Z A K O N I S A Č U V A N J A E N E R G I J E I I M P U L S A Z A S U S T A V E T I J E L A :

VELIČINE KOJE OPISUJU TIJELA I SUSTAV:

Sustav od N tijela sadrži tijela koje indeksiramo indeksom „i“ kao njegovom individualnom oznakom. Na i-to tijelo može djelovati vanjska $\vec{F}_{i,v}$ ili pak sila s tijela j . Silu kojom tijelo j djeluje na tijelo i označavamo s $\vec{F}_{j\to i}$. Rezultantna sila na i-to tijelo $\vec{F}_i$ je suma vanjske sile i sila kojim sva druga tijela sustava djeluju na tijelo „i“ :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,v} + \sum_{j=1}^{j=N}{}' \vec{F}_{j\to i} = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \tag{6.1}$$

U (6.1) oznaka sume s crticom: $\sum'$ podsjeća da se suma ne odnosi na član u kojom su dva indeksa identični .

ZAKON SAČUVANJA ENERGIJE ZA SUSTAV TIJELA POD DJELOVANJEM KONZERVATIVNIH SILA:

Relaciju (6.1) množimo s vektorom diferencijala puta i-tog tijela:

$$\vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i + \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i = m_i \vec{v}_i . d\vec{v}_i \tag{6.2}$$

Individualne radove na svim tijelima možemo posumirati po indeksu i:

$$\sum_i{}' \left(\vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i + \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i \right) = d \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{6.3}$$

Radi preglednosti uvodimo slijedeće pokrate:
Diferencijal rada svih vanjskih sila jest:

$$dW_v = \sum \vec{F}_{i,v} \cdot d\vec{s}_i \tag{6.4}$$

$$dP = -\sum_{i,j}{}' \vec{F}_{j\to i} \cdot d\vec{s}_i = d\Big(\sum_{po\ parovima} P_{i,j} \Big) \tag{6.5}$$

$$dP_{i,j} = -\vec{F}_{j\to i} (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j) \tag{6.6}$$

dP je diferencijal ukupne potencijalne energije koji se dobiva iz sume potencijalnih energija za međudjelovanje sviju parova tijela $P_{i,j}$, uz pretpostavku da se za svaki par taj diferencijal potencijalne energije formira u potpunoj analogiji s izrazom (5.4) koji opisuje tvorbu diferencijala za danu konzervativnu silu (6.6). S desne strane (6.3) stoji diferencijal ukupne kinetičke energije koja je suma kinetičkih energija sviju tijela. Tako (6.3) možemo čitati i kao:

$$dW_v = dP + dT \tag{6.7}$$

Ukupni rad vanjskih sila troši se na sumu povećanja potencijalne i kinetičke energije sustava. Također je očito , ako vanjskih sila nema (kažemo da je sustav izoliran), tada mu je ukupna energija sačuvana .

ZAKON SAČUVANJA IMPULSA ZA SUSTAV TIJELA:

Možemo ponovno napisati izraz (6.1):

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,v} + \sum_{j=1}^{j=N}{}' \vec{F}_{j\to i} = m_i\vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Možemo provesti sumaciju po indeksu tijela i :

$$\sum_i \vec{F}_{i,v} + \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{j\to i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i \tag{6.8}$$

Kako su sile unutar para dva tijela(i,j) i(j.i) jednake i suprotnog smjera prema trećem Newtonovom zakonu, to dvostruka suma u (6.8) iščezava. Nadalje suma svih impulsa tijela sustava se označava kao $\vec{P}$, to možemo zaključiti da je rezultantna vanjska sila (zbroj svih vanjskih sila) jednaka vremenskoj derivaciji ukupnog impuls $\vec{P}$:

$$\vec{F}_v \equiv \sum_i \vec{F}_{i,v} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{6.9}$$

Ako lijeva strana u (6.9) iščezava , tada je vremenska derivacija ukupnog impulsa jednaka nuli, to jest impuls je stalan u vremenu!

$$\vec{F}_v = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = \vec{c} \tag{6.10}$$

U (6.10) nas vektor $\vec{c}$ asocira na vremenski nepromjenljivi vektor.

VEKTOR POLOŽAJA SREDIŠTA TROMOSTI SUSTAVA TIJELA:

Definiramo vektor položaja točke koju ćemo kasnije nazvati središtem tromosti kad dokažemo njena posebna svojstva:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{6.11}$$

Vratimo se relaciji (6.9):

$$\vec{F}_v = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}M\vec{R} \tag{6.12}$$

Gdje je $M = \sum_i m_i$. Do konačnog izraza u (6.12) smo došli proširivši sumu s izrazom M/M i definicijom (6.11). Iz (6.12) opažamo prvo važno svojstvo koordinate $\vec{R}$: Ona se ponaša kao da rezultanta svih vanjskih sila djeluje u njoj, kao da je u njoj masa cijelog sustava i nastaje njena akceleracija po drugom Newtonovom zakonu! Možemo zaključiti da je navedenim opravdan naziv središta tromosti za sustav tijela. Može se pokazati dodatna relacija, koja potvrđuje gornji naziv:

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i\vec{r}_i = M\frac{d}{dt}\vec{R} \tag{6.13}$$

Impuls sustava se može napisati kao produkt ukupne mase sustava i brzine središta tromosti sustava.

Često se daju ilustracije ponašanja položaja središta mase koja slijede iz (6.12) .
Primjer gibanja sustava tijela u homogenom gravitacijskom polju:

$$\vec{F}_v = \sum_i \vec{F}_{i,v} = \sum m_i \vec{g} = M\vec{g} = M\ddot{\vec{R}} \tag{6.14}$$

Slijedi:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g} \tag{6.15}$$

Središte tromosti sustava pada jednoliko akceleracijom g. Ovo je netrivijalna izjava jer među dijelovima sustava djeluju i međusobne sile, no to ne mijenja ponašanje i putanju središta tromosti. Jedan je primjer projektil izbačen koso uvis, koji tijekom letenja eksplodira. Od prije znamo da bi putanja cijelog projektila (dok je trenje sa zrakom zanemarivo) bila parabola. Koristimo (6.12), vanjska sila je gravitacijska, a mi smo upravo pokazali u (6.14) da je akceleracija g, usmjerena prema dolje. Ako je tijelo imalo početnu brzinu koso u odnosu na horizontalu, putanja je parabolična. Dakle središte tromosti putuje kao i za cijeli projektil. Eksplozija se manifestira unutrašnjim silama koje prema (6.12) nemaju utjecaja na gibanje centra tromosti.

SUDARI:

Sudari tijela su zanimljiv i instruktivan primjer primjene zakona sačuvanja energije, impulsa i koncepta središta tromosti. Načinit ćemo najprije razmatranja sudara dva tijela u jednoj dimenziji (bez trenja) jer je slučaj blizak intuiciji. Međutim , veličine koje ćemo sresti i rezultati koje ćemo dobiti praktički će se moći generalizirati na sudare u prostoru mnemotehnički jednostavnim receptom. Umjesto skalarnih veličina trebat ćemo za koordinate i brzine pisati vektore!

SUDAR DVA TIJELA U JEDNOJ DIMENZIJI:

Tijela označavamo indeksima 1 i 2 , mase tijela s m ,brzine s v prije sudara a v' poslije sudara. Razmatramo sudar izvan utjecaja drugih sila. (Na primjer na zračnoj klupi gravitacijska je sila uravnotežena sa strujanjem zraka iz rupica na klupi; time je rezultantna sila jednaka nuli). Jednodimenzijski koordinatni sustav je takav da su koordinate desno od ishodišta pozitivne a lijevo negativne. U odsustvu vanjskih sila ukupni impuls P je sačuvan (6.10), tako možemo pisati:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = (m_1 + m_2)V = MV \tag{6.16}$$

M je ukupna masa a V je brzina središta tromosti.
Odbijanjem druge relacije s desne strane od druge i treće relacija s lijeve strane imamo:

$$m_1(v_1 - V) + m_2(v_2 - V) = 0 = m_1(v'_1 - V) + m_2(v'_2 - V) \tag{6.17}$$

Uočimo da su u gornjim izrazima razlike brzina zapravo relativna brzina u odnosu na središte mase. Nadalje u anglosaksonskoj literaturi središte se mase zove Center of mass s kraticom CM, to ćemo relativne brzine u (6.17) bilježiti v s indeksom tijela na koji se odnose i oznakom CM. Time (6.17) pišemo u novoj notaciji:

$$m_1 v_{1,CM} + m_2 v_{2,CM} = 0 = m_1 v'_{1,CM} + m_2 v'_{2,CM} \tag{6.18}$$

Od velike su koristi i relativne brzine među tijelima dobivene jednostavnim odbijanjem brzina u početnom sustavu:

$$v_r = v_2 - v_1 = v_{2,CM} - v_{1,CM} \qquad v'_r = v'_2 - v'_1 = v'_{2,CM} - v'_{1,CM}\,) \qquad (6.19)$$

Lijeve strane relacija (6.18) i (6.19) možemo vidjeti kao sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice za brzine u središtu tromosti (one s indeksom CM) i izraziti ih preko relativne brzine:

$$v_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \qquad v_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r \qquad (6.20)$$

Korištenjem desnih strana relacija (6.18) i (6.19) analognom procedurom imamo :

$$v'_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v'_r \qquad v'_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v'_r \qquad (6.21)$$

Sada smo u srži problema. Tijekom studija mnogih procesa sudara, čak i u najmodernijem sudarivaču LHC u CERN-u, fizikalno promatranje je najtransparentnije u CM sustavu, jer u njemu nema dodatnih translacija sustava koje maskiraju bit. Fizikalno pitanje jest kako iz veličina (6.20) koje su određene početnim brzinama i masama odrediti (6.21) to jest rezultate sudara. Kada se ovo pitanje riješi, transformacijama koje su obrat slijedu (6.16) do (6.20) dobivamo rezultate u početnom sustavu! Da bismo na to pitanje odgovorili potrebno nam je znati da li se tijekom sudara iz unutrašnjih svojstava tijela koja se sudaraju u sustav dodala ili oduzela energija. Jedan primjer jest: u trenutku kontakta nastaje eksplozija, koja povećava kinetičku energiju sustava ili obrnuto: dio energije pretvori se u zagrijavanje tijela i smanji kinetičku energiju sustava. Prvi slučaj zovemo egzotermnim procesom , a drugi endotermnim procesom. Najjednostavnija je klasa sudara u kojima nema promjene kinetičke energije; ta se klasa naziva elastičnim sudarima. Ubrzo ćemo pokazati da je u jednodimenzionalnom elastičnom sudaru konačna relativna brzina po apsolutnom iznosu jednaka početnoj relativnoj brzini. Dakle imamo dvije mogućnosti:

$$v'_r = v_r \qquad \text{ili} \qquad v'_r = -v_r \qquad (6.22)$$

U prvom slučaju prema (6.21) imamo da su brzine u CM nakon sudara iste kao (6.20) to jest prije sudara. Ovo je slučaj u kojem kao da sudar nije ni nastupio. U drugom slučaju nakon sudara vrijedi:

$$v'_{1,CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \qquad v'_{2,CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r \qquad (6.23)$$

Iz (6.23) lako dobivamo brzine tijela u početnom sustavu znajući da se one dobiju zbrajanjem brzine centra tromosti V i brzine u centru tromosti koje smo upravo izračunali. (vidi komentar o brzinama u sustavu središta tromosti u tekstu ispod (6.17). Dakle vrijedi:

$$v'_1 = V + v'_{1,CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad (6.24)$$

$$v'_2 = V + v'_{2,CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \qquad (6.25)$$

Iako je ovo elementarno razmatranje, izraz (6.24) je fundamentalno važan za konstrukciju nuklearnih reaktora poput onog u Krškom. Bez ulaska u detalje rada reaktora spominjemo da se pri nuklearnoj fisiji oslobađa nama potrebna energija raspadom uranove jezgre ali se oslobađaju i neutroni potrebni za nastavak lančane reakcije to jest spontanog nastavka fisijskog procesa na preostalim jezgrama urana. No ti neutroni su prebrzi za efikasan nastavak procesa i treba ih usporiti (termalizacija neutrona). Usporavanje neutrona može se činiti samo sudarima s drugim jezgrama. Tu se doslovno primjenjuje relacija (6.24). Dodajmo da neutron uzimamo kao česticu 1 a jezgru usporivača kao česticu 2. Čestica 2 početno miruje $v_2 = 0$.
Iz (6.24) je očito da neutron poslije sudara ima to manju brzinu , što je manja razlika neutrona i jezgre s kojom se sudara. Stoga se kao usporivači (moderatori) upotrebljavaju materijali načinjeni od lakih jezgri. Najefikasnije usporavanje je na jezgrama vodika; brzina neutrona nakon sudara s protonom koji ima gotovo jednaku masu kao i neutron u slučaju centralnog sudara (slučaj jednodimenzionalnog sudara) je i prema (6.24) jednaka nuli!

Vratimo se sada pitanju iznosa relativne brzine poslije sudara na kojem smo nakon relacije (6.21) razmatrali samo slučaj elastičnih sudara.

Kinetička energija u laboratorijskom sustavu i sustavu CM:
Laboratorijski sustav je onaj u kojem smo započeli originalna razmatranja. Nuklearni fizičari običavaju zvati laboratorijskim sustavom onaj u kojem projektil pogađa mirnu metu, no to nije nužno tako. U laboratorijskom sustavu , generalno, obadva tijela mogu imati brzine. Izraz za kinetičku energija dva tijela lako pišemo pomoću njihovih laboratorijskih brzina, a u drugom koraku te brzine možemo izraziti kao zbroj brzine središta tromosti : V i brzine u sustavu centra tromosti:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,CM} + V)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,CM} + V)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 + V(m_1 v_{1,CM} + m_2 v_{2,CM}) + \frac{1}{2} m_1 v_{1,CM}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,CM}{}^2 = \qquad (6.26) \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_r{}^2
\end{aligned}
$$

Pri sređivanju (6.26) osim opisa koraka za prvi red iznad same formule, u srednjem redu smo iskoristili svojstvo da u CM impuls sustava iščezava (relacija (6.18). Transformaciju dva posljednja člana srednjeg reda u posljednji član trećeg reda student će lako provjeriti preko relacija (6.20) koje povezuju brzine u CM s relativnom brzinom. Prvi član trećeg reda u (6.26) ima oblik koji zaslužuje naziv kinetička energija središta tromosti (centra mase). Drugi član potječe od dva posljednja člana središnjeg reda i to je jasno kinetička energija dva tijela u sustavu središta tromosti.

Sada možemo obraniti tvrdnju iz (6.22). Kod elastičnih sudara ukupna kinetička energija je sačuvana. Nadalje prema posljednjem u nizu izraza za ukupnu kinetičku energiju T (6.26) prvi se član ne mijenja, jer se ukupna brzina V središta tromosti se ne mijenja. Tako zaključujemo da se iznos relativne brzine v_r također ne mijenja!

Potpuno neelastičan sudar:
U njemu dva tijela po sudaru putuju zajedno, to jest $v_r' = 0$. Time je ukupna kinetička energija po sudaru:

$$
T' = \frac{1}{2} M V^2 \qquad (6.27)
$$

OPĆI SUDAR DVA TIJELA U PROSTORU:

Sada ćemo poopćiti formalizam iz gornjeg odsječka kroz dva aspekta. Najprije, gibanje više ne će biti ograničeno na jednu dimenziju; produkti sudara moći će se gibati po prostoru. Zatim ćemo dozvoliti da tijela promjene iznose svojih masa. Ovo ćemo međutim načiniti na način da je ukupna masa sačuvana, to jest mase dviju čestica zbrojene prije i poslije sudara su iste. Mase prije imat će indekse 1 i 2 , a poslije 3 i 4. Ovo činimo kako bismo zapravo gotovo korektno razriješili problem kinematike niskoenergijskih nuklearnih reakcija s dva tijela u konačnom stanju! Riječi niskoenergijske reakcije zapravo kažu da su brzine projektila tijekom procesa bitno niže od brzine svjetlosti. Uvjet sačuvanja mase:

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = M \tag{6.28}$$

u nuklearnim reakcijama je ispunjen do reda veličine 1 promila, a koristan nam je u proračunu relativne brzine poslije sudara. Procedura koja slijedi je identična onoj iz gornjeg odsječka; jedina je razlika pojava vektorskih oznaka u izrazima za brzine! Počinjemo sa sačuvanjem impulsa u punoj analogiji s (6.16):

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = (m_1 + m_2)\vec{V} = M\vec{V} \tag{6.29}$$

Uvodimo brojčani pokazatelj promjene kinetičke energije u sustavu, Q vrijednost reakcije u nuklearnoj fizici ili općenito Q vrijednost procesa povezan s kinetičkom energijom prije sudara T i kinetičkom energijom poslije sudara T' relacijom:

$Q = T' - T$. Pretpostavlja se da znamo početne uvjete (mase, brzine, Q vrijednost i konačne mase) ostaje otvoren problem predviđanja brzina nakon sudara. Dva vektora konačnih brzina predstavljaju šest nepoznanica. Postoje zakoni sačuvanja energije i impulsa. Oni predstavljaju četiri uvjeta koji se na izbor mogućih konačnih stanja postavljaju. Ako meta miruje, postoji simetrija oko upadne osi projektila. Time se postavlja još jedan uvjet na varijable konačnog stanja. Vidimo da je preostala samo jedna nepoznanica i nju se često izabire kao kut jedne od izlaznih čestica. Nakon izbora kuta, sve druge veličine su određene zakonima sačuvanja!

Pisanjem vektorskog analogona relacije (6.17) imamo:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{V}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{V}) = 0 = m_3(\vec{v}_3 - \vec{V}) + m_4(\vec{v}_4 - \vec{V}) \tag{6.30}$$

Gornji izrazi u okruglim zagradama su zapravo brzine projektila u sustavu središta tromosti (CM):

$$\vec{v}_{1,CM} = \vec{v}_1 - \vec{V} \quad \vec{v}_{2,CM} = \vec{v}_2 - \vec{V} \quad \vec{v}_{3,CM} = \vec{v}_3 - \vec{V} \quad \vec{v}_{4,CM} = \vec{v}_4 - \vec{V} \tag{6.31}$$

Uvodimo nadalje relativne brzine prije sudara $\vec{v}_r$ i poslije sudara $\vec{v}'_r$:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{2,CM} - \vec{v}_{1,CM} \tag{6.32}$$

i

$$\vec{v}'_r = \vec{v}_4 - \vec{v}_3 = \vec{v}_{4,CM} - \vec{v}_{3,CM} \tag{6.33}$$

Oponašanjem koraka kombiniranja (6.18) i (6.19) u (6.20) dobivamo iz (6.30) i (6.32) :

$$\vec{v}_{1,CM} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \qquad \vec{v}_{2,CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \tag{6.34}$$

A kombiniranjem (6.30) i (6.33) :

$$\vec{v}_{3,CM} = \frac{m_4}{m_3 + m_4}\vec{v}'_r \qquad \vec{v}_{4,CM} = -\frac{m_3}{m_3 + m_4}\vec{v}'_r \tag{6.35}$$

Sad je posve jasno da se rješavanje problema svelo samo na određivanje $\vec{v}'_r$. Naime kad njih znamo, (6.35) daje konačne brzine u CM, a relacije (6.31) nas vraćaju do vrijednosti brzina poslije sudara; brzinu sustava centra mase lako računamo iz ukupnog impulsa i ukupne mase.
Vratimo se sada relaciji (6.26):

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_r^{\,2} \qquad (6.36)$$

Njen izvod možemo ponoviti istim argumentima kakvim se izvelo (6.26).
Isto vrijedi i analogna relacija nakon sudara:

$$T' = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}v'^{\,2}_r \qquad (6.37)$$

Kako su kinetičke energije povezane s Q vrijednošću procesa, vrijedi:

$$T' = T + Q \qquad (6.38)$$

Što zajedno s (6.36) i (6.37) omogućuje izračun relativne brzine nakon sudara:

$$\frac{1}{2}\frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}v'^{\,2}_r = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_r^{\,2} + Q \qquad (6.39)$$

Potpuno određenje vektora $\vec{v}'_r$ načinimo koristeći njegov iznos iz (6.39) i proizvoljnim odabirom kuta u CM. Tada već opisanom procedurom slijede sve ostale CM i laboratorijske brzine! Tako student ima u rukama formalizam za proračun kinematike nuklearne reakcije s dva tijela u konačnom stanju , to jest vezu između kuta pod kojim projektil izlazi u sustavu CM i njegove brzine/ kinetičke energije u ostalim sustavima.

Veza među kutovima emisije tijela poslije sudara za laboratorijski i CM sustav:
Za laboratorijski sustav se obično odabire onaj u kojem tijelo-projektil ima brzinu, dok tijelo s kojim se sudara (meta) miruje. Tada imamo jednoznačno određen vektor brzine CM sustava:

$$\vec{V} = \frac{(m\vec{v})_{projektil}}{m_{projektil} + m_{mete}} \qquad (6.40)$$

Kako se brzine vektorski zbrajaju, to među brzinama tijela u sustavu CM $\vec{v}_{CM}$ i laboratorijskom sustavu $\vec{v}_{lab}$ postoji jednostavna veza:

$$\vec{v}_{lab} = \vec{V} + \vec{v}_{CM} \qquad (6.41)$$

Kut emisije u laboratorijskom sustavu ϑ_{lab} je kut između vektora $\vec{V}$ *i* $\vec{v}_{lab}$, a kut u sustavu središta tromosti ϑ_{CM} je kut između vektora $\vec{V}$ *i* $\vec{v}_{CM}$. Ako je jedan od kutova zadan i ako su poznati iznosi dva vektora, trigonometrija nam daje drugi kut!
Razlikujemo tri mogućnosti:

$$v_{CM} < V \qquad (6.42)$$

Crtanjem kružnice s radijusom v_{CM} koja ne dostiže dužinu V zaključujemo da postoje dva kuta ϑ_{CM} koji daju isti ϑ_{lab}. Također ϑ_{lab} u tom slučaju ne može prijeći maksimalnu vrijednost određenu omjerom v_{CM}/V .

$$v_{CM} = V \qquad (6.43)$$

U tom slučaju je maksimalna vrijednost $\vartheta_{lab} = 90^0$. Treća je mogućnost:

$$v_{CM} > V \qquad (6.44)$$

U tom slučaju je korespondencija laboratorijskog kuta i kuta u sustavu središta tromosti jednoznačna!

ZAKLJUČNO O SUDARIMA

Sudari su jedino sredstvo za istraživanje interakcija u nevidljivom mikrosvijetu. To se ilustrira studentima jednostavnim simulacijama: roj kugli se lansira prema koso postavljenoj ploči u odnosu na njihovu trajektoriju. Sve kugle koje se sudaraju s pločom reflektiraju se od nje pod istim kutom i s istom brzinom/energijom. Detektori sa strane bi to registrirali. Kada smo ravnu ploču zamijenili kružnim profilom, kugle su se raspršile na sve strane. Da ne možemo očima pratiti tijek sudara, mogli bismo iz kutova refleksije i brzina kugli rekonstruirati oblik i svojstva ploče (na primjer gubitak kinetičke energije ako kugle sudarom gube energiju i griju ploču). Na istom principu i danas na najsnažnijim ubrzivačima svijeta vrše se istraživanja o konstituentima svijeta i njihovim međudjelovanjima kroz sudare. Tako je na primjer ključni dokaz otkrića W bozona bio i manjak impulsa rezultata sudara s jedne strane snopa, jer je na to stranu W bozon emitirao neutrino, nama teško detektabilnu česticu, pa zakon impulsa prividno nije vrijedio. Uključenjem impulsa nedetektiranog neutrina, kinematika procesa stvaranja W bozona je bila zadovoljena; to je bio dokaz postojanja W bozona. I sam neutrino je bio otkriven istim receptom. U takozvanim beta raspadima nije bila zadovoljena kinematika procesa, jer je impuls iz procesa iznosio već spomenuti neutrino. Kada je Nobelovac Pauli uključio pretpostavku o egzistenciji neutrina, zakoni sačuvanja energije i impulsa su opet vrijedili, a ujedno je otkrivena nova čestica: neutrino. Neutrino je naknadno i eksperimentalno direktnije detektiran, ali prvi znak njegove egzistencije je bilo inzistiranje na zakonima sačuvanja energije i impulsa, koji su temelj razmatranja u sudarima , kako smo gore pratili.

RAKETNI POGON

Postoji važni primjer primjene zakona sačuvanja ukupnog impulsa sustava u kojem njegove komponente nemaju stalne mase. Svemirski brod, izvan djelovanja drugih sila, zajedno sa svojim ispušnim plinovima predstavlja izolirani sustav, čiji ukupni impuls je sačuvan, a njegova derivacija po vremenu je jednaka nuli. U jednodimenzionalnoj geometriji gibanja uvodimo slijedeće oznake: vremenski promjenljiva masa rakete: m. Trenutna brzina rakete: v.

Brzina izbacivanja plinova mjereno relativno s obzirom na raketu: V_0. Kako je derivacija ukupnog impulsa jednaka nuli , možemo napisati:

$$0 = m\dot{v} + v\dot{m} + (v - V_0)(-\dot{m}) = m\dot{v} + V_0\dot{m} \qquad (6.45)$$

Ako pretpostavimo da masa raketa opada linearno u vremenu,

$$m = m_0 - \alpha t \qquad (6.46)$$

Iz toga slijedi deriviranjem:

$$\dot{m} = -\alpha \qquad (6.47)$$

(6.47) uvrštenjem u (6.45) daje diferencijalnu jednadžbu za brzinu rakete:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha V_0}{m} = \frac{\alpha V_0}{m_0 - \alpha t} \qquad (6.48)$$

Integriranjem (6.48) dobivamo izraz za brzinu rakete:

$$v = v(t=0) + V_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \qquad (6.49)$$

Ovakva jednadžba bila je orijentir za pripremu raketa u transportne svrhe. Jasno, u uvjetima na Zemlji ili u gravitacijskom polju, treba dodati i vanjske sile, što komplicira rješavanje, No ulogu brzine izbacivanja, mase i ispuštanja mase imamo ovdje sve jasno reprezentirane i spremne za optimiranje konstrukcije. Problem je jasan: kako postići što veću brzinu rakete!