M E H A N I K A   F L U I D A

Za razliku od krutih tijela stalnog oblika, određeni materijali prilagođuju svoj oblik takozvanim rubnim uvjetima. Čaj u čaši prilagođava svoj donji dio prema obliku šalice u kojoj se nalazi. Plin u plinskoj boci preuzima oblik plinske boce. Takve oblike materije nazivamo fluidima. Oni dijele mnoga zajednička svojstva. Grubo ih dijelimo na tekućine i plinove. Tekućine nemaju stalan oblik, ali ih je teže komprimirati. Na primjer, za vodu se govori da je nestlačiva; to je naravno samo dosta dobra aproksimacija.

Oblik gornje površine tekućine u homogenom gravitacijskom polju:
Dnevno je iskustvo da se u homogenom gravitacijskom polju, dok nema drugih sila u inercijskom sustavu, površina vode postavlja okomito na vertikalni pravac kojeg definiraju gravitacija i lokalna akceleracija neinercijskog sustava rotirajuće Zemlje. To se može i teorijski poduprijeti. Pođimo u pravo od te slike da bismo dokazali da se radi o uravnoteženom stanju. Zamislimo da smo izvršili (virtualni) rad: s površine tekućine izvadimo volumen ΔV i dodamo ga neposredno nad površinu ostatka tekućine. Time je izvršen rad:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \rho \Delta V g \cdot dz \qquad (9.1)$$

Uvjet ravnoteže jest da je dz jednak nuli; to jest da nema dizanja elementa tekućine iz horizontalnog nivoa. Isto svojstvo vrijedi kod posuda,koje su spojene tako da među njima tekućina može slobodno teći (spojene posude). Nivo tekućine je isti u obje posude.

Oblik gornje površine tekućine u ubrzanom sustavu:
I ovdje se tekućina postavlja okomito na rezultantni smjer vektora gravitacijske akceleracije i ($-\vec{a}$) vektora gdje je $\vec{a}$ vektor akceleracije ubrzanog sustava u inercijskom sustavu. Pokusom se demonstrira studentima kosa površina vode koja nastaje u linearno akceleriranom sustavu.

Slično se demonstrira paraboloidni oblik površine tekućine u posudi koja rotira oko svoje osi simetrije. Naime podsjećamo ako prostoru postoji element mase m, *težine* $m\vec{g}$ i sustav se giba akceleracijom $\vec{a}$, tada u njemu postoji inercijska sila $-m\vec{a}$. Površina tekućine postavlja se okomito na zbroj gravitacijske i inercijske sile. Kako gravitacijska sila djeluje vertikalno, a inercijska sila horizontalno i mi znamo njihove iznose, to možemo izračunati i tangens kuta njihove rezultante prema vertikali. To je pak tangens kuta tangente na površinu tekućine u izabrnoj točki prostora:

$$tg\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \omega^2 r / g = \frac{dz}{dr} \qquad (9.2)$$

Integriranjem dobijemo zavisnost visine tekućine o radijusu položaja:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \qquad (9.3)$$

To jest jednadžba rotacijskog paraboloida.

TLAK U TEKUĆINI

U uvjetima mirne i uravnotežene tekućine unutar tekućine na bilo kojem mjestu na proizvoljno izabranu površinu postoji tlak:

$$p = \frac{dF}{dA} \tag{9.4}$$

Gdje je dA element te površine, a dF je sila koju ta površina trpi od tekućine okomito na sebe. Očito je jedinica za tlak $1N/m^2 \equiv 1Pa$. Paskal je jedinica tlaka u SI sustavu.
U mirnoj tekućini tlak ne zavisi o smjeru u kojem mjerimo. Naime da je suprotno, mogli bismo konstruirati perpetuum mobile, jer bi usmjerenje tlaka moglo konstrukcijom kanala koji bi primao tekućinu sa smjera u kojem je tlak usmjeren mogli dobiti strujanje za pogon turbine koja bi energiju crpla iz činjenice usmjerenja. To se naravno protivi zakonu sačuvanja energije.

