S T A T I K A

Dio mehanike, u kojem se razmatra probleme ravnoteže krutih tijela ili sustava krutih tijela zovemo statikom. Temeljne relacije statike već znamo , ali ćemo ih još jednom istaknuti.

Da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila $\vec{F}_i$, koje imaju pozicije hvatišta karakterizirane radijusvektorima $\vec{r}_i$, mora rezultantna sila na tijelo iščezavati

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (8.1)$$

Isto vrijedi za sumu momenata vanjskih sila:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \qquad (8.2)$$

Relacija (8.2) treba vrijediti izaberemo li bilo koju točku za ishodište. U nastavku ćemo pokazati ako vrijedi (8.1) i za jedan izbor ishodišta vrijedi (8.2), tada (8.2) vrijedi za sve izbore ishodišta!

NEOVISNOST UVJETA MOMENTA SILA O IZBORU ISHODIŠTA

Pretpostavimo da je za tijelo ispunjen uvjet (8.1) i da postoji ishodišna točka za koju je ispunjen uvjet (8.2). Odaberimo novu točku kao ishodište sustava i neka je njen radijusvektor $\vec{r}_{novi}$, tada stare radijusvektore $\vec{r}_i$ možemo iskazati preko :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{novi} + \vec{r}_{i,n} \qquad (8.3)$$

gdje je $\vec{r}_{i,n}$ radijusvektor iste točke „i“ računan od novog ishodišta. Uvrštenjem (8.3) u (8.2):

$$0 = \sum_i (\vec{r}_{novi} + \vec{r}_{i,n}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{novi} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_{i,n} \times \vec{F}_i \qquad (8.4)$$

Desni faktor prvog sumanda u (8.4) iščezava prema (8.1), pa preostaje

$$\sum_i \vec{r}_{i,n} \times \vec{F}_i = 0 \qquad (8.5)$$

Zaključak je jednostavan: ako su dva uvjeta (8.1) i (8.2) simultano ispunjena obzirom na neko proizvoljno izabrano ishodište sustava, isti uvjet je ispunjen s obzirom na bilo koji drugi izbor ishodišta. Ovo je od velike praktične koristi, jer izbor ishodišta možemo prilagoditi rješavanom problemu.

STATIKA TIJELA U SLUČAJU DA SVE SILE IMAJU ISTO HVATIŠTE

Kako suma momenta oko hvatišta iščezava, preostali uvjet ravnoteže jest (8.1) to jest tražimo da je i rezultantna sila nula. Rješavanje se svodi na rješavanje geometrijskog slučaja trokuta ili mnogokuta, čije sve stranice vektorski posumirane moraju rezultirati u nulvektoru. U problemima se koriste aproksimacije gibljivih , nerastezljivih niti bez mase i nesavitljivih poluga bez mase uloženih često u zglobove u kojima mogu rotirati bez trenja. U rješavanju problema s trokutom sila koristan je poučak:

$$\cos \angle \vec{F}_1, \vec{F}_2 = \frac{F_3^2 - F_2^2 - F_1^2}{2F_1F_2} \qquad (8.6)$$

Jednostavan primjer su dvije niti čiji su jedni krajevi učvršćeni, a na drugim krajevima je obješeno tijelo zadane težine. Druga klasa primjera mogu biti poluge koje su na jednim krajevima u zglobovima bez trenja, a drugi krajevi podupiru teško tijelo.

STATIKA KRUTIH TIJELA:

Homogena greda opterećena teretom i poduprta nosačima
Korektan crtež obuhvaća s jedne strane učvršćeni nosač, s druge strane nosač na kotačićima, kako bi se gredi dopustila sloboda u longitudinalnom smjeru. Dok je greda neopterećena, ako je njena vlastita težina $M\vec{g}$, intuitivno je jasno da su sile reakcije na nosačima jednake i iznose $-M\vec{g}/2$. Student može provjeriti da su time obadva uvjeta za ravnotežu ispunjena. Rezultantna sila koja je zbroj težine i reakcija nosača jest nula, a isto vrijedi za zbroj momenta sila. Naime uzmimo sredinu grede, u kojoj je rezultata težine za ishodište. Moment sile teže je nula, a momenti reakcije nosača , jednaki po iznosu imaju suprotne smjerove. Stoga je i

njihov zbroj nula. Kako dolazimo do gornjeg rješenja , pa i onda kada je situacija kompleksnija vidjet ćemo iz konstrukcije u kojoj je greda dodatno opterećena teretom mase m smještenom na udaljenosti x od kraja s učvršćenim nosačem. Ukupna dužina grede je l. Kraj s učvršćenim nosačem indeksiramo s „1“ a drugi s „2“. Ako kraj 2 izaberemo za ishodište, imamo za uvjet iščezavanja momenta sile:

$$lF_1 = -Mgl/2 - (l-x)mg \qquad (8.7)$$

Izborom kraja 1 za ishodište slijedi:

$$lF_2 = -Mgl/2 - xmg \qquad (8.8)$$

Sile reakcije F_1 i F_2 dobivaju se iz (8.7) i (8.8) jednostavnim dijeljenjem s l!

Vaga jednakih krakova
Vaga je obješena za objesište u točki O. Težište vage je ispod objesišta na položaju $\vec{R}_T$. Lijevi kraj vage jednakih krakova se numerira kao 1 a desni kao 2. Na krajevima su tereti masa $M_1\, i\, M_2$ .Vagina poluga ima težinu M_0 Ako tereti nisu jednaki (na pr. masa 1 je veća), vaga će se uravnotežiti s kutom nagnuća prema horizontali α. Iz uvjeta uravnoteženja momenata sviju sila oko objesišta (uz duljinu kraka vage l) imamo:

$$M_1 gl\cos\alpha = M_2 gl\cos\alpha + M_0 gR_T \sin\alpha \qquad (8.9)$$

Uz poznate mase $M_o\, i M_2$ za izmjereni kut α dobivamo masu M_1. U homogenom gravitacijskom polju vage su instrument velike preciznosti za usporedbu (mjerenje) masa.

Teret (čovjek) na ljestvama naslonjenih na zid
Ovo je česta realna situacija. Ljestve su prislonjene uz zid i postavlja se pitanje sigurnog uspinjanja po njima. Postoji pretpostavka, koja u praksi nije tako značajna, ali koja olakšava rješavanje problema. Uzimamo da u kontaktu ljestvi i zida nema trenja, nego da je ono ograničeno samo na trenje ljestvi i podloge. Na ljestve tada djeluju slijedeće sile: težina ljestava s hvatištem u sredini ljestava, težina tereta s hvatištem na lokaciji tereta, normalna reakcija podloge koja djeluje u kontaktnoj točki horizontalne podloge i ljestava, horizontalno usmjerena sila trenja između ljestava i podloge i horizontalno usmjerena reakcija podloge na vrhu ljestava. Normalnu reakciju podloge u nožištu lako računamo iz uvjeta da je suma svih sila u vertikalnom smjeru nula:

$$N = -mg - Mg \qquad (8.10)$$

U horizontalnom smjeru normalna reakcija zida i sila trenja moraju biti izjednačene:

$$F + F_{trenja} = 0 \qquad (8.11)$$

Ako lokaciju sredine ljestava pišemo kao A, lokaciju tereta kao B a lokaciju vrha ljestvi kao C, tada uzimanjem nožišta ljestava kao ishodišta sustava imamo kao uvjet iščezavajućeg momenta sila:

$$\vec{r}_A \times m\vec{g} + \vec{r}_B \times M\vec{g} + \vec{r}_C \times \vec{F} = 0 \qquad (8.12)$$

Kako su u (8.12) sve veličine zadane geometrijom problema i masama objekata osim modula F, njega možemo izračunati. Time je dan i nužan iznos sile trenja. Preostaje samo provjeriti da li je ta potrebna sila trenja moguća za zadani koeficijent trenja ljestava i horizontalne podloge:

$$F_{trenja} < \mu N \qquad (8.13)$$

To je u stvari uvjet ravnoteže.

Proračun unutrašnjih opterećenja u konzolnom mostu s teretom

Most se sastoji od šipki, koje su bez mase, nesavitljive i nerastezljive, a povezane su zglobovima bez trenja na način prikazan na slici. Potporanj A ima učvršćenu podlogu, a podloga B je na valjcima. Most je horizontalan. Šipke su indeksirane brojevima redom idući od lijevog do desnog kraja. Zglobovi su indeksirani slovima na isti način. Iznimka je potporanj na desnoj strani koji je označen s B. Teret se nalazi na zglobu E na slici i označen je kao F. Globalno gledajući taj teret nose potpornji A i B . Jasno je da se iz lokacije F lako određuju normalne reakcije $\vec{F}_A \, i \, \vec{F}_B$. Najprije suma njihovih modula mora biti jednaka F, a omjer među njima se dobiva lako izborom E za ishodište i uravnoteženjem momenta $\vec{F}_A \, i \, \vec{F}_B$ oko E. Sada možemo sistematski pokrenuti mašineriju rastavljanja sile rezultante u sile u dva smjera šipki (na primjer $\vec{F}_A \; u \; smjerove \; 1 \, i \, 2$) i tako saznati naprezanja koje trpi svaka šipka. Izabrali smo ovaj specifični primjer iz građevinarske struke jer ćemo u jednoj kratici puta do određenja jedne napetosti, bez prolaza kroz cijelu konstrukciju mosta, vidjeti ne samo kraticu, nego i dodatni fizikalni element.

U metodi presjeka uvodi se slijedeća ideja. Neka nam je na primjer želja odrediti silu $\vec{F}_6$. Presijecimo most u dva dijela vertikalno kroz zglob E i uzmimo lijevu i desnu stranu kao posebne cjeline. Jedine sile koje uravnotežuju lijevi dio mosta i daju momente s obzirom na E su normalna reakcija iz A i sila $\vec{F}_6$. Tako vrijedi:

$$\vec{r}_{EA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{ED} \times \vec{F}_6 = 0 \qquad (8.14)$$

U gornjoj relaciji su sve veličine poznate osim modula F_6 , pa iz nje izračunavamo i napetost u toj šipci, bez da smo prolazili kroz proračun svih šipki prije nje!

VRSTE RAVNOTEŽE TIJELA I SUSTAVA

Uvjeti za ravnotežu tijela ili sustava znače ispunjenje relacija (8.1) i (8.2) . Ipak postoje bitno različite klase ravnoteža. Ako je težište tijela vertikalno ispod objesišta tijela, imamo primjer stabilne ravnoteže. To znači da će unutrašnje sile sistema vraćati tijelo u isti položaj, ako ga iz tog položaja malo izmaknemo. Ako se težište tijela nalazi vertikalno iznad objesišta, mali pomak tijela rezultira u silama koje tijelo odmiču iz položaja ravnoteže. Ako je tijelo obješeno kroz težište, mali pomak ne vadi tijelo iz ravnotežnog položaja; ovo je slučaj indiferentne ravnoteže. Mogu se praviti i druge analogije kao što je kugla na udubljenoj, izbočenoj i ravnoj površini; to su također primjeri navedenih ravnoteža.

ODREĐIVANJE POLOŽAJA TEŽIŠTA

Ako bilo koje tijelo objesimo pomoću niti, u položaju stabilne ravnoteže njegovo će težište biti na pravcu koji dobivamo spajanjem objesišta i smjera niti preko tijela. Naime, da bismo imali ravnotežu, moment gravitacijskog polja mora iščezavati. Kako težina tijela ne iščezava to je jedino moguće ako se težište nalazi a smjeru objesište-nit. Izmijenimo položaj objesišta i povucimo novi pravac na kojem se mora nalaziti težište. Težište se jasno nalazi na presjeku dva pravca. To se može provjeravati i trećim objesištem, koje će treći pravac uputiti smjerom od trećeg objesišta do presjeka dva prijašnja pravca.

KONSTANTE GIBANJA ZA SLOŽENI IZOLIRANI SUSTAV

Ovdje samo sumiramo na jednom mjestu činjenicu da izolirani sustav ima tri konstante gibanja: $\vec{P},\ \vec{L}\ i\ E$. Znači ukupni impuls, ukupni moment impulsa i ukupnu energiju.

D' ALAMBERTOV PRINCIP

Pokazat ćemo da ovaj princip koji obuhvaća takozvane virtualne radove vodi na isti uvjet ravnoteže kao i uvjeti za kruto tijelo. Princip iskazuje:

Zbroj svih diferencijalnih radova svih prisutnih sila na sustav u ravnoteži jednak je nuli.
Uzmimo kruto tijelo pomak čije $i-te$ točke može biti opisan kao rezultat pomaka središta tromosti tijela i rotacije tijela oko središta tromosti:

$$d\vec{s}_i = d\vec{s}_{CM} + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot dt \qquad (8.15)$$

Tada gornja tvrdnja prelazi u:

$$\sum_i \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum_i \vec{F}_i (d\vec{s}_{CM} + (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot dt) = 0 \qquad (8.16)$$

To znači da vrijedi:

$$d\vec{s}_{CM}\cdot\sum \vec{F}_i + \vec{\omega}dt\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \qquad (8.17)$$

Iz (8.17) jasno čitamo da ako su ispunjeni uvjeti statičke ravnoteže da je suma sviju sila jednaka nuli i da je suma momenata sviju sila jednaka nuli, tada vrijedi D'Alambertov princip. Obratno, ako je D'Alambertov uvjet ispunjen za bilo kakve diferencijalne i rotacijske pomake, to je moguće samo ako faktori suma iščezavaju; znači ako su ispunjeni uvjeti da je suma sviju sila i suma njihovih momenata jednaka nuli!