Z A K O N   S A Č U V A N J A   E N E R G I J E:

ELEMENT RADA:

U mehanici je koncept energije blizak potencijalnoj mogućnosti vršenja rada. Stoga je za koncept energije potrebno razumjeti koncept rada. Tvrdnja da je za stalnu silu i zadani put na kojem je sila savladavana produkt dvije veličine rad , bez ulaska u detalje, se čini intuitivno prihvatljivim. Kada ,međutim, usporedimo napor potreban da se predmet pomakne dva metra horizontalno s naporom potrebnim da se isti predmet digne dva metra, postaje jasno da i kut između sile i puta igra ulogu. Kada mičemo predmet okomito na smjer sile nemamo napora. Kada mičemo predmet nasuprot sili postoji napor. Kada sila miče predmet, on dobiva brzinu (i potencijal da radi protiv neke sile)! Uz to rad treba definirati za male (diferencijalne) pomake jer se sila može prostorno mijenjati a također i kut između sile i pomaka. Stoga je definicija elementa rada:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{5.1}$$

dW *je element rada*, $\vec{F}$ *je sila koja vrši rad* , $d\vec{s}$ *je element prijedjenog puta*.

Vidimo da izraz (5.1) vodi računa o svim potankostima koje smo u gornjem tekstu diskutirali. Jedinica za rad je Joule i iz (5.1) je jasno da je to Newton pomnožen s metrom. Iz (5.1) se također vidi da rad može imati i pozitivan i negativan predznak. Rad je pozitivan kada je sila pomagala pomak, a negativan kad mu se odupirala. Skalarni produkt je izvrsna formulacija slijedećih činjenica. Pomak možemo rastaviti na komponentu duž sile i okomito na silu. Jasno je prema gornjoj analizi da nema rada pri micanju okomito na silu, no postoji rad za komponentu pomaka u smjer sile. Skalarni produkt (5.1) upravo o tome vodi računa.

ELEMENT KINETIČKE ENERGIJE:

U relaciji (5.1) možemo provesti zanimljive transformacije s dubokim fizikalnim smislom:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{mv^2}{2}) = dW \tag{5.2}$$

Najprije smo silu pisali preko Newtonovog zakona. Zatim smo faktor elementa puta izrazili pomoću brzine i elementa vremena. Zatim smo pokratili vremenske faktore i konačno produkt brzine i diferencijala brzine izrazili preko polovice diferencijala kvadrata brzine. Sve to je preko (5.1) povezano s elementom-diferencijalom rada. Vidimo da se rad utrošio na promjenu veličine $\frac{mv^2}{2}$. Blisko nam je stoga uvesti termin za tu veličinu kao kinetičku energiju. Pod energijom ćemo od sada smatrati veličinom koja odražava sposobnost tijela ili sustava da izvrši rad. Naime, relaciju (5.2) možemo čitati i natraške. Interpretirajući taj obrat kao obrat u vremenu to bi značilo da se kinetička energija troši na svladavanje sile $\vec{F}$.

ELEMENT POTENCIJALNE ENERGIJE:

Da bismo prihvatili matematički izraz za element-diferencijal potencijalne energije moramo razmotriti potankosti malo kompleksnije situacije. Proširit ćemo razmatranje na više fenomena. Najprije imamo u razmatranju tijelo mase m. Tijelo je sastavni dio nekog sustava u kojem djeluje unutrašnja sila; radi jednostavnosti joj nećemo dodavati indeks u opisu. Sila koja je sastavni dio sustava kojem pripada i tijelo je dakle $\vec{F}$. (kao mentalni model za ovu situaciju možemo uzeti tijelo u gravitacijskom polju; tijelo i polje ili tijelo,Zemlja i gravitacijska sila su sustav). Sad dodajemo i silu izvana koja također može djelovati na tijelo. To vanjsku silu ćemo označiti kao $\vec{F}_{IZV}$. (U našem modelu to može biti dodatna opruga ili čovjek). Na tijelo znači djeluje rezultantna sila: $\vec{F} + \vec{F}_{IZV}$. S ovom rezultantnom provedimo proceduru (5.2) na diferencijalu puta $d\vec{s}$. Rezultat je :

$$\vec{F}_{IZV} \cdot d\vec{s} = -\vec{F} \cdot d\vec{s} + d(\frac{mv^2}{2}) \qquad (5.3)$$

Gornja relacija jako mnogo govori. Rad vanjske sile dijeli se na promjenu kinetičke energije tijela i još jednu veličinu. Neke sile kao gravitacijska ili električna imaju posebno svojstvo da se njihov $-\vec{F} \cdot d\vec{s}$ može napisati kao diferencijal to jest da vrijedi:

$$-\vec{F} \cdot d\vec{s} = dP \qquad (5.4)$$

Kada je relacija (5.4) ispunjena uočavamo dva elementa: Kada nema vanjske sile $\vec{F}_{IZV}$, tada je suma diferencijala kinetičke energije i diferencijala veličine P jednaka nuli, to znači je suma kinetičke energije i elementa rada sile sustava (uzetog s negativnim predznakom) sačuvana.
Kada je (5.4) ispunjeno, imamo definiciju potencijalne energije. Sile koje ispunjavaju relaciju (5.4) zovemo konzervativnim silama. Sila trenja na primjer ne ispunjava gornji uvjet. Konzervativne sile imaju dodatna udobna svojstva, o kojima ćemo razmatrati u kasnijem tekstu. Potencijalna energija definirana s (5.4) + kinetička energija je sačuvana veličina dok nema sile izvan sustava.