PASCALOV TEOREM

Pretpostavimo da imamo spojene posude vertikalno postavljene različitih presjeka. Ako načinimo pomak nivoa površine tekućine pomoću klipa istog presjeka kao što je i cijev A_1 za vertikalni iznos dz_1, to rezultira promjenom volumena s te strane cijevi za

$$dV = A_1 dz_1 = -A_2 dz_2 \tag{9.5}$$

I promjenom volumena suprotnog predznaka s druge strane cijvi čiji su elementi indeksirani indeksom 2 . Uvjet ravnoteže kroz D'Alambertov princip daje

$$F_1 dz_1 + F_2 dz_2 = 0 \tag{9.6}$$

Uvrštenjem (9.5) u (9.6) dobivamo

$$\left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2}\right) dV = 0 \tag{9.7}$$

Kako je dV proizvoljan, očito:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{9.8}$$

Odatle slijedi da je promjena tlaka vanjskom silom u tekućini svagdje jednaka. Na tom principu rade brojni hidraulički uređaji: dizalice, kočnice na automobilima, građevinarski strojevi i robotičke komponente. (9.8) nam omogućuje multipliciranje sile. Za to jasno plaćamo cijenu; rad se ne može dobiti iz ničega. Stoga povećanje sile dobivamo većim putem kojim manja sila djeluje s jedne strane sustava, da bi na račun manjeg pomaka s druge strane proizvela veću silu s te druge strane hidrauličkog sistema.

HIDROSTATSKI TLAK

Promatramo posudu proizvoljnog oblika. Na određenoj dubini nam je jasno da tekućina svojom težinom proizvodi tlak i da taj tlak zavisi o dubini (zasada zanemarujemo atmosferske efekte). Zamislimo da smo na istoj dubini načinili otvor male površine a , da smo nadalje nastavili cilindar iste površine i u njemu micanjem klipa za put ds radom postigli da je istisnuti volumen premješten na površinu vode. Preko sačuvanja energije imamo:

$$dW = p \cdot a \cdot ds = a \cdot ds \cdot \rho \cdot g \cdot h \qquad (9.9)$$

Tako za tlak p dobivamo:

$$p = \rho g h \qquad (9.10)$$

U izvodu nije bilo pretpostavki o obliku posude, i tlak o njemu ne zavisi. Hidrostatskim se paradoksom naziva činjenica , da bez obzira kakav profil ima posuda, tlak na nekoj dubini je neovisan o profilu i dan je s (9.10). Ako postoji još i vanjski tlak na tekućinu i njega treba uzeti u obzir pri računu ukupnog tlaka.

TORRICELLIJEVA CIJEV I BAROMETAR

Razlika između tekućina i plinova unutar obitelji fluida jest u mikroskopskim svojstvima. Kod tekućina molekule su u praktički u kontaktu jedna s drugom, dok kod plinova molekule doduše nalijeću jedna na drugu, no većinu vremena su slobodne u prostoru. Ipak i te slobodne molekule podliježu gravitaciji kao i one u tekućini. Rezultat jest da na dnu atmosferskog mora kojeg predstavlja zrak, to jest u našoj neposrednoj okolini postoji tlak radi težine svega zraka iznad nas. Fenomen tog tlaka je relativno kasno opažen, jer je zrak za naše osjete vrlo prorijeđen, a vakuumske uvjete se relativno kasno proučavalo. Torricelli je zamke koje potječu od relativno male gustoće vode izbjegao upotrebom žive za mjerenje tlaka. Ako pripremimo posudu žive (ŽIVA JE OTROVNA I NE SMIJE JE UPOTREBLJAVATI OSOBA BEZ KVALIFIKACIJA) i dodatno živom napunimo cijev , čije je dno zataljeno, spremni smo za demonstraciju atmosferskog tlaka. Otvoreni kraj cijevi napunjene živom (dugačku oko 1 m) privremeno se zatvori i uroni se u pripremljenu posudu. Ako je zatvoreni kraj žive ispod nivoa od otprilike 76 cm od površine žive u posudi, živa će i dalje stajati u cijevi. Kada se , međutim , zatvoreni kraj cijevi sa živom , dok je otvoreni uronjen u posudu, uspravlja iznad nivoa od 76 cm, opazit će se djelomično pražnjenje cijevi tako da je nivo žive u cijevi uvijek isti i otprilike 76 cm iznad površine žive u posudi. Jasno je da su atmosferski tlak i tlak žive u posudi u ravnoteži. Kako atmosferski tlak varira, tako varira i visina stupca žive u živinom barometru.

ARHIMEDOV ZAKON I UZGON

Svako tijelo uronjeno u tekućinu gubi na težini onoliko koliko teži istisnuta tekućina. Ovu izjavu možemo jasno obrazložiti. Na mjestu uronjenog tijela bila je tekućina. Taj , u mislima izolirani dio tekućine, ima svoju težinu. Težina tekućine, u prostoru izoliranog dijela tekućine, uravnotežena je rezultantnom silom , kojom ostatak tekućine djeluje na izolirani dio. Kada tekućinu zamijenim tijelom, i na tijelo će djelovati ista rezultanata. Stoga je težina tijela uronjenog u tekućinu umanjena za težinu istisnute tekućine! Sila kojom okolna tekućina djeluje na tijelo uronjeno u nju se naziva silom uzgona. Do njenog iznosa možemo doći i razmatranjem promjena potencijalne energije prilikom potonuća tijela u tekućinu. Ako tijelo koje tone ima masu m a tekućina istog volumena masu m_{tek} , zamjenom visinske koordinate za Δz izvršen je rad:

$$\Delta P = mg\Delta z - m_{tek} g\Delta z \qquad (9.11)$$

Ovo možemo interpretirati kao pojavu sile uzgona koja djeluje vertikalno prema gore u iznosu

$$\vec{F}_{uzgon} = -\vec{g} \cdot m_{tek} \qquad (9.12)$$

POVRŠINSKA ENERGIJA I POVRŠINSKA NAPETOST

Privlačne sile koje djeluju među molekulama tekućine kratkog su dosega. Stoga molekula u unutrašnjosti tekućine interagira (međudjeluje) samo s malim brojem susjednih molekula. Neka je broj molekula s kojima se jedna molekula privlači n . svaku od tih međumolekularnih interakcija karakterizira energija veze ε_0. (Ovo nije isti pojam kao u Coulombovom zakonu). Pojam energije veze je vrlo bitan u fizici. To je iznos energije koji treba uložiti u objekte koji interagiraju, da bi njihovo međudjelovanje prestalo. Na primjer, Mjesec ima energiju veze,
koja je potrebna da ga se oslobodi Zemljinog gravitacijskog polja; elektron ima energiju veze potrebno za izlazak iz atoma…Tako je energija veze potrebna da se molekula oslobodi privlačenja svojih susjeda

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot n \qquad (9.13)$$

Nadalje da bi se tekućina pretvorila u paru treba osloboditi sve molekule tekućine, N_{ukupno}. Totalni iznos energije za to potreban stručno zovemo latentnom toplinom, o kojoj će biti više govora u termodinamici. Prema gornjem očito bi latentna toplina iznosila:

$$L = N_{ukupno} \cdot n \cdot \varepsilon_0 \qquad (9.14)$$

No još nismo uzeli u obzir važan površinski efekt. Molekule na površini imaju manji broj susjeda pa im je i vezanje slabije. Ako molekula na površini ima u prosjeku m susjeda, tada njeno vezanje u sustav samo:

$$\varepsilon_{povr} = m\varepsilon_0 \qquad (9.15)$$

Možemo ukupni broj molekula razdijeliti u one koje nisu na površini N_{unutr} i one na površini N_{povr} .Tada energija molekula sistema u tekućini iznosi:

$$E = E_0 - N_{unutr} \cdot n \cdot \varepsilon_0 - N_{povr} \cdot m \cdot \varepsilon_0 \qquad (9.16)$$

ili

$$E = E_0 - N_{ukupno} n\varepsilon_0 + N_{povr}(n-m)\varepsilon_0 \qquad (9.17)$$

Pri tome je E_0 energija molekula kada su slobodne. (Pod kraj semestra ćemo naučiti da činjenicom da imaju masu objekti sukladno masi imaju i energiju). Broj molekula na površini možemo procijeniti ako znamo prosječnu površinu jedne molekule a_0 i ukupnu površinu tekućine a . Tako se pozitivni doprinos u (9.17) koji dolazi od površinskog efekta smanjenja ukupne energije veze glasi:

$$E_{povr} = a\frac{n-m}{a_0}\varepsilon_0 \qquad (9.18)$$

Tako možemo formulirati intuitivno razumljiv zaključak. Tekućina je to stabilnije i njena je ukupna energija to niža , što je njena površina manja.
Po definiciji se faktor uz površinu u (9.18) zove faktorom površinske napetosti σ .

$$\sigma = \frac{n-m}{a_0}\varepsilon_0 \tag{9.19}$$

Minimalizacija člana (9.18) , to jest minimalizacija faktora površine jest aktivnost koju će tekućina spontano činiti na putu prema stabilnosti, to jest uravnoteženom stanju. Izvan gravitacijskog polja stoga će tekućina težiti formaciji kugle. U gravitacijskom polju koje je mnogo snažnije od međumolekularnih sila tekućina će prvenstveno minimalizirati potencijalnu energiju tog polja. No vidjet ćemo da se u vrlo pažljivom promatranju oko površina mogu mjeriti i površinski efekti.

TLAK UNUTAR KUGLE TEKUĆINE U BESTEŽINSKOM STANJU

Kako bismo izračunali tlak unutar kugle tekućine, zamislimo da smo ponovno dodali mali cilindar s pokretnim klipom kojim vršimo rad:

$$dW = F \cdot dx = (pA)(dx) = p \cdot dV = \sigma \cdot da \tag{9.20}$$

Član iza posljednje jednakosti je rezultat upravo ustanovljene proporcionalnosti između površine i ukupne energije tekućine (relacije (9.17-9.19)).

Odatle slijedi :

$$p = \sigma \frac{da}{dV} \tag{9.21}$$

Uz poznate izraze za volumen i površinu kugle:

$$a = 4\pi r^2 \quad \text{i} \quad V = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \text{imamo i} \quad \frac{da}{dV} = \frac{2}{r} \tag{9.22}$$

Tako je tlak unutar kugle:

$$p = \frac{2\sigma}{r} \tag{9.23}$$

Kod cilindrične kaplje sličnim bismo postupkom imali:

$$p = \frac{\sigma}{r} \tag{9.24}$$

Studentima će se (9.23) demonstrirati s dva mjehura od sapunice različitih dimenzija među kojima postoji kanal za prijelaz plina. Kako je prema (9.23) tlak u manjoj kugli veći, to će on transportirati plin iz manje kugle u veću!

Relaciju (9.23) možemo upotrijebiti i za proračun tlaka u mjehuriću plina unutar tekućine:

Ako uzmemo u obzir kumulativno djelovanje vanjskog tlaka na tekućinu p_0, tlaka unutar tekućine na dubini h i tlaka kojeg površina čini na unutrašnjost fluida, imamo:

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r} \tag{9.25}$$

DRUGI POGLED NA POVRŠINSKU NAPETOST

Studentima se pokazuje opna sapunice koja je razapeta između tri čvrste stranice pravokutnika dok je četvrta stranica pomična po njima. Rastezanjem opne za pomak dx širine opne l , vrši se rad.

$$2Fdx = 2\sigma da = 2\sigma l dx \tag{9.26}$$

Odatle slijedi:

$$\sigma = \frac{F}{l} \tag{9.27}$$

Tako napetost površine možemo smatrati i silom koju na jedinicu širine treba unijeti da se ta napetost površine uravnoteži.

KAPLJICA TEKUĆINE NA ČVRSTOJ PODLOZI

Za razumijevanje kapilarnih efekata temelj je razumjeti ravnotežno stanje kapljice koja je na čvrstoj podlozi. U međusobnim kontaktima su krutnina 1) , tekućina 2) i plin 3) . Kao rezultat tekućina formira kapljicu s definiranim kutom tangente na tekućinu u točki kontakta tri medija. Prikloni kut tangente i krutnine je ϑ. Da izrazimo prikloni kut kao rezultat površinskih napetosti pojedinih kontaktnih površina polazimo od D'Alambertovog principa o elementu virtualnog rada. Pretpostavljamo da smo micanjem ruba kapljice dio površine da koji je na krutnini pokrivala tekućina „otkrili“ za kontakt krutnine i plina. Time je kontakt 13 povećan a kontakt 23 smanjen za istu površinu da. Kontakt 23 je smanjen za površinu $da \cdot \cos\vartheta$. Tako je element rada:

$$dW = \sigma_{13} \cdot da - \sigma_{12} \cdot da - \sigma_{23} \cdot da \cdot \cos\vartheta \tag{9.28}$$

Kako je element proširenja površine proizvoljan, iz (9.28) slijedi:

$$\cos\vartheta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \tag{9.29}$$

Kut ϑ iz (9.29) koji zavisi o ponašanju triju medija 1,2 i 3, zovemo okrajnjim kutom .

PONAŠANJE TEKUĆINE UZ RAVNU VERTIKALNU STIJENU

Zavisno o prirodi djelovanja molekula stijene na molekule tekućine (privlačenje ili odbijanje). Nivo tekućine na mjestu kontakta će se dizati ili spuštati. U prijašnjoj notaciji za medije, u svakoj točki blizu kontakta vrijedi:

$$\rho g z = \frac{\sigma_{23}}{r} \tag{9.30}$$

gdje je r radijus zakrivljenosti površine tekućine. Odatle množenjem s dz dobivamo:

$$\rho g z \cdot dz = \frac{dz}{r}\sigma_{23} \tag{9.31}$$

Prikloni kut tangente na površinu s vertikalnom stjenkom je α. Ako je element puta po površini tekućine ds, tada je

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha \tag{9.32}$$

Istovremeno je

$$r \cdot d\alpha = ds = \frac{dz}{\sin\alpha} \tag{9.33}$$

Tako iz (9.33) imamo:

$$\frac{dz}{r} = \sin\alpha \cdot d\alpha \tag{9.34}$$

Uvrštenjem geometrijske relacije (9.34) u fizikalnu relaciju (9.31) slijedi:

$$\rho g z \cdot dz = \sigma_{23} \sin\alpha \cdot d\alpha \qquad \text{to jest} \qquad d(\frac{1}{2}\rho g z^2) = -d(\cos\alpha)$$

$$z_0{}^2 = \frac{2\sigma_{23}}{\rho g}(1 - \sin\vartheta) \tag{9.38}$$

KAPILARNA ELEVACIJA I DEPRESIJA

U tankim cjevčicama površinska napetost tekućine zbog okrajnjeg kuta ϑ iz (9.29) i time prouzročene zakrivljenosti površine uzrokom je promjene razine tekućine u kapilari. Pretpostavimo da je kapilara dovoljno uska, tako da je oblik površine u njoj kuglasti, a ne cilindrični kao u (9.30). Označimo s d dijametar kapilare, a s r polumjer zakrivljenosti kugle, tada je okrajnji kut geometrijski jednostavno izraziti:

$$\cos\vartheta = \frac{d/2}{r} \tag{9.39}$$

Polazeći od izraza za tlak (9.23) supstituiranjem (9.39) i veze s hidrostatskim tlakom slijedi:

$$p = \frac{2\sigma_{23}}{r} = \frac{4\sigma_{23}}{d}\cos\vartheta = \rho g h \tag{9.40}$$

Odatle slijedi izraz za elevaciju odnosno depresiju:

$$h = \frac{4\sigma_{23}}{\rho g d}\cos\vartheta \tag{9.41}$$

Pri tome je kosinus okrajnjeg kuta dan s (9.29) . Radi li se o elevaciji ili depresiji zavisi o predznaku kosinusa okrajnjeg kuta.

Studentima će se demonstrirati nivoi elevacije vode za različite dimenzije kapilara, kao i za depresije žive .

BERNOULLIjeva JEDNADŽBA (stacionarno,laminarno strujanje idealne tekućine)

U izvodu se pretpostavlja da se strujnice tekućine ne ukrštaju, da nema vrtloga i da ne postoji trenje među slojevima tekućine, koje nazivamo viskoznošću. Ako razmatramo strujanje tekućine kroz cijev (na primjer kružnog presjeka) različitih dimenzija presjeka na početku i na kraju , predznak ulazne mase dm_1 i izlazne mase dm_2 su suprotni no po iznosu jednaki.

$$dm_1 = dm = \rho_1 \cdot dV_1 \qquad dm_1 + dm_2 = 0 \tag{9.42}$$

Možemo sada načiniti bilancu radova načinjenih u odnosu na tlakove prisutne na ulasku i izlasku iz cijevi:

$$p_1 \cdot dV_1 - p_2 dV_2 = \frac{1}{2} dm \cdot v_2^{\ 2} - \frac{1}{2} dm \cdot v_1^{\ 2} + dm \cdot g h_2 - dm \cdot g h_1 \tag{9.43}$$

Iz čega zaključujemo da je zbroj:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g h = kons\tan ta \tag{9.44}$$

Bernoullijeva jednadžba (9.44) ima mnogo demonstracija i primjena poput Venturijeve cijevi kao brzinomjera protoka, Bunsenove sisaljke pa i lijeta aviona uz pomoć posebnog profila krila. Zajedničko svima jest smanjenje tlaka u zoni veće brzine strujanja.

VISKOZNOST I TURBULENCIJA

U izvodu Bernoulli-jeve jednadžbe bilo je pretpostavljeno laminarno strujanje idealne tekućine. Strujnice su linije koje povezuju položaje istog dijela tekućine u raznim vremenima. Kada se strujnice ne sijeku, govorimo o laminarnom strujanju. Suprotno od toga je turbulentno gibanje u kojem postoji vrtloženje. Idealna tekućina nema unutrašnjeg otpora na kontaktu slojeva tekućine koji se gibaju različitim brzinama. Razmotrimo na trenutak situaciju s prolaskom krvi kroz naše kapilare. Radi veličine molekula i uskoće kapilara, jasno je da će krv „zapinjati“ o stijenke kapilare , dok će se u sredini kapilare transportirati praktički bez otpora. Stoga će , gledano u longitudinalnom presjeku , brzina tekućine zavisiti o njenoj radijalnoj udaljenosti od osi kapilare. U udžbenicima se obično prikazuje parabolična zavisnost brzine tekućine o radijalnoj udaljenosti točke promatranja od osi kapilare. Pojave turbulencije ne mogu se jednostavno matematički tretirati; one su jedan od primjera kaotičnog gibanja. Realne pojave pri gibanju objekata u fluidima studiraju se na konkretnim modelima u posebnim uređajima. Na primjer, poboljšanja u automobilskoj i avionskoj industriji se ispituju u tunelima s vjetrovima uz praćenje strujnica oko objekta. Brodske inovacije se testiraju u bazenima u kojima postoji ili protok vode ili pogon (propulzija) objekta.