I M P U L S N I   M O M E N T   I   M O M E N T   S I L E:

U gibanju sustava čestica , a naročito pri gibanju tijela , veliku pomoć nam pruža veličina koju književno zovemo impulsni moment. U prošlosti hrvatske fizike upotrebljavao se termin kutna količina gibanja, a engleska literatura koristi i kod nas neknjiževno upotrebljavan angular momentum.

Korisnost ove veličine vidjet ćemo iz vrlo jednostavnog razmatranja povezanog s drugim Newtonovim zakonom. Pomnožimo taj zakon s lijeva vektorski s radiusvektorom:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \qquad (7.1)$$

Naime pri vremenskom deriviranju veličine $\vec{r} \times \vec{p}$ član $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$ iščezava. Radi relacije (7.1) je jasno da je veličina $\vec{r} \times \vec{p}$ konstanta u vremenu ukoliko nema vanjske sile ili ukoliko je

djelovanje vanjske sile kolinearno s radiusvektorom (slučaj centralnih sila kao na primjer gravitacija ili električna sila). Tako se uvodi po definiciji veličina:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \qquad (7.2)$$

impulsnog momenta. I inače, ako imamo neku veličinu i vektorski je množimo s radiusvektorom dobivamo njen moment. Tako i veličina s desne strane relacije (7.1) je moment sile: $\vec{M}$. Znajući ove definicije (7.1) se piše uobičajeno:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (7.3)$$

Kao što smo već spomenuli moment impulsa je vrlo upotrebljiv kod centralnih sila na jedno tijelo, ali ima veliku ulogu i pri sustavima mnogo tijela odnosno pri promatranju gibanja krutih objekata.

SAČUVANJE IMPULSNOG MOMENTA SUSTAVA ČESTICA

Gore smo pokazali da za i-to tijelo vrijedi:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \qquad (7.4)$$

Na i-to tijelo može djelovati vanjska sila ili sila s nekog od tijela unutar sustava od N tijela:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,v} + \sum_{j=1}^{N}{}' \vec{F}_{j\to i} \qquad (7.5)$$

Tada je suma momenata sviju sila na tijela u sustavu:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \left[\vec{F}_{i,v} + \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} \right] = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,v} + \sum_i \sum_j{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{j\to i} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \equiv \frac{d}{dt}\vec{L} \qquad (7.6)$$

Prvi član na desnoj strani izraza (7.6) je moment vanjskih sila. Drugi član je moment na sustav od unutrašnjih djelovanja. Zbroj momenata sila unutar jednog para se preko trećeg Newtonovog zakona svodi na izraz:

$$\vec{M}_{unutar\ \ para} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j\to i} \qquad (7.7)$$

Za centralne sile razlika vektora u zagradi i sila su kolinearni pa je rezultat jednak nuli. Tako od svih momenata sila u ukupnom momentu sviju sila na sastav preostaje samo suma momenata vanjskih sila:

$$\vec{M}_v = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,v} \qquad (7.8)$$

Tako je prema (7.6) vremenska promjena ukupnog momenta impulsa $\vec{L}$ prouzročena isključivo momentom vanjskih sila:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_v \qquad (7.9)$$

Znači da odsustvo momenta vanjskih sila povlači sačuvanje momenta impulsa sustava:

$$\vec{M}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = konst.\ vektor \qquad (7.10)$$

POKUS: Spiralna cijev počinje rotirati ako u njenoj unutrašnjosti pregorimo nit, koja je sprečavala njihov izlazak iz cijevi.

TEŽIŠTE TIJELA:

Težište tijela je koncept blizak središtu tromosti tijela. Moramo međutim biti svjesni o nekim suptilnim aspektima koji postoje oko njegove definicije. U slučaju da se tijelo nalazi u homogenom gravitacijskom polju položaji težišta tijela i središta njegove tromosti koincidiraju. Moment gravitacijske sile je ilustrativno mjesto na kojem možemo načiniti usporedbu. Razdijelimo tijelo u segmente indeksirane općim indeksom i . Tako segment ima masu m_i , gravitacijsko polje na toj lokaciji daje segmentu akceleraciju $\vec{g}_i$, a položajni vektor segmenta je $\vec{r}_i$. Nadalje neka je suma masa svih segmenata M:

$$M = \sum_i m_i \qquad (7.11)$$

Tada je ukupni moment gravitacijskog djelovanja:

$$\vec{N} = \sum \vec{r}_i m_i \times \vec{g}_i \qquad (7.12)$$

U slučaju da je vrijednost gravitacijskog ubrzanja stalna po svim segmentima:

$$\vec{g}_i = \vec{g} \qquad (7.14)$$

možemo (7.12) pojednostaviti:

$$\vec{N} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{g} = M\vec{R}_T \times \vec{g} \qquad (7.15)$$

$\vec{R}_T$ je upravo definiran prvim u zadnjim izrazom u (7.15). Jasno je iz relacije (7.15) da gravitacija djeluje na kompozitno tijelo , u slučaju homogenog polja, kao da djeluje na ukupnu masu kroz središte tromosti (CM). U tom slučaju konstatiramo da je položaj središta tromosti identičan s težištem , shvaćenim kao hvatištem gravitacijskog djelovanja. Usporedbom (7.12) i (7.15) uviđamo da koncept težišta postoji za homogeno gravitacijsko polje. Nastojanje da ga se definira izvan tog konteksta nailazi na poteškoće. Naime, dok je faktor ukupne mase lako izdvojiti, postoji poteškoća sa usrednjavanjem gravitacijskog dijela radi njegove vektorske prirode.

D I N A M I K A   G I B A N J A   K R U T O G   T I J E L A :

KRUTO TIJELO:

Krutim tijelom nazivamo idealizaciju u kojoj su razmaci među bilo kojim dijelovima (točkama) tijela stalni. Čvrsta tijela , u kojima promjene razmaka među dijelovima tako sićušne da ih u proračunima možemo zanemariti, su dobra aproksimacija krutog tijela. Opći problem gibanja krutog tijela je dosta zamršen i jedan je od težih problema klasične mehanike. Mnogo je jednostavniji problem gibanja tijela kojem se ne mijenja os rotacije; taj ćemo dio najviše razmatrati.

OPĆA RAZMATRANJA:

U šestom poglavlju smo obrađivali koncept središta tromosti i njegovu vezu s ukupnom masom sustava sastavljenog od komponenti indeksiranih s i. Ponavljamo izraze (6.11)-(6.13) koji se tiču djelovanja rezultantne vanjske sile F_v na složeni sustav.

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{7.16}$$

$$M = \sum_i m_i \tag{7.17}$$

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} M\vec{R} \tag{7.18}$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = M \frac{d}{dt}\vec{R} \tag{7.19}$$

Kombinacijom (7.18) i (7.19) imamo i :

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\vec{P} \tag{7.20}$$

Za moment vanjske sile imamo vezu s momentom impulsa (7.9) :

$$\vec{M}_v = \frac{d}{dt}\vec{L} \tag{7.21}$$

No ukupni moment impulsa možemo ovako razložiti:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{p}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{p}_i \tag{7.22}$$

Prvi član desne strane je očito moment impulsa oko središta tromosti $\vec{L}_{CM}$ a drugi je moment impulsa središta tromosti oko ishodišta. Dakle zaključujemo iz (7.18) da središte tromosti slijedi trajektoriju određenu rezultantnom vanjskom silom. Ponašanje impulsnog momenta sustava je određeno momentom vanjske sile.

SLUČAJ TIJELA S JEDNOM NEPOMIČNOM TOČKOM:

Tu točku izabiremo za ishodište. Koordinate pojedine točke, njena masa i brzina su redom: $\vec{r}_i, m_i, \vec{v}_i$. Tada je moment impulsa sustava određen:

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i=\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\sum_i m_i\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \tag{7.23}$$

$$=\vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2-\sum_i m_i\vec{r}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i) \tag{7.24}$$

Kod tijela koja su oko nepomične točke sferno simetrična, $\vec{L}\, i\, \vec{\omega}$ su kolinearni. Isto vrijedi za slučaj da tijelo rotira oko osi svoje osne simetrije no općenito relacija (7.24) pokazuje da $\vec{L}\ i\, \vec{\omega}$ imaju vrlo kompleksnu međuzavisnost. Na ovom mjestu raspored masa koji određuje tenzor tromosti ulazi direktno u jednadžbe. Tenzore drugog reda srest će studenti tijekom druge godine studija. Daljnja razrada problema gibanja krutog tijela vodi na Eulerove diferencijalne jednadžbe; mi ćemo razmatrati samo jednostavnije slučajeve, posebno one u kojima os rotacije ne mijenja smjer. Tada je važna projekcija momenta impulsa na os rotacije:

$$\vec{L}\cdot\hat{\omega}\equiv L_\omega=\hat{\omega}\cdot\left[\ \vec{\omega}\sum_i r_i^2-\sum_i m_i\vec{r}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\ \right] \tag{7.25}$$

Uočimo kut između osi rotacije $\vec{\omega}\ i\ \vec{r}_i$ radijvektora pojedine točke: $\angle\vec{\omega},\vec{r}_i$,

$$L_\omega=\omega\sum_i m_i r_i^2\left[\ 1-\cos^2(\angle\vec{\omega},\vec{r}_i)\ \right] \tag{7.26}$$

tada produkt :

$$r_i\sin(\angle\vec{\omega},\vec{r}_i)=\rho_i \tag{7.27}$$

predstavlja udaljenost točke i od osi rotacije $\vec{\omega}$ i vrijedi:

$$L_\omega=\omega\sum_i m_i\rho_i^2\equiv\omega I_\omega \tag{7.28}$$

Ova relacija kojom smo ujedno definirali moment inercije oko osi $\vec{\omega}$, I_ω pruža nam priliku za razvoj intuicije kod rotacije krutog tijela. Ta će se intuicija proširivati na druge aspekte rotiranja. U posebnim uvjetima (na primjer vanjske sile ne daju moment sile, a tijelo rotira oko svoje osi simetrije) , L_ω je stalan. Tada mijenjanjem momenta inercije (širenjem ruku plesačice na ledu) dobivamo brže rotiranje tijela pri izvođenju piruete. U mnogim će aspektima rotiranja kutna brzina biti analogon translacijske brzine, a moment inercije analogon mase.

POKUS:
Na Prandtlovom stolcu demonstrirat će se na više načina sačuvanje momenta impulsa: to su promjene momenta inercije i promjena momenta impulsa dijela izoliranog sustava izazvana unutrašnjim silama sistema. Pri širenju ruku osobe koja rotira, usporava se rotacija. Ako osoba na Prandtlovu stolcu prisiljava kotač bicikla na rotaciju, sama počinje rotirati suprotnim smjerom. Također će se pokazati posljedice preokretanja osi rotacije kotača bicikla na stanje gibanja osobe na Prandtlovom stolcu.

KOMPONENTE KINETIČKE ENERGIJE SUSTAVA ČESTICA:

Uobičajeni izraz za kinetičku energiju sustava čestica transformirat ćemo rastavljanjem brzine pojedine sastavnice sustava u translacijski i rotacijski dio. Označit ćemo s $\vec{V}$ brzinu središta mase sustava, a s $\vec{v}_i'$ brzinu kojom i-ta čestica rotira zajedničkom kutnom brzinom $\vec{\omega}$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}_i')^2 \tag{7.29}$$

Izražavajući nadalje brzinu $\vec{v}_i'$ koja potječe od rotacije preko kutne brzine $\vec{\omega}$ i vektora položaja i-te čestice u sustavu središta tromosti $\vec{r}_i'$, slijedi:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i')^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i')^2 + \vec{V}\cdot\sum_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i') \tag{7.30}$$

U izrazu (7.30) prvi član na desnoj strani sumira mase sustava uz zajednički faktor i predstavlja kinetičku energiju translacije sustava.

$$T_{translacije} = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 = \frac{1}{2} M V^2 \quad \text{gdje je } M \text{ ukupna masa sustava} \tag{7.31}$$

U istom izrazu na desnoj strani drugi član predstavlja kinetičku energiju rotacije zajedničkom kutnom brzinom $\vec{\omega}$:

$$T_{rotacije} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i')^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2 \tag{7.32}$$

Pri manipulacijama unutar (7.32) koristili smo udaljenost ρ_i i-tog elementa od osi rotacije kako je to formulirano u (7.27) i definiciju momenta inercije I_ω u izrazu (7.28).

Usporedbom (7.28) s izrazom za linearno gibanje objekta ili sustava vidimo da kutna brzina ima ulogu analognu translacijskoj brzini, a moment inercije ima ulogu analognu masi. Ista opažanja možemo načiniti i usporedbom (7.32) s (7.31). Desni, posljednji član u (7.30) iščezazava jer sumacija radij vektora položaja u sustavu središta tromosti daje nulu ($\sum_i \vec{r}_i' = 0$). Tako iz (7.30) konačno zaključujemo:

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_\omega \omega^2 = T_{translacije} + T_{rotacije} \tag{7.33}$$

Ukupna kinetička energija krutog tijela može se separirati u translaciju i rotaciju; često govorimo da imamo različite stupnjeve slobode: translacijske i rotacijske.

STEINEROV POUČAK O MOMENTIMA INERCIJE OKO PARALELNIH OSI

Steinerov poučak je od velike pomoći za proračun momenta inercije, ako znamo vrijednost momenta inercije oko osi koja prolazi središtem tromosti, a mi računamo moment tromosti za paralelnu os koja je za ρ_{CM} udaljena od osi kroz središte tromosti. (zapravo možemo govoriti o vektoru $\vec{\rho}_{CM}$, jer udaljenost od osi podrazumijeva mjerenje udaljenosti okomito na os!). Kako u izrazima za moment inercije oko zadane osi vrtnje $\vec{\omega}$ ulogu igra samo udaljenost od te osi, možemo u proračunu momenta inercije umjesto o cijelom vektoru položaja $\vec{r}$ voditi računa samo o njegovoj komponenti okomitoj na os $\hat{\omega}$ označenoj kao $\vec{\rho}$. Uvodimo slijedeću dekompoziciju (rastavljanje) vektora udaljenosti od novog položaja osi rotacije $\vec{\rho}_i$ na vektor udaljenosti iste i-te točke od osi rotacije kroz središte tromosti $\vec{\rho}_i'$ i vektor od nove osi do osi kroz središte tromosti: $\vec{\rho}_{CM}$. Tada vrijedi:

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_{CM} + \vec{\rho}_i' \qquad (7.34)$$

Moment tromosti oko nove osi I_ω možemo sada izraziti pomoću onoga koje ima sustav za vrtnju oko osi koja paralelno prolazi kroz središte tromosti $I_{\omega,CM}$:

$$I_\omega = \sum_i m_i \rho_i^{\,2} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_{CM} + \vec{\rho}_i')^2 = \sum_i m_i \rho_{CM}^{\,2} + 2\vec{\rho}_{CM} \sum_i m_i \vec{\rho}_i' + \sum_i m_i (\rho_i')^2 \qquad (7.35)$$

U srednjem članu desne strane izraza (7.35) faktor sume iščezava jer se radi o koordinati središta tromosti u sustavu središta tromosti. Desni pak član istog izraza predstavlja moment tromosti oko središta tromosti : $I_{\omega,CM}$. Tako se (7.35) može napisati i kao:

$$I_\omega = M\rho_{CM}^{\,2} + I_{\omega,CM} \qquad (7.36)$$

Moment inercije oko nove osi jednak je zbroju momenta inercije oko paralelne osi koja ide središtem tromosti i momenta tromosti koji bi imao objekt s ukupnom masom sistema M koncentriran na udaljenosti razmaka dvije osi : ρ_{CM}.

TEOREM ZA TANKI RAVNINSKI LIK I MOMENTE INERCIJE OKO OKOMITIH OSI

Pretpostavimo da je dimenzija ravninskog tijela zanemariva duž z-osi. Tada se pomoću momenta inercije oko x-osi:

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 \tag{7.37}$$

i momenta tromosti oko y-osi:

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2 \tag{7.38}$$

može izraziti moment inercije oko z-osi:

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x \tag{7.39}$$

RAČUNANJE MOMENTATA INERCIJE PRETPOSTAVKOM KONITUIRANE MASE

Do sada smo izraz za moment inercije pisali pomoću sume momenata inercije elemenata s masom m_i i udaljenosti od osi rotacije ρ_i. U slijedećem koraku ćemo uzeti u obzir da tijelo dijelimo u sve sitnije fragmenta (čiji se broj prirodno povećava). Mase tih fragmenata označavamo s Δm_i . Tada možemo prijeći na ideju da je masa kontinuirano raspodijeljena, pa je njezin iznos na udaljenosti $\rho_i : dm$. Tada možemo sa zbrajanja po elementima prijeći na integriranje po kontinuiranoj varijabli:

$$I = \sum_i \rho_i^2 \Delta m_i \quad \to \quad \int \rho^2 dm \tag{7.40}$$

Ako je gustoća mase varijabilna po tijelu tada se diferencijal mase može napisati preko diferencijala volumena dV i iznosa gustoće mase u tom diferencijalu prostora. Ovaj izraz ne ćemo napisati jer bi mogao studente formalno zbunjivati . Naime za gustoću mase i za udaljenost od osi rotacije se upotrebljava isto slovo ρ. Student može sam, a bit će pokazano i na vježbama izračunati momente inercije nekih simetričnih tijela:

Prsten, obruč ili šuplji valjak polumjera R: $I = MR^2$ (7.41)

Puni valjak $I = \frac{1}{2}MR^2$ (7.42)

Štap oko središta (dužina štapa:L) $I = \frac{1}{12}ML^2$ (7.43)

Pravokutna ploča $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (7.44)

Kugla $I = \frac{2}{5}MR^2$ (7.55)

Studente može zanimati da se proračuni momenta inercije pojavljuju i u modernim dijelovima istraživanja kao što je na primjer teorijsko predviđanje utjecaja kolektivnog gibanja nukleona u atomskoj jezgri na moment inercije jezgre. Usporedba s eksperimentalnim podacima tada pokazuje koliko je takav model dobar.
Ilustrirat ćemo upotrebu koncepata sedmog poglavlja na nekoliko primjera rotiranja tijela oko njihovih osi simetrije.

VRTNJA VALJKA POLUMJERA R OKO OSI SIMETRIJE MOMENTOM SILE:

Najprije uočimo da se opća veza momenta sile i momenta impulsa (7.21) u slučaju fiksne osi rotacije svodi na jednodimenzionalnu vezu:

$$M_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt} \tag{7.56}$$

gdje indeks ω označava da se radi o projekciji vektora smjer na $\vec{\omega}$. Primjenom (7.28) u (7.56) nadalje dobivamo:

$$M_{\omega} = I_{\omega}\frac{d\omega}{dt} = I_{\omega}\dot{\omega} \tag{7.57}$$

I u relaciji (7.57) opažamo novu analogiju translacije i rotacije: ovdje moment sile igra ulogu kakvu je kod translacije imala sila, moment inercije ulogu mase, a uloga kutne akceleracije:

$$\dot{\omega} \equiv \alpha \tag{7.58}$$

je analogna linearnoj akceleraciji! Ako silom F djelujemo tangencijalno na plašt valjka radijusa R,

$$RF = \dot{\omega} I_{\omega} \tag{7.59}$$

Ovaj problem možemo detaljnije razrađivati upotrebom izraza iz tabele za momente inercije raznih vrsta valjaka iz gornje tabele. Nadalje u razmatranje možemo uključiti i obodnu akceleraciju povezanu s kutnom akceleracijom relacijom:

$$a = \alpha R \tag{7.60}$$

VRTNJA VALJKA TIJELOM KOJE PADA POVEZANIM S VALJKOM S NITI

Dijagram sila obješenog tijela daje nam za njegovu akceleraciju (ujedno i obodnu akceleraciju točke na plaštu valjka):

$$ma = mg - T \tag{7.61}$$

Napetost nit T iz gornje relacije je ujedno i sila koja daje moment sile za vrtnu valjka:

$$TR = \dot{\omega} I \tag{7.62}$$

Uvrstimo u (7.62) izraz za napetost niti iz (7.61) i vezu kutne akceleracije s obodnom (7.61):

$$m(g - R\dot{\omega})R = \dot{\omega} I \tag{7.63}$$

Sređivanjem možemo izračunati kutnu akceleraciju:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + mR^2} \tag{7.64}$$

Vezom kutne i obodne akceleracije (7.60) možemo iz (7.64) dobiti i uključenje obodne akceleracije a :

$$a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg \tag{7.65}$$

Ovo je vrlo poučna relacija za brzu procjenu uloge uključenja rotacijskog stupnja slobode u sistem. Sa stanovišta tijela koje pada njegova pogonska sila gravitacije mora tjerati ne samo njegovu masu nego i efektivnu masu I/R^2. U problemima koji kombiniraju translaciju i rotaciju tijela često ćemo uočiti ovaj fenomen!

KOTRLJANJE VALJKA NIZ KOSINU BEZ OTPORA TRENJA

U problem se uključuje činjenica da valjak ne kliže nego se po njoj kotrlja. Problem se može tretirati na više načina, mi izabiremo pomoć zakona sačuvanja energije i u drugoj verziji primjenu momenta težine tijela oko linije dodira valjka i kosine. Kosina je nagnuta za kut α prema horizontali.

(a) Primjena zakona sačuvanja energije
Deriviranjem zakona sačuvanja energije:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + Mgz = const. \tag{7.66}$$

imamo :

$$Mv\dot{v} + I_{CM}\omega\dot{\omega} + \mathrm{Mg}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{7.67}$$

Kako nema klizanja, vrijede slijedeće relacije:

$$v = \omega \cdot r \qquad a = \dot{\omega}r \qquad dz/dt = -v \cdot \sin\alpha \tag{7.68}$$

Njihovim uvrštenjem u (7.67) slijedi :

$$Mva + I_{CM}\frac{v}{r}\frac{a}{r} - Mgv\sin\alpha = 0 \tag{7.69}$$

Odakle je akceleraciju lako izračunati:

$$a = \frac{Mg\sin\alpha}{M + I/r^2} \tag{7.70}$$

Već na ovom primjeru verificiramo komentar koji smo o efektivnoj masi s porijeklom od rotacije (I/r^2) načinili uz (7.65).
(b) Moment težine valjka

$$\vec{r} \times (M\vec{g}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.71}$$

Projiciranjem (7.71) na os rotacije (kutne brzine), slijedi:

$$rMg\sin\alpha = I_{linija\ dodira} \cdot \dot{\omega} \tag{7.72}$$

Izražavanjem $\dot{\omega}$ kao u (7.68) i pomoću Steinerovog teorema o momentima inercije oko paralelnih osu imamo:

$$Mgr\sin\alpha = \frac{a}{r}(I_{CM} + Mr^2) \tag{7.73}$$

što je zapravo identično (7.69) i vodi na isti konačni rezultat (7.70).

GIBANJE TANKOG VALJKA POD DJELOVANJEM SILE U RAVNINI VALJKA

a) Sila djeluje na pravcu koji prolazi središtem mase:

$$\vec{F}_v = M\ddot{\vec{R}} \tag{7.74}$$

$$dW_v = \vec{F}d\vec{s} = M\ddot{\vec{R}} \cdot d\vec{R} = d(\frac{1}{2}Mv^2) \tag{7.75}$$

Rad vanjske sile povećava translacijsku kinetičku energiju tijela

b) Tijelo je prisiljeno vrtiti se oko stalne osi:
Korištenjem izraza za moment sile i vezom s momentom impulsa:

$$\vec{r} \times \vec{F}_v = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} I_{CM} \qquad (7.76)$$

A projiciranjem na smjer vrtnje,

$$rF_v = \frac{d\omega}{dt} I_{CM} \qquad (7.77)$$

Množenjem s $d\vartheta = \omega dt$ *i korištenjem* $rd\vartheta = ds$ *u* (7.77) *slijedi*

$$dW_v = F_v ds = d(\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2) \qquad (7.78)$$

Rad vanjske sile povećava rotacijsku kinetičku energiju.

c) Sila djeluje okomito na plašt valjka, ali tijelo nije učvršćeno
Jednadžbe (7.74) i (7.76) obadvije vrijede. Ukupni rad vanjske sile je rad na translacijskom i rotacijskom stupnju slobode:

$$dW_v = d(\frac{1}{2} Mv^2) + d(\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2) \qquad (7.79)$$

Bitno je uočiti da veza v i ω zavisi o geometriji problema , to jest o udaljenosti smjera sile od središta mase.

VALJAK NA PODLOZI KOJA SE GIBA AKCELERIRANO (BEZ KLIZANJA)

Analizom problema imamo dva sigurna zaključka. Ako podloga putuje akcelerirano akceleracijom a' , tijelo koje se po njoj pri tome prisiljava na kotrljanje (jer na njega djeluje tangencijalna sila u smjeru a') također mora putovati akcelerirano akceleracojim a .
Postavlja se pitanje odnosa dvije akceleracije. Izborom središta tromosti za praćenje veze momenta sile i momenta impulsa imamo projicirajući uobičajenu vezu među njima na os vrtnje:

$$RF_t = \dot{\omega} I_{CM} \qquad (7.80)$$

Gdje je R radijus valjka, a F_t tangencijalna sila koja djeluje na kontaktu podloge i valjka.
Znamo da se tijelo akcelerira pod djelovanjem F_t .

$$F_t = Ma \qquad (7.81)$$

S druge strane kutna akceleracija pomnožena s radijusom valjka jest član razlike između akceleracije a' i a :

$$\dot{\omega} = \frac{a' - a}{R} \qquad (7.82)$$

Supstitucijom (7.81) i (7.82) u (7.80) imamo:

$$RMa = \frac{a' - a}{R} I_{CM} \qquad Ma = (a' - a)\frac{I}{R^2} \qquad (7.83)$$

Druga od relacija (7.83) može kao i u svim dosadašnjim primjerima uzeti kao ilustracija uloge efektivne mase u rotacijsko-translacijskim problemima. Iz iste relacije konačno slijedi:

$$a = \frac{a' I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} \qquad (7.84)$$

PRECESIJA ZVRKA

Problem koji razmatramo jest osno simetrični zvrk ; njegov moment inercije oko osi simetrije jest I_{CM} , vektor njegovog trenutnog položaja središta tromosti u odnosu na točku oslonca zvrka je $\vec{r}$, a u njegovom središtu mase ima hvatište težina zvrka: $M\vec{g}$. Time gravitacija proizvodi moment sile s obzirom na točku oslonca zvrka $\vec{r} \times M\vec{g}$, pa imamo izraz za derivaciju momenta impulsa:

$$\vec{r} \times M\vec{g} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.85}$$

Načinimo aproksimaciju koja nije potpuno točna, ali u velikoj mjeri jest:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot I_{CM} \tag{7.86}$$

Uvrštenjem (7.86) u (7.85) dobivamo:

$$\vec{r} \times M\vec{g} = I_{CM} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{7.87}$$

No za vektore stalnog modula, što kutna brzina jest, imamo relaciju:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \tag{7.88}$$

Gdje je $\vec{\Omega}$ kutna brzina rotacije kutne brzine $\vec{\omega}$. Dodajmo da je $\vec{r} = r\vec{\omega}/\omega$. Kada ovo i (7.88) uvrstimo u (7.87), dobivamo:

$$\vec{\Omega} \times \omega = -(\frac{Mr}{I_{CM}\omega})\vec{g} \times \vec{\omega} \tag{7.89}$$

odakle zaključujemo

$$\vec{\Omega} = -\frac{M\vec{g}r}{I_{CM}\omega} \tag{7.89}$$

Ostavljamo studentu da razmišlja što je uzrok poznatog fenomena precesije Zemljine osi rotacije obzirom da taj zvrk nema uporišta oko kojeg bi precesirao.

PRECESIJA ZEMLJINE OSI ; GODIŠNJA DOBA I KALENDARI

Zemljina os rotacije precesira s periodom od otprilike 26 000 godina. Zemlja se također nalazi na eliptičnoj putanji u čijem je jednom fokusu Sunce. Kako je ekscentricitet Zemljine putanje malen, to godišnja doba ne nastupaju radi varijacije udaljenosti Zemlja-Sunce, nego radi inklinacije Zemljine osi rotacije obzirom na ravninu njene putanje. Vrlo mali broj ljudi zna da je za vrijeme zimskog solisticija Zemlja bliže Suncu nego za vrijeme ljetnog. Ekvinociji su točke kada ekvatorijalna ravnina prelazi preko Sunca. Sada nastupa sukob oko definicije godine. S jedne strane je godinu prirodno smatrati vremenom potrebnim da se ponovi istovjetni položaj Zemlje prema zvjezdama stajačicama. No radi precesije , to bi značilo da se godišnja doba miču na tako definiranoj vremenskoj skali.

Dvije se godine razlikuju: sideralna godina je period za ponavljanje istovjetnog položaja prema zvijezdama stajačicama, a tropikalna za ponavljanje položaja ptolaska Sunca ekvatorijalnom ravninim.

1 sideralna godina - 1 tropikalna godina = 20 minuta 33 sekunde.

Dva kalendara Gregorijanski i Julijanski se razlikuju prema duljini tropikalne godine.

Gregorijanski kalendar uzima za tropikalnu godinu: 365,2425 dana, a Julijanski 365,25 dana. Gregorijanski kalendar nastoji držati proljetni ekvinocij na 21. ožujku. Plenetarno je prihvaćen Gregorijanski kalendar.

Iz ove razlike nastaju razlike u kalendarima zapadne i istočne kršćanske crkve.