SAČUVANJE ENERGIJE MEHANIČKOG SUSTAVA:

Možemo uvrstiti (5.4) u (5.3):

$$\vec{F}_{IZV} \cdot d\vec{s} = dP + d(\frac{mv^2}{2}) = d(P + \frac{mv^2}{2}) \qquad (5.5)$$

Kada nema vanjske sile (lijeva strana u (5.5) iščezava) suma kinetičke i potencijalne energije sustava je stalna. Suma potencijalne i kinetičke energije i naziva se mehaničkom energijom sustava. Studentima će se demonstrirati pokusi sa sačuvanjem mehaničke energije. (na primjer njihalo, titranje opruge s masom…) Dok imamo posla s mehaničkim silama ovi oblici energije prelaze iz jedne forme u drugu u sustavima bez vanjskih sila. U nastavku teksta koncentrirat ćemo se na potencijalnu energiju konzervativnih sila: njena svojstva i načine kako je izračunati za neke slučajeve.

KONZERVATIVNE SILE:

Sile koje zadovoljavaju uvjet (5.4) nazivamo konzervativnim silama. Bolje razumijevanje ove činjenice steći ćemo analizom svojstava koja iz (5.4) proizlaze. I sila i putanja mogu na različite načine zavisiti o prostornim koordinatama. No zamislimo da smo za silu koja ima svojstvo (5.4) načinili putanju, po kojoj savladavamo tu silu, zatvorenom, to jest da je početna i konačna točka ista. Ukupni je rad zbroj svih diferencijalnih elemenata rada od početne do konačne točke. To se u slučaju konzervativnih sila svodi na razliku vrijednosti potencijalne energije početne i konačne točke.

$$W = \int_{POČ}^{KON} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{POČ}^{KON} (-dP) = P(POČ) - P(KON) \tag{5.6}$$

Ako su početna i konačna točka iste, tada imamo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = P(POČ\ isto\ kao\ KON) - P(POČ\ isto\ kao\ KON) = 0 \tag{5.7}$$

Konzervativne sile mogu se karakterizirati bilo definicijom preko (5.4) ili preko (5.7) s time da (5.7) mora vrijediti za proizvoljnu zatvorenu putanju! Još dodatno opažamo da konzervativne sile imaju svojstvo da im rad ne zavisi od putanje kojom se od početne točke došlo do konačne. Odmah je jasno da sila trenja nije te vrste. Naime micanjem tijela jednog materijala po površini drugog materijal (uključujući i isti), rad će među ostalim zavisiti o ukupnoj dužini puta, a ne samo o početnoj i konačnoj točki. Štoviše, rad po zatvorenoj putanji izvjesno ne će biti nula.

POTENCIJALNA ENERGIJA U HOMOGENOM GRAVITACIJSKOM POLJU:

Ako su x i y osi sustava horizontalne , a z os vertikalna i uperena prema gore, tada je opis gravitacijske sile:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{z} \qquad dP = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = mg\hat{z} \cdot d\vec{s} \tag{5.8}$$

Skalarni produkt jediničnog vektora $\hat{z}$ *i diferencijala pomaka* $d\vec{s}$ je dz diferencijalni pomak duž samo z osi – projekcija $d\vec{s}$ na z os. Stoga je iz (5.8) diferencijal potencijalne energije:

$$dP = mgdz \tag{5.9}$$

Integriranjem diferencijala potencijalne energije iz (5.9) od koordinate $\vec{r}_{POČ}$ *do* $\vec{r}_{KON}$ imamo:

$$\int_{POČ}^{KON} mgdz = mg(z_{KON} - z_{POČ}) \tag{5.10}$$

Sad imamo egzaktno izveden izraz kojeg su neki intuitivno prihvaćali u srednjoj školi.

POTENCIJALNA ENERGIJA CENTRALNOG GRAVITACIJSKOG POLJA:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \qquad dP = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = (GMm\frac{\vec{r}}{r^3}) \cdot d\vec{s} \tag{5.11}$$

Vektor $\vec{r}$ *pišemo kao* $\hat{r}r$ *a* $\hat{r}\cdot d\vec{s} = dr$ (5.12)

Korištenjem (5.12) u (5.11) slijedi:

$$dP = \frac{GMmr}{r^3}dr = d(-GMm\frac{1}{r}) \qquad (5.13)$$

$$P_{POČ} - P_{KON} = GMm(\frac{1}{r_{KON}} - \frac{1}{r_{POČ}}) \qquad (5.14)$$

COULOMBOVA ELEKTRIČNA SILA:

Kako se Coulombova sila u svom analitičkom opisu piše samo s drugim konstantama i suprotnim predznakom, možemo procedurom identičnom gornjoj doseći analogni rezultat:

$$P_{POČ} - P_{KON} = kQq(\frac{1}{r_{POČ}} - \frac{1}{r_{KON}}) \qquad (5.15)$$

Studenti su upozorili na potrebu boljeg razumijevanja veze:

$$-\vec{F}\cdot d\vec{s} = dP$$

Stoga u redovna predavanja uključujemo i ovaj umetak koji bi trebao pomoći boljem razumijevanju dubine svojstava koje ima konzervativna sila i odgovarajuća potencijalna energija.

UMETAK O DIFERENCIJALU PROSTORNO ZAVISNE FUNKCIJE

Izraz za derivaciju funkcije f(x) pišemo kao :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad „ 1 „$$

No možemo ga pisati i kao :

$$df = f'(x)dx \qquad „ 2 „$$

Veza diferencijala varijable dx i diferencijala funkcije df je ovdje jednostavna. U 3D prostoru veza je mnogo kompliciranija. Ako imamo funkciju P(x,y,z), njen diferencijala (prirast) jest:

$$dP = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dz \qquad „ 3 „$$

Podsjećamo na značenje izraza $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$. U navedenom izrazu podrazumijeva se da se veličine y i z smatraju konstantnima a derivira se P samo po x varijabli. (parcijalna derivacija P po x).

Vrlo brzo postaje jasno da nije svaki izraz oblika f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+ h(x,y,z)dz diferencijal. Da bi to bilo ispunjeno, prema „ 3 „ dijelovi f, g i h , moraju biti parcijalne derivacije ISTE prostorne funkcije po varijablama x, y i z respektivno. Za opći izraz:

$$-\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \qquad „ 4 „$$

potpuno je upitno da li ga se može napisati kao diferencijal neke prostorno zavisne funkcije. Da bi to bilo moguće, $(-F_x),(-F_y),(-F_z)$ trebaju biti parcijalne derivacije ISTE prostorno zavisne funkcije P(x,y,z) po varijablama x,y,z respektivno. Taj uvjete neke sile zadovoljavaju , tada ih zovemo konzervativnim i tada imaju odlična svojstva o kojima smo već govorili. S druge strane sila trenja taj uvjet ne zadovoljava. Sila trenja ne može se opisivati preko potencijala!

CENTRALNA ELASTIČNA SILA:

$$\vec{F} = -K\vec{r} \qquad dP = -(-K\vec{r}) \cdot d\vec{s} \tag{5.16}$$

$$dP = Krdr = d(\frac{1}{2}Kr^2) \tag{5.17}$$

$$P_{POČ} - P_{KON} = \frac{1}{2}K(r^2{}_{POČ} - r^2{}_{KON}) \tag{5.18}$$

NAPOMENA O STANDARDIZACIJI INTEGRACIJSKE KONSTANTE:

U principu pri gornjim operacijama integriranja kada smo se od diferencijala potencijalne energije vraćali na sam potencijal nastaje višeznačnost. Naime, derivacija konstante je nula. Stoga pri obratnom putu rezultata integriranja sadrži proizvoljnu konstantu. U gornjim proračunima razlike potencijalne energije ta se konstanta dokida. No ako želimo imati apsolutnu vrijednost potencijalne energije, tada možemo pribjeći konvenciji, to jest široko prihvaćenom dogovoru kojim je vrijednost te konstante utvrđena. Na primjer, prihvaćeno je da je vrijednost potencijalne energije za dva tijela „beskonačno razmaknuta“ za električno i gravitacijsko djelovanje jednaka nuli. Istu vrijednost nula pripisujemo u homogenom gravitacijskom polju tijelu na koordinati z=0. Nultu vrijednost potencijalne energije pripisujemo i položaju u sredini koordinatnog sustava za centralnu elastičnu silu.

RAČUNANJE SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE:

U prostoru je potencijalna energija funkcija položaja tijela, znači funkcija njegovih koordinata:

$$P(\vec{r}) = P(x, y, z) \tag{5.19}$$

Znamo izračunati diferencijal funkcije jedne varijable:

$$d\left[f(x)\right] = \frac{df}{dx} \cdot dx \tag{5.20}$$

Ako u (5.19) načinimo samo pomak duž x osi , imat ćemo odgovarajuću promjenu Potencijalne energije:

$$P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z) \equiv \Delta_x \mathrm{P(x,y,z)} \tag{5.21}$$

Prirast potencijalne energije možemo podijeli s prