVARIJANTNOST:

Relativističke pojave kod velikih brzina koje duboko narušavaju klasičnu intuiciji razvijenu u dnevnim uvjetima studirat ćemo na samom kraju semestra. Sada ćemo se ograničiti na vezu koordinata sustava (zgodno je pretpostaviti da je jedan od njih inercijski) koji međusobno jednoliko translatiraju. Pri malim brzinama dozvoljeno je pretpostaviti da vrijeme teče jednako u obadva sustava. Izabrat ćemo, da u t=0 trenutku položaji ishodišta sustava koincidiraju, a koordinatne osi sustava ćemo izabrati tako da se translacija dešava duž njihovih x osi. y i z osi izabrat ćemo tako da su posebno y osi dva sustava paralelne i posebno z osi također. Ako unutar inercijskog sustava S sustav S' jednoliko translatira duž x osi udesno brzinom V tada je veza među x koordinatom u sustavu S i x' koordinatom iste točke u sustavu S':

$$x=x'+Vt \qquad (4.29)$$

dok su vrijednosti drugih dviju koordinata iste u obadva sustava:

$$y=y' \qquad z=z' \qquad (4.30)$$

Ovo se može napisati i u općenitijem i kompaktnijem obliku

$$\vec{r} = \vec{r}\,'+\vec{V}t \qquad (4.31)$$

Ako relaciju (4.31) deriviramo jednom po vremenu slijedi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V} \qquad \vec{v} = \vec{v}\,'+V \qquad (4.32)$$

Gdje su $\vec{v}$ *i* $\vec{v}\,'$ brzine promatrane točke u sustavima S i S' a $\vec{V}$ je relativna brzina sustava. Relacija (4.32) je prirodna i dobro poznata relacija o slaganju brzina , koja pri malim brzinama vrijedi. Ponovnim deriviranjem relacija (4.32) dobit ćemo vezu akceleracija u dva sustava. Kako je relativna brzina među sustavima $\vec{V}$ konstantna to njezina vremenska derivacija iščezava:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} \qquad \vec{a} = \vec{a}\,' \qquad (4.33)$$

Akceleracije opažene u dvama sustavima su identične. Kako su akceleracije manifestacije sila, to znači da su sile , kako ih vide dva sustava, identične. Sada, ako je prvi sustav inercijski i u njemu vrijede Newtonovi zakoni, radi identiteta sila i akceleracija , isti fizikalni zakoni vrijede u obadva sustava! Ta izjava naziva se Galileievom invarijancijom.

Z A K O N   S A Č U V A N J A   E N E R G I J E:

ELEMENT RADA:

U mehanici je koncept energije blizak potencijalnoj mogućnosti vršenja rada. Stoga je za koncept energije potrebno razumjeti koncept rada. Tvrdnja da je za stalnu silu i zadani put na kojem je sila savladavana produkt dvije veličine rad , bez ulaska u detalje, se čini intuitivno prihvatljivim. Kada ,međutim, usporedimo napor potreban da se predmet pomakne dva metra horizontalno s naporom potrebnim da se isti predmet digne dva metra, postaje jasno da i kut između sile i puta igra ulogu. Kada mičemo predmet okomito na smjer sile nemamo napora. Kada mičemo predmet nasuprot sili postoji napor. Kada sila miče predmet, on dobiva brzinu (i potencijal da radi protiv neke sile)! Uz to rad treba definirati za male (diferencijalne) pomake jer se sila može prostorno mijenjati a također i kut između sile i pomaka. Stoga je definicija elementa rada:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{5.1}$$

dW *je element rada*, $\vec{F}$ *je sila koja vrši rad* , $d\vec{s}$ *je element prijedjenog puta*.

Vidimo da izraz (5.1) vodi računa o svim potankostima koje smo u gornjem tekstu diskutirali. Jedinica za rad je Joule i iz (5.1) je jasno da je to Newton pomnožen s metrom. Iz (5.1) se također vidi da rad može imati i pozitivan i negativan predznak. Rad je pozitivan kada je sila pomagala pomak, a negativan kad mu se odupirala. Skalarni produkt je izvrsna formulacija slijedećih činjenica. Pomak možemo rastaviti na komponentu duž sile i okomito na silu. Jasno je prema gornjoj analizi da nema rada pri micanju okomito na silu, no postoji rad za komponentu pomaka u smjer sile. Skalarni produkt (5.1) upravo o tome vodi računa.

ELEMENT KINETIČKE ENERGIJE:

U relaciji (5.1) možemo provesti zanimljive transformacije s dubokim fizikalnim smislom:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{mv^2}{2}) = dW \tag{5.2}$$

Najprije smo silu pisali preko Newtonovog zakona. Zatim smo faktor elementa puta izrazili pomoću brzine i elementa vremena. Zatim smo pokratili vremenske faktore i konačno produkt brzine i diferencijala brzine izrazili preko polovice diferencijala kvadrata brzine. Sve to je preko (5.1) povezano s elementom-diferencijalom rada. Vidimo da se rad utrošio na promjenu veličine $\frac{mv^2}{2}$. Blisko nam je stoga uvesti termin za tu veličinu kao kinetičku energiju. Pod energijom ćemo od sada smatrati veličinom koja odražava sposobnost tijela ili sustava da izvrši rad. Naime, relaciju (5.2) možemo čitati i natraške. Interpretirajući taj obrat kao obrat u vremenu to bi značilo da se kinetička energija troši na svladavanje sile $\vec{F}$.

ELEMENT POTENCIJALNE ENERGIJE:

Da bismo prihvatili matematički izraz za element-diferencijal potencijalne energije moramo razmotriti potankosti malo kompleksnije situacije. Proširit ćemo razmatranje na više fenomena. Najprije imamo u razmatranju tijelo mase m. Tijelo je sastavni dio nekog sustava u kojem djeluje unutrašnja sila; radi jednostavnosti joj nećemo dodavati indeks u opisu. Sila koja je sastavni dio sustava kojem pripada i tijelo je dakle $\vec{F}$. (kao mentalni model za ovu situaciju možemo uzeti tijelo u gravitacijskom polju; tijelo i polje ili tijelo,Zemlja i gravitacijska sila su sustav). Sad dodajemo i silu izvana koja također može djelovati na tijelo. To vanjsku silu ćemo označiti kao $\vec{F}_{IZV}$. (U našem modelu to može biti dodatna opruga ili čovjek). Na tijelo znači djeluje rezultantna sila: $\vec{F} + \vec{F}_{IZV}$. S ovom rezultantnom provedimo proceduru (5.2) na diferencijalu puta $d\vec{s}$. Rezultat je :

$$\vec{F}_{IZV} \cdot d\vec{s} = -\vec{F} \cdot d\vec{s} + d(\frac{mv^2}{2}) \tag{5.3}$$

Gornja relacija jako mnogo govori. Rad vanjske sile dijeli se na promjenu kinetičke energije tijela i još jednu veličinu. Neke sile kao gravitacijska ili električna imaju posebno svojstvo da se njihov $-\vec{F} \cdot d\vec{s}$ može napisati kao diferencijal to jest da vrijedi:

$$-\vec{F} \cdot d\vec{s} = dP \tag{5.4}$$

Kada je relacija (5.4) ispunjena uočavamo dva elementa: Kada nema vanjske sile $\vec{F}_{IZV}$, tada je suma diferencijala kinetičke energije i diferencijala veličine P jednaka nuli, to znači je suma kinetičke energije i elementa rada sile sustava (uzetog s negativnim predznakom) sačuvana.
Kada je (5.4) ispunjeno, imamo definiciju potencijalne energije. Sile koje ispunjavaju relaciju (5.4) zovemo konzervativnim silama. Sila trenja na primjer ne ispunjava gornji uvjet. Konzervativne sile imaju dodatna udobna svojstva, o kojima ćemo razmatrati u kasnijem tekstu. Potencijalna energija definirana s (5.4) + kinetička energija je sačuvana veličina dok nema sile izvan sustava.

SAČUVANJE ENERGIJE MEHANIČKOG SUSTAVA:

Možemo uvrstiti (5.4) u (5.3):

$$\vec{F}_{IZV} \cdot d\vec{s} = dP + d(\frac{mv^2}{2}) = d(P + \frac{mv^2}{2}) \tag{5.5}$$

Kada nema vanjske sile (lijeva strana u (5.5) iščezava) suma kinetičke i potencijalne energije sustava je stalna. Suma potencijalne i kinetičke energije i naziva se mehaničkom energijom sustava. Studentima će se demonstrirati pokusi sa sačuvanjem mehaničke energije. (na primjer njihalo, titranje opruge s masom…) Dok imamo posla s mehaničkim silama ovi oblici energije prelaze iz jedne forme u drugu u sustavima bez vanjskih sila. U nastavku teksta koncentrirat ćemo se na potencijalnu energiju konzervativnih sila: njena svojstva i načine kako je izračunati za neke slučajeve.

KONZERVATIVNE SILE:

Sile koje zadovoljavaju uvjet (5.4) nazivamo konzervativnim silama. Bolje razumijevanje ove činjenice steći ćemo analizom svojstava koja iz (5.4) proizlaze. I sila i putanja mogu na različite načine zavisiti o prostornim koordinatama. No zamislimo da smo za silu koja ima svojstvo (5.4) načinili putanju, po kojoj savladavamo tu silu, zatvorenom, to jest da je početna i konačna točka ista. Ukupni je rad zbroj svih diferencijalnih elemenata rada od početne do konačne točke. To se u slučaju konzervativnih sila svodi na razliku vrijednosti potencijalne energije početne i konačne točke.

$$W = \int_{POČ}^{KON} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{POČ}^{KON} (-dP) = P(POČ) - P(KON) \tag{5.6}$$

Ako su početna i konačna točka iste, tada imamo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = P(POČ\ isto\ kao\ KON) - P(POČ\ isto\ kao\ KON) = 0 \tag{5.7}$$

Konzervativne sile mogu se karakterizirati bilo definicijom preko (5.4) ili preko (5.7) s time da (5.7) mora vrijediti za proizvoljnu zatvorenu putanju! Još dodatno opažamo da konzervativne sile imaju svojstvo da im rad ne zavisi od putanje kojom se od početne točke došlo do konačne. Odmah je jasno da sila trenja nije te vrste. Naime micanjem tijela jednog materijala po površini drugog materijal (uključujući i isti), rad će među ostalim zavisiti o ukupnoj dužini puta, a ne samo o početnoj i konačnoj točki. Štoviše, rad po zatvorenoj putanji izvjesno ne će biti nula.

POTENCIJALNA ENERGIJA U HOMOGENOM GRAVITACIJSKOM POLJU:

Ako su x i y osi sustava horizontalne , a z os vertikalna i uperena prema gore, tada je opis gravitacijske sile:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{z} \qquad dP = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = mg\hat{z} \cdot d\vec{s} \tag{5.8}$$

Skalarni produkt jediničnog vektora $\hat{z}$ *i diferencijala pomaka* $d\vec{s}$ je dz diferencijalni pomak duž samo z osi – projekcija $d\vec{s}$ na z os. Stoga je iz (5.8) diferencijal potencijalne energije:

$$dP = mgdz \tag{5.9}$$

Integriranjem diferencijala potencijalne energije iz (5.9) od koordinate $\vec{r}_{POČ}$ *do* $\vec{r}_{KON}$ imamo:

$$\int_{POČ}^{KON} mgdz = mg(z_{KON} - z_{POČ}) \tag{5.10}$$

Sad imamo egzaktno izveden izraz kojeg su neki intuitivno prihvaćali u srednjoj školi.

POTENCIJALNA ENERGIJA CENTRALNOG GRAVITACIJSKOG POLJA:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \qquad dP = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = (GMm\frac{\vec{r}}{r^3}) \cdot d\vec{s} \tag{5.11}$$

Vektor $\vec{r}$ *pišemo kao* $\hat{r}r$ *a* $\hat{r}\cdot d\vec{s} = dr$ (5.12)

Korištenjem (5.12) u (5.11) slijedi:

$$dP = \frac{GMmr}{r^3}dr = d(-GMm\frac{1}{r}) \qquad (5.13)$$

$$P_{POČ} - P_{KON} = GMm(\frac{1}{r_{KON}} - \frac{1}{r_{POČ}}) \qquad (5.14)$$

COULOMBOVA ELEKTRIČNA SILA:

Kako se Coulombova sila u svom analitičkom opisu piše samo s drugim konstantama i suprotnim predznakom, možemo procedurom identičnom gornjoj doseći analogni rezultat:

$$P_{POČ} - P_{KON} = kQq(\frac{1}{r_{POČ}} - \frac{1}{r_{KON}}) \qquad (5.15)$$

Studenti su upozorili na potrebu boljeg razumijevanja veze:

$$-\vec{F}\cdot d\vec{s} = dP$$

Stoga u redovna predavanja uključujemo i ovaj umetak koji bi trebao pomoći boljem razumijevanju dubine svojstava koje ima konzervativna sila i odgovarajuća potencijalna energija.

UMETAK O DIFERENCIJALU PROSTORNO ZAVISNE FUNKCIJE

Izraz za derivaciju funkcije f(x) pišemo kao :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad „ 1 „$$

No možemo ga pisati i kao :

$$df = f'(x)dx \qquad „ 2 „$$

Veza diferencijala varijable dx i diferencijala funkcije df je ovdje jednostavna. U 3D prostoru veza je mnogo kompliciranija. Ako imamo funkciju P(x,y,z), njen diferencijala (prirast) jest:

$$dP = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dz \qquad „ 3 „$$

Podsjećamo na značenje izraza $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$. U navedenom izrazu podrazumijeva se da se veličine y i z smatraju konstantnima a derivira se P samo po x varijabli. (parcijalna derivacija P po x).

Vrlo brzo postaje jasno da nije svaki izraz oblika f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+ h(x,y,z)dz diferencijal. Da bi to bilo ispunjeno, prema „ 3 „ dijelovi f, g i h , moraju biti parcijalne derivacije ISTE prostorne funkcije po varijablama x, y i z respektivno. Za opći izraz:

$$-\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \qquad „ 4 „$$

potpuno je upitno da li ga se može napisati kao diferencijal neke prostorno zavisne funkcije. Da bi to bilo moguće, $(-F_x),(-F_y),(-F_z)$ trebaju biti parcijalne derivacije ISTE prostorno zavisne funkcije P(x,y,z) po varijablama x,y,z respektivno. Taj uvjete neke sile zadovoljavaju , tada ih zovemo konzervativnim i tada imaju odlična svojstva o kojima smo već govorili. S druge strane sila trenja taj uvjet ne zadovoljava. Sila trenja ne može se opisivati preko potencijala!

CENTRALNA ELASTIČNA SILA:

$$\vec{F} = -K\vec{r} \qquad dP = -(-K\vec{r}) \cdot d\vec{s} \tag{5.16}$$

$$dP = Krdr = d(\frac{1}{2}Kr^2) \tag{5.17}$$

$$P_{POČ} - P_{KON} = \frac{1}{2}K(r^2{}_{POČ} - r^2{}_{KON}) \tag{5.18}$$

NAPOMENA O STANDARDIZACIJI INTEGRACIJSKE KONSTANTE:

U principu pri gornjim operacijama integriranja kada smo se od diferencijala potencijalne energije vraćali na sam potencijal nastaje višeznačnost. Naime, derivacija konstante je nula. Stoga pri obratnom putu rezultata integriranja sadrži proizvoljnu konstantu. U gornjim proračunima razlike potencijalne energije ta se konstanta dokida. No ako želimo imati apsolutnu vrijednost potencijalne energije, tada možemo pribjeći konvenciji, to jest široko prihvaćenom dogovoru kojim je vrijednost te konstante utvrđena. Na primjer, prihvaćeno je da je vrijednost potencijalne energije za dva tijela „beskonačno razmaknuta“ za električno i gravitacijsko djelovanje jednaka nuli. Istu vrijednost nula pripisujemo u homogenom gravitacijskom polju tijelu na koordinati z=0. Nultu vrijednost potencijalne energije pripisujemo i položaju u sredini koordinatnog sustava za centralnu elastičnu silu.

RAČUNANJE SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE:

U prostoru je potencijalna energija funkcija položaja tijela, znači funkcija njegovih koordinata:

$$P(\vec{r}) = P(x, y, z) \tag{5.19}$$

Znamo izračunati diferencijal funkcije jedne varijable:

$$d[f(x)] = \frac{df}{dx} \cdot dx \tag{5.20}$$

Ako u (5.19) načinimo samo pomak duž x osi , imat ćemo odgovarajuću promjenu Potencijalne energije:

$$P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z) \equiv \Delta_x \mathrm{P(x,y,z)} \tag{5.21}$$

Prirast potencijalne energije možemo podijeli s prirastom varijable:

$$\frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x} \tag{5.22}$$

Gornji kvocijent pri limesu kada $\Delta x \to 0$ nazivamo parcijalnom derivacijom potencijalne energije po varijabli x.

$$\lim(\Delta x \to 0) \frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \tag{5.23}$$

Intuitivno govoreći (5.23) je brzina promjene potencijalne energije u točki s koordinatama x,y,z ako se razmatra samo promjene nastale mijenjanjem koordinate x. U istom smislu imamo i diferencijal u smjeru x:

$$d_x P = \frac{\partial P}{\partial x} dx \tag{5.24}$$

Po svom značenju je to infinitezimalna promjena P koja odgovara infinitezimalnoj promjenu dx. Istu proceduru možemo načiniti mijenjajući samo koordinatu y, a zatim posebno koordinatu z. Tako bismo dobili:

$$d_y P = \frac{\partial P}{\partial y} dy \tag{5.25}$$

$$d_z P = \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.26}$$

Ako istovremeno imao sva tri pomaka, sveukupni diferencijal promjene jest:

$$dP = \frac{\partial P}{dx} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.27}$$

Sada možemo usporediti dva izraza za dP (5.4) i (5.27) pa imamo:

$$dP = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{\partial P}{dx} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.28}$$

Diferencijali dx,dy,dz su međusobno nezavisni. Stoga u izrazu (5.28) faktori koji uz njih stoje moraju biti nezavisni. Znači imamo tri jednakosti:

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.29}$$

Prema (5.29) poznajemo komponente sile F iz parcijalnih derivacija potencijalne energije koju ta sila daje. Izrazi (5.29) mogu se kompaktno napisati:

$$\vec{F} = -(\hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z}) \tag{5.30}$$

U prijašnjim odsječcima smo izvodili kako iz analitičkog opisa sile u prostoru izračunati potencijalne energiju. Ovdje smo s (5.30) dobili obratnu proceduru: kako iz zadane potencijalne energije izračunati silu koja tu potencijalnu energiju uzrokuje.

MATEMATIČKI OPERATOR GRADIJENTA:

Pišemo ovaj odsječak , jer je višegodišnje iskustvo pokazalo da studenti jesu spremni prihvatiti izvod (5.30), no imaju poteškoća s formalnim nazivom operacije koja slijedi i široko se koristi u literaturi. Relaciju (5.30) možemo napisati tako da izvadimo oznaku potencijalne energije iz zagrade i smjestimo je iza nje. Možemo o tome misliti kao o svojstvu distribucije množenja na slučaj sume. U novoj notaciji znači imamo:

$$\vec{F} = -(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z})P \tag{5.31}$$

Temeljno je znati da (5.31) po definiciji znači isto što i (5.30)
U matematici je običaj naznaku postupka koji će se s nekom funkcijom činiti nazvati operatorom. U ovom slučaju faktor ispred funkcije P u (5.31) naznačuje da će se funkcija P najprije derivirati po x i rezultat množiti s jediničnim vektorom osi x. Paralelno će se iste operacije učiniti i za ostale smjerove i konačno će uslijediti zbrajanje raznih komponenti u jedinstveni vektor sile. Taj operator se naziva gradijentom i piše se:

$$grad \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.32}$$

U (5.32) nema znači posebnih matematičkih ili fizikalnih svojstava, to je jednostavno konvencija za skraćeno pisanje koje matematičke operacije (na primjer deriviranje , množenje s jediničnim vektorima i zbrajanje komponenti) kojim redoslijedom treba činiti da se dobije rezultat primjene operatora grad na funkciju, koja je u slučaju (5.31) potencijalna energija. Tako u široko prihvaćenoj notaciji imamo:

$$\vec{F} = -grad\ P \equiv -\vec{\nabla}P \tag{5.33}$$

Uočavamo da je oznaka $\vec{\nabla}$ *alternativa za oznaku* grad. Intuitivno je operacija grad naznaka deriviranja funkcije u prostoru. Ovaj segment predavanja je posvećen traženju sile iz potencijalne energije. Studentu je za početak dovoljna relacija (5.30). No s vremenom je dobro koristiti gradijent odnosno vektorski operator nabla $\vec{\nabla}$ jer to osigurava kompaktnost pisanja, a kasnije će poticati i razvoj intuicije.

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA HOMOGENO GRAVITACIJSKO POLJE:

U (5.10) smo uz konvenciju o izboru integracijske konstante pokazali:

$$P(\vec{r}) = mg \cdot z \tag{5.34}$$

Prema (5.31) slijedi za odgovarajuću silu:

$$\vec{F} = -(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}) = -(\hat{x}\frac{\partial(mgz)}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial(mgz)}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial(mgz)}{\partial z}) \tag{5.35}$$

Kako u gornjem slučaju potencijalna energija zavisi samo o z i to linearno, parcijalne derivacije po x i y iščezavaju a parcijalna derivacija poz z je radi linearnosti samo konstantni član ispred varijable z. Tako je rezultat:

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \tag{5.36}$$

To smo i očekivali. S tim smo opisom i počeli u (5.8).

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA CENTRALNO GRAVITACIJSKO POLJE:

$$P(\vec{r}) = -GMm\frac{1}{r} \tag{5.37}$$

$$\vec{F} = -grad(-GMm\frac{1}{r}) = GMm\, grad(\frac{1}{r}) \tag{5.38}$$

$$grad(\frac{1}{r}) = \left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})\right] \tag{5.39}$$

$$\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \hat{x}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}(-\frac{1}{2})\cdot 2x = -\frac{\hat{x}x}{r^3} \tag{5.40}$$

Analognim postupkom imamo za ostale komponente gradijenta odgovarajuće izraze. Kada sve te komponente zbrojimo, imamo:

$$grad(\frac{1}{r}) = -(\frac{\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z}{r^3}) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5.41}$$

Uvrštenjem (5.41) u (5.38) slijedi:

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5.42}$$

To je izraz s kojim smo u (5.11) i počeli!

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA ELASTIČNU CENTRALNU SILU:

$$\vec{F} = -grad(\frac{1}{2}Kr^2) \tag{5.43}$$

$$\vec{F} = -K\frac{1}{2}\left[\hat{x}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\right] = \tag{5.46}$$

$$= -K(\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z) = -K\vec{r}$$

Što odgovara početnoj relaciji (5.16).

DEFINICIJA I PRIMJERI EKVIPOTENCIJALNIH PLOHA:

Ploha na kojoj je potencijalna energija stalna naziva se ekvipotencijalnom plohom. U slučaju homogenog gravitacijskog polja potencijalna energija je stalna ako je koordinata z stalna. (vidi (5.34)). Znači da su u ovom slučaju ekvipotencijalne ravnine horizontalne plohe. Primjeri takvih ekvipotencijalnih ploha su površine jezera i mora. Primjena ekvipotencijalnih vremena poznata je još bar od staroegipatskih graditelja koji su spojene cijevi ispunjene vodom koristili za nivelaciju točaka! Inspekcijom izraza (5.37) i (5.43) vidimo da u tom slučaju potencijalana energija zavisi samo o radijusu položaja tijela. Sukladno tome zaključujemo da su ekvipotencijalne plohe u tim slučajevima kugle. Važno svojstvo ekvipotencijalnih ploha slijedi iz (5.4). Naime ako se mičemo po ekvipotencijalnoj plohi, po definiciji je dP=0 , a prema (5.4) i element rada sile je također jednak nuli! Dok se gibamo po ekvipotencijalnoj plohi ne vršimo rad protiv sile za koju je ploha definirana!

SILNICE I GRADIJENT POTENCIJALNE ENERGIJE:

Silnicama nazivamo linije koje u svakoj prostornoj točki pokazuju smjer sile. Pokazat ćemo da je smjer sile, koja ima ekvipotencijalne plohe okomit na ekvipotencijalnu plohu! Izaberimo točku na ekvipotencijalnoj plohi. Kroz tu točku povucimo tangencijalnu ravninu. Diferencijal potencijalne energije dok smo u točki dodira tangencijalne ravnine s ekvipotencijalnom plohom iščezava dok je diferencijalni pomak unutar tangentne ravnine. Postavimo koordinatni sustav tako da su u tangentnoj ravnini osi x i y, a os z je na njih okomita. U tako odabranom sustavu je u točki dodira:

$$gradP = \hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.47}$$

no znamo da se P ne mijenja u smjerovima unutar tangencijalne ravnine; stoga parcijalne derivacije po x i y varijabli iščezavaju. Preostaje zaključak da je gradijent potencijalne energije okomit na ekvipotencijalnu plohu! Kako su gradijent potencijalne energije i smjer odgovarajuće sile povezani relacijom (5.33), to je i smjer sile okomit na ekvipotencijalnu plohu! U primjeru homogenog gravitacijskog polja ekvipotencijale su horizontalne a silnice vertikalne. Kod slučajeva kuglastih ekvipotencijala, silnice su radijalne (u smjeru radijusa).

Gradijent potencijala je uvijek usmjeren duž smjera najbržeg porasta potencijalne energije u zadanoj točki. To proizlazi iz (5.27), koju možemo napisati i kao $dP = gradP \cdot d\vec{r}$. Držimo li modul pomaka i gradijent konstanim, a variramo samo kut među njima, očito dP ima najveću vrijednost kada su gradijent i pomak paralelni!

POTENCIJAL:

Potencijal se definira kao omjer potencijalne energije tijela i iznosa one veličine na koju se potencijalna energija odnosi. Tako je gravitacijski potencijal nekog tijela jednak omjeru gravitacijske energije koju probno tijelo ima u gravitacijskom polju i iznosa mase probnog tijela. Električki potencijal je omjer električne potencijalne energije koju u polju tijela ima probni naboj i iznos probnog naboja. U literaturi postoji više simbola za potencijal, stoga ćemo ovdje upotrebljavati jednostavno punu riječ, a indeks će označavati vrstu.

$$Potencijal_g = -\frac{GM}{r} \tag{5.48}$$

G je gravitacijska konstanta, M je masa tijela koje proizvodi gravitacijsku silu, a r je udaljenost od tijela na kojoj se gravitacijski efekt opaža. Jedinica za gravitacijski potencijal je J/kg.

$$Potencijal_{elek} = \frac{kQ}{r} \tag{5.49}$$

Q je naboj koji proizvodi električnu silu, k je konstanta iz Coulombovog zakona, a r je udaljenost na kojoj se promatra električko djelovanje naboja Q. Jedinica za električki potencijal je J/ C. (Joule podijeljen s Coulombom).

SNAGA:

Snaga je veličina koja prati brzinu vršenja rada:

$$Snaga = \frac{dW}{dt} \tag{5.50}$$

Uzimajući u obzir (5.2) i (5.50) imamo:

$$Snaga = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{5.51}$$

Gdje je $\vec{v}$ *brzina kojom se svladava sila* $\vec{F}$. Jedinica za snagu je Watt= J/s .

Z A K O N I S A Č U V A N J A E N E R G I J E I I M P U L S A Z A S U S T A V E T I J E L A :

VELIČINE KOJE OPISUJU TIJELA I SUSTAV:

Sustav od N tijela sadrži tijela koje indeksiramo indeksom „i“ kao njegovom individualnom oznakom. Na i-to tijelo može djelovati vanjska $\vec{F}_{i,v}$ ili pak sila s tijela j . Silu kojom tijelo j djeluje na tijelo i označavamo s $\vec{F}_{j\to i}$. Rezultantna sila na i-to tijelo $\vec{F}_i$ je suma vanjske sile i sila kojim sva druga tijela sustava djeluju na tijelo „i“ :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,v} + \sum_{j=1}^{j=N}{}' \vec{F}_{j\to i} = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \tag{6.1}$$

U (6.1) oznaka sume s crticom: $\sum'$ podsjeća da se suma ne odnosi na član u kojom su dva indeksa identični .

ZAKON SAČUVANJA ENERGIJE ZA SUSTAV TIJELA POD DJELOVANJEM KONZERVATIVNIH SILA:

Relaciju (6.1) množimo s vektorom diferencijala puta i-tog tijela:

$$\vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i + \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i = m_i \vec{v}_i . d\vec{v}_i \tag{6.2}$$

Individualne radove na svim tijelima možemo posumirati po indeksu i:

$$\sum_i{}' \left(\vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i + \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i \right) = d \sum_i \frac{m_i {v_i}^2}{2} \tag{6.3}$$

Radi preglednosti uvodimo slijedeće pokrate:
Diferencijal rada svih vanjskih sila jest:

$$dW_v = \sum \vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i \tag{6.4}$$

$$dP = -\sum_{i,j}{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i = d\left(\sum_{po\ parovima} P_{i,j} \right) \tag{6.5}$$

$$dP_{i,j} = -\vec{F}_{j\to i} (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j) \tag{6.6}$$

dP je diferencijal ukupne potencijalne energije koji se dobiva iz sume potencijalnih energija za međudjelovanje sviju parova tijela $P_{i,j}$, uz pretpostavku da se za svaki par taj diferencijal potencijalne energije formira u potpunoj analogiji s izrazom (5.4) koji opisuje tvorbu diferencijala za danu konzervativnu silu (6.6). S desne strane (6.3) stoji diferencijal ukupne kinetičke energije koja je suma kinetičkih energija sviju tijela. Tako (6.3) možemo čitati i kao:

$$dW_v = dP + dT \tag{6.7}$$

Ukupni rad vanjskih sila troši se na sumu povećanja potencijalne i kinetičke energije sustava. Također je očito , ako vanjskih sila nema (kažemo da je sustav izoliran), tada mu je ukupna energija sačuvana .

ZAKON SAČUVANJA IMPULSA ZA SUSTAV TIJELA:

Možemo ponovno napisati izraz (6.1):

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,v} + \sum_{j=1}^{j=N}{}' \vec{F}_{j\to i} = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Možemo provesti sumaciju po indeksu tijela i :

$$\sum_i \vec{F}_{i,v} + \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i \qquad (6.8)$$

Kako su sile unutar para dva tijela(i,j) i(j.i) jednake i suprotnog smjera prema trećem Newtonovom zakonu, to dvostruka suma u (6.8) iščezava. Nadalje suma svih impulsa tijela sustava se označava kao $\vec{P}$, to možemo zaključiti da je rezultantna vanjska sila (zbroj svih vanjskih sila) jednaka vremenskoj derivaciji ukupnog impuls $\vec{P}$:

$$\vec{F}_v \equiv \sum_i \vec{F}_{i,v} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (6.9)$$

Ako lijeva strana u (6.9) iščezava , tada je vremenska derivacija ukupnog impulsa jednaka nuli, to jest impuls je stalan u vremenu!

$$\vec{F}_v = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = \vec{c} \qquad (6.10)$$

U (6.10) nas vektor $\vec{c}$ asocira na vremenski nepromjenljivi vektor.

VEKTOR POLOŽAJA SREDIŠTA TROMOSTI SUSTAVA TIJELA:

Definiramo vektor položaja točke koju ćemo kasnije nazvati središtem tromosti kad dokažemo njena posebna svojstva:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (6.11)$$

Vratimo se relaciji (6.9):

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} M\vec{R} \qquad (6.12)$$

Gdje je $M = \sum_i m_i$. Do konačnog izraza u (6.12) smo došli proširivši sumu s izrazom M/M i

definicijom (6.11). Iz (6.12) opažamo prvo važno svojstvo koordinate $\vec{R}$: Ona se ponaša kao da rezultanta svih vanjskih sila djeluje u njoj, kao da je u njoj masa cijelog sustava i nastaje njena akceleracija po drugom Newtonovom zakonu! Možemo zaključiti da je navedenim opravdan naziv središta tromosti za sustav tijela. Može se pokazati dodatna relacija, koja potvrđuje gornji naziv:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = M\frac{d}{dt}\vec{R} \qquad (6.13)$$

Impuls sustava se može napisati kao produkt ukupne mase sustava i brzine središta tromosti sustava.

Često se daju ilustracije ponašanja položaja središta mase koja slijede iz (6.12) .
Primjer gibanja sustava tijela u homogenom gravitacijskom polju:

$$\vec{F}_v = \sum_i \vec{F}_{i,v} = \sum m_i \vec{g} = M\vec{g} = M\ddot{\vec{R}} \qquad (6.14)$$

Slijedi:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g} \qquad (6.15)$$

Središte tromosti sustava pada jednoliko akceleracijom g. Ovo je netrivijalna izjava jer među dijelovima sustava djeluju i međusobne sile, no to ne mijenja ponašanje i putanju središta tromosti. Jedan je primjer projektil izbačen koso uvis, koji tijekom letenja eksplodira. Od prije znamo da bi putanja cijelog projektila (dok je trenje sa zrakom zanemarivo) bila parabola. Koristimo (6.12), vanjska sila je gravitacijska, a mi smo upravo pokazali u (6.14) da je akceleracija g, usmjerena prema dolje. Ako je tijelo imalo početnu brzinu koso u odnosu na horizontalu, putanja je parabolična. Dakle središte tromosti putuje kao i za cijeli projektil. Eksplozija se manifestira unutrašnjim silama koje prema (6.12) nemaju utjecaja na gibanje centra tromosti.

SUDARI:

Sudari tijela su zanimljiv i instruktivan primjer primjene zakona sačuvanja energije, impulsa i koncepta središta tromosti. Načinit ćemo najprije razmatranja sudara dva tijela u jednoj dimenziji (bez trenja) jer je slučaj blizak intuiciji. Međutim , veličine koje ćemo sresti i rezultati koje ćemo dobiti praktički će se moći generalizirati na sudare u prostoru mnemotehnički jednostavnim receptom. Umjesto skalarnih veličina trebat ćemo za koordinate i brzine pisati vektore!

SUDAR DVA TIJELA U JEDNOJ DIMENZIJI:

Tijela označavamo indeksima 1 i 2 , mase tijela s m ,brzine s v prije sudara a v' poslije sudara. Razmatramo sudar izvan utjecaja drugih sila. (Na primjer na zračnoj klupi gravitacijska je sila uravnotežena sa strujanjem zraka iz rupica na klupi; time je rezultantna sila jednaka nuli). Jednodimenzijski koordinatni sustav je takav da su koordinate desno od ishodišta pozitivne a lijevo negativne. U odsustvu vanjskih sila ukupni impuls P je sačuvan (6.10), tako možemo pisati:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = (m_1 + m_2)V = MV \qquad (6.16)$$

M je ukupna masa a V je brzina središta tromosti.
Odbijanjem druge relacije s desne strane od druge i treće relacija s lijeve strane imamo:

$$m_1(v_1 - V) + m_2(v_2 - V) = 0 = m_1(v'_1 - V) + m_2(v'_2 - V) \qquad (6.17)$$

Uočimo da su u gornjim izrazima razlike brzina zapravo relativna brzina u odnosu na središte mase. Nadalje u anglosaksonskoj literaturi središte se mase zove Center of mass s kraticom CM, to ćemo relativne brzine u (6.17) bilježiti v s indeksom tijela na koji se odnose i oznakom CM. Time (6.17) pišemo u novoj notaciji:

$$m_1 v_{1,CM} + m_2 v_{2,CM} = 0 = m_1 v'_{1,CM} + m_2 v'_{2,CM} \qquad (6.18)$$

Od velike su koristi i relativne brzine među tijelima dobivene jednostavnim odbijanjem brzina u početnom sustavu:

$$v_r = v_2 - v_1 = v_{2,CM} - v_{1,CM} \qquad v'_r = v'_2 - v'_1 = v'_{2,CM} - v'_{1,CM}\ ) \qquad (6.19)$$

Lijeve strane relacija (6.18) i (6.19) možemo vidjeti kao sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice za brzine u središtu tromosti (one s indeksom CM) i izraziti ih preko relativne brzine:

$$v_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \qquad v_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r \qquad (6.20)$$

Korištenjem desnih strana relacija (6.18) i (6.19) analognom procedurom imamo :

$$v'_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v'_r \qquad v'_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v'_r \qquad (6.21)$$

Sada smo u srži problema. Tijekom studija mnogih procesa sudara, čak i u najmodernijem sudarivaču LHC u CERN-u, fizikalno promatranje je najtransparentnije u CM sustavu, jer u njemu nema dodatnih translacija sustava koje maskiraju bit. Fizikalno pitanje jest kako iz veličina (6.20) koje su određene početnim brzinama i masama odrediti (6.21) to jest rezultate sudara. Kada se ovo pitanje riješi, transformacijama koje su obrat slijedu (6.16) do (6.20) dobivamo rezultate u početnom sustavu! Da bismo na to pitanje odgovorili potrebno nam je znati da li se tijekom sudara iz unutrašnjih svojstava tijela koja se sudaraju u sustav dodala ili oduzela energija. Jedan primjer jest: u trenutku kontakta nastaje eksplozija, koja povećava kinetičku energiju sustava ili obrnuto: dio energije pretvori se u zagrijavanje tijela i smanji kinetičku energiju sustava. Prvi slučaj zovemo egzotermnim procesom , a drugi endotermnim procesom. Najjednostavnija je klasa sudara u kojima nema promjene kinetičke energije; ta se klasa naziva elastičnim sudarima. Ubrzo ćemo pokazati da je u jednodimenzionalnom elastičnom sudaru konačna relativna brzina po apsolutnom iznosu jednaka početnoj relativnoj brzini. Dakle imamo dvije mogućnosti:

$$v'_r = v_r \qquad \text{ili} \qquad v'_r = -v_r \qquad (6.22)$$

U prvom slučaju prema (6.21) imamo da su brzine u CM nakon sudara iste kao (6.20) to jest prije sudara. Ovo je slučaj u kojem kao da sudar nije ni nastupio. U drugom slučaju nakon sudara vrijedi:

$$v'_{1,CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \qquad v'_{2,CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r \qquad (6.23)$$

Iz (6.23) lako dobivamo brzine tijela u početnom sustavu znajući da se one dobiju zbrajanjem brzine centra tromosti V i brzine u centru tromosti koje smo upravo izračunali. (vidi komentar o brzinama u sustavu središta tromosti u tekstu ispod (6.17). Dakle vrijedi:

$$v'_1 = V + v'_{1,CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad (6.24)$$

$$v'_2 = V + v'_{2,CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \qquad (6.25)$$

Iako je ovo elementarno razmatranje, izraz (6.24) je fundamentalno važan za konstrukciju nuklearnih reaktora poput onog u Krškom. Bez ulaska u detalje rada reaktora spominjemo da se pri nuklearnoj fisiji oslobađa nama potrebna energija raspadom uranove jezgre ali se oslobađaju i neutroni potrebni za nastavak lančane reakcije to jest spontanog nastavka fisijskog procesa na preostalim jezgrama urana. No ti neutroni su prebrzi za efikasan nastavak procesa i treba ih usporiti (termalizacija neutrona). Usporavanje neutrona može se činiti samo sudarima s drugim jezgrama. Tu se doslovno primjenjuje relacija (6.24). Dodajmo da neutron uzimamo kao česticu 1 a jezgru usporivača kao česticu 2. Čestica 2 početno miruje $v_2 = 0$.
Iz (6.24) je očito da neutron poslije sudara ima to manju brzinu , što je manja razlika neutrona i jezgre s kojom se sudara. Stoga se kao usporivači (moderatori) upotrebljavaju materijali načinjeni od lakih jezgri. Najefikasnije usporavanje je na jezgrama vodika; brzina neutrona nakon sudara s protonom koji ima gotovo jednaku masu kao i neutron u slučaju centralnog sudara (slučaj jednodimenzionalnog sudara) je i prema (6.24) jednaka nuli!

Vratimo se sada pitanju iznosa relativne brzine poslije sudara na kojem smo nakon relacije (6.21) razmatrali samo slučaj elastičnih sudara.

Kinetička energija u laboratorijskom sustavu i sustavu CM:
Laboratorijski sustav je onaj u kojem smo započeli originalna razmatranja. Nuklearni fizičari običavaju zvati laboratorijskim sustavom onaj u kojem projektil pogađa mirnu metu, no to nije nužno tako. U laboratorijskom sustavu , generalno, obadva tijela mogu imati brzine. Izraz za kinetičku energija dva tijela lako pišemo pomoću njihovih laboratorijskih brzina, a u drugom koraku te brzine možemo izraziti kao zbroj brzine središta tromosti : V i brzine u sustavu centra tromosti:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2}m_1(v_{1,CM} + V)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{2,CM} + V)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + V(m_1 v_{1,CM} + m_2 v_{2,CM}) + \frac{1}{2}m_1 {v_{1,CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_{2,CM}}^2 = \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}{v_r}^2 \end{aligned} \qquad (6.26)$$

Pri sređivanju (6.26) osim opisa koraka za prvi red iznad same formule, u srednjem redu smo iskoristili svojstvo da u CM impuls sustava iščezava (relacija (6.18). Transformaciju dva posljednja člana srednjeg reda u posljednji član trećeg reda student će lako provjeriti preko relacija (6.20) koje povezuju brzine u CM s relativnom brzinom. Prvi član trećeg reda u (6.26) ima oblik koji zaslužuje naziv kinetička energija središta tromosti (centra mase). Drugi član potječe od dva posljednja člana središnjeg reda i to je jasno kinetička energija dva tijela u sustavu središta tromosti.

Sada možemo obraniti tvrdnju iz (6.22). Kod elastičnih sudara ukupna kinetička energija je sačuvana. Nadalje prema posljednjem u nizu izraza za ukupnu kinetičku energiju T (6.26) prvi se član ne mijenja, jer se ukupna brzina V središta tromosti se ne mijenja. Tako zaključujemo da se iznos relativne brzine v_r također ne mijenja!

Potpuno neelastičan sudar:
U njemu dva tijela po sudaru putuju zajedno, to jest $v_r' = 0$. Time je ukupna kinetička energija po sudaru:

$$T' = \frac{1}{2}MV^2 \qquad (6.27)$$

OPĆI SUDAR DVA TIJELA U PROSTORU:

Sada ćemo poopćiti formalizam iz gornjeg odsječka kroz dva aspekta. Najprije, gibanje više ne će biti ograničeno na jednu dimenziju; produkti sudara moći će se gibati po prostoru. Zatim ćemo dozvoliti da tijela promjene iznose svojih masa. Ovo ćemo međutim načiniti na način da je ukupna masa sačuvana, to jest mase dviju čestica zbrojene prije i poslije sudara su iste. Mase prije imat će indekse 1 i 2 , a poslije 3 i 4. Ovo činimo kako bismo zapravo gotovo korektno razriješili problem kinematike niskoenergijskih nuklearnih reakcija s dva tijela u konačnom stanju! Riječi niskoenergijske reakcije zapravo kažu da su brzine projektila tijekom procesa bitno niže od brzine svjetlosti. Uvjet sačuvanja mase:

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = M \tag{6.28}$$

u nuklearnim reakcijama je ispunjen do reda veličine 1 promila, a koristan nam je u proračunu relativne brzine poslije sudara. Procedura koja slijedi je identična onoj iz gornjeg odsječka; jedina je razlika pojava vektorskih oznaka u izrazima za brzine! Počinjemo sa sačuvanjem impulsa u punoj analogiji s (6.16):

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = (m_1 + m_2)\vec{V} = M\vec{V} \tag{6.29}$$

Uvodimo brojčani pokazatelj promjene kinetičke energije u sustavu, Q vrijednost reakcije u nuklearnoj fizici ili općenito Q vrijednost procesa povezan s kinetičkom energijom prije sudara T i kinetičkom energijom poslije sudara T' relacijom:
$Q = T' - T$. Pretpostavlja se da znamo početne uvjete (mase, brzine, Q vrijednost i konačne mase) ostaje otvoren problem predviđanja brzina nakon sudara. Dva vektora konačnih brzina predstavljaju šest nepoznanica. Postoje zakoni sačuvanja energije i impulsa. Oni predstavljaju četiri uvjeta koji se na izbor mogućih konačnih stanja postavljaju. Ako meta miruje, postoji simetrija oko upadne osi projektila. Time se postavlja još jedan uvjet na varijable konačnog stanja. Vidimo da je preostala samo jedna nepoznanica i nju se često izabire kao kut jedne od izlaznih čestica. Nakon izbora kuta, sve druge veličine su određene zakonima sačuvanja!

Pisanjem vektorskog analogona relacije (6.17) imamo:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{V}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{V}) = 0 = m_3(\vec{v}_3 - \vec{V}) + m_4(\vec{v}_4 - \vec{V}) \tag{6.30}$$

Gornji izrazi u okruglim zagradama su zapravo brzine projektila u sustavu središta tromosti (CM):

$$\vec{v}_{1,CM} = \vec{v}_1 - \vec{V} \quad \vec{v}_{2,CM} = \vec{v}_2 - \vec{V} \quad \vec{v}_{3,CM} = \vec{v}_3 - \vec{V} \quad \vec{v}_{4,CM} = \vec{v}_4 - \vec{V} \tag{6.31}$$

Uvodimo nadalje relativne brzine prije sudara $\vec{v}_r$ i poslije sudara $\vec{v}'_r$:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{2,CM} - \vec{v}_{1,CM} \tag{6.32}$$

i

$$\vec{v}'_r = \vec{v}_4 - \vec{v}_3 = \vec{v}_{4,CM} - \vec{v}_{3,CM} \tag{6.33}$$

Oponašanjem koraka kombiniranja (6.18) i (6.19) u (6.20) dobivamo iz (6.30) i (6.32) :

$$\vec{v}_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \qquad \vec{v}_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \tag{6.34}$$

A kombiniranjem (6.30) i (6.33) :

$$\vec{v}_{3,CM} = \frac{m_4}{m_3 + m_4}\vec{v}'_r \qquad \vec{v}_{4,CM} = -\frac{m_3}{m_3 + m_4}\vec{v}'_r \tag{6.35}$$

Sad je posve jasno da se rješavanje problema svelo samo na određivanje $\vec{v}'_r$. Naime kad njih znamo, (6.35) daje konačne brzine u CM, a relacije (6.31) nas vraćaju do vrijednosti brzina poslije sudara; brzinu sustava centra mase lako računamo iz ukupnog impulsa i ukupne mase. Vratimo se sada relaciji (6.26):

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_r^{\,2} \tag{6.36}$$

Njen izvod možemo ponoviti istim argumentima kakvim se izvelo (6.26).
Isto vrijedi i analogna relacija nakon sudara:

$$T' = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}v'^{\,2}_r \tag{6.37}$$

Kako su kinetičke energije povezane s Q vrijednošću procesa, vrijedi:

$$T' = T + Q \tag{6.38}$$

Što zajedno s (6.36) i (6.37) omogućuje izračun relativne brzine nakon sudara:

$$\frac{1}{2}\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}v'^{\,2}_r = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_r^{\,2} + Q \tag{6.39}$$

Potpuno određenje vektora $\vec{v}'_r$ načinimo koristeći njegov iznos iz (6.39) i proizvoljnim odabirom kuta u CM. Tada već opisanom procedurom slijede sve ostale CM i laboratorijske brzine! Tako student ima u rukama formalizam za proračun kinematike nuklearne reakcije s dva tijela u konačnom stanju , to jest vezu između kuta pod kojim projektil izlazi u sustavu CM i njegove brzine/ kinetičke energije u ostalim sustavima.

Veza među kutovima emisije tijela poslije sudara za laboratorijski i CM sustav:
Za laboratorijski sustav se obično odabire onaj u kojem tijelo-projektil ima brzinu, dok tijelo s kojim se sudara (meta) miruje. Tada imamo jednoznačno određen vektor brzine CM sustava:

$$\vec{V} = \frac{(m\vec{v})_{projektil}}{m_{projektil} + m_{mete}} \tag{6.40}$$

Kako se brzine vektorski zbrajaju, to među brzinama tijela u sustavu CM $\vec{v}_{CM}$ i laboratorijskom sustavu $\vec{v}_{lab}$ postoji jednostavna veza:

$$\vec{v}_{lab} = \vec{V} + \vec{v}_{CM} \tag{6.41}$$

Kut emisije u laboratorijskom sustavu ϑ_{lab} je kut između vektora $\vec{V}$ i $\vec{v}_{lab}$, a kut u sustavu središta tromosti ϑ_{CM} je kut između vektora $\vec{V}$ i $\vec{v}_{CM}$. Ako je jedan od kutova zadan i ako su poznati iznosi dva vektora, trigonometrija nam daje drugi kut!
Razlikujemo tri mogućnosti:

$$v_{CM} < V \tag{6.42}$$

Crtanjem kružnice s radijusom v_{CM} koja ne dostiže dužinu V zaključujemo da postoje dva kuta ϑ_{CM} koji daju isti ϑ_{lab}. Također ϑ_{lab} u tom slučaju ne može prijeći maksimalnu vrijednost određenu omjerom v_{CM}/V .

$$v_{CM} = V \tag{6.43}$$

U tom slučaju je maksimalna vrijednost $\vartheta_{lab} = 90^0$. Treća je mogućnost:

$$v_{CM} > V \tag{6.44}$$

U tom slučaju je korespondencija laboratorijskog kuta i kuta u sustavu središta tromosti jednoznačna!

ZAKLJUČNO O SUDARIMA

Sudari su jedino sredstvo za istraživanje interakcija u nevidljivom mikrosvijetu. To se ilustrira studentima jednostavnim simulacijama: roj kugli se lansira prema koso postavljenoj ploči u odnosu na njihovu trajektoriju. Sve kugle koje se sudaraju s pločom reflektiraju se od nje pod istim kutom i s istom brzinom/energijom. Detektori sa strane bi to registrirali. Kada smo ravnu ploču zamijenili kružnim profilom, kugle su se raspršile na sve strane. Da ne možemo očima pratiti tijek sudara, mogli bismo iz kutova refleksije i brzina kugli rekonstruirati oblik i svojstva ploče (na primjer gubitak kinetičke energije ako kugle sudarom gube energiju i griju ploču). Na istom principu i danas na najsnažnijim ubrzivačima svijeta vrše se istraživanja o konstituentima svijeta i njihovim međudjelovanjima kroz sudare. Tako je na primjer ključni dokaz otkrića W bozona bio i manjak impulsa rezultata sudara s jedne strane snopa, jer je na to stranu W bozon emitirao neutrino, nama teško detektabilnu česticu, pa zakon impulsa prividno nije vrijedio. Uključenjem impulsa nedetektiranog neutrina, kinematika procesa stvaranja W bozona je bila zadovoljena; to je bio dokaz postojanja W bozona. I sam neutrino je bio otkriven istim receptom. U takozvanim beta raspadima nije bila zadovoljena kinematika procesa, jer je impuls iz procesa iznosio već spomenuti neutrino. Kada je Nobelovac Pauli uključio pretpostavku o egzistenciji neutrina, zakoni sačuvanja energije i impulsa su opet vrijedili, a ujedno je otkrivena nova čestica: neutrino. Neutrino je naknadno i eksperimentalno direktnije detektiran, ali prvi znak njegove egzistencije je bilo inzistiranje na zakonima sačuvanja energije i impulsa, koji su temelj razmatranja u sudarima , kako smo gore pratili.

RAKETNI POGON

Postoji važni primjer primjene zakona sačuvanja ukupnog impulsa sustava u kojem njegove komponente nemaju stalne mase. Svemirski brod, izvan djelovanja drugih sila, zajedno sa svojim ispušnim plinovima predstavlja izolirani sustav, čiji ukupni impuls je sačuvan, a njegova derivacija po vremenu je jednaka nuli. U jednodimenzionalnoj geometriji gibanja uvodimo slijedeće oznake: vremenski promjenljiva masa rakete: m. Trenutna brzina rakete: v.

Brzina izbacivanja plinova mjereno relativno s obzirom na raketu: V_0. Kako je derivacija ukupnog impulsa jednaka nuli , možemo napisati:

$$0 = m\dot{v} + v\dot{m} + (v - V_0)(-\dot{m}) = m\dot{v} + V_0\dot{m} \tag{6.45}$$

Ako pretpostavimo da masa raketa opada linearno u vremenu,

$$m = m_0 - \alpha t \tag{6.46}$$

Iz toga slijedi deriviranjem:

$$\dot{m} = -\alpha \tag{6.47}$$

(6.47) uvrštenjem u (6.45) daje diferencijalnu jednadžbu za brzinu rakete:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha V_0}{m} = \frac{\alpha V_0}{m_0 - \alpha t} \tag{6.48}$$

Integriranjem (6.48) dobivamo izraz za brzinu rakete:

$$v = v(t=0) + V_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \tag{6.49}$$

Ovakva jednadžba bila je orijentir za pripremu raketa u transportne svrhe. Jasno, u uvjetima na Zemlji ili u gravitacijskom polju, treba dodati i vanjske sile, što komplicira rješavanje, No ulogu brzine izbacivanja, mase i ispuštanja mase imamo ovdje sve jasno reprezentirane i spremne za optimiranje konstrukcije. Problem je jasan: kako postići što veću brzinu rakete!

IMPULSNI MOMENT I MOMENT SILE:

U gibanju sustava čestica , a naročito pri gibanju tijela , veliku pomoć nam pruža veličina koju književno zovemo impulsni moment. U prošlosti hrvatske fizike upotrebljavao se termin kutna količina gibanja, a engleska literatura koristi i kod nas neknjiževno upotrebljavan angular momentum.

Korisnost ove veličine vidjet ćemo iz vrlo jednostavnog razmatranja povezanog s drugim Newtonovim zakonom. Pomnožimo taj zakon s lijeva vektorski s radiusvektorom:

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) \qquad (7.1)$$

Naime pri vremenskom deriviranju veličine $\vec{r}\times\vec{p}$ član $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}$ iščezava. Radi relacije (7.1) je jasno da je veličina $\vec{r}\times\vec{p}$ konstanta u vremenu ukoliko nema vanjske sile ili ukoliko je

djelovanje vanjske sile kolinearno s radiusvektorom (slučaj centralnih sila kao na primjer gravitacija ili električna sila). Tako se uvodi po definiciji veličina:

$$\vec{L}\equiv\vec{r}\times\vec{p} \qquad (7.2)$$

impulsnog momenta. I inače, ako imamo neku veličinu i vektorski je množimo s radiusvektorom dobivamo njen moment. Tako i veličina s desne strane relacije (7.1) je moment sile: $\vec{M}$. Znajući ove definicije (7.1) se piše uobičajeno:

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (7.3)$$

Kao što smo već spomenuli moment impulsa je vrlo upotrebljiv kod centralnih sila na jedno tijelo, ali ima veliku ulogu i pri sustavima mnogo tijela odnosno pri promatranju gibanja krutih objekata.

SAČUVANJE IMPULSNOG MOMENTA SUSTAVA ČESTICA

Gore smo pokazali da za i-to tijelo vrijedi:

$$\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\frac{d}{dt}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i) \qquad (7.4)$$

Na i-to tijelo može djelovati vanjska sila ili sila s nekog od tijela unutar sustava od N tijela:

$$\vec{F}_i=\vec{F}_{i,v}+\sum_{j=1}^{N}{}'\vec{F}_{j\to i} \qquad (7.5)$$

Tada je suma momenata sviju sila na tijela u sustavu:

$$\vec{M}=\sum_i\vec{r}_i\times\left[\vec{F}_{i,v}+\sum_j{}'\vec{F}_{j\to i}\right]=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_{i,v}+\sum_i\sum_j{}'\vec{r}_i\times\vec{F}_{j\to i}=\frac{d}{dt}\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i\equiv\frac{d}{dt}\vec{L} \qquad (7.6)$$

Prvi član na desnoj strani izraza (7.6) je moment vanjskih sila. Drugi član je moment na sustav od unutrašnjih djelovanja. Zbroj momenata sila unutar jednog para se preko trećeg Newtonovog zakona svodi na izraz:

$$\vec{M}_{unutar\ \ para}=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{j\to i} \qquad (7.7)$$

Za centralne sile razlika vektora u zagradi i sila su kolinearni pa je rezultat jednak nuli. Tako od svih momenata sila u ukupnom momentu sviju sila na sastav preostaje samo suma momenata vanjskih sila:

$$\vec{M}_v = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,v} \qquad (7.8)$$

Tako je prema (7.6) vremenska promjena ukupnog momenta impulsa $\vec{L}$ prouzročena isključivo momentom vanjskih sila:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_v \qquad (7.9)$$

Znači da odsustvo momenta vanjskih sila povlači sačuvanje momenta impulsa sustava:

$$\vec{M}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = konst.\ vektor \qquad (7.10)$$

POKUS: Spiralna cijev počinje rotirati ako u njenoj unutrašnjosti pregorimo nit, koja je sprečavala njihov izlazak iz cijevi.

TEŽIŠTE TIJELA:

Težište tijela je koncept blizak središtu tromosti tijela. Moramo međutim biti svjesni o nekim suptilnim aspektima koji postoje oko njegove definicije. U slučaju da se tijelo nalazi u homogenom gravitacijskom polju položaji težišta tijela i središta njegove tromosti koincidiraju. Moment gravitacijske sile je ilustrativno mjesto na kojem možemo načiniti usporedbu. Razdijelimo tijelo u segmente indeksirane općim indeksom i . Tako segment ima masu m_i , gravitacijsko polje na toj lokaciji daje segmentu akceleraciju $\vec{g}_i$, a položajni vektor segmenta je $\vec{r}_i$. Nadalje neka je suma masa svih segmenata M:

$$M = \sum_i m_i \qquad (7.11)$$

Tada je ukupni moment gravitacijskog djelovanja:

$$\vec{N} = \sum \vec{r}_i m_i \times \vec{g}_i \qquad (7.12)$$

U slučaju da je vrijednost gravitacijskog ubrzanja stalna po svim segmentima:

$$\vec{g}_i = \vec{g} \qquad (7.14)$$

možemo (7.12) pojednostaviti:

$$\vec{N} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{g} = M\vec{R}_T \times \vec{g} \qquad (7.15)$$

$\vec{R}_T$ je upravo definiran prvim u zadnjim izrazom u (7.15). Jasno je iz relacije (7.15) da gravitacija djeluje na kompozitno tijelo , u slučaju homogenog polja, kao da djeluje na ukupnu masu kroz središte tromosti (CM). U tom slučaju konstatiramo da je položaj središta tromosti identičan s težištem , shvaćenim kao hvatištem gravitacijskog djelovanja. Usporedbom (7.12) i (7.15) uviđamo da koncept težišta postoji za homogeno gravitacijsko polje. Nastojanje da ga se definira izvan tog konteksta nailazi na poteškoće. Naime, dok je faktor ukupne mase lako izdvojiti, postoji poteškoća sa usrednjavanjem gravitacijskog dijela radi njegove vektorske prirode.

D I N A M I K A   G I B A N J A   K R U T O G   T I J E L A :

KRUTO TIJELO:

Krutim tijelom nazivamo idealizaciju u kojoj su razmaci među bilo kojim dijelovima (točkama) tijela stalni. Čvrsta tijela , u kojima promjene razmaka među dijelovima tako sićušne da ih u proračunima možemo zanemariti, su dobra aproksimacija krutog tijela. Opći problem gibanja krutog tijela je dosta zamršen i jedan je od težih problema klasične mehanike. Mnogo je jednostavniji problem gibanja tijela kojem se ne mijenja os rotacije; taj ćemo dio najviše razmatrati.

OPĆA RAZMATRANJA:

U šestom poglavlju smo obrađivali koncept središta tromosti i njegovu vezu s ukupnom masom sustava sastavljenog od komponenti indeksiranih s i. Ponavljamo izraze (6.11)-(6.13) koji se tiču djelovanja rezultantne vanjske sile F_v na složeni sustav.

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{7.16}$$

$$M = \sum_i m_i \tag{7.17}$$

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} M\vec{R} \tag{7.18}$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = M\frac{d}{dt}\vec{R} \tag{7.19}$$

Kombinacijom (7.18) i (7.19) imamo i :

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\vec{P} \tag{7.20}$$

Za moment vanjske sile imamo vezu s momentom impulsa (7.9) :

$$\vec{M}_v = \frac{d}{dt}\vec{L} \tag{7.21}$$

No ukupni moment impulsa možemo ovako razložiti:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{p}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i \tag{7.22}$$

Prvi član desne strane je očito moment impulsa oko središta tromosti $\vec{L}_{CM}$ a drugi je moment impulsa središta tromosti oko ishodišta. Dakle zaključujemo iz (7.18) da središte tromosti slijedi trajektoriju određenu rezultantnom vanjskom silom. Ponašanje impulsnog momenta sustava je određeno momentom vanjske sile.

SLUČAJ TIJELA S JEDNOM NEPOMIČNOM TOČKOM:

Tu točku izabiremo za ishodište. Koordinate pojedine točke, njena masa i brzina su redom: $\vec{r}_i, m_i, \vec{v}_i$. Tada je moment impulsa sustava određen:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \tag{7.23}$$

$$= \vec{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \tag{7.24}$$

Kod tijela koja su oko nepomične točke sferno simetrična, $\vec{L}\, i\, \vec{\omega}$ su kolinearni. Isto vrijedi za slučaj da tijelo rotira oko osi svoje osne simetrije no općenito relacija (7.24) pokazuje da $\vec{L}\ i\, \vec{\omega}$ imaju vrlo kompleksnu međuzavisnost. Na ovom mjestu raspored masa koji određuje tenzor tromosti ulazi direktno u jednadžbe. Tenzore drugog reda srest će studenti tijekom druge godine studija. Daljnja razrada problema gibanja krutog tijela vodi na Eulerove diferencijalne jednadžbe; mi ćemo razmatrati samo jednostavnije slučajeve, posebno one u kojima os rotacije ne mijenja smjer. Tada je važna projekcija momenta impulsa na os rotacije:

$$\vec{L} \cdot \hat{\omega} \equiv L_\omega = \hat{\omega} \cdot \left[\ \vec{\omega} \sum_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\ \right] \tag{7.25}$$

Uočimo kut između osi rotacije $\vec{\omega}\ i\ \vec{r}_i$ radijvektora pojedine točke: $\angle \vec{\omega}, \vec{r}_i$,

$$L_\omega = \omega \sum_i m_i r_i^2 \left[\ 1 - \cos^2(\angle \vec{\omega}, \vec{r}_i)\ \right] \tag{7.26}$$

tada produkt :

$$r_i \sin(\angle \vec{\omega}, \vec{r}_i) = \rho_i \tag{7.27}$$

predstavlja udaljenost točke i od osi rotacije $\vec{\omega}$ i vrijedi:

$$L_\omega = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 \equiv \omega I_\omega \tag{7.28}$$

Ova relacija kojom smo ujedno definirali moment inercije oko osi $\vec{\omega}$, I_ω pruža nam priliku za razvoj intuicije kod rotacije krutog tijela. Ta će se intuicija proširivati na druge aspekte rotiranja. U posebnim uvjetima (na primjer vanjske sile ne daju moment sile, a tijelo rotira oko svoje osi simetrije) , L_ω je stalan. Tada mijenjanjem momenta inercije (širenjem ruku plesačice na ledu) dobivamo brže rotiranje tijela pri izvođenju piruete. U mnogim će aspektima rotiranja kutna brzina biti analogon translacijske brzine, a moment inercije analogon mase.

POKUS:
Na Prandtlovom stolcu demonstrirat će se na više načina sačuvanje momenta impulsa: to su promjene momenta inercije i promjena momenta impulsa dijela izoliranog sustava izazvana unutrašnjim silama sistema. Pri širenju ruku osobe koja rotira, usporava se rotacija. Ako osoba na Prandtlovu stolcu prisiljava kotač bicikla na rotaciju, sama počinje rotirati suprotnim smjerom. Također će se pokazati posljedice preokretanja osi rotacije kotača bicikla na stanje gibanja osobe na Prandtlovom stolcu.

KOMPONENTE KINETIČKE ENERGIJE SUSTAVA ČESTICA:

Uobičajeni izraz za kinetičku energiju sustava čestica transformirat ćemo rastavljanjem brzine pojedine sastavnice sustava u translacijski i rotacijski dio. Označit ćemo s $\vec{V}$ brzinu središta mase sustava, a s $\vec{v}_i\,'$ brzinu kojom i-ta čestica rotira zajedničkom kutnom brzinom $\vec{\omega}$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}_i\,')^2 \tag{7.29}$$

Izražavajući nadalje brzinu $\vec{v}_i\,'$ koja potječe od rotacije preko kutne brzine $\vec{\omega}$ i vektora položaja i-te čestice u sustavu središta tromosti $\vec{r}_i\,'$, slijedi:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\,')^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i\,')^2 + \vec{V}\cdot\sum_i \;(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\,') \tag{7.30}$$

U izrazu (7.30) prvi član na desnoj strani sumira mase sustava uz zajednički faktor i predstavlja kinetičku energiju translacije sustava.

$$T_{translacije} = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \qquad \text{gdje je } M \text{ ukupna masa sustava} \tag{7.31}$$

U istom izrazu na desnoj strani drugi član predstavlja kinetičku energiju rotacije zajedničkom kutnom brzinom $\vec{\omega}$:

$$T_{rotacije} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i\,')^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 \rho_i^{\,2} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \rho_i^{\,2} = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2 \tag{7.32}$$

Pri manipulacijama unutar (7.32) koristili smo udaljenost ρ_i i-tog elementa od osi rotacije kako je to formulirano u (7.27) i definiciju momenta inercije I_ω u izrazu (7.28).

Usporedbom (7.28) s izrazom za linearno gibanje objekta ili sustava vidimo da kutna brzina ima ulogu analognu translacijskoj brzini, a moment inercije ima ulogu analognu masi. Ista opažanja možemo načiniti i usporedbom (7.32) s (7.31). Desni, posljednji član u (7.30) iščezazava jer sumacija radij vektora položaja u sustavu središta tromosti daje nulu ($\sum_i \vec{r}_i\,' = 0$). Tako iz (7.30) konačno zaključujemo:

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_\omega \omega^2 = T_{translacije} + T_{rotacije} \tag{7.33}$$

Ukupna kinetička energija krutog tijela može se separirati u translaciju i rotaciju; često govorimo da imamo različite stupnjeve slobode: translacijske i rotacijske.

STEINEROV POUČAK O MOMENTIMA INERCIJE OKO PARALELNIH OSI

Steinerov poučak je od velike pomoći za proračun momenta inercije, ako znamo vrijednost momenta inercije oko osi koja prolazi središtem tromosti, a mi računamo moment tromosti za paralelnu os koja je za ρ_{CM} udaljena od osi kroz središte tromosti. (zapravo možemo govoriti o vektoru $\vec{\rho}_{CM}$, jer udaljenost od osi podrazumijeva mjerenje udaljenosti okomito na os!). Kako u izrazima za moment inercije oko zadane osi vrtnje $\vec{\omega}$ ulogu igra samo udaljenost od te osi, možemo u proračunu momenta inercije umjesto o cijelom vektoru položaja $\vec{r}$ voditi računa samo o njegovoj komponenti okomitoj na os $\hat{\omega}$ označenoj kao $\vec{\rho}$. Uvodimo slijedeću dekompoziciju (rastavljanje) vektora udaljenosti od novog položaja osi rotacije $\vec{\rho}_i$ na vektor udaljenosti iste i-te točke od osi rotacije kroz središte tromosti $\vec{\rho}_i'$ i vektor od nove osi do osi kroz središte tromosti: $\vec{\rho}_{CM}$. Tada vrijedi:

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_{CM} + \vec{\rho}_i' \tag{7.34}$$

Moment tromosti oko nove osi I_ω možemo sada izraziti pomoću onoga koje ima sustav za vrtnju oko osi koja paralelno prolazi kroz središte tromosti $I_{\omega,CM}$:

$$I_\omega = \sum_i m_i \rho_i^{\,2} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_{CM} + \vec{\rho}_i')^2 = \sum_i m_i \rho_{CM}^{\,2} + 2\vec{\rho}_{CM} \sum_i m_i \vec{\rho}_i' + \sum_i m_i (\rho_i')^2 \tag{7.35}$$

U srednjem članu desne strane izraza (7.35) faktor sume iščezava jer se radi o koordinati središta tromosti u sustavu središta tromosti. Desni pak član istog izraza predstavlja moment tromosti oko središta tromosti : $I_{\omega,CM}$. Tako se (7.35) može napisati i kao:

$$I_\omega = M\rho_{CM}^{\,2} + I_{\omega,CM} \tag{7.36}$$

Moment inercije oko nove osi jednak je zbroju momenta inercije oko paralelne osi koja ide središtem tromosti i momenta tromosti koji bi imao objekt s ukupnom masom sistema M koncentriran na udaljenosti razmaka dvije osi : ρ_{CM} .

TEOREM ZA TANKI RAVNINSKI LIK I MOMENTE INERCIJE OKO OKOMITIH OSI

Pretpostavimo da je dimenzija ravninskog tijela zanemariva duž z-osi. Tada se pomoću momenta inercije oko x-osi:

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 \tag{7.37}$$

i momenta tromosti oko y-osi:

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2 \tag{7.38}$$

može izraziti moment inercije oko z-osi:

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x \tag{7.39}$$

RAČUNANJE MOMENTATA INERCIJE PRETPOSTAVKOM KONITUIRANE MASE

Do sada smo izraz za moment inercije pisali pomoću sume momenata inercije elemenata s masom m_i i udaljenosti od osi rotacije ρ_i. U slijedećem koraku ćemo uzeti u obzir da tijelo dijelimo u sve sitnije fragmenta (čiji se broj prirodno povećava). Mase tih fragmenata označavamo s Δm_i . Tada možemo prijeći na ideju da je masa kontinuirano raspodijeljena, pa je njezin iznos na udaljenosti $\rho_i : dm$. Tada možemo sa zbrajanja po elementima prijeći na integriranje po kontinuiranoj varijabli:

$$I = \sum_i \rho_i^2 \Delta m_i \quad \rightarrow \quad \int \rho^2 dm \tag{7.40}$$

Ako je gustoća mase varijabilna po tijelu tada se diferencijal mase može napisati preko diferencijala volumena dV i iznosa gustoće mase u tom diferencijalu prostora. Ovaj izraz ne ćemo napisati jer bi mogao studente formalno zbunjivati . Naime za gustoću mase i za udaljenost od osi rotacije se upotrebljava isto slovo ρ. Student može sam, a bit će pokazano i na vježbama izračunati momente inercije nekih simetričnih tijela:

Prsten, obruč ili šuplji valjak polumjera R: $I = MR^2$ (7.41)

Puni valjak $I = \frac{1}{2} MR^2$ (7.42)

Štap oko središta (dužina štapa:L) $I = \frac{1}{12} ML^2$ (7.43)

Pravokutna ploča $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ (7.44)

Kugla $I = \frac{2}{5} MR^2$ (7.55)

Studente može zanimati da se proračuni momenta inercije pojavljuju i u modernim dijelovima istraživanja kao što je na primjer teorijsko predviđanje utjecaja kolektivnog gibanja nukleona u atomskoj jezgri na moment inercije jezgre. Usporedba s eksperimentalnim podacima tada pokazuje koliko je takav model dobar.
Ilustrirat ćemo upotrebu koncepata sedmog poglavlja na nekoliko primjera rotiranja tijela oko njihovih osi simetrije.

VRTNJA VALJKA POLUMJERA R OKO OSI SIMETRIJE MOMENTOM SILE:

Najprije uočimo da se opća veza momenta sile i momenta impulsa (7.21) u slučaju fiksne osi rotacije svodi na jednodimenzionalnu vezu:

$$M_\omega = \frac{dL_\omega}{dt} \tag{7.56}$$

gdje indeks ω označava da se radi o projekciji vektora smjer na $\vec{\omega}$. Primjenom (7.28) u (7.56) nadalje dobivamo:

$$M_\omega = I_\omega \frac{d\omega}{dt} = I_\omega \dot{\omega} \tag{7.57}$$

I u relaciji (7.57) opažamo novu analogiju translacije i rotacije: ovdje moment sile igra ulogu kakvu je kod translacije imala sila, moment inercije ulogu mase, a uloga kutne akceleracije:

$$\dot{\omega} \equiv \alpha \tag{7.58}$$

je analogna linearnoj akceleraciji! Ako silom F djelujemo tangencijalno na plašt valjka radijusa R,

$$RF = \dot{\omega} I_\omega \tag{7.59}$$

Ovaj problem možemo detaljnije razrađivati upotrebom izraza iz tabele za momente inercije raznih vrsta valjaka iz gornje tabele. Nadalje u razmatranje možemo uključiti i obodnu akceleraciju povezanu s kutnom akceleracijom relacijom:

$$a = \alpha R \tag{7.60}$$

VRTNJA VALJKA TIJELOM KOJE PADA POVEZANIM S VALJKOM S NITI

Dijagram sila obješenog tijela daje nam za njegovu akceleraciju (ujedno i obodnu akceleraciju točke na plaštu valjka):

$$ma = mg - T \tag{7.61}$$

Napetost nit T iz gornje relacije je ujedno i sila koja daje moment sile za vrtnu valjka:

$$TR = \dot{\omega} I \tag{7.62}$$

Uvrstimo u (7.62) izraz za napetost niti iz (7.61) i vezu kutne akceleracije s obodnom (7.61):

$$m(g - R\dot{\omega})R = \dot{\omega} I \tag{7.63}$$

Sređivanjem možemo izračunati kutnu akceleraciju:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + mR^2} \tag{7.64}$$

Vezom kutne i obodne akceleracije (7.60) možemo iz (7.64) dobiti i uključenje obodne akceleracije a :

$$a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg \tag{7.65}$$

Ovo je vrlo poučna relacija za brzu procjenu uloge uključenja rotacijskog stupnja slobode u sistem. Sa stanovišta tijela koje pada njegova pogonska sila gravitacije mora tjerati ne samo njegovu masu nego i efektivnu masu I / R^2. U problemima koji kombiniraju translaciju i rotaciju tijela često ćemo uočiti ovaj fenomen!

KOTRLJANJE VALJKA NIZ KOSINU BEZ OTPORA TRENJA

U problem se uključuje činjenica da valjak ne kliže nego se po njoj kotrlja. Problem se može tretirati na više načina, mi izabiremo pomoć zakona sačuvanja energije i u drugoj verziji primjenu momenta težine tijela oko linije dodira valjka i kosine. Kosina je nagnuta za kut α prema horizontali.

(a) Primjena zakona sačuvanja energije
Deriviranjem zakona sačuvanja energije:

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2+Mgz=const. \tag{7.66}$$

imamo :

$$Mv\dot{v}+I_{CM}\omega\dot{\omega}+\mathrm{Mg}\frac{dz}{dt}=0 \tag{7.67}$$

Kako nema klizanja, vrijede slijedeće relacije:

$$v=\omega\cdot r \qquad a=\dot{\omega}r \qquad dz/dt=-v\cdot\sin\alpha \tag{7.68}$$

Njihovim uvrštenjem u (7.67) slijedi :

$$Mva+I_{CM}\frac{v}{r}\frac{a}{r}-Mgv\sin\alpha=0 \tag{7.69}$$

Odakle je akceleraciju lako izračunati:

$$a=\frac{Mg\sin\alpha}{M+I/r^2} \tag{7.70}$$

Već na ovom primjeru verificiramo komentar koji smo o efektivnoj masi s porijeklom od rotacije (I/r^2) načinili uz (7.65).
(b) Moment težine valjka

$$\vec{r}\times(M\vec{g})=\frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.71}$$

Projiciranjem (7.71) na os rotacije (kutne brzine), slijedi:

$$rMg\sin\alpha=I_{linija\ dodira}\cdot\dot{\omega} \tag{7.72}$$

Izražavanjem $\dot{\omega}$ kao u (7.68) i pomoću Steinerovog teorema o momentima inercije oko paralelnih osu imamo:

$$Mgr\sin\alpha=\frac{a}{r}(I_{CM}+Mr^2) \tag{7.73}$$

što je zapravo identično (7.69) i vodi na isti konačni rezultat (7.70).

GIBANJE TANKOG VALJKA POD DJELOVANJEM SILE U RAVNINI VALJKA

a) Sila djeluje na pravcu koji prolazi središtem mase:

$$\vec{F}_v=M\ddot{\vec{R}} \tag{7.74}$$

$$dW_v=\vec{F}d\vec{s}=M\ddot{\vec{R}}\cdot d\vec{R}=d(\frac{1}{2}Mv^2) \tag{7.75}$$

Rad vanjske sile povećava translacijsku kinetičku energiju tijela

b) Tijelo je prisiljeno vrtiti se oko stalne osi:
Korištenjem izraza za moment sile i vezom s momentom impulsa:

$$\vec{r} \times \vec{F}_v = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} I_{CM} \qquad (7.76)$$

A projiciranjem na smjer vrtnje,

$$rF_v = \frac{d\omega}{dt} I_{CM} \qquad (7.77)$$

Množenjem s $d\vartheta = \omega dt$ *i korištenjem* $rd\vartheta = ds$ *u* (7.77) *slijedi*

$$dW_v = F_v ds = d(\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2) \qquad (7.78)$$

Rad vanjske sile povećava rotacijsku kinetičku energiju.

c) Sila djeluje okomito na plašt valjka, ali tijelo nije učvršćeno
Jednadžbe (7.74) i (7.76) obadvije vrijede. Ukupni rad vanjske sile je rad na translacijskom i rotacijskom stupnju slobode:

$$dW_v = d(\frac{1}{2} Mv^2) + d(\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2) \qquad (7.79)$$

Bitno je uočiti da veza v i ω zavisi o geometriji problema , to jest o udaljenosti smjera sile od središta mase.

VALJAK NA PODLOZI KOJA SE GIBA AKCELERIRANO (BEZ KLIZANJA)

Analizom problema imamo dva sigurna zaključka. Ako podloga putuje akcelerirano akceleracijom a' , tijelo koje se po njoj pri tome prisiljava na kotrljanje (jer na njega djeluje tangencijalna sila u smjeru a') također mora putovati akcelerirano akceleracojim a .
Postavlja se pitanje odnosa dvije akceleracije. Izborom središta tromosti za praćenje veze momenta sile i momenta impulsa imamo projicirajući uobičajenu vezu među njima na os vrtnje:

$$RF_t = \dot{\omega} I_{CM} \qquad (7.80)$$

Gdje je R radijus valjka, a F_t tangencijalna sila koja djeluje na kontaktu podloge i valjka.
Znamo da se tijelo akcelerira pod djelovanjem F_t .

$$F_t = Ma \qquad (7.81)$$

S druge strane kutna akceleracija pomnožena s radijusom valjka jest član razlike između akceleracije a' i a :

$$\dot{\omega} = \frac{a' - a}{R} \qquad (7.82)$$

Supstitucijom (7.81) i (7.82) u (7.80) imamo:

$$RMa = \frac{a' - a}{R} I_{CM} \qquad Ma = (a' - a)\frac{I}{R^2} \qquad (7.83)$$

Druga od relacija (7.83) može kao i u svim dosadašnjim primjerima uzeti kao ilustracija uloge efektivne mase u rotacijsko-translacijskim problemima. Iz iste relacije konačno slijedi:

$$a = \frac{a' I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} \qquad (7.84)$$

PRECESIJA ZVRKA

Problem koji razmatramo jest osno simetrični zvrk ; njegov moment inercije oko osi simetrije jest I_{CM} , vektor njegovog trenutnog položaja središta tromosti u odnosu na točku oslonca zvrka je $\vec{r}$, a u njegovom središtu mase ima hvatište težina zvrka: $M\vec{g}$. Time gravitacija proizvodi moment sile s obzirom na točku oslonca zvrka $\vec{r} \times M\vec{g}$, pa imamo izraz za derivaciju momenta impulsa:

$$\vec{r} \times M\vec{g} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.85}$$

Načinimo aproksimaciju koja nije potpuno točna, ali u velikoj mjeri jest:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot I_{CM} \tag{7.86}$$

Uvrštenjem (7.86) u (7.85) dobivamo:

$$\vec{r} \times M\vec{g} = I_{CM} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{7.87}$$

No za vektore stalnog modula, što kutna brzina jest, imamo relaciju:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \tag{7.88}$$

Gdje je $\vec{\Omega}$ kutna brzina rotacije kutne brzine $\vec{\omega}$. Dodajmo da je $\vec{r} = r\vec{\omega}/\omega$. Kada ovo i (7.88) uvrstimo u (7.87), dobivamo:

$$\vec{\Omega} \times \omega = -(\frac{Mr}{I_{CM}\omega})\vec{g} \times \vec{\omega} \tag{7.89}$$

odakle zaključujemo

$$\vec{\Omega} = -\frac{M\vec{g}r}{I_{CM}\omega} \qquad (7.89)$$

Ostavljamo studentu da razmišlja što je uzrok poznatog fenomena precesije Zemljine osi rotacije obzirom da taj zvrk nema uporišta oko kojeg bi precesirao.

PRECESIJA ZEMLJINE OSI ; GODIŠNJA DOBA I KALENDARI

Zemljina os rotacije precesira s periodom od otprilike 26 000 godina. Zemlja se također nalazi na eliptičnoj putanji u čijem je jednom fokusu Sunce. Kako je ekscentricitet Zemljine putanje malen, to godišnja doba ne nastupaju radi varijacije udaljenosti Zemlja-Sunce, nego radi inklinacije Zemljine osi rotacije obzirom na ravninu njene putanje. Vrlo mali broj ljudi zna da je za vrijeme zimskog solisticija Zemlja bliže Suncu nego za vrijeme ljetnog. Ekvinociji su točke kada ekvatorijalna ravnina prelazi preko Sunca. Sada nastupa sukob oko definicije godine. S jedne strane je godinu prirodno smatrati vremenom potrebnim da se ponovi istovjetni položaj Zemlje prema zvjezdama stajačicama. No radi precesije , to bi značilo da se godišnja doba miču na tako definiranoj vremenskoj skali.

Dvije se godine razlikuju: sideralna godina je period za ponavljanje istovjetnog položaja prema zvijezdama stajačicama, a tropikalna za ponavljanje položaja ptolaska Sunca ekvatorijalnom ravninim.

1 sideralna godina - 1 tropikalna godina = 20 minuta 33 sekunde.

Dva kalendara Gregorijanski i Julijanski se razlikuju prema duljini tropikalne godine.

Gregorijanski kalendar uzima za tropikalnu godinu: 365,2425 dana, a Julijanski 365,25 dana. Gregorijanski kalendar nastoji držati proljetni ekvinocij na 21. ožujku. Plenetarno je prihvaćen Gregorijanski kalendar.

Iz ove razlike nastaju razlike u kalendarima zapadne i istočne kršćanske crkve.

S T A T I K A

Dio mehanike, u kojem se razmatra probleme ravnoteže krutih tijela ili sustava krutih tijela zovemo statikom. Temeljne relacije statike već znamo , ali ćemo ih još jednom istaknuti.

Da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila $\vec{F}_i$, koje imaju pozicije hvatišta karakterizirane radijusvektorima $\vec{r}_i$, mora rezultantna sila na tijelo iščezavati

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (8.1)$$

Isto vrijedi za sumu momenata vanjskih sila:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \qquad (8.2)$$

Relacija (8.2) treba vrijediti izaberemo li bilo koju točku za ishodište. U nastavku ćemo pokazati ako vrijedi (8.1) i za jedan izbor ishodišta vrijedi (8.2), tada (8.2) vrijedi za sve izbore ishodišta!

NEOVISNOST UVJETA MOMENTA SILA O IZBORU ISHODIŠTA

Pretpostavimo da je za tijelo ispunjen uvjet (8.1) i da postoji ishodišna točka za koju je ispunjen uvjet (8.2). Odaberimo novu točku kao ishodište sustava i neka je njen radijusvektor $\vec{r}_{novi}$, tada stare radijusvektore $\vec{r}_i$ možemo iskazati preko :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{novi} + \vec{r}_{i,n} \qquad (8.3)$$

gdje je $\vec{r}_{i,n}$ radijusvektor iste točke „i“ računan od novog ishodišta. Uvrštenjem (8.3) u (8.2):

$$0 = \sum_i (\vec{r}_{novi} + \vec{r}_{i,n}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{novi} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_{i,n} \times \vec{F}_i \qquad (8.4)$$

Desni faktor prvog sumanda u (8.4) iščezava prema (8.1), pa preostaje

$$\sum_i \vec{r}_{i,n} \times \vec{F}_i = 0 \qquad (8.5)$$

Zaključak je jednostavan: ako su dva uvjeta (8.1) i (8.2) simultano ispunjena obzirom na neko proizvoljno izabrano ishodište sustava, isti uvjet je ispunjen s obzirom na bilo koji drugi izbor ishodišta. Ovo je od velike praktične koristi, jer izbor ishodišta možemo prilagoditi rješavanom problemu.

STATIKA TIJELA U SLUČAJU DA SVE SILE IMAJU ISTO HVATIŠTE

Kako suma momenta oko hvatišta iščezava, preostali uvjet ravnoteže jest (8.1) to jest tražimo da je i rezultantna sila nula. Rješavanje se svodi na rješavanje geometrijskog slučaja trokuta ili mnogokuta, čije sve stranice vektorski posumirane moraju rezultirati u nulvektoru. U problemima se koriste aproksimacije gibljivih , nerastezljivih niti bez mase i nesavitljivih poluga bez mase uloženih često u zglobove u kojima mogu rotirati bez trenja. U rješavanju problema s trokutom sila koristan je poučak:

$$\cos\angle\vec{F}_1,\vec{F}_2 = \frac{F_3^{\,2} - F_2^{\,2} - F_1^{\,2}}{2F_1F_2} \qquad (8.6)$$

Jednostavan primjer su dvije niti čiji su jedni krajevi učvršćeni, a na drugim krajevima je obješeno tijelo zadane težine. Druga klasa primjera mogu biti poluge koje su na jednim krajevima u zglobovima bez trenja, a drugi krajevi podupiru teško tijelo.

STATIKA KRUTIH TIJELA:

Homogena greda opterećena teretom i poduprta nosačima

Korektan crtež obuhvaća s jedne strane učvršćeni nosač, s druge strane nosač na kotačićima, kako bi se gredi dopustila sloboda u longitudinalnom smjeru. Dok je greda neopterećena, ako je njena vlastita težina $M\vec{g}$, intuitivno je jasno da su sile reakcije na nosačima jednake i iznose $-M\vec{g}/2$. Student može provjeriti da su time obadva uvjeta za ravnotežu ispunjena. Rezultantna sila koja je zbroj težine i reakcija nosača jest nula, a isto vrijedi za zbroj momenta sila. Naime uzmimo sredinu grede, u kojoj je rezultata težine za ishodište. Moment sile teže je nula, a momenti reakcije nosača , jednaki po iznosu imaju suprotne smjerove. Stoga je i

njihov zbroj nula. Kako dolazimo do gornjeg rješenja , pa i onda kada je situacija kompleksnija vidjet ćemo iz konstrukcije u kojoj je greda dodatno opterećena teretom mase m smještenom na udaljenosti x od kraja s učvršćenim nosačem. Ukupna dužina grede je l. Kraj s učvršćenim nosačem indeksiramo s „1“ a drugi s „2“. Ako kraj 2 izaberemo za ishodište, imamo za uvjet iščezavanja momenta sile:

$$lF_1 = -Mgl/2 - (l-x)mg \qquad (8.7)$$

Izborom kraja 1 za ishodište slijedi:

$$lF_2 = -Mgl/2 - xmg \qquad (8.8)$$

Sile reakcije F_1 i F_2 dobivaju se iz (8.7) i (8.8) jednostavnim dijeljenjem s l!

Vaga jednakih krakova

Vaga je obješena za objesište u točki O. Težište vage je ispod objesišta na položaju $\vec{R}_T$. Lijevi kraj vage jednakih krakova se numerira kao 1 a desni kao 2. Na krajevima su tereti masa $M_1\, i\, M_2$ .Vagina poluga ima težinu M_0 Ako tereti nisu jednaki (na pr. masa 1 je veća), vaga će se uravnotežiti s kutom nagnuća prema horizontali α. Iz uvjeta uravnoteženja momenata sviju sila oko objesišta (uz duljinu kraka vage l) imamo:

$$M_1 gl\cos\alpha = M_2 gl\cos\alpha + M_0 gR_T \sin\alpha \qquad (8.9)$$

Uz poznate mase $M_o\, i M_2$ za izmjereni kut α dobivamo masu M_1. U homogenom gravitacijskom polju vage su instrument velike preciznosti za usporedbu (mjerenje) masa.

Teret (čovjek) na ljestvama naslonjenih na zid

Ovo je česta realna situacija. Ljestve su prislonjene uz zid i postavlja se pitanje sigurnog uspinjanja po njima. Postoji pretpostavka, koja u praksi nije tako značajna, ali koja olakšava rješavanje problema. Uzimamo da u kontaktu ljestvi i zida nema trenja, nego da je ono ograničeno samo na trenje ljestvi i podloge. Na ljestve tada djeluju slijedeće sile: težina ljestava s hvatištem u sredini ljestava, težina tereta s hvatištem na lokaciji tereta, normalna reakcija podloge koja djeluje u kontaktnoj točki horizontalne podloge i ljestava, horizontalno usmjerena sila trenja između ljestava i podloge i horizontalno usmjerena reakcija podloge na vrhu ljestava. Normalnu reakciju podloge u nožištu lako računamo iz uvjeta da je suma svih sila u vertikalnom smjeru nula:

$$N = -mg - Mg \qquad (8.10)$$

U horizontalnom smjeru normalna reakcija zida i sila trenja moraju biti izjednačene:

$$F + F_{trenja} = 0 \qquad (8.11)$$

Ako lokaciju sredine ljestava pišemo kao A, lokaciju tereta kao B a lokaciju vrha ljestvi kao C, tada uzimanjem nožišta ljestava kao ishodišta sustava imamo kao uvjet iščezavajućeg momenta sila:

$$\vec{r}_A \times m\vec{g} + \vec{r}_B \times M\vec{g} + \vec{r}_C \times \vec{F} = 0 \tag{8.12}$$

Kako su u (8.12) sve veličine zadane geometrijom problema i masama objekata osim modula F, njega možemo izračunati. Time je dan i nužan iznos sile trenja. Preostaje samo provjeriti da li je ta potrebna sila trenja moguća za zadani koeficijent trenja ljestava i horizontalne podloge:

$$F_{trenja} < \mu N \tag{8.13}$$

To je u stvari uvjet ravnoteže.

Proračun unutrašnjih opterećenja u konzolnom mostu s teretom

Most se sastoji od šipki, koje su bez mase, nesavitljive i nerastezljive, a povezane su zglobovima bez trenja na način prikazan na slici. Potporanj A ima učvršćenu podlogu, a podloga B je na valjcima. Most je horizontalan. Šipke su indeksirane brojevima redom idući od lijevog do desnog kraja. Zglobovi su indeksirani slovima na isti način. Iznimka je potporanj na desnoj strani koji je označen s B. Teret se nalazi na zglobu E na slici i označen je kao F. Globalno gledajući taj teret nose potpornji A i B . Jasno je da se iz lokacije F lako određuju normalne reakcije $\vec{F}_A \, i \, \vec{F}_B$. Najprije suma njihovih modula mora biti jednaka F, a omjer među njima se dobiva lako izborom E za ishodište i uravnoteženjem momenta $\vec{F}_A \, i \, \vec{F}_B$ oko E. Sada možemo sistematski pokrenuti mašineriju rastavljanja sile rezultante u sile u dva smjera šipki (na primjer $\vec{F}_A \; u \; smjerove \; 1 \, i \, 2$) i tako saznati naprezanja koje trpi svaka šipka. Izabrali smo ovaj specifični primjer iz građevinarske struke jer ćemo u jednoj kratici puta do određenja jedne napetosti, bez prolaza kroz cijelu konstrukciju mosta, vidjeti ne samo kraticu, nego i dodatni fizikalni element.

U metodi presjeka uvodi se slijedeća ideja. Neka nam je na primjer želja odrediti silu $\vec{F}_6$. Presijecimo most u dva dijela vertikalno kroz zglob E i uzmimo lijevu i desnu stranu kao posebne cjeline. Jedine sile koje uravnotežuju lijevi dio mosta i daju momente s obzirom na E su normalna reakcija iz A i sila $\vec{F}_6$. Tako vrijedi:

$$\vec{r}_{EA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{ED} \times \vec{F}_6 = 0 \tag{8.14}$$

U gornjoj relaciji su sve veličine poznate osim modula F_6, pa iz nje izračunavamo i napetost u toj šipci, bez da smo prolazili kroz proračun svih šipki prije nje!

VRSTE RAVNOTEŽE TIJELA I SUSTAVA

Uvjeti za ravnotežu tijela ili sustava znače ispunjenje relacija (8.1) i (8.2) . Ipak postoje bitno različite klase ravnoteža. Ako je težište tijela vertikalno ispod objesišta tijela, imamo primjer stabilne ravnoteže. To znači da će unutrašnje sile sistema vraćati tijelo u isti položaj, ako ga iz tog položaja malo izmaknemo. Ako se težište tijela nalazi vertikalno iznad objesišta, mali pomak tijela rezultira u silama koje tijelo odmiču iz položaja ravnoteže. Ako je tijelo obješeno kroz težište, mali pomak ne vadi tijelo iz ravnotežnog položaja; ovo je slučaj indiferentne ravnoteže. Mogu se praviti i druge analogije kao što je kugla na udubljenoj, izbočenoj i ravnoj površini; to su također primjeri navedenih ravnoteža.

ODREĐIVANJE POLOŽAJA TEŽIŠTA

Ako bilo koje tijelo objesimo pomoću niti, u položaju stabilne ravnoteže njegovo će težište biti na pravcu koji dobivamo spajanjem objesišta i smjera niti preko tijela. Naime, da bismo imali ravnotežu, moment gravitacijskog polja mora iščezavati. Kako težina tijela ne iščezava to je jedino moguće ako se težište nalazi a smjeru objesište-nit. Izmijenimo položaj objesišta i povucimo novi pravac na kojem se mora nalaziti težište. Težište se jasno nalazi na presjeku dva pravca. To se može provjeravati i trećim objesištem, koje će treći pravac uputiti smjerom od trećeg objesišta do presjeka dva prijašnja pravca.

KONSTANTE GIBANJA ZA SLOŽENI IZOLIRANI SUSTAV

Ovdje samo sumiramo na jednom mjestu činjenicu da izolirani sustav ima tri konstante gibanja: $\vec{P},\ \vec{L}\ i\ E$. Znači ukupni impuls, ukupni moment impulsa i ukupnu energiju.

D' ALAMBERTOV PRINCIP

Pokazat ćemo da ovaj princip koji obuhvaća takozvane virtualne radove vodi na isti uvjet ravnoteže kao i uvjeti za kruto tijelo. Princip iskazuje:

Zbroj svih diferencijalnih radova svih prisutnih sila na sustav u ravnoteži jednak je nuli.
Uzmimo kruto tijelo pomak čije $i-te$ točke može biti opisan kao rezultat pomaka središta tromosti tijela i rotacije tijela oko središta tromosti:

$$d\vec{s}_i = d\vec{s}_{CM} + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot dt \tag{8.15}$$

Tada gornja tvrdnja prelazi u:

$$\sum_i \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum_i \vec{F}_i (d\vec{s}_{CM} + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot dt) = 0 \tag{8.16}$$

To znači da vrijedi:

$$d\vec{s}_{CM}\cdot\sum \vec{F}_i + \vec{\omega}dt\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i = 0 \tag{8.17}$$

Iz (8.17) jasno čitamo da ako su ispunjeni uvjeti statičke ravnoteže da je suma sviju sila jednaka nuli i da je suma momenata sviju sila jednaka nuli, tada vrijedi D'Alambertov princip. Obratno, ako je D'Alambertov uvjet ispunjen za bilo kakve diferencijalne i rotacijske pomake, to je moguće samo ako faktori suma iščezavaju; znači ako su ispunjeni uvjeti da je suma sviju sila i suma njihovih momenata jednaka nuli!

M E H A N I K A F L U I D A

Za razliku od krutih tijela stalnog oblika, određeni materijali prilagođuju svoj oblik takozvanim rubnim uvjetima. Čaj u čaši prilagođava svoj donji dio prema obliku šalice u kojoj se nalazi. Plin u plinskoj boci preuzima oblik plinske boce. Takve oblike materije nazivamo fluidima. Oni dijele mnoga zajednička svojstva. Grubo ih dijelimo na tekućine i plinove. Tekućine nemaju stalan oblik, ali ih je teže komprimirati. Na primjer, za vodu se govori da je nestlačiva; to je naravno samo dosta dobra aproksimacija.

Oblik gornje površine tekućine u homogenom gravitacijskom polju:
Dnevno je iskustvo da se u homogenom gravitacijskom polju, dok nema drugih sila u inercijskom sustavu, površina vode postavlja okomito na vertikalni pravac kojeg definiraju gravitacija i lokalna akceleracija neinercijskog sustava rotirajuće Zemlje. To se može i teorijski poduprijeti. Pođimo u pravo od te slike da bismo dokazali da se radi o uravnoteženom stanju. Zamislimo da smo izvršili (virtualni) rad: s površine tekućine izvadimo volumen ΔV i dodamo ga neposredno nad površinu ostatka tekućine. Time je izvršen rad:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \rho \Delta V g \cdot dz \tag{9.1}$$

Uvjet ravnoteže jest da je dz jednak nuli; to jest da nema dizanja elementa tekućine iz horizontalnog nivoa. Isto svojstvo vrijedi kod posuda,koje su spojene tako da među njima tekućina može slobodno teći (spojene posude). Nivo tekućine je isti u obje posude.

Oblik gornje površine tekućine u ubrzanom sustavu:
I ovdje se tekućina postavlja okomito na rezultantni smjer vektora gravitacijske akceleracije i ($-\vec{a}$) vektora gdje je $\vec{a}$ vektor akceleracije ubrzanog sustava u inercijskom sustavu. Pokusom se demonstrira studentima kosa površina vode koja nastaje u linearno akceleriranom sustavu.

Slično se demonstrira paraboloidni oblik površine tekućine u posudi koja rotira oko svoje osi simetrije. Naime podsjećamo ako prostoru postoji element mase m, *težine* $m\vec{g}$ i sustav se giba akceleracijom $\vec{a}$, tada u njemu postoji inercijska sila $-m\vec{a}$. Površina tekućine postavlja se okomito na zbroj gravitacijske i inercijske sile. Kako gravitacijska sila djeluje vertikalno, a inercijska sila horizontalno i mi znamo njihove iznose, to možemo izračunati i tangens kuta njihove rezultante prema vertikali. To je pak tangens kuta tangente na površinu tekućine u izabrnoj točki prostora:

$$tg\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \omega^2 r / g = \frac{dz}{dr} \tag{9.2}$$

Integriranjem dobijemo zavisnost visine tekućine o radijusu položaja:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \tag{9.3}$$

To jest jednadžba rotacijskog paraboloida.

TLAK U TEKUĆINI

U uvjetima mirne i uravnotežene tekućine unutar tekućine na bilo kojem mjestu na proizvoljno izabranu površinu postoji tlak:

$$p = \frac{dF}{dA} \tag{9.4}$$

Gdje je dA element te površine, a dF je sila koju ta površina trpi od tekućine okomito na sebe. Očito je jedinica za tlak $1N/m^2 \equiv 1Pa$. Paskal je jedinica tlaka u SI sustavu.
U mirnoj tekućini tlak ne zavisi o smjeru u kojem mjerimo. Naime da je suprotno, mogli bismo konstruirati perpetuum mobile, jer bi usmjerenje tlaka moglo konstrukcijom kanala koji bi primao tekućinu sa smjera u kojem je tlak usmjeren mogli dobiti strujanje za pogon turbine koja bi energiju crpla iz činjenice usmjerenja. To se naravno protivi zakonu sačuvanja energije.

PASCALOV TEOREM

Pretpostavimo da imamo spojene posude vertikalno postavljene različitih presjeka. Ako načinimo pomak nivoa površine tekućine pomoću klipa istog presjeka kao što je i cijev A_1 za vertikalni iznos dz_1, to rezultira promjenom volumena s te strane cijevi za

$$dV = A_1 dz_1 = -A_2 dz_2 \tag{9.5}$$

I promjenom volumena suprotnog predznaka s druge strane cijvi čiji su elementi indeksirani indeksom 2 . Uvjet ravnoteže kroz D'Alambertov princip daje

$$F_1 dz_1 + F_2 dz_2 = 0 \tag{9.6}$$

Uvrštenjem (9.5) u (9.6) dobivamo

$$\left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2}\right) dV = 0 \tag{9.7}$$

Kako je dV proizvoljan, očito:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{9.8}$$

Odatle slijedi da je promjena tlaka vanjskom silom u tekućini svagdje jednaka. Na tom principu rade brojni hidraulički uređaji: dizalice, kočnice na automobilima, građevinarski strojevi i robotičke komponente. (9.8) nam omogućuje multipliciranje sile. Za to jasno plaćamo cijenu; rad se ne može dobiti iz ničega. Stoga povećanje sile dobivamo većim putem kojim manja sila djeluje s jedne strane sustava, da bi na račun manjeg pomaka s druge strane proizvela veću silu s te druge strane hidrauličkog sistema.

HIDROSTATSKI TLAK

Promatramo posudu proizvoljnog oblika. Na određenoj dubini nam je jasno da tekućina svojom težinom proizvodi tlak i da taj tlak zavisi o dubini (zasada zanemarujemo atmosferske efekte). Zamislimo da smo na istoj dubini načinili otvor male površine a , da smo nadalje nastavili cilindar iste površine i u njemu micanjem klipa za put ds radom postigli da je istisnuti volumen premješten na površinu vode. Preko sačuvanja energije imamo:

$$dW = p \cdot a \cdot ds = a \cdot ds \cdot \rho \cdot g \cdot h \qquad (9.9)$$

Tako za tlak p dobivamo:

$$p = \rho g h \qquad (9.10)$$

U izvodu nije bilo pretpostavki o obliku posude, i tlak o njemu ne zavisi. Hidrostatskim se paradoksom naziva činjenica , da bez obzira kakav profil ima posuda, tlak na nekoj dubini je neovisan o profilu i dan je s (9.10). Ako postoji još i vanjski tlak na tekućinu i njega treba uzeti u obzir pri računu ukupnog tlaka.

TORRICELLIJEVA CIJEV I BAROMETAR

Razlika između tekućina i plinova unutar obitelji fluida jest u mikroskopskim svojstvima. Kod tekućina molekule su u praktički u kontaktu jedna s drugom, dok kod plinova molekule doduše nalijeću jedna na drugu, no većinu vremena su slobodne u prostoru. Ipak i te slobodne molekule podliježu gravitaciji kao i one u tekućini. Rezultat jest da na dnu atmosferskog mora kojeg predstavlja zrak, to jest u našoj neposrednoj okolini postoji tlak radi težine svega zraka iznad nas. Fenomen tog tlaka je relativno kasno opažen, jer je zrak za naše osjete vrlo prorijeđen, a vakuumske uvjete se relativno kasno proučavalo. Torricelli je zamke koje potječu od relativno male gustoće vode izbjegao upotrebom žive za mjerenje tlaka. Ako pripremimo posudu žive (ŽIVA JE OTROVNA I NE SMIJE JE UPOTREBLJAVATI OSOBA BEZ KVALIFIKACIJA) i dodatno živom napunimo cijev , čije je dno zataljeno, spremni smo za demonstraciju atmosferskog tlaka. Otvoreni kraj cijevi napunjene živom (dugačku oko 1 m) privremeno se zatvori i uroni se u pripremljenu posudu. Ako je zatvoreni kraj žive ispod nivoa od otprilike 76 cm od površine žive u posudi, živa će i dalje stajati u cijevi. Kada se , međutim , zatvoreni kraj cijevi sa živom , dok je otvoreni uronjen u posudu, uspravlja iznad nivoa od 76 cm, opazit će se djelomično pražnjenje cijevi tako da je nivo žive u cijevi uvijek isti i otprilike 76 cm iznad površine žive u posudi. Jasno je da su atmosferski tlak i tlak žive u posudi u ravnoteži. Kako atmosferski tlak varira, tako varira i visina stupca žive u živinom barometru.

ARHIMEDOV ZAKON I UZGON

Svako tijelo uronjeno u tekućinu gubi na težini onoliko koliko teži istisnuta tekućina. Ovu izjavu možemo jasno obrazložiti. Na mjestu uronjenog tijela bila je tekućina. Taj , u mislima izolirani dio tekućine, ima svoju težinu. Težina tekućine, u prostoru izoliranog dijela tekućine, uravnotežena je rezultantnom silom , kojom ostatak tekućine djeluje na izolirani dio. Kada tekućinu zamijenim tijelom, i na tijelo će djelovati ista rezultanata. Stoga je težina tijela uronjenog u tekućinu umanjena za težinu istisnute tekućine! Sila kojom okolna tekućina djeluje na tijelo uronjeno u nju se naziva silom uzgona. Do njenog iznosa možemo doći i razmatranjem promjena potencijalne energije prilikom potonuća tijela u tekućinu. Ako tijelo koje tone ima masu m a tekućina istog volumena masu m_{tek} , zamjenom visinske koordinate za Δz izvršen je rad:

$$\Delta P = mg\Delta z - m_{tek} g\Delta z \qquad (9.11)$$

Ovo možemo interpretirati kao pojavu sile uzgona koja djeluje vertikalno prema gore u iznosu

$$\vec{F}_{uzgon} = -\vec{g} \cdot m_{tek} \qquad (9.12)$$

POVRŠINSKA ENERGIJA I POVRŠINSKA NAPETOST

Privlačne sile koje djeluju među molekulama tekućine kratkog su dosega. Stoga molekula u unutrašnjosti tekućine interagira (međudjeluje) samo s malim brojem susjednih molekula. Neka je broj molekula s kojima se jedna molekula privlači n . svaku od tih međumolekularnih interakcija karakterizira energija veze ε_0. (Ovo nije isti pojam kao u Coulombovom zakonu). Pojam energije veze je vrlo bitan u fizici. To je iznos energije koji treba uložiti u objekte koji interagiraju, da bi njihovo međudjelovanje prestalo. Na primjer, Mjesec ima energiju veze,
koja je potrebna da ga se oslobodi Zemljinog gravitacijskog polja; elektron ima energiju veze potrebno za izlazak iz atoma…Tako je energija veze potrebna da se molekula oslobodi privlačenja svojih susjeda

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot n \qquad (9.13)$$

Nadalje da bi se tekućina pretvorila u paru treba osloboditi sve molekule tekućine, N_{ukupno}. Totalni iznos energije za to potreban stručno zovemo latentnom toplinom, o kojoj će biti više govora u termodinamici. Prema gornjem očito bi latentna toplina iznosila:

$$L = N_{ukupno} \cdot n \cdot \varepsilon_0 \qquad (9.14)$$

No još nismo uzeli u obzir važan površinski efekt. Molekule na površini imaju manji broj susjeda pa im je i vezanje slabije. Ako molekula na površini ima u prosjeku m susjeda, tada njeno vezanje u sustav samo:

$$\varepsilon_{povr} = m\varepsilon_0 \qquad (9.15)$$

Možemo ukupni broj molekula razdijeliti u one koje nisu na površini N_{unutr} i one na površini N_{povr} .Tada energija molekula sistema u tekućini iznosi:

$$E = E_0 - N_{unutr} \cdot n \cdot \varepsilon_0 - N_{povr} \cdot m \cdot \varepsilon_0 \qquad (9.16)$$

ili

$$E = E_0 - N_{ukupno} n\varepsilon_0 + N_{povr}(n-m)\varepsilon_0 \qquad (9.17)$$

Pri tome je E_0 energija molekula kada su slobodne. (Pod kraj semestra ćemo naučiti da činjenicom da imaju masu objekti sukladno masi imaju i energiju). Broj molekula na površini možemo procijeniti ako znamo prosječnu površinu jedne molekule a_0 i ukupnu površinu tekućine a . Tako se pozitivni doprinos u (9.17) koji dolazi od površinskog efekta smanjenja ukupne energije veze glasi:

$$E_{povr} = a\frac{n-m}{a_0}\varepsilon_0 \qquad (9.18)$$

Tako možemo formulirati intuitivno razumljiv zaključak. Tekućina je to stabilnije i njena je ukupna energija to niža , što je njena površina manja.
Po definiciji se faktor uz površinu u (9.18) zove faktorom površinske napetosti σ .

$$\sigma = \frac{n-m}{a_0}\varepsilon_0 \qquad (9.19)$$

Minimalizacija člana (9.18) , to jest minimalizacija faktora površine jest aktivnost koju će tekućina spontano činiti na putu prema stabilnosti, to jest uravnoteženom stanju. Izvan gravitacijskog polja stoga će tekućina težiti formaciji kugle. U gravitacijskom polju koje je mnogo snažnije od međumolekularnih sila tekućina će prvenstveno minimalizirati potencijalnu energiju tog polja. No vidjet ćemo da se u vrlo pažljivom promatranju oko površina mogu mjeriti i površinski efekti.

TLAK UNUTAR KUGLE TEKUĆINE U BESTEŽINSKOM STANJU

Kako bismo izračunali tlak unutar kugle tekućine, zamislimo da smo ponovno dodali mali cilindar s pokretnim klipom kojim vršimo rad:

$$dW = F \cdot dx = (pA)(dx) = p \cdot dV = \sigma \cdot da \qquad (9.20)$$

Član iza posljednje jednakosti je rezultat upravo ustanovljene proporcionalnosti između površine i ukupne energije tekućine (relacije (9.17-9.19)).
Odatle slijedi :

$$p = \sigma \frac{da}{dV} \qquad (9.21)$$

Uz poznate izraze za volumen i površinu kugle:

$$a = 4\pi r^2 \quad \text{i} \quad V = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \text{imamo i} \quad \frac{da}{dV} = \frac{2}{r} \qquad (9.22)$$

Tako je tlak unutar kugle:

$$p = \frac{2\sigma}{r} \qquad (9.23)$$

Kod cilindrične kaplje sličnim bismo postupkom imali:

$$p = \frac{\sigma}{r} \qquad (9.24)$$

Studentima će se (9.23) demonstrirati s dva mjehura od sapunice različitih dimenzija među kojima postoji kanal za prijelaz plina. Kako je prema (9.23) tlak u manjoj kugli veći, to će on transportirati plin iz manje kugle u veću!
Relaciju (9.23) možemo upotrijebiti i za proračun tlaka u mjehuriću plina unutar tekućine:
Ako uzmemo u obzir kumulativno djelovanje vanjskog tlaka na tekućinu p_0, tlaka unutar tekućine na dubini h i tlaka kojeg površina čini na unutrašnjost fluida, imamo:

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r} \qquad (9.25)$$

DRUGI POGLED NA POVRŠINSKU NAPETOST

Studentima se pokazuje opna sapunice koja je razapeta između tri čvrste stranice pravokutnika dok je četvrta stranica pomična po njima. Rastezanjem opne za pomak dx širine opne l , vrši se rad.

$$2Fdx = 2\sigma da = 2\sigma l dx \qquad (9.26)$$

Odatle slijedi:

$$\sigma = \frac{F}{l} \qquad (9.27)$$

Tako napetost površine možemo smatrati i silom koju na jedinicu širine treba unijeti da se ta napetost površine uravnoteži.

KAPLJICA TEKUĆINE NA ČVRSTOJ PODLOZI

Za razumijevanje kapilarnih efekata temelj je razumjeti ravnotežno stanje kapljice koja je na čvrstoj podlozi. U međusobnim kontaktima su krutnina 1) , tekućina 2) i plin 3) . Kao rezultat tekućina formira kapljicu s definiranim kutom tangente na tekućinu u točki kontakta tri medija. Prikloni kut tangente i krutnine je ϑ. Da izrazimo prikloni kut kao rezultat površinskih napetosti pojedinih kontaktnih površina polazimo od D'Alambertovog principa o elementu virtualnog rada. Pretpostavljamo da smo micanjem ruba kapljice dio površine da koji je na krutnini pokrivala tekućina „otkrili“ za kontakt krutnine i plina. Time je kontakt 13 povećan a kontakt 23 smanjen za istu površinu da. Kontakt 23 je smanjen za površinu $da \cdot \cos\vartheta$. Tako je element rada:

$$dW = \sigma_{13} \cdot da - \sigma_{12} \cdot da - \sigma_{23} \cdot da \cdot \cos\vartheta \tag{9.28}$$

Kako je element proširenja površine proizvoljan, iz (9.28) slijedi:

$$\cos\vartheta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \tag{9.29}$$

Kut ϑ iz (9.29) koji zavisi o ponašanju triju medija 1,2 i 3, zovemo okrajnjim kutom .

PONAŠANJE TEKUĆINE UZ RAVNU VERTIKALNU STIJENU

Zavisno o prirodi djelovanja molekula stijene na molekule tekućine (privlačenje ili odbijanje). Nivo tekućine na mjestu kontakta će se dizati ili spuštati. U prijašnjoj notaciji za medije, u svakoj točki blizu kontakta vrijedi:

$$\rho g z = \frac{\sigma_{23}}{r} \tag{9.30}$$

gdje je r radijus zakrivljenosti površine tekućine. Odatle množenjem s dz dobivamo:

$$\rho g z \cdot dz = \frac{dz}{r}\sigma_{23} \tag{9.31}$$

Prikloni kut tangente na površinu s vertikalnom stjenkom je α. Ako je element puta po površini tekućine ds, tada je

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha \tag{9.32}$$

Istovremeno je

$$r \cdot d\alpha = ds = \frac{dz}{\sin\alpha} \tag{9.33}$$

Tako iz (9.33) imamo:

$$\frac{dz}{r} = \sin\alpha \cdot d\alpha \tag{9.34}$$

Uvrštenjem geometrijske relacije (9.34) u fizikalnu relaciju (9.31) slijedi:

$$\rho g z \cdot dz = \sigma_{23} \sin\alpha \cdot d\alpha \qquad \text{to jest} \qquad d(\frac{1}{2}\rho g z^2) = -d(\cos\alpha)$$

$$z_0{}^2 = \frac{2\sigma_{23}}{\rho g}(1 - \sin\vartheta) \tag{9.38}$$

KAPILARNA ELEVACIJA I DEPRESIJA

U tankim cjevčicama površinska napetost tekućine zbog okrajnjeg kuta ϑ iz (9.29) i time prouzročene zakrivljenosti površine uzrokom je promjene razine tekućine u kapilari. Pretpostavimo da je kapilara dovoljno uska, tako da je oblik površine u njoj kuglasti, a ne cilindrični kao u (9.30). Označimo s d dijametar kapilare, a s r polumjer zakrivljenosti kugle, tada je okrajnji kut geometrijski jednostavno izraziti:

$$\cos\vartheta = \frac{d/2}{r} \tag{9.39}$$

Polazeći od izraza za tlak (9.23) supstituiranjem (9.39) i veze s hidrostatskim tlakom slijedi:

$$p = \frac{2\sigma_{23}}{r} = \frac{4\sigma_{23}}{d}\cos\vartheta = \rho g h \tag{9.40}$$

Odatle slijedi izraz za elevaciju odnosno depresiju:

$$h = \frac{4\sigma_{23}}{\rho g d}\cos\vartheta \tag{9.41}$$

Pri tome je kosinus okrajnjeg kuta dan s (9.29) . Radi li se o elevaciji ili depresiji zavisi o predznaku kosinusa okrajnjeg kuta.

Studentima će se demonstrirati nivoi elevacije vode za različite dimenzije kapilara, kao i za depresije žive .

BERNOULLIjeva JEDNADŽBA (stacionarno,laminarno strujanje idealne tekućine)

U izvodu se pretpostavlja da se strujnice tekućine ne ukrštaju, da nema vrtloga i da ne postoji trenje među slojevima tekućine, koje nazivamo viskoznošću. Ako razmatramo strujanje tekućine kroz cijev (na primjer kružnog presjeka) različitih dimenzija presjeka na početku i na kraju , predznak ulazne mase dm_1 i izlazne mase dm_2 su suprotni no po iznosu jednaki.

$$dm_1 = dm = \rho_1 \cdot dV_1 \qquad dm_1 + dm_2 = 0 \tag{9.42}$$

Možemo sada načiniti bilancu radova načinjenih u odnosu na tlakove prisutne na ulasku i izlasku iz cijevi:

$$p_1 \cdot dV_1 - p_2 dV_2 = \frac{1}{2}dm \cdot v_2{}^2 - \frac{1}{2}dm \cdot v_1{}^2 + dm \cdot gh_2 - dm \cdot gh_1 \tag{9.43}$$

Iz čega zaključujemo da je zbroj:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh = konstanta \tag{9.44}$$

Bernoullijeva jednadžba (9.44) ima mnogo demonstracija i primjena poput Venturijeve cijevi kao brzinomjera protoka, Bunsenove sisaljke pa i lijeta aviona uz pomoć posebnog profila krila. Zajedničko svima jest smanjenje tlaka u zoni veće brzine strujanja.

VISKOZNOST I TURBULENCIJA

U izvodu Bernoulli-jeve jednadžbe bilo je pretpostavljeno laminarno strujanje idealne tekućine. Strujnice su linije koje povezuju položaje istog dijela tekućine u raznim vremenima. Kada se strujnice ne sijeku, govorimo o laminarnom strujanju. Suprotno od toga je turbulentno gibanje u kojem postoji vrtloženje. Idealna tekućina nema unutrašnjeg otpora na kontaktu slojeva tekućine koji se gibaju različitim brzinama. Razmotrimo na trenutak situaciju s prolaskom krvi kroz naše kapilare. Radi veličine molekula i uskoće kapilara, jasno je da će krv „zapinjati" o stijenke kapilare , dok će se u sredini kapilare transportirati praktički bez otpora. Stoga će , gledano u longitudinalnom presjeku , brzina tekućine zavisiti o njenoj radijalnoj udaljenosti od osi kapilare. U udžbenicima se obično prikazuje parabolična zavisnost brzine tekućine o radijalnoj udaljenosti točke promatranja od osi kapilare. Pojave turbulencije ne mogu se jednostavno matematički tretirati; one su jedan od primjera kaotičnog gibanja. Realne pojave pri gibanju objekata u fluidima studiraju se na konkretnim modelima u posebnim uređajima. Na primjer, poboljšanja u automobilskoj i avionskoj industriji se ispituju u tunelima s vjetrovima uz praćenje strujnica oko objekta. Brodske inovacije se testiraju u bazenima u kojima postoji ili protok vode ili pogon (propulzija) objekta.

H A R M O N I Č K I   O S C I L A T O R

Harmonički oscilator je odigrao ogromnu ulogu u razvoju fizike, jer je postao modelom za niz pojava u prirodi. Intuitivno je prihvatljivo: ako sustav ima položaj ravnoteže, a pri udaljavanju od ravnoteže sila vraća objekt prema ravnoteži i uz to je proporcionalna odmaku od ravnoteže, kada sustav odmaknemo od ravnoteže i prepustimo samom sebi nastat će titranje oko tog ravnotežnog položaja. To je fizikalna suština koju ćemo najprije ilustrirati na rješavanju 2. Newtonovog zakona na raznim primjerima, da bismo na kraju generalizirali fenomen harmoničkih oscilacija na opći slučaj titranja oko stabilnih konfiguracija.

TIJELO VEZANO OPRUGOM (na horizontalnoj podlozi bez trenja)

Kada je sustav u ravnoteži (opruga nije ni rastegnuta ni stisnuta) , položaj tijela je x_0. Opis sile koja vraća tijelo prema ravnotežnoj poziciji ako je u novom položaju x, koja je proporcionalna odmaku od ravnotežnog položaja jest:

$$F = -K(x - x_0) = m\ddot{x} \qquad (10.1)$$

gdje je K konstanta opruge. Supstituiranjem nove varijable za odmak (izraz u zagradi u (10.1),

$$x - x_0 = \psi \qquad \dot{x} = \dot{\psi} \qquad \ddot{x} = \ddot{\psi} \qquad (10.2)$$

Uvođenjem te nove varijable iz (10.2) u (10.1) imamo :

$$\ddot{\psi} + \frac{K}{m}\psi = 0 \qquad \frac{K}{m} \equiv {\omega_0}^2 \qquad \ddot{\psi} + {\omega_0}^2\psi = 0 \qquad (10.3)$$

Posljednja jednadžba od (10.3) je univerzalni zapis za (slobodni) harmonički oscilator. ω_0 je karakteristična kružna frekvencija harmoničkog oscilatora. Ovo ime će biti uskoro opravdano. U daljnjem tekstu ćemo integrirati diferencijalnu jednadžbu (10.3), no radi intuicije ćemo zamijeniti taj korak demonstracijom upotrebe zakona sačuvanja energije.

$$E = T + P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x - x_0)^2 \qquad (10.4)$$

Desni član – potencijalu energiju smo za harmoničku silu izračunali u (5.18).   Uvrštenjem nove varijable u (10.4) slijedi:

$$\dot{\psi}^2 + {\omega_0}^2\psi^2 = \frac{2E}{m} \qquad (10.5)$$

(10.3) i (10.5) su u suštini ekvivalentne formulacije svojstava harmoničkog oscilatora.
Demonstrira se titranje horizontalnog oscilatora.

TIJELO OBJEŠENO NA OPRUGU

Neka nam je pozitivna orijentacija osi prema gore. Neka je z_0 koordinata nerastegnute opruge. Neka je z položaj tijela/kraja opruge u proizvoljnom trenutku. Tada je jednadžba gibanja :

$$F = m\ddot{z} = -mg - K(z - z_0) \qquad (\ 10.6)$$

Supstitucijom

$$\psi = z - z_0 + \frac{mg}{K} \qquad (10.7)$$

slijedi iz (10.7) uvrštenog u (10.6) diferencijalna jednadžba za ψ :

$$\ddot{\psi} + \omega_0^{\,2}\psi = 0 \qquad (10.8)$$

Što je identično s (10.3). Energijskim bi se razmatranjima lako pokazalo da i izraz (10.5) i u ovom slučaju ima svoj ekvivalent; jedino je na desnoj strani malo kompliciranija kombinacija numeričkih konstanti. Demonstrira se titranje vertikalnog oscilatora i utjecaj mase.

MATEMATIČKO NJIHALO u aproksimaciji malih kutova

Tijelo mase m je obješeno na nit dužine l , tangenta na putanju je x-os, kut otklona od ravnoteže je ϑ. Za male pomake je

$$\ddot{x} = l\ddot{\vartheta} \qquad (10.9)$$

Povratna sila, koja vraća njihalo u položaj ravnoteže je:

$$F = -mg\sin\vartheta \qquad (10.10)$$

Za male kutove vrijedi:

$$\sin\vartheta \approx \vartheta \qquad (10.11)$$

Pomoću gornje tri relacije se 2. Newtonov zakon može napisati kao:

$$F = ml\ddot{\vartheta} = -mg\vartheta \qquad (10.12)$$

Odatle uz malo preraspoređivanje slijedi:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \qquad (10.13)$$

To je zapravo jednadžba matematički istovjetna s (10.3) samo s drukčijim izrazom za kružnu frekvenciju.

FIZIKALNO NJIHALO u aproksimaciji malih kutova

Objekt mase M obješen je tako da je udaljenost od objesišta do težišta l . Opća veza momenta sile i vremenske derivacije momenta impulsa (7.21) se u slučaju rotacije oko jedne osi reducira na (7.57) . U našem slučaju sila teža proizvodi na tijelo moment sile oko objesišta:

$$M_\omega = -lMg\sin\vartheta \qquad (10.14)$$

Tako prema (7.57) imamo:

$$M_\omega = -lMg\sin\vartheta = I_\omega\ddot{\vartheta} = \ddot{\vartheta}(I_{CM} + Ml^2) \qquad (10.15)$$

U aproksimaciji malih kuteva sinus kuta zamjenjujemo kutom pa slijedi:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_0^{\,2}\vartheta = 0 \qquad (10.16)$$

gdje je

$$\omega_0^{\,2} = \frac{lMg}{I_{CM} + Ml^2} = \frac{g}{l}\cdot\frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}} \qquad (10.17)$$

Jasno je da se izborom $I_{CM} = 0$ u (10.17), (10.16) svodi na (10.13), što je sasvim očekivano. No kako smo izvod za fizikalno njihalo načinili preko momenta sile, jasno je da smo istu metodu mogli primijeniti i na matematičkom njihalu s istim rezultatom. Demonstrira se fizikalno njihalo.

EKVIVALENCIJA DVIJU FORMI JEDNADŽBI HARMONIČKOG OSCILATORA

Pokazat ćemo da so obadva opisa ponašanja harmoničkog oscilatora (10.3) i (10.5) ekvivalentna . Ako (10.3) pomnožimo s $\dot{\psi}dt$ imamo:

$$\ddot{\psi}\dot{\psi}dt + \omega_0{}^2\psi\dot{\psi} = 0 \quad to \quad jest \quad d(\frac{1}{2}\dot{\psi}^2) + d(\frac{1}{2}\omega_0{}^2\psi^2) = 0 \qquad (10.18)$$

Integriranjem (10.18) dobiva se

$$\dot{\psi}^2 + \omega_0{}^2\psi^2 = const \qquad (10.19)$$

što je oblik koji ima jednadžba (10.5). S druge strane ako pođemo od jednadžbe (10.5) i nju diferenciramo dobivamo: (10.18) i korakom dijeljenja s $\dot{\psi}dt$ dobivamo oblik (10.3).

RJEŠAVANJE JEDNADŽBE (10.3) metodom pogađanja:

Lako se možemo uvjeriti da je rješenje jednadžbe (10.3) oblika:

$$\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10.19)$$

$\psi_0 \ i \ \varphi$ su proizvoljne (integracijske) konstante.

Izračunajemo prvu i drugu derivaciju (10.19):

$$\dot{\psi} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \ddot{\psi} = -\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0{}^2\psi \qquad (10.20)$$

Početak i kraj desne relacije u (10.20) pokazuju da oblik (10.19) doista jest rješenje diferencijalne jednadžbe harmoničkog oscilatora (10.3).

RJEŠAVANJE JEDNADŽBE (10.3) integriranjem:

Gore smo već pokazali da je oblik (10.3) ekvivalentan s (10.19) koji je zapravo oblika (10.5). Stoga možemo početi od (10.19):

$$\dot{\psi}^2 + \omega_0{}^2\psi^2 = konst = \psi_0{}^2\omega_0{}^2 \qquad (10.21)$$

Odatle slijedi:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0(\sqrt{\psi_0{}^2 - \psi^2} \qquad (10.22)$$

Iz (10.22) operacijama dijeljenja i proširivanja imamo:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\psi_0{}^2 - \psi^2}} \equiv \frac{d(\frac{\psi}{\psi_0})}{\sqrt{1 - (\frac{\psi}{\psi_0})^2}} = \omega_0 dt \qquad (10.23)$$

Studenti trebaju prepoznati srednji izraz u gornjem redu kao diferencijal funkcije arkus kosinus:

$$d\left[arc\cos(\frac{\psi}{\psi_0})\right] = d(\omega_0 t) \tag{10.24}$$

Integriranjem dobivamo:

$$arc\cos(\frac{\psi}{\psi_0}) = \omega_0 t + \varphi \tag{10.25}$$

to jest:

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{10.26}$$

To je upravo analitički oblik rješenja koje smo pogodili s (10.19) . Prokomentirat ćemo rješenje (10.26) koje je ljepše napisano u formi (10.19). Tijekom ovog izvoda vidjeli smo da u postupcima dva integriranja pojavljuju dvije integracijske konstante: ψ_0 *i* φ. Kako faktor $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ periodički titra u vremenu, tada je faktor ψ_0 amplituda tog titranja. Pojava φ pak kontrolira u kojoj se fazi titranje nalazi u početnom trenutku. Ako je $\varphi = 0$ zavisnost titranja je zavisnost kosinusne funkcije, to jest počinje s maksimalnom amplitudom. Ako je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, tad je zavisnost o vremenu sinusnog tipa, to jest u početnom trenutku amplituda je jednaka nuli i najprije u vremenu raste.

PERIOD I KRUŽNA FREKVENCIJA HARMONIČKOG OSCILATORA

Kada analiziramo analitički oblik opisa titranja harmoničkog oscilatora (10.19), jasno je da se vrijednost koordinate u vremenu ponavlja s vremenom T kada argument kosinusne zavisnosti poveća svoju vrijednost za 2π . To prema (10.19) znači:

$$\omega_0(t+T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi \tag{10.27}$$

To jest

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{10.28}$$

Vrijeme ponavljanja položaja tijela pri harmonijskom titranju T nazivamo periodom titranja. Kako je učestalost titraja (frekvencija titranja) obrnuto proporcionalna s T,

$$f = \frac{1}{T} \tag{10.29}$$

slijedi:

$$\omega_0 = 2\pi f \quad ili \ u \ drugoj \ notaciji \ za \ frekvenciju \ \omega_0 = 2\pi\nu \tag{10.30}$$

Razlog za ime kružna frekvencija za ω_0 je vidljiv već iz (10.30). No još direktniji uvid jest pogled na originalni izraz (10.19). Naime to je ujedno opis položaja projekcije tijela (na x os), koje radijusom ψ_0, kutnom brzinom ω_0 kruži oko ishodišta koordinatnog sustava.

REVERZIBILNO (Katerovo) NJIHALO:

Pri studiju fizikalnog njihala odredili smo ovisnost kružne frekvenicje fizikalnog njihala o udaljenosti težišta objekta od njegovog objesišta kao i o masi objekta i njegovom momentu tromosti oko središta tromosti u izrazu (10.17).

$$\omega_0{}^2 = \frac{lMg}{I_{CM} + Ml^2} = \frac{g}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}} \tag{10.17}$$

Možemo se pitati kolika je duljina matematičkog njihala iste frekvencije. Iz (10.13) i (10.17) Da bi njihala bila iste frekvencije treba vrijediti:

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{l + \frac{I_{CM}}{Ml}} = \frac{g}{L} \tag{10.17a}$$

Gdje je L duljina matematičkog njihala iste frekvencije kao što je ona fizikalnog njihala.
Iz (10.17a) direktno slijedi veza duljina matematičkog i fizikalnog njihala:

$$l^2 - lL + \frac{I_{CM}}{M} = 0 \tag{10.17.b}$$

Možemo se sjetiti Vietovih formula za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$l_1 + l_2 = L \qquad l_1 \cdot l_2 = \frac{I_{CM}}{M} \tag{10.17c}$$

Za zadanu kružnu frekvenciju matematičkog njihala duljine L postoje dvije udaljenosti objesišta fizikalnog njihala od središta mase s istom frekvencijom. Razmak među objesištima je upravo duljina ekvivalentnog matematičkog njihala. Demonstrirat će se rad takvog (Katerovog) fizikalnog njihala i uspoređivati s ekvivalentnim matematičkim njihalom.

PONAŠANJE KINETIČKE I POTENCIJALNE ENERGIJE HARMONIČKOG OSCILATORA (model masa + opruga)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 x_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \tag{10.31}$$

$$P = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 x_0{}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \tag{10.32}$$

Iz (10.31) i (10.32) slijedi

$$E = T + P = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 x_0{}^2 = \frac{1}{2}Kx_0{}^2 \tag{10.33}$$

Iz (10.31) i (10.32) slijedi da se energija prelijeva iz potencijalnu u kinetičku i obratno tijekom oscilacija. Iz (10.33) zaključujemo da je ukupna energija jednaka maksimalnoj potencijalnoj, što je također za očekivati. Možemo pitati kolika je prosječna kinetička energija oscilatora tijekom jednog perioda.

$$\overline{T} = \frac{1}{2}Kx_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)_{prosje\check{c}ro} = \frac{1}{2}Kx_0{}^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi))_{prosje\check{c}ro} \tag{10.34}$$

Kako je prosječna vrijednost konstante upravo konstanta, a prosječna vrijednost sinusa i kosinusa po periodu iščezava, to vrijedi:

$$\overline{T} = \frac{1}{4} K {x_0}^2 \qquad (10.35)$$

Identičnom procedurom dobiva se očekivani rezultat koji je za potencijalnu energiju isti kao za kinetičku.

SUSTAV MALO POMAKNUT IZ STABILNE RAVNOTEŽE PONAŠA SE KAO HARMONIČKI OSCILATOR

Neka je α varijabla koja opisuje pomak od ravnoteže. Tada možemo potencijalnu energiju razviti u red:

$$P(\alpha) = P(0) + (\frac{\partial P}{\partial \alpha})\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\alpha^2 + ... \qquad (10.36)$$

Kinetička energija mora biti proporcionalna kvadratu brzine promjene α.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\alpha}^2 \qquad (10.37)$$

U izrazu (10.36) prva derivacija potencijalne energije po varijabli mora iščezavati, jer za dovoljno mali α, minimum ne bi bio u pretpostavljenoj točki $\alpha = 0$.
Tako da u prvoj aproksimaciji imamo za energiju sustava:

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} K \alpha^2 \qquad (10.38)$$

što je strukturno identično s (10.19), jednadžbom harmoničkog oscilatora.
Demonstrirat će se titranje sustava izvedenog iz statičke stabilne ravnoteže koje nije tipa opruge ni njihala.

Slijedeća varijanta harmoničkog oscilatora će biti onaj u kojem postoji gušenje silom trenja.
Kao uvod, razmotriti ćemo posljedice česte pojave u prirodi da je trenje proporcionalno brzini. Intuitivno obrazloženje takvog odnosa smo načinili u odsječku o sili trenja.

TRENJE RAZMJERNO BRZINI

Gibanje tijela kroz sredstvo s kojim je trenje proporcionalno brzini:

$$m\dot{v} = -bv \qquad (10.39)$$

$$\frac{dv}{v} = d(\ln v) = -\frac{dt}{\tau} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \quad \text{gdje je} \qquad (10.40)$$

Integriranjem slijedi:

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (10.41)$$

Kinetička energija tijela tijekom ponašanja (10.41) jest:

$$T = \frac{1}{2} m {v_0}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \qquad (10.42)$$

GRANIČNA BRZINA PADANJA TIJELA

Ako u vertikalno gibanje prema dolje uključimo silu (10.39) imamo:

$$m\ddot{z} = -mg + bv \tag{10.43}$$

Očito se doseže granična brzina kada iščezne akceleracija to jest kada je :

$$v_{graničra} = \frac{mg}{b} = g\tau \tag{10.44}$$

Ovo svojstvo se koristi kod padobrana !

GUŠENI HARMONIČKI OSCILATOR

Uzevši u obzir oblik silu trenja iz (10.39) jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora se proširuje na:

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} \tag{10.45}$$

Uz pokrate:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \quad i \quad \omega_0^{\;2} = \frac{K}{m} \tag{10.46}$$

(10.45) poprima oblik:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^{\;2}x = 0 \tag{10.47}$$

Ovo je vrlo raširena notacija za gušeni harmonički oscilator. Pokušat ćemo pogoditi rješenje oblikom:

$$x = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{10.48}$$

Vremenske derivacije takvog rješenja su:

$$\dot{x} = x_0 e^{-\beta t}(-\beta)\cos(\omega t + \varphi) + x_0 e^{-\beta t}(-\omega)\sin(\omega t + \varphi) \tag{10.49}$$

$$\ddot{x} = x_0 e^{-\beta t}(-\beta)^2\cos(\omega t + \varphi) + x_0 e^{-\beta t}(-\beta)(-\omega)\sin(\omega t + \varphi)\cdot 2 + x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{10.50}$$

Uvrštavanjem ovih derivacija u (10.47) i kraćenjem s zajedničkim faktorom te grupiranjem članova uz sinusne i kosinusne funkcije imamo:

$$\sin(\omega t + \varphi)\cdot(2\beta\omega - \frac{\omega}{\tau}) + \cos(\omega t + \varphi)\cdot(\beta^2 - \omega^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0^{\;2}) = 0 \tag{10.51}$$

Kako su sinus i kosinus nezavisne i neiščezavajuće funkcije gornji je zahtjev moguće ispuniti ako su faktori u zagradama jednaki nuli:

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \tag{10.52}$$

$$\omega^2 = \omega_0^{\;2} - \frac{1}{4\tau^2} \tag{10.53}$$

Tako smo našli rješenje titranja gušenog harmoničkog oscilatora oblika (10.48) , s tim da vrijede izbori konstanti (10.52) i (10.53). S druge strane $x_0\ i\ \varphi$ su integracijske konstante i njihove se vrijednosti određuju prema, na primjer, početnim uvjetima.

Možemo razdijeliti tri osnovne klase rješenja jednadžbe gušenog harmoničkog oscilatora:
Za slučaj $\omega^2 > 0$ imamo doista prigušeno osciliranje, koje amplitudom opada u vremenu.
To je potkritično gušenje.
Kada je $\omega_0^{\;2} = 0$ više i nemamo titranja ; to je takozvano kritičko gušenje.
Konačno je moguće i natkritično gušenje; $\omega^2 < 0$, kada kosinusno titranje prelazi u dodatno hiperboličko ponašanje.

PRISILNO TITRANJE GUŠENOG HARMONIČKOG OSCILATORA

Predavanje počinje demonstracijom sustava matematičkog njihala koji se pogoni periodičkim horizontalnim micanjem objesišta. Ustanovljuje se dramatična ovisnost amplitude rezultatnog titranja o frekvenciji micanja objesišta. Također se tjera harmonički oscilator s oprugom periodičkom prisilom na titranje. Ponovno se nalazi da amplituda titranja dramatično ovisi o frekvenciji sile koja tjera sustav na titranje. Ovo su uvodne demonstracije prisilnog titranja gušenog harmoničkog oscilatora koje nas inspiriraju da diferencijalnu jednadžbu koja slijedi niže pokušamo riješiti harmoničkim (sinusoidalnim ilil kosinusiodalnim oblicima vremenske zavisnosti).

Kada na gušeni harmonički oscilator djeluje vanjska prisila harmoničkog titranja, jednadžba gibanja se modificira:

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \qquad (10.54)$$

Uz pokrate iz prijašnjeg odsječka i pokratu: $\alpha = F_0 / m$ možemo (10.54) pisati:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \alpha_0 \cos \omega t \qquad (10.55)$$

Matematički formulirano, ovo je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima drugog reda koja je uz to nehomogena. Nehomogenošću se naziva član na desnoj strani koji je također zavisan o vremenu. Teorija takvih diferencijalnih jednadžbi pokazuje da se opće rješenje jednadžbe tipa (10.55) može konstruirati iz općeg rješenja homogene jednadžbe (takva je je jednadžba (10.45) i njeno rješenje (10.38)) i jednog rješenja jednadžbe (10.55).

(VIDI NAPOMENU o rješavanju ovakvih diferencijalnih jednadžbi koja slijedi za nekoliko stranica.)

Cilj nam je znači pogoditi to specijalno rješenje. Ono mora titrati frekvencijom ω jer inače ne bi zadovoljavalo jednadžbu (10.55). Stoga ćemo pokušati s formom:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.56)$$

Slijede izrazi za vremenske derivacije:

$$\dot{x} = x_0(-\omega)\sin(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{x} = x_0(-\omega^2)\cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.57)$$

Kada (10.57) uvrstimo u (10.55) i iskoristimo adicijski teorem za trigonometrijske funkcije te grupiramo članove uz sinusni i kosinusni član imamo: uz pokratu zajedničkog faktora:

$$\cos \omega t(-\omega^2 \cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi + {\omega_0}^2 \cos\varphi - \frac{\alpha_0}{x_0}) + \sin \omega t(\omega^2 \sin\varphi - \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi - {\omega_0}^2 \sin\varphi) = 0 \quad 10.58$$

Iz uvjeta da faktor uz sinus iščezava slijedi:

$$tg\varphi = \frac{\omega / \tau}{\omega^2 - {\omega_0}^2} \qquad (10.59)$$

Iz uvjeta da faktor uz kosinus iščezava, slijedi:

$$\frac{\alpha_0}{x_0} = ({\omega_0}^2 - \omega^2)\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi \qquad (10.60)$$

Kombiniranjem (10.60) i (10.59) dobivamo:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}} \qquad (10.61)$$

Očito postoji rješenje oblika (10.56), čije su konstante određene jednoznačno s (10.59) i (10.61) . Također je očito da amplituda tog titranja dramatično zavisi od frekvencije prisile i dostiže svoj maksimum kada pogodimo frekvenciju slobodnog oscilatora. S mnogo više potankosti svojstava harmoničkog oscilatora upoznat ćemo se u trećem semestru : Titranja i valovi. Naime, pri formiranju valova, komponente sustava harmonički osciliraju. Stoga je dobro poznavanje harmoničkog titranja temelj i za razumijevanje valnih fenomena. Nadalje, funkcije sinusa i kosinusa, rješenja slobodnog oscilatora, često se zovu harmonijskim funkcijama ili harmoničkim rješenjima.

Studentima se pokazuje Bartonovo njihalo. Ono se sastoji od fizikalnog njihala relativno velike mase . To masivno njihalo se pušta u pogon. Preko zajedničke osovine fizikalno njihalo postaje izvor harmoničke sile koja tjera niz matematičkih njihala različitih dužina. Opaža se da matematička njihala titraju različitim amplitudama zavisno o duljinama svojih niti. Najveće amplitude imaju njihala čija frekvencija slobodnog titranja odgovara frekvenciji uzbude. Taj se fenomen zove rezonancijom.

SNAGA VANJSKE SILE usrednjene po periodu titranja

Ovo je razmatranje važno radi uočavanja ovisnosti unosa energije u oscilator vanjskom silom o bliskosti frekvencije prisile sa frekvencijom oscilatora, što ima jasne fizikalne posljedice. Kada se u Meksiku desio čuveni razorni potres opažen je fenomen da su porušene upravo one zgrade, čije su dimenzije imale frekvencije titranja razornog vala. Njima je, radi jasne zavisnosti unosa energije u objekt o rezonantnim svojstvima objekta, unošena u titranje najveća energija. Snagu usrednjenu po periodu titranja označit ćemo s P , a proceduru usrednjenja sa znakovima < >, dok se usrednjena veličina postavlja među te znakove:

$$P = < F\dot{x} > = < F_0 \cos \omega t \cdot (-\omega) x_0 \sin(\omega t + \varphi) > \qquad (10.62)$$

$$P = F_0 \frac{\alpha_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}} (-\omega) < \cos \omega t \cos \varphi + \cos^2 \omega t \sin \varphi > \qquad (10.63)$$

Srednja vrijednost kosinusne funkcije po periodu je jednaka nuli (vrijednosti funkcije su jednako pozitivne i negativne tokom perioda). Pri izvodu (10.34) smo pokazali da je

$$< \sin^2(\omega t + \varphi) > = \frac{1}{2} \qquad (10.64)$$

Potpuno analogno se dokazuje

$$< \cos^2(\omega t + \varphi) > = \frac{1}{2} \qquad (10.65)$$

Tako za P imamo međurezultat:

$$P = \frac{1}{2} m \frac{\alpha_0^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2) + (\omega/\tau)^2}} (-\omega) \sin\varphi \tag{10.66}$$

Student lako može verificirati trigonometrijsku relaciju:

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} \tag{10.67}$$

Izraz za tangens faze φ imamo u (10.59) pa ga preko (10.67) možemo supstituirati u (10.66):

$$P = \frac{1}{2} m \frac{\alpha_0^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2) + (\omega/\tau)^2}} (-\omega) \frac{(\omega/\tau) \cdot \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^{\ 2}}}{\dfrac{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)}} \tag{10.68}$$

Nakon sređivanja (10.68) se pojednostavljuje:

$$P = \frac{(1/2) m \alpha_0^{\ 2} \tau}{1 + (\dfrac{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2} = \frac{(1/2) F_0^{\ 2} \cdot (\tau/m)}{1 + (\dfrac{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2} \tag{10.69}$$

Iz (10.69) je razvidno da maksimalna snaga ulazi u sistem na frekvenciji $\omega = \omega_0$, kada nazivnik ima minimalnu vrijednost , a maksimalna snaga je

$$P_{maks} = (1/2) F_0^{\ 2} \cdot (\tau/m) \tag{10.70}$$

ŠIRINA REZONANCIJE

Vrlo se često u fizici postavlja pitanje širine vrha nekog fenomena. U profesionalnoj je upotrebi termin i veličina koji se naziva punom širinom za polovicu maksimuma. Pod tim se podrazumijeva interval vrijednosti varijable (o kojoj promatrana veličina ovisi) , na čijim rubovima zavisna veličina pada na polovicu maksimalne vrijednosti. Veličina se označava kao FWHM (Full Width at the Half of the Maximum). Znajući maksimalnu vrijednost snage prema (10.70) vidimo da su vrijednosti ω one za koje je ispunjeno:

$$(\frac{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2 = 1 \tag{10.71}$$

Odatle slijedi:

$$\frac{\omega}{\tau} = \pm(\omega_0^{\ 2} - \omega^2) \tag{10.72}$$

Rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe dobiva se da je razmak fizikalnih rješenja :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \tag{10.73}$$

što je puna širina na polovici rezonancije (FWHM)

NAPOMENA O RJEŠAVANJU LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI DRUGOG STUPNJA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.

Značenje opisa jednadžbi je slijedeće. U jednadžbi se pojavljuju prva i druga derivacija funkcije ali u prvoj potenciji kao i sama funkcija. Ako je s druge strane linearne kombinacije derivacija i funkcije znaka jednakosti nula, imamo homogenu klasu takvih jednadžbi. Tome ćemo najprije posvetiti pažnju. Ovakve se jednadžbe mogu očito riješiti pretpostavkom da funkcija zavisi eksponencijalno o varijabli. Naime, kada ovu pretpostavku supstituiramo u diferencijalnu jednadžbu i odsepariramo eksponencijalni faktor, na mjestu druge derivacije ostat će kvadrat eksponenta eksponencijalne zavisnosti, na mjestu prve derivacije će ostati sam eksponent, a na mjestu funkcije ostat će faktor 1 . Time se diferencijalna jednadžba transformirala u kvadratnu jednadžbu za eksponent eksponencijalne funkcije. Kako ta jednadžba ima dva korijena, imat ćemo dva linearno nezavisna rješenja. Tu je i objašnjenje zašto smo bili uspješni u konstrukciji harmonijskih i eksponencijalno rastućih ili padajućih rješenja. Ako su rješenja realna, imamo realne eksponencijalne modove. Ako su imaginarna, imamo sinusoidalno i kosinusoidalno ponašanje. Ako su kompleksna, imamo produkt sinusiode i eksponencijale kao kod gušenog oscilatora. Tako se načelno rješava klasa homogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima i dobiva dva nezavisna rješenja, čijim kombiniranje s proizvoljnim konstantama pokrivamo sva moguća rješenja.

Pređimo sada na klasu nehomogenih jednadžbi da bi dokazali našu tvrdnju da se tada rješenje nalazi općim rješenjem homogene jednadžbe, kojem treba dodati jedno rješenje nehomogene. Uzet ćemo za model jednadžbu prisilnog titranja (10.55).

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = \alpha_0 \cos\omega t \qquad (10.55)$$

Nju možemo pisati i preko simboličkog linearnog operatora:

$$L \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^{\,2}\right) \qquad (10.74)$$

Neka su $x_1(t)\; i\; x_2(t)$ dva nezavisna rješenja homogene jednadžbe. Tada vrijedi:

$$Lx_1 = 0 \; i \; Lx_2 = 0 \qquad (10.75)$$

Ako su $C_1 \; i \; C_2$ proizvoljne konstante i linearna kombinacija rješenja je rješenje , to jest:

$$L(C_1 x_1 + C_2 x_2) = C_1 L x_1 + C_2 L x_2 = 0 \qquad (10.76)$$

Ako sada dodamo jedno specijalno rješenje nehomogene jednadžbe (u gornjoj analizi to je rješenje (10.56))), imat ćemo u toj notaciji ukupno rješenje:

$$x_{ukupno} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + x \qquad (10.77)$$

Ako ga uvrstimo u (10.55) imamo:

$$\mathrm{L}(C_1 x_1 + C_2 x_2 + x) = L(C_1 x_1 + C_2 x\;\;) + Lx = 0 + Lx \qquad (10.77)$$

No za Lx imamo radi zadovoljavanja nehomogene jednadžbe

$$Lx = \alpha_0 \cos\omega t \qquad (10.78)$$

Tako x_{ukupno} zadovoljava nehomogenu jednadžbu , a općenito je rješenje jer ima dvije proizvoljne konstante, koje se mogu prilagođavati (početnim) uvjetima na rješenje.

Studenti će vidjeti i Oberbeckovo njihalo (dva identična modela matematičkih njihala povezana međusobno s niti napete lakšim teretom) koje rezonantno uzbuđuju jedno drugo.

Zatim će se studentima još jednom demonstrirati ovisnost amplitude titranja o udaljenosti frekvencije od rezonantne frekvencije kao uvod u razmatranja o širini rezonancije

ŠIRINA REZONANCIJE

Vrlo se često u fizici postavlja pitanje širine vrha nekog fenomena. U profesionalnoj je upotrebi termin i veličina koji se naziva punom širinom za polovicu maksimima. Pod tim se podrazumijeva interval vrijednosti varijable (o kojoj promatrana veličina ovisi) , na čijim rubovima zavisna veličina pada na polovicu maksimalne vrijednosti. Veličina se označava kao FWHM (Full Width at the Half of the Maximum). Znajući maksimalnu vrijednost snage prema (10.70) vidimo da su vrijednosti ω one za koje snaga pada na polovicu maksimalne vrijednosti dane izrazom:

$$\left(\frac{{\omega_0}^2 - \omega^2}{(\omega/\tau)}\right)^2 = 1 \qquad (10.71)$$

Odatle slijedi:

$$\frac{\omega}{\tau} = \pm({\omega_0}^2 - \omega^2) \qquad (10.72)$$

Rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe dobiva se da je razmak fizikalnih rješenja :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \qquad (10.73)$$

što je puna širina na polovici rezonancije (FWHM). Zaključak o razmaku fizikalnih rješenja se lako vidi analizom (10.72). Naime dvije kvadratne jednadžbe imaju svaka po dva rješenja: Ona s pozitivnim predznakom za ω/τ

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + {\omega_0}^2} \qquad (10.72a)$$

a ona s negativnim predznakom za ω/τ

$$\omega_{3,4} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + {\omega_0}^2} \qquad (10.72b)$$

Pozitivne (fizikalno smislene) vrijednosti kružne frekvencije su samo one iz (10.72a) i (10.72b) s pozitivnim predznakom ispred korijena. Njihova je razlika $\Delta\omega$ očito je dana s (10.73).

FAKTOR DOBROTE (Q faktor) OSCILATORSKOG SUSTAVA

U mnogim primjenama oscilirajućih sustava faktor dobrote Q je važna praktična veličina. Intuiciju o njemu možemo dobiti iz dva nezavisna razmatranja. Vratimo se najprije izrazu (10.61) za amplitudu prisilnog titranja i uvrstimo za kružnu frekvenciju $\omega = \omega_0$, dakle rezonantnu vrijednost. Tada se dobije za amplitudu njenu (maksimalnu) vrijednost u rezonanciji:

$$x_0(rezonantno) = \frac{\alpha_0}{(\omega_0 / \tau)} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\tau}{\omega_0} = (\frac{F_0}{m\omega_0^{\,2}}) \cdot (\omega_0 \tau)$$

Izraz u lijevoj zagradi je odstupanje od položaja ravnoteže ako bi na oscilator primijenili stalnu silu F_0. Faktor u drugoj okrugloj zagradi govori nam koliko je puta rezonantna amplituda veća od amplitude postignute stalnom silom. To je upravo faktor dobrote Q.
S druge strane,vremenskom analizom snage unutar perioda titranja može se također pokazati da je $Q/2\pi$ broj titraja, koje čini sustav prepušten sam sebi, potreban da energija u oscilatorskom sustavu padne za faktor 1/e. Naime iz oblika titranja za relativno slabo gušeni oscilator lako se vidi da energija u oscilatoru pada relacijom: $E = E_0 e^{-t/\tau}$. Ako je N broj titraja potreban za pad energije za faktor e , očito $NT = \tau$, gdje je T period titranja; u rezonanciji to je T_0. Ujedno vrijedi $\omega_0 = 2\pi / T_0$. Kombiniranjem dva posljednja izraza slijedi: $N = \frac{\omega_0 \tau}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi}$. To je potvrda drugog svojstva faktora dobrote koji smo gore naveli.
Neki američki udžbenici koriste Q da bi karakterizirali oscilator umjesto parametra τ .

PONAŠANJE FAZE OSCILATORA PRI VARIJACIJI FREKVENCIJE PRISILE

Iz relacije (10.59) vidimo da je za $\omega < \omega_0$ φ negativan. To znači da oscilator kasni za prisilom. U rezonanciji to kašnjenje dosiže vrijednost $\pi / 2$. Za $\omega > \omega_0$ φ mijenja predznak i oscilator je ispred prisile u svom titranju. Ovo ponašanje faza demonstrira se aktivacijom Bartonovog njihala kada oscilatori prođu kroz fazu tranzijenata.

GIBANJE TIJELA U POLJU SILE $\hat{r}C/r^2$

Pod utjecajem takve sile se gibaju otprilike planeti oko Sunca (otprilike jer i oni međusobno djeluju što komplicira stvarne proračune) . I naelektrizirane kugle su pod djelovanjem sile istog analitičkog opisa. Za slučaj privlačne sile Kepler je formulirao tri zakona. Kako ih se često spominje, mi ćemo ih ovdje navesti u poretku koji je on formulirao. Međutim, matematički tretman koji ih opravdava nije po svojoj težini u istom poretku , pa ćemo ih dokazivati / ilustrirati drukčijim redom.

Prvi Keplerov zakon konstatira da su putanje planeta oko Sunca elipse pri čemu je Sunce u jednom od njenih fokusa. Drugi Keplerov zakon kaže da radijus vektori koji idu od Sunca do planete prebrisavaju u jednakim vremenskim razmacima jednake površine. Treći Keplerov zakon govori da se kubovi glavnih osi njihovoh elipsa odnose kao kvadrati perioda njihovih ophodnji.

RADIJALNOST SILE I DRUGI KEPLEROV ZAKON.

Kako su vektor sile $\hat{r}C/r^2$ i radijus vektor položaja planete kolinearni (imaju isti ili suprotni smjer), to je moment sile takvog matematičkog opisa na planet jednak nuli:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times \hat{r}C/r^2 = 0 \tag{11.1}$$

Prema vezi momenta sile i momenta impulsa, vremenska derivacija momenta impulsa jednaka je nuli. To znači da je

$$\vec{r}\times\vec{p} = vektorska\ konst \tag{11.2}$$

Pokazat ćemo da (11.2) upravo iskazuje drugi Keplerov zakon. Naime (11.2) možemo pomnožiti s drugom konstantom: $(1/2m)$ gdje je m masa koja se pojavljuje u impulsu i dobiti novu relaciju:

$$\frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{p} = nova\ konstanta \tag{11.3}$$

Veličina s lijeve strane (11.3) je zapravo brzina prebrisavanje površine koju vrši radijus vektor.

Najprije razmotrimo veličinu:

$$\frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{p} \equiv \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} \tag{11.4}$$

Još od definicije vektorskog produkta pamtimo da je njegovo značenje površina paralelograma zatvorenog s ta dva vektora. Vektorski produkt radijus vektora i brzine kojom se radijus vektor miče je površina paralelograma koju radijus vektor u jedinici vremena tvori svojim kretanjem. Sektorska brzina, to jest brzina prebrisavanja površine od strane radijus vektora je samo polovica površine stvorene prema definiciji vektorskog produkta. Tako (11.4) sektorska brzina radijus vektora planetarnog gibanja i upravo smo dokazali da je stalna. Ovo je karakteristika svih centralnih sila!

OPIS STALNOSTI MOMENTA IMPULSA PREKO POLARNIH KOORDINATA

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{r} \times (m\frac{d\vec{r}}{dt}) = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \qquad (11.5)$$

Kako vektorski produkt jediničnog radijus vektora sa samim sobom iščezava, to preostaje samo:

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\hat{r} \times \hat{\varphi} \qquad (11.6)$$

Naravno to je vektor okomit na ravninu gibanja, no za naša buduća razmatranja iz opisa (11.6) i stalnosti momenta impulsa (11.2) slijedi da je veličina opisana polarnim varijablama:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = konstanta \qquad (11.7)$$

POTENCIJALNA ENERGIJA TOČKASTE MASE U POLJU JEDNOLIKE SFERNE LJUSKE

Razmatranje koje slijedi višestruko je važno. Naime i točkaste mase i točkasti naboji interagiraju kako smo pokazali silama koje možemo karakterizirati potencijalnom energijom proporcionalnom s $1/r$ gdje je r njihova udaljenost. U slijedećem tekstu će se pokazati da je potencijalna energija točkaste mase u odnosu na jednoliko rapoređenu masu po nekoj kugli, dok je točka izvan te sfere ista kakva bi bila potencijalna energija iste točkaste mase kad bi ljuska imala masu koncentriranu u središtu te kugle. U (5.14) smo izveli da je potencijalna energija masa m i M :

$$U = -GMm\frac{1}{r} \qquad (11.8)$$

Neka je masa M razmazana jednoliko po sfernoj ljusci radijusa r . Uočimo diferencijal površine te ljuske da, koji je prstenastog oblika osno simetrično smješten oko pravca između m i središta kugle M . Njegovu masu možemo izraziti kao:

$$dM = \frac{M}{4\pi r^2}da = \frac{M \cdot 2\pi r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta}{4\pi r^2} = \frac{M}{2}\sin\vartheta \cdot d\vartheta \qquad (11.9)$$

U (11.8) kut ϑ je kut između između spomenutog pravca poveznice i radijus vektora koji ide od centra kugle M na prsten mase dM opisane s (11.8). Diferencijal potencijalne energije koji pripada interakciji m s dM je prema gornjem izrazu (11.8) :

$$dU = -G\frac{mdM}{r_1} \qquad (11.10)$$

Udaljenost promatranog prstena od mase m smo označili s r_1 i ona se prirodno pojavljuje u (11.10); sve su točke prstena jednako udaljene od m.
Kosinusni poučak povezuje spomenute veličine:

$$r_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta \qquad (11.11)$$

Razmak središta kugle s masom M i mase m je R u jednadžbi (11.11). Očito da za zadane R i r postoji zavisnost među r_1 i ϑ preko (11.11). Diferenciranjem te jednadžbe tako imamo:

$$2r_1dr_1 = 2Rr\sin\vartheta \cdot d\vartheta \qquad \text{ili} \qquad \sin\vartheta \cdot d\vartheta / r_1 = dr_1/(Rr) \qquad (11.12)$$

Uvrštavanjem (11.9) u (11.10) i korištenjem izraza (11.12) za $\sin\vartheta \cdot d\vartheta / r_1$ dobivamo za diferencijal potencijalne energije:

$$dU = -GmM\,\frac{dr_1}{2rR} \tag{11.13}$$

Ukupnu potencijalnu energiju dobivamo integriranjem doprinosa sviju prstenova pri čemu se integracijaska varijabla mijenja :

a) za slučaj da je m izvan M od R-r do r+R pa je u tom slučaju potencijalne energija:

$$U = -GmM \cdot \frac{1}{2Rr}\int_{R-r}^{r+R} dr_1 = -\frac{GmM}{2Rr}(r+R-R+r) = -GmM/R \tag{11.14}$$

Tako smo dokazali tvrdnju s početka odsječka da je potencijalna energija točkaste mase u polju ljuske mase jednoliko raspoređene po sferi ista kao da je ljuskasta masa sva koncentrirana u središtu sfere.

b) Ako je masa m unutar sfere, tada integracija (11.13) ide od r-R do R+r , što znači da se tijekom proračuna (11.14) zamjenjuju granice integracije, pa izraz u zagradi postaje R+r-r+R i konačni rezultat postaje:

$$U = -\frac{GmM}{r} \tag{11.15}$$

Neočekivano potencijalna energija u untrašnjosti kugle postaje konstanta. Ova činjenica će biti naročito važna u električnim problemima slijedećeg semestra.

Rezultat a) gornjeg razmatranja možemo sa slučaja točkaste mase i sferične jednolike ljuske poopćiti i na slučaj dvije jednolike sferne ljuske pa i na pune kugle. Naime , ako imamo slučaj dvije jednoliko razmazane masene kuglaste ljuske, najprije za svaku točke jedne sfere možemo utjecaj druge sfere svesti na jednu te istu točku: centar te druge sfere. Tada nam je ostao već riješeni problem točkaste druge mase i jednolike ljuske prve mase, što se sada svodi na dvije mase koncentrirane u središtima kugala!

PUTANJA TIJELA U POLJU SILE OPISA $\hat{r}C/r^2$

Kada razmatramo dvije mase koje se privlače, pravilan račun bi išao smjerom koji ćemo kasnije ilustrirati, to jest transformacijom gibanja pojednih masa na opis pomoću koordinata težišta i vektora koji opisuje relativno gibanje. Tako se problem dva tijela reducira na mnogo jednostavniji problem jednog tijela to jest na promatranje ponašanja vektora njihovog relativnog položaja. U slučaju razmatranja Zemlje i Sunca , masa Sunca je bitno veća od mase Zemlje. Stoga se navedeni vektor relativnog položaja može zamijeniti slikom u kojoj Sunce miruje, a Zemlja se giba pod utjecajem Sunčeve gravitacije. U (11.6) smo opisali konstantnost momenta impulsa u polju radijalne sile. Radi toga je moment impulsa stalan ne samo po iznosu , nego i po smjeru. To pak znači da je vektorski produkt vektora položaja koji iz ishodišta (Sunca) pratimo položaj Zemlje i brzine Zemlje stalan po smjeru. To znači da je gibanje Zemlje ograničeno ravninom razapetom radijus vektorom Zemlje i njenom brzinom u jednom trenutku. Zemlja iz te ravnine ne može izaći, jer bi time bilo narušeno sačuvanje vektora impulsnog momenta. Stoga posljedice drugog Newtonovog zakona u slučaju centralne sile možemo razmatrati unutar jedne ravnine. Najpovoljniji je za račun polarni sustav. Korištenjem izraza za akceleraciju, koji smo dobili u (1.42) imamo za navedenu specijalnu silu slijedeću relaciju:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\Big[\ \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \ \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\ \ \Big] = \frac{C}{r^2}\hat{r} \tag{11.16}$$

Ulogu iščezavanja drugog (azimutalnog) dijela akceleracije i njene posljedice smo već utvrdili. Usporedbom radijalnih komponenti slijedi:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{C}{r^2} \tag{11.17}$$

No prema (11.7) se kutna brzina može opisati i uz pomoć modula momenta impulsa L:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \tag{11.18}$$

Uvrštenjem (11.18) u (11.17) imamo jednostavniju diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = \frac{C}{mr^2} \tag{11.19}$$

Ova se diferencijalna jednadžba dade pojednostaviti supstitucijom, pri kojoj vodimo računa da su obadvije veličine : r i nova varijabla u obadvije složene funkcije najprije polarnog kuta φ , a polarni kut zavisi o vremenu t . Supstitucija glasi:

$$r[\varphi(t)] = \frac{1}{u[\varphi(t)]} \tag{11.20}$$

Za vremenske derivacije radijusa slijedi:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{Lu^2}{m} = -\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{L}{m} \tag{11.21}$$

$$\ddot{r} = -\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}\cdot\frac{L}{m} = -\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\frac{L^2}{m^2}\cdot u^2 \tag{11.22}$$

Ako (11.22) uvrstimo u (11.19) i zamijenimo r s u prema (11.20) , a zatim sredimo dobivamo:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{Cm}{L^2} \tag{11.23}$$

Gdje je A integracijska konstanta. Student može lako provjeriti da je rješenje gornje diferencijalne jednadžbe:

$$u = -\frac{Cm}{L^2} + A\cos\varphi \tag{11.24}$$

Također je jasno da je ovo rješenje dobiveno sukladno našem znanju o rješavanju linearnih nehomogenih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima! Sjećajući se veze varijabli r i u (11.20) , imamo stazu tijela:

$$\frac{1}{r} = -\frac{Cm}{L^2} + A\cos\varphi \tag{11.25}$$

Načinit ćemo posebnu analizu analitičkog opisa krivulje (11.25) i pokazati da ona predstavlja jednadžbu čunjosječnice; krivulje koja u Kartezijevim koordinatama jest zapisana preko polinoma drugog stupnja. U stvari ovo je generalni zapis za presjeke plašta stošca s ravninom. Mogući presjeci su elipsa, parabola i hiperbola. Kružnica je naravno specijalni slučaj elipse.

ANALIZA POLARNE JEDNADŽBE ČUNJOSJEČNICE

Krećemo od rezultata (11.25). U njemu ćemo uvesti nove parametre umjesto starih kako bismo imali izraz u kojem parametri imaju bolju geometrijsku interpretaciju.

$$s = -\frac{1}{A} \tag{11.26}$$

$$e = \frac{AL^2}{Cm} \tag{11.27}$$

Time (11.25) postaje:

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{e} - \cos\varphi \tag{11.28}$$

Ovo je oblik koji je standardiziran u analitičkoj geometriji. Prijelazom na Kartezijeve koordinate pokazat ćemo da je (11.28) jednadžba jedne od navedenih krivulja. U Kartezijevim koordinatama se (11.28) piše kao:

$$\frac{s}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{e} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ili \quad \frac{s+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{e} \tag{11.29}$$

Ako se u desnom izrazu (11.29) riješimo nazivnika i rezultat kvadriramo imamo:

$$e^2s^2 + e^2 \cdot 2sx + e^2x^2 = x^2 + y^2 \tag{11.30}$$

Regrupiranjem i jednostavnim operacijama imamo slijed:

$$x^2(1-e^2) - 2sxe^2 + y^2 = e^2s^2 \tag{11.31}$$

$$x^2 - \frac{2se^2}{1-e^2}\cdot x + \frac{s^2e^4}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2s^2}{1-e^2} + \frac{s^2e^4}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2s^2}{(1-e^2)^2} \tag{11.32}$$

$$(x - \frac{se^2}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2s^2}{(1-e^2)^2} \tag{11.33}$$

Sada pretpostavljamo da student zna oblike opisa čunjosječnica u centralnom obliku:

ELIPSA:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

HIPERBOLA:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

PARABOLA:

$$y^2 = 2px$$

Na temelju tog znanja možemo nastaviti diskusiju oblika putanje (11.33) koju smo dobili za izabrani oblik centralne sile .

Ako je 0<e<1 , tada je prema (11.33) putanja elipsa.
Ako je e>1, tada je putanja hipoerbolična .
Ako je e=1 (moramo jednadžbu prije analize pomnožiti s $(1-e^2)^2$) dobivamo parabolu.
U slučaju privlačne sile imamo eliptičnu putanju, koja u graničnom slučaju prelazi u parabolu. Kod odbojne sile putanja je hiperbolična. Ovo student može provjeriti povratkom na značenje originalnih parametara i njihovu vezu s geometrijskim parametrima.

Time smo dokazali prvi od Keplerovih zakona. Treći Keplerov zakon smo ilustrirali na primjeru kružnog gibanja i ovdje ga ne ćemo dalje proširivati.

REDUKCIJA PROBLEMA GIBANJA DVA TIJELA POVEZANIH MEĐUSOBNOM SILOM NA OPIS EKVIVALENTAN PROBLEMU JEDNOG TIJELA U POLJU SILE

Imamo tijela masa $m_1\, i\, m_2$ s radijus vektorima $\vec{r}_1\, i\, \vec{r}_2$. Sila koja među njima djeluje ima analitički opis zavisan o njihovom relativnom položaju: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Tako za opis problema imamo vezane difrencijalne jednadžbe:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad (11.34)$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad (11.35)$$

Sjetimo se središta tromosti i relativnog položaja iz problema sudara:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \qquad (11.36)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (11.37)$$

Zbrajanjem (11.34) i (11.35) slijedi:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \qquad \text{što je ekvivalentno s } \ddot{\vec{R}} = 0 \qquad (11.38)$$

Težište sustava se giba jednoliko početnom brzinom!
Odbijanjem relacija (11.34) od (11.35) imamo:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1} + \frac{F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_2} \qquad (11.39)$$

Ako se podsjetimo reducirane mase $\mu_{12} = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$ (11.49)
možemo sjećajući se (11.37) napisati:

$$\mu_{12}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad (11.50)$$

Formalno gledajući ovo je upravo jednadžba gibanja čije rješavanje opisuje gibanje tijela mase μ_{12} u polju sile $\vec{F}$. Pri vizualiziranju događanja student treba imati na umu da vektor relativnog položaja prolazi središtem mase , da su dva tijela obadva udaljena od središta mase dok su njihove udaljenosti od središta mase obrnuto proporcionalna njihovim masama. Kako vrijeme teče, razmak se mijenja i duljinom i orjentacijom, ali uvijek tako da su odmaci od položaja središta mase obrnuto proporcionalni masama. Tako se obadva tijela gibaju! Međutim kada je masa jednog od njih tako velika u odnosu na drugu (slučaj Zemlja Sunce) gibanje velike mase se u praksi može zanemariti.

R E L A T I V I S T I Č K A   M E H A N I K A

UVOD:

Nakon suštinskog razumijevanja Newtonovske mehanike, relativistička je mehanika slijedeći koncepcijski izazov studentu fizike . Dva su tome razloga:

1) Fenomeni relativističke mehanike su daleko od naših dnevnih iskustava jer se dešavaju pri brzinama koje su u redu veličine brzine svjetlosti.
2) Za teorijsko utemeljenje relativističke mehanike potrebno je uz prihvaćanje činjenice da je brzina svjetlost ista u svim inercijskim sustavima prihvatiti i visok stupanj apstrakcije s različitim vremenima raznih sustava i linearnosti veza prostorno-vremenskih koordinata.

POVIJEST MJERENJA BRZINE SVJETLOSTI

Olaf Roemer je 1676 godine zaključivao o brzini svjetlosti prateći gibanje Jupiterovog satelita Io. Dobivši kvalitetan rezultat za frekvenciju obilaska, ustanovio je da se ponavljanje iste pozicije Io u odnosu na Jupiter javlja sve kasnije kako se Zemlja udaljava od Jupitera. Mjereći to vremensko odstupanje (naprimjer zalaska Io za Jupiter) za minimalni i maksimalni razmak Zemlje i Jupitera dobio je podatak o tome koliko dugo svjetlost putuje tom razlikom razmaka Zemlje i Jupitera . Odatle je dobio prvu informaciju da svjetlost ne ide beskonačno brzo i informaciju koja je otprilke ta brzina. J. Bradley je opažao razliku kuta pod kojim se zvijezda stajačica opaža zavisno od toga da li je Zemljino kretanje u smjeru ili protivno smjeru zvijezde. Fizeau je rotirajućim zupčastim kotačem prekidao svjetlost , postavio na putu od otprilike 8,6 km zrcalo i opažao pri kojoj brzini rotacije reflektirana zraka nailazi na nazubljeni dio nakon što je u pravcu zrcala prošla kroz otvor između dva zuba. Slična je bila i Foucaltova metoda koji je umjesto zubaca koristio rotirajuća zrcala. Michelson je velikim putem od 2x22 milje došao u domenu veće točnosti za brzinu c $\approx 2{,}99\times 10^8$ m/s.

TEORIJSKI SIGNAL U SMJERU NEZAVISNOSTI BRZINE SVJETLOSTI O SUSTAVU

Elektrodinamika, koju studiramo slijedeći semestar prekrasno daje ujedinjeni i neproturječan opis elektromagnetskih fenomena. Već smo konstatirali princip da fizikalni zakoni ne bi smjeli zavisiti o sustavu. Maxwellove jednadžbe također ne zavise o sustavu. No iz Maxwellovih jednadžbi slijedi numerička vrijednost brzine svjetlosti koja je tako u njih ugrađena. Time i ta numerička brzina treba biti konstanta. Povijesno, ovo nije bila baza za relativističku mehaniku, ali studentima može biti dodatni argument za teško prihvatljivu eksperimentalno ustanovljenu neovisnost brzine svjetlosti o sustavu.

TEORIJA ETERA I POKUŠAJ USTANOVLJENJA BRZINE SVJETLA PREMA ETERU

U doba pred rad Einsteina, vjerovalo se da je eletromagnetski val fenomen na sredstvu nazvanom eter, kao što je zvuk titranje zraka. Ako je brzina svjetla u eteru c, tada bismo kretanjem ususret svjetla trebali vidjeti da svjetlosni fenomen putuje brzinom v+c gdje je v brzina gibanja prema eteru. Slično bi pri gibanju u suprotnom smjeru trebali vidjeti brzinu c-v. Michelson i Morley su eksperimentalnu demonstrirali da gibanje Zemlje ne utječe na eksperimentalni rezultat mjerenja brzine svjetlosti. Ovdje ćemo iznimno morati pretpostaviti da student zna što je fenomen interferencije svjetlosti. Ako općenito valu koji dolazi iz istog izvora dozvolimo da se kreće dvjema stazama različitih duljina, kada valove ponovno

združimo, oni ce se pojačavati ako je razlika putova cijeli broj valnih dužina, a poništavati ako je razlika putova pola valne dužine. Michelson i Morley rascijepili su svjetlost polupropusnim zrcalom (pola intenziteta se reflektira a pola prolazi zrcalom). Jednu su zraku pustili smjerom „eterskog vjetra“ (to jest suprotno gibanju Zemlje) , a drugu okomito na taj smjer. Tada su na istu udaljenost od polupropusnog zrcala postavili prava zrcala. Svjetlost reflektirana na dva prava zrcala natrag na polupropusno zrcalo se sada preko polupropusnog zrcala slala na leću koja je tu ujedinjenu svjetlost koncentrirala u fokus. Tu se sada trebao dešavati interferencijski efekt zavisan od toga kolika je razlika putova zrake koja je išla niz i uz „eterski vjetar“ i zrake koja je išla okomito na „eterski vjetar“. Proračun razlike vremena za dvije različite putanje teče ovako.
Za zraku koja je išla niz i uz vjetar: uz oznaku l za razmak polupropusnog i realnog zrcala:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c+v} \tag{12.1}$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c-v} \tag{12.2}$$

Zakašnjenje te zrake jest:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = l(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}) = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-(v/c)^2} \tag{12.3}$$

Kod okomite zrake trebamo uočiti da za vremenski interval Δt_3 zraka okomita na „eterski vjetar“ putuje put l u vertikalnom smjeru i put $v\Delta t_3$ u smjeru vjetra a u smjeru hipotenuze ta dva gibanja prelazi put $c\Delta t_3$. Po Pitagorinom poučku slijedi veza hipotenuze i kateta:

$$l^2 + (v\Delta t_3)^2 = (c\Delta t_3)^2 \tag{12.4}$$

Odatle slijedi:

$$\Delta t_3 = \frac{l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{12.5}$$

Isti takav vremenski interval je potreban povratnoj zraci:

$$\Delta t_4 = \Delta t_3 \tag{12.6}$$

Tako je razlika u vremenu dolaska dvije zrake natrag na polupropusno zrcalo:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 - 2\Delta t_3 = \frac{2l}{c}\left[\frac{1}{1-(v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] \tag{12.7}$$

Množenjem s c (12.7) razlika vremena dolaska pretvara se u razliku prevaljenih puteva. Ta razlika puteva se trebala manifestirati kroz interferencijski fenomen, što se nije desilo. Detaljniji opis tog aspekta ide ovako. Ako se aparatura kojom smo gledali fenomen zarotira za 90 stupnjeva, i tada gleda razlika putova u odnosu na gornju, tada je ukupna razlika dvije konfiguracije 2cx vremenski interval (12.7). (ako još u (12.7) upotrijebimo činjenicu da je v mnogo manji od c, tada je razlika puteva za nerotiranu i rotiranu konfiguraciju:

$$\Delta = \frac{4l}{c}\left[\frac{1}{1-(v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] \approx 2l\frac{v^2}{c^2} \tag{12.8}$$

Ova se udaljenost trebala usporediti s valnom duljinom upotrijebljenog svjetla da se ispita postoji li fenomen interferencije. Kvocijent gornje razlike putova podijeljen s valnom duljinom daje nam informaciju za koliki dio valne dužine se dvije konfiguracije razlikuju.

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2l}{c}(\frac{v}{c})^2 \tag{12.9}$$

Uvrštenjem konkretnih brojeva za Michelson Morley aparaturu taj je kvocijent treba iznositi oko 0,4. To znači ako smo u jednoj konfiguraciji Michelsonovog uređaja imali maksimalni intenzitet u fokusu leće, tada bi u zarotiranoj konfiguraciji trebali imati praktički minimum. Michelson- Morley uređaj međutim nije registrirao nikakvu razliku. Naprotiv, dokazao je da se bez obzira da li brzinu svjetla mjerimo u smjeru gibanja Zemlje ili okomito na taj smjer, potrebno vrijeme jest isto i gibanje Zemlje ne utječe na ishod mjerenja.

DANAS POZNATA SVOJSTVA BRZINE SVJETLOSTI

a) Brzina širenja elektromagnetskih valova u slobodnom prostoru ne zavisi o frekvenciji
b) Brzina svjetlosti ne zavisi o brzini izvora ili opažača
c) Nije moguće prenošenje čestica ili poruka brzinom većom od brzine svjetlosti
d) Brzina svjetlosti je ugrađena u Maxwellove jednadžbe. Kako one nisu ovisne o sustavu nije ni brzina svjetlosti

EKSPERIMENTALNA DEMONSTRACIJA DA JE GRANIČNA BRZINA GIBANJA c

Elektroni su ubrzavani stalnim električnim poljem, čime se znala energija koju su akceleracijom dobili. Studenti koji imaju elementarno poznavanje električnih pojava (a mi smo to također pokazali pri demonstraciji rješavanja Newtonovih jednadžbi u električnom polju) znaju da pri prolazu kroz električno polje jakosti E , na duljini l elektron naboja q dobiva energiju qEl . U nerelativističkoj mehanici to ide u kinetičku energiju dobro poznatom relacijom:

$$qEl = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12.10}$$

Prema (12.10) brzina elektrona bi se mogla neograničeno povećavati dizanjem njegove energije. U navedenom pokusu mjerena je i brzina elektrona jednostavnom metodom proleta. Mjereno je vrijeme potrebno da elektron prevali put između dva detektora. Nakon tog mjerenja provedeno je još jedno kontrolno mjerenje energije elektrona. Naime pratilo se koliko elektronski snop grije metu u kojoj se zaustavlja. Najprije je utvrđeno da elektronu doista možemo kontrolirano i provjereno dizati energiju. S druge strane, njegova brzina brzo odstupa od očekivanja (12.10) kada se energija elektrona poveća u područje reda veličine

$$E = m_e c^2 \tag{12.11}$$

Gdje je m_e masa mirovanja elektrona. Zaključak je eksperimenta dvojak . Relacija (12.10) ne vrijedi za velike brzine. Eksperiment je također pokazao da se dizanjem energije diže i dalje brzina elektrona ali samo asimptotski prema brzini c. Ovaj je eksperiment demonstrirao fizičar W. Bertozzi! Ovaj eksperiment nije bio poznat u Einsteinovo vrijeme i spominjemo ga samo zato da studenti budu svjesni da danas postoje vrlo snažni dodatni eksperimentalni dokazi svi u smjeru potvrde Einsteinove specijalne teorije relativnosti.

OSNOVNE TVRDNJE SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

1) Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijskim sustavima
2) Prostor je homogen i izotropan, a vrijeme u svakom inercijskom sustavu teče jednoliko
3) Osnovni fizički zakoni su isti za dva opažača koji se gibaju stalnom relativnom brzinom

Studenti mogu imati problema s činjenicom da gornje tvrdnje vode na intuitivno neočekivane rezultate. Stoga su neki skloni u njih sumnjati. S vremenom ipak prihvaćaju da je stalnost brzine svjetlosti eksperimentalna činjenica, a da je homogenost i izotropnost vremensko-prostorog sustava jedina moguća početna pretpostavka.
EINSTEINOV VLAK : INDIKACIJA PROBLEMA S ISTOVREMENOSTI U DVA RAZNA SUSTAVA

Zamislimo da smo putnik u vlaku koji ide određenom brzinom. Ako u sredini vlaka bljesne svjetlo, prema gornjim pretpostavkama 1) i 3) , svjetlosni signal treba istovremeno dospjeti do obadva kraja vlaka. Ako smo putnik izvan vlaka, koji miruje dok vlak putuje, jasno je da ćemo opaziti da je svjetlo prije došlo do kraja vlaka koji se (izvana gledajući približava , a kasnije do kraja vlak koji se od mjesta bljeska udaljava. I OBADVA OPAŽAČA MORAJU BITI U PRAVU. Einstein uočava da nešto nije u redu s konceptom istovremenosti. Što je istovremeno u jednom sustavu, nije istovremeno u drugom sustavu. VREMENA u raznim sustavima teku RAZLIČITO.

IZVOD LORENTZOVIH TRANSFORMACIJA

Pretpostavimo da imamo dva inercijska sustava S i S' . Pri tome su sve njihove osi paralalne. Sustav S' se giba na desno(u smjeru pozitivne x osi) brzinom v u sustavu S. Radi pretpostavke 2). veza između prostornih i vremenskih koordinata dva sustava mora biti linearna . Ako to ne bi bilo ispunjeno, postojala bi nejednolikost toka vremena ili nehomogenost prostora. Najopćenitija linearna veza jest:

$$x = ax'+bt' \tag{12.12}$$

$$t = dx'+et' \tag{12.13}$$

Konstante a,b,d,e treba odrediti. Zasada imamo informaciju da sustav S' putuju jednoliko brzinom v . Dozvoljeno nam je podesiti satove tako da u trenutku kada se ishodišta dva sustava poklope počinjemo mjeriti vrijeme:

$$x(0) = 0 = x'(0) \tag{12.14}$$

Promatrajmo sada gibanje ishodišta (x'=0) u sustavu S. Njegova vremensko prostorne koordinate se ponašaju kao:

$$x = bt' \quad t = et' \tag{12.15}$$

No ta točka putuje brzinom v pa vrijedi prema (12.14):

$$v = \frac{x}{t} = \frac{b}{e} \tag{12.16}$$

To je prva relacija među nepoznatim koeficijentima.
Obrnutim izborom koordinate $x = 0$ koja se giba u S' ulijevo , znači ima brzinu –v istim putem dobivamo:

$$-v = \frac{x'}{t'} = -\frac{b}{a} \tag{12.17}$$

Iz (12.16) i (12.17) imamo :

$$a = e \tag{12.18}$$

i

$$b = va \tag{12.19}$$

S gornjim imamo veze među koordinatama s manjim brojem konstanti:

$$x = ax'+avt' \tag{12.20}$$

$$t = at'+dx' \tag{12.21}$$

Ako u vrijeme kada ishodišta koincidiraju (12.14) pustimo svjetlosni signal iz ishodišta, mora vrijedit,i dok se signali šira duž x-osi, radi iste vrijednosti brzine svjetlosti u dva sustava:

$$x^2 = c^2 t^2 \tag{12.22}$$

$$x'^2 = c^2 t'^2 \tag{12.23}$$

Uvrštenjem (12.20) i (12.21) u (12.22) imamo:

$$a^2 x'^2 + 2a^2 v x' t' + a^2 v^2 t'^2 = a^2 t'^2 c^2 + 2at' d x' c^2 + d^2 x'^2 c^2 \tag{12.24}$$

Relacije (12.23) i (12.24) trebaju biti konzistentne. Znači da se koeficijenti uz iste potencije varijabli x' i t' mogu izjednačiti.

$$a^2 - c^2 d^2 = 1 \tag{12.25}$$

$$2a^2 v = 2adc^2 \tag{12.26}$$

Iz (12.26) računamo d:

$$d = \frac{av}{c^2} \tag{12.27}$$

Uvrštenjem (12.27) u (12.25) dobivamo relaciju za koeficijent a:

$$a^2 - \frac{a^2 v^2}{c^2} = 1 \tag{12.28}$$

Odatle slijedi vrijednost :

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{12.29}$$

Kombiniranjem (12.27) i (12.29) imamo i vrijednost za d :

$$d = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.30}$$

Tako Lorentzove transormacije među x koordinatama glase:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.31}$$

A među vremenima:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.32}$$

Ovo je povijesni Einsteinov zahvat kojim je modificirao našu predrasudu o apsolutnom vremenu. Svaki sustav ima svoje vrijeme. To vrijeme unutar sustava se može sinkronizirati slanjem svjetlosnog signala, za koji znamo kojom brzinom putuje tako da unutar svakog sustava možemo imati jedinstveno vrijeme. Vremena u različitim sustavima mogu se samo uspoređivati preko Lorentzovih transformacija (12.31) i (12.32) koje se naravno mogu generalizirati i na slučajeve da signali ne putuju samo duž x osi. To je vrlo lagano učiniti. Naime pokazat ćemo da se u slučaju translacije sustava duž x-osi komponente u dva sustava u transverzalnom smjeru ne razlikuju .

$$y = y' \qquad z = z' \tag{12.33}$$

Gornju tvrdnju ćemo dokazati putem koji je Einstein često koristio, naročito u svojoj korespondenciji s N. Bohrom; misaonim eksperimentom. (U misaonom eksperimentu zamišljamo pokus , čiji nam je ishod očit na temelju našeg znanja fizike, iako je sam pokus u sadašnjem tehnološkom okruženju praktički neizvedljiv). Neka se u sustavu S nalazi štap duljine L u smjeru y osi . Neka se u sustavu S' u smjeru paralelne osi y' nalazi štap iste duljine L. Neka se sustavi S i S' nalaze u stanju relativnog gibanja kako je gore opisano; znači samo duž osi x/x' . Ako ne bi vrijedila jednakost y koordinata, jedna od veličina y,y' bila bi manja. To bi značilo da možemo zaključiti slijedeće: šiljak na kraju skraćenog štapa bi ostavio posjekotinu na dužem štapu. No svi inercijski sustavi su ravnopravni. Promatrajući događaj sa stanovišta drugog sustava, relacija kraći-duži bi bila obrnuta. Naravno nije moguće da je jedan te isti štap istovremeno i dulji i kraći od drugog. Tako smo tvrdnju (12.33) dokazali. U uzdužnom smjeru takvo zaključivanje ne će biti moguće. Student treba uočiti , kako ne bi bio zbunjen, da u slučaju uspoređivanja duljina transverzalnih štapova, obadva se kraja štapa susreću s odgovarajućim krajevima štapova u drugom sustavu U ISTOM TRENUTKU. To pak ne će biti slučaj kada štapovi budu položeni paralelno smjeru relativnog gibanja.

Konačni rezultat za analitičku povezanost vremensko-prostornih koordinata inercijskih sustava S i S' koji se međusobno kreću relativnom brzinom v duž osi x kako je to opisano na početku jest:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.34)$$

Ovo su čuvene Lorentzove transformacije. Korektno je spomenuti da je analitički oblik transformacija u prostornom dijelu bio predlagan i prije Einsteina. No Einstein je bio taj koji je načinio radikalni zahvat na kritici apsolutnog vremena, pridijeli je svakom sustavu njegovo vrijeme i za vremena u različitim sustavima da analitički izraz za njihovu povezanost. Time prividno jesu mogući razni paradoksi. Na primjer slijed istih događaja u raznim sustavima ne mora biti identičan. Pokazuje se međutim da je to posebna klasa događaja, koji su prostorno toliko udaljeni, da svjetlosni signal ne stigne doprijeti od jednog do drugog da bi prenio bilo kakvu informaciju. Drugim riječima, takvi događaji se fizikalno ne mogu povezati! U tom slučaju vremenski odnos takva dva događaja i nema fizikalnih posljedica!

Radi analiza fenomena skraćivanja duljine i dilatacije vremena od interesa su nam i transformacije obratne od (12.34), to jest one u kojima veličine S' sustava pišemo pomoću veličina S sustava. Te obratne transformacije možemo dobiti počevši s izvodom od (12.12) do (12.34) s time da zamijenimo uloge S i S' koordinata. Pri tome su prirodno zamjenjuje i predznak relativne brzine v. Tako obratne transformacije glase:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.35)$$

SKRAĆIVANJE DULJIINE ŠTAPA KOJI SE GIBA OPAŽENO IZ MIRNOG SUSTAVA.

Pokazat ćemo da se štap koji u S' sustavu miruje i ima određenu duljinu u sustavu S u kojem se štap giba ima kraću duljinu. Najprije moramo naučiti ispravno govoriti o duljini objekta u nekom sustavu. To je razmak (razlika koordinata, ako je duljina duž jedne koordinatne osi) ustanovljen u jednom trenutku. Neka znači štap miruje u S' tako da su mu krajevi $x_1'\ i\ x_2'$.
Tada je njegova vlastita, prava duljina:

$$L_0 = x_2' - x_1' \qquad (12.36)$$

Promatrajmo sada objekt (štap) koji miruje u S' u sustavu S. Neka su satovi podešeni tako da je u trenutku susreta ishodišta sustava $t' = t = 0$. Prema (12.35) računamo prostorne koordinate S' sustava:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.37)$$

Duljina štapa u sustavu S dobiva se usporedbom x koordinata krajeva štapa za identična vremena:

$$t_2 = t_1 \qquad (12.38)$$

Ako u razliku koordinata iz (12.37) uvrstimo (12.38) dobivamo:

$$x_2' - x_1' = L_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.39)$$

Kako je L razlika koordinata uz istovremenost u sustavu S (relacija (12.38), to predstavlja dužinu štapa u sustavu S. Direktna posljedica (12.39) jest:

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (12.40)$$

Kako je numerička vrijednost korijena na desnoj strani (12.40) uvijek manja od 1, štap koji prolijeće sustavom ima duljinu manju od duljine u sustavu u kojem miruje.

Edukativna napomena. Mnogi američki udžbenici na ovom mjestu testiraju razumijevanje relativistike na slijedeći način. Neka štap dulji od zgrade(s dvoma vratima postavljenim jednima nasuprot drugima) prolijeće zgradom brzinom bliskom svjetlosti. Da li se istovremenim zatvaranjem vrata , u trenutku dolaska prednjeg kraja štapa do stražnjih vrata, može konstatirati da je cijeli štap (iako u svom sustavu mirovanja dulji od zgrade) nalazi sav u zgradi??? Šokantan odgovor je potvrdan, ako je brzina štapa dovoljno visoka da bi prema (12.40) stao u zgradu. Naravno, nakon istovremenog zatvaranja vrata, zadnja vrata se moraju smjesta i ponovno otvoriti, kako se štap-projektil ne bi zabio u zatvorena vrata.

USPORAVANJE SATA

Ovo je još jedan relativistički fenomen koji s jedne strane uznemiruje našu intuiciju, no s druge strane ovdje imamo direktnu potvrdu da su relativistički proračuni eksperimentalno u skladu s procesima opaženim u prirodi! Neka se sata nalazi u sustavu S' u stanju mirovanja. Neka je registrirao da je između dva događaja protekao vremenski period τ . Situaciju možemo preko relativističkih koordinata opisati kao:

$$x_2' = x_1' \qquad (12.41)$$

Sat se nije micao u S' .

$$t_2' - t_1' = \tau \qquad (12.42)$$

Proteklo vrijeme je po našoj definiciji τ. Upotrijebit ćemo sada (12.34) i to u njenom vremenskom dijelu izražavajući preko koordinata S' vremena u sustavu S:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.43}$$

Odbijanjem izraza za t_1 od izraza za t_2 u (12.43) i korištenjem (12.41) slijedi:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.44}$$

Kako je nazivnik u (12.44) manji od jedinice, to znači da opažač u sustavu u kojem sat putuje registrira veći vremenski razmak. Vrijeme teče najbrže u sustavu u kojem opažač/sat miruje. To se vrijeme naziva i vlastitim vremenom sustava. Ova pojava usporenja sata se i eksperimentalno opaža. Jedna od temeljnih čestica, mion, raspada se dobro definiranim vremenom raspada u mirnom sustavu. No kada imamo snop miona dobro definirane brzine, možemo izmjeriti da se vrijeme raspada produljuje upravo prema (12.44). Nadalje, na temelju relacije (12.44) prenose se snopovi nestabilnih čestica velikih brzina preko udaljenosti od više stotina metara, iako bi se pri maloj brzini transporta raspali već na centimetarskim udaljenostima.

SVJETLOSNI SAT:

Neka u S' imamo slijedeći satni mehanizam. Postavljena su dva planparalelna ogledala. (Značenje riječi: ogledala su isječci dvije paralelne ravnine.) Neka su postavljena tako da su im središta na okomici dviju ravnina. Ako s jednog od zrcala emitiramo zraku okomito na zrcalo,svjetlost će se trajno reflektirati među njima. Ako je razmak među ravninama L, tada za jedan odlazak svjetlosne zrake od početnog zrcala i njezin povratak na isto zrcalo treba vrijeme:

$$\tau = \frac{2L}{c} \tag{12.45}$$

To možemo smatrati vremenskim etalonom svjetlosnog sata i vremenski interval određivati prema tome koliko je titraja načinio svjetlosni sat u ispitivanom intervalu! Na punoj je liniji našeg proučavanja ispitati, koje vrijeme opaža da je potrebno za odlazak i povratak promatrač, u čijem se sustavu svjetlosni sat giba brzinom v paralelno ravninama zrcala. Možemo sada izračunati vrijeme koje registrira opažač dok svjetlosni sat prolijeće pokraj njega potrebno za jedan titraj sata. Svjetlo u jednom smjeru sada putuje katetom trokuta kojeg čine razmak zrcala L i put koji prevali zrcalo u vrijeme t/2 putujući brzinom v, gdje je t vrijeme potrebno za put od jednog do drugog zrcala, a kako ga registrira mirni opažač. Dakle :

$$(ct/2)^2 = L^2 + (vt/2)^2 \tag{12.46}$$

Odatle možemo izračunati t :

$$t = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.47}$$

Vidimo da svjetlosni sat usporava kako smo upravo predvidjeli razmatranjem o usporavanju sata (12.44).

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE BRZINE:

U nerelativističkoj fizici brzine su se transformirale među inercijskim sustavima vrlo jednostavno. Brzini u jednom sustavu trebalo je (vektorski) dodati samo relativnu brzinu među sustavima. Ta je jednostavnost potjecala od pretpostavke jednog, jedinstvenog, apsolutnog vremena koje jednoliko i istom brzinom teče u svim inercijskim sustavima. Einstein nam je pokazao da tome nije tako. Kako se, relativistički, pomak i vrijeme različito i separatno transformiraju to je nažalost veza brzina u raznim sustavima mnogo zamršenija. Ispostavit će se da to ima dalekosežne posljedice. Globalno gledajući, relativističke transformacije brzina natjerat će nas na specifičnu definiciju impulsa, koja će se moći interpretirati i kao promjenljivost mase objekta zavisno o brzini objekta.

Početne relacije u našem razmatranu su veze među prostorno-vremenskim koordinatama (12.34) ; sada dobro poznate Lorentzove transformacije. Ako pratimo događaj u sustavu S od početnih koordinata objekta : (x,y,z,t) , nakon vremenskog diferencijala dt , koordinate istog objekta će imati iznose: (x+dx,y+dy,z+dz,t+dt). Kao i do sada brzine su:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{12.48}$$

Analogno su brzine u sustavu S':

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad v_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{12.49}$$

Uzimajući dx' i dt' u relacijama (12.34) kao slobodne , nezavisne diferencijale, možemo prema (12.34) napisati i odgovarajuće izraze za dx, dy, dz, dt:

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.50}$$

Uvrštavanjem diferencijala iz (12.50) u izraze (12.48) dobivamo izraze za pojedine komponente brzina:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}} \tag{12.51}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v_y'}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{12.52}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v_z'}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{12.53}$$

Očito su veze među brzinama u relativističkoj mehanici vrlo kompleksne. Brzine se ne dobivaju jednostavnim vektorskim zbrajanjem. Dapače, u transformaciji jedne komponente, konkretno u transformacijama transverzalnih brzina, učestvuje i longitudinalna komponenta brzine!

DOPPLEROV EFEKT

Klasični Dopplerov efekt je fenomen u kojem se frekvencija učestalosti signala emitiranih jednom frekvencijom pri opažanju detektorom mijenja radi relativnog kretanja izvora bilo s obzirom na detektor ili s obzirom na sredstvo. Klasični Dopplerov efekt podrazumijeva i nerelativističke uvjete i širenje signala putem sredstva-medija za propagaciju (širenje) signala.

Potpuno općenite okolnosti , u kojima se vektori gibanja izvora i detektora nalaze u proizvoljnom odnosu ćemo pojednostavniti na jednodimenzionalni slučaj. Neka je u vrijeme t=0 razmak između izvora i detektora bio jednak a . Označimo s $v_d \; i \; v_i$ brzine detektora i izvora. Neka je u $t = t_i$ emitiran puls signal iz izvora .Taj signal je detektiran u detektoru koji se giba u vrijeme $t = t_d$.

Ako je u t=0 izvor u ishodištu, detektor je na udaljenosti a. U vrijeme emisije signala izvor je na položaju $v_i t_i$, a detektor je na položaju $v_i t_i + a$. Kako signal putuje do detektora konačnom brzinom v_z to će biti detektiran u detektoru u vrijeme iza emisije : t_d . Tako signal treba ukupno prevaliti put: $a + v_d t_d - v_i t_i$ krećući se brzinom v_z vrijeme $t_d - t_i$. Znači,

$$a + v_d t_d - v_i t_i = v_z (t_d - t_i) \tag{12.54}$$

Slijedeći puls se emitira nakon vremenskog razmaka pulsova u izvoru Δt_i a kasni za prvim pulsom u detektoru za Δt_d . Tako imamo novi odnos konstruiran na način (12.54) :

$$a + v_d (t_d + \Delta t_d) - v_i (t_i + \Delta t_i) = v_z (t_d + \Delta t_d - t_i - \Delta t_i) \tag{12.55}$$

Odbijanjem relacije (12.54) od (12.55) slijedi:

$$(v_z - v_i)\Delta t_i = (v_z - v_d)\Delta t_d \tag{12.56}$$

Tako za vremenski razmak pulsova (perioda pulsova) u izvoru Δt_i i razmak u detektoru Δt_d vrijedi odnos:

$$\frac{\Delta t_d}{\Delta t_i} = \frac{v_z - v_i}{v_z - v_d} \tag{12.57}$$

Kako su periodi titranja i frekvencije titranja recipročno povezani, to je odnos emitirane i detektirane frekvencije:

$$\frac{\nu_d}{\nu_i} = \frac{v_z - v_d}{v_z - v_i} \tag{12.58}$$

Studenti znaju da na primjer pri stacionarnom promatraču (brzina detektora je nula) , izvor koji nam se približava prema (12.58) ima višu frekvenciju od onog koji se udaljava. Na tom principu radi vrlo važna dijagnostička aparatura: „Color Doppler“ . Naime reflektirani ultrazvuk s krvnih zrnaca u našem kardiovaskularnom sustavu tim efektom daje informacije o brzini protjecanja krvi na nekoj lokaciji u tijelu. Naravno, ime boja u naslovu metode nema vezu s optikom. Naime na ekranu na kojem se daje koordinatni prikaz rasporeda strujanja krvi, intenzitet brzine se prikazuje bojom .

RELATIVISTIČKI DOPPLEROV EFEKT

Relativistički Dopplerov efekt se od klasičnog razlikuje u dva bitna aspekta. Jedan je naravno relativistička priroda fenomena. No prešutno, bez naglašavanja, implicira se da u ovom slučaju ne postoji medij poput zraka ili etera; elektromagnetski val se širi kao titranje polja u prostoru.

U izvodu ćemo koristiti varijantu (12.35) Lorentzovih transformacija. Izvor se nalazi u sustavu S na koordinati x=0 . Prvi signal emitira se u vrijeme $t_1 = 0$ a drugi u $t_2 = \tau$. Prema izrazu za vrijeme iz (12.35), $t_1' = 0$, a

$$t_2' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.59}$$

No u trenutku odašiljanja drugog signala sa stanovišta sustava S' , izvor se nalazi na koordinati:

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-v\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.60}$$

Da bi svjetlost došla do ishodišta sustava S' treba prijeći put (12.60) idući brzinom c , tako da uz t_2' dodatno kasni vremenski interval.

$$-x_2'/c = \frac{\tau v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.61}$$

Tako je ukupni razmak signala u vremenu u sustavu S':

$$\Delta t' = t_2' + (-x_2'/c) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\tau v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tau\frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} \tag{12.62}$$

Odnos frekvencija je naravno recipročan:

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} \tag{12.63}$$

Ovaj izraz za Dopplerov pomak je bio sudbonosan za prve indikacije teorije velikog praska. Naime on omogućuje određivanje brzina kojima se svemirski objekti udaljavaju od promatrača. Prva indikacija o širenju Svemira došla je iz činjenice da se dalji objekti udaljavaju brže od bližih, što je jedino u skladu s modelom prvobitne eksplozije, pri kojoj najbrži objekti , nakon određenog vremena jesu i najudaljeniji objekti.

RELATIVISTIČKI IMPULS OBJEKTA

Lorentzove transformacije su neizbježna posljedica eksperimentalno utvrđene neovisnosti brzine svjetlosti o inercijskom sustavu. Pri daljnjoj prilagodbi fizikalnih varijabli relativistici prirodno je zahtijevati da se definicije fizikalnih veličina izvedu na način koji osigurava da se one u nerelativističkoj situaciji vrate na naše stare definicije. S druge strane želimo da do sada ustanovljeni fizikalni zakoni vrijede i u relativističkom slučaju. Razmotrit ćemo sada modifikaciju koja je potrebna da bi impuls objekta bio sačuvana veličina pri elastičnom sudaru. Posljedica će biti takva generalizacija definicije koja omogućuje obadva gornja zahtjeva.
Pokazat ćemo najprije da se sa starom definicijom impulsa kao produkta nepromjenljive mase i (relativističke) brzine generalno ne čuva impuls u elastičnom sudaru dvije jednake mase.
U sustavu centra mase naravno nemamo problema:

$$(\vec{p}_1+\vec{p}_2)_{poč}=0=(\vec{p}_1+\vec{p}_2)_{kon} \tag{12.64}$$

Naime u sustavu CM prije i poslije sudara vrijede jasno slijedeći odnosi:

	v_{1x}	v_{1y}	v_{2x}	v_{2y}
Prije sudara	v_x	$-v_y$	$-v_x$	v_y
Poslije sudara	v_x	v_y	$-v_x$	$-v_y$

Načinimo sada transformaciju brzina u sustav S' prema izrazima za transformaciju brzina (12.51) i (12.52). Pri tome se izrazi za brzine u S' razlikuju za predznak relativne brzine v (to jest gdje god je upisan v u obratnoj transformaciji treba pisati (-v)). Nadalje je brzina sustava S' jednaka

$$v=-v_x \tag{12.65}$$

Uvrštavanjem (12.65) u izraze za izražavanje brzina u S' sustavu preko onih u S sustavu imamo za novu tabelu brzina :

$$(v_{1x}')_{poč}=\frac{v_x-(-v_x)}{1-\frac{v_x(-v_x)}{c^2}}=\frac{2v_x}{1+\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}=(v_{1x}')_{kon} \tag{12.66}$$

$$(v_{1y}')_{poč}=\frac{-v_y}{1-\frac{v_x(-v_x)}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}=\frac{-v_y}{1+\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}=-(v_{1y}')_{kon} \tag{12.67}$$

$$(v_{2x}')_{poč}=\frac{-v_x-(-v_x)}{1-\frac{-v_x(-v_x)}{c^2}}=0=(v_{2x}')_{kon} \tag{12.68}$$

$$(v_{2y}')_{poč}=\frac{v_y}{1-\frac{-v_x(-v_x)}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}=\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^{\,2}}{c^2}}}=-(v_{2y}')_{kon} \tag{12.69}$$

Inspekcijom rezultata (12.66) – (12.69) množenih s masom ustanovljujem da je u x smjeru ukupni impuls (zbroj impulsa dva tijela) sačuvan u x smjeru. Naime u S' sustavu impuls prve čestice se nije promijenio, a isto vrijedi za drugu. S druge strane y komponenta impulsa u S' sustavu prije sudara jest:

$$m\frac{-v_y}{1+v_x^{\,2}/c^2}\sqrt{1-v_x^{\,2}/c^2}+m\frac{v_y}{\sqrt{1-v_x^{\,2}/c^2}}>0 \tag{12.70}$$

Nakon sudara ta komponenta impulsa mijenja predznak; znači nije sačuvana.

Zaključujemo da se stara definicija impulsa ne može uskladiti sa zakonom sačuvanja impulsa. U našem se razmatranju problem manifestirao u y komponenti. Porijeklo je u slijedećoj činjenici. Dok je $dy = dy'$ *nije istovremeno* $dt = dt'$ i to je razlog problema. Međutim ako bismo u definiciju uvrstili deriviranje po vremenu u kojem tijelo miruje (po τ iz naših razmatranja o transformaciji vremena), to je vrijeme jedinstveno i problem bi i u y smjeru bio riješen.
Znači ispravna definicija impulsa jest za y smjer:

$$p_y = m\frac{dy}{d\tau} = m\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.71}$$

Stoga se impuls definira:

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v} \tag{12.72}$$

Tako govorimo o relativističkom ponašanju mase:

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.73}$$

RELATIVISTIČKA ENERGIJA

Promjena definicije impulsa inducira promjenu definicije sile i energije. Sada je sila:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.74}$$

Rad ovako definirane sile pri ubrzanju tijela je

$$W = \int \vec{F}d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)d\vec{s} \tag{12.75}$$

$$W = \int\left[\frac{(m\cdot dv/dt)d\vec{s}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m\vec{v}d\vec{s}\,\frac{(-1/2)(-2\vec{v})(d\vec{v}/dt)(1/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}\right] \tag{12.76}$$

$$W = \int\left[\frac{m\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(\vec{v}\cdot d\vec{s}/dt)(\vec{v}d\vec{v})/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}\right] \tag{12.77}$$

$$W = \int \frac{m\vec{v}d\vec{v} - m\vec{v}d\vec{v}(v^2/c^2) + m\vec{v}d\vec{v}(v^2/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} \tag{12.78}$$

$$W = \int d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{12.79}$$

Kako je diferencijal u (12.79) u suštini diferencijal relativističke energije, to je znači relativistička energija:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.80}$$

Vidljivo je da čak i pri brzini tijela v=0 postoji energija mirovanja tijela:

$$E = mc^2 \tag{12.81}$$

NAPOMENA: velik dio literature u izrazu (12.73) masu mirovanja označava s m_0. Sukladno tome se u izrazu za energiju mirovanja masa označava istom oznakom. S druge strane , u toj literaturi, je oznaka m rezervirana za veličinu koju smo u (12.73) označili s m(v).

Kinetička je energija povećanje energije od energije mirovanja do energije koju tijelo ima pri brzini v. Dakle:

$$E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - mc^2 \qquad (12.82)$$

Student može lako pokazati u nerelativističkom limesu da izraz (12.82) prelazi u uobičajeni izraz za kinetičku energiju. Naime razvojem u faktora s korijenom u nazivniku dobivamo:

$$(1 - v^2 / c^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (1/2)v^2 / c^2 + ... \qquad (12.83)$$

Kako je kinetička energija razlika energije tijela u gibanju (12.80) i energije tijela u mirovanju (12.81), očito se ta razlika u nerelativističkom limesu preko razvoja (12.83) svodi na:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \qquad (12.84)$$

što je otprije poznati rezultat. Rezultat (12.81) je mnogo puta verificiran u nuklearnim reakcijama. Naime tijekom nuklearnih reakcija ukupna masa sviju učesnika nije sačuvana . dolazi do takozvanog defekta mase. Ako s Δm označimo manjak mase nastao u nuklearnom procesu, tada se u istom procesu kinetička energija povećava za iznos Δmc^2. To je direktna verifikacija izraza (12.81) i naših razmatranja o energiji u relativističkim uvjetima. To je također izvor tvrdnje o ekvivalenciji mase i energije.

VEZA TOTALNE ENERGIJE I IMPULSA

Kvadriranjem i svođenjem na isti nazivnik student može lako provjeriti da je relacija (12.85) identitet:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)^2 - \left(\frac{v / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)^2 = 1 \qquad (12.85)$$

Ako relaciju pomnožimo s izrazom m^2c^4 i nakon toga za prvi član lijeve strane uvrstimo relaciju (12.80), a za drugi član lijeve strane koristimo (12.72), dobivamo slijedeću vezu totalne energije i impulsa:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad (12.86)$$

Ova je relacija verificirana pokusima sličnim onim kao što je opisani pokus W. Bertozzija. Naime totalna energija se može mjeriti t.zv. kalorimetrima, a impuls se dobiva iz radijusa zakrivljenosti nabijene čestice u magnetskom polju poznate jakosti.

Možemo još dodati da je u slučaju da je masa mirovanja objekta jednaka nuli (slučaju kvanta svjetla-fotona), E=pc.

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE IMPULSA I ENERGIJE

Poznate su nam Lorentzove transformacije skupa (x,y,z,t). Te su transformacije linearne i imaju u matematičkom smislu transformacijska svojstva vektora .Radi toga se govori da taj skup koordinata koji se naziva i događajem predstavlja četverovektor u prostoru Minkovskog. Specifično ime prostora potječe od činjenice da se invarijantni modul vektora definira različito od, na primjer, trodimenzionalnog slučaja gdje je modul ili norma vektora povezana s komponentama nama poznatom relacijom:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (12.87)$$

U prostoru Minkovskog četiri koordinate događaja su povezane poznatom relacijom:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (12.88)$$

No radi transformacijskih svojstava koja nalazimo u Lorentzovim relacijama skup (x,y,z,t) nazivamo četverovektorm. Pokazat ćemo jednostavnim argumentima da skup $(p_x, p_y, p_{z,} E/c^2)$ ima identična transformacijska svojstva kao i skup (x,y,z,t) ; to znači da je u istom smislu četverovektor.

Poći ćemo od relacija koje prihvatili definicijom impulsa:

$$p_x = mdx/d\tau \;\; p_y = mdy/d\tau \;\; p_z = mdz/d\tau \;\; E/c^2 = mdt/d\tau \qquad (12.89)$$

Kako su m i $d\tau$ konstante nezavisne o transformaciji, očito se skup$(p_x, p_y, p_{z,} E/c^2)$ transformira kao kao skup (dx,dy,dz,dt) to jest i kao skuo (x,y,z,t). Stoga možemo smjesta pisati:

$$p_x' = \frac{p_x - v(E/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;\; p_y' = p_y \;\; p_z' = p_z \;\; E'/c^2 = \frac{E/c^2 - (v/c^2)p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (12.90)$$

Stručnim rječnikom i vremensko prostorne koordinate i impulsno koordinate zajedno s E/c^2 imaju ista transformacijska svojstva sadržana u Lorentzovim transformacijama. I jedan i drugi skup jest četverovektor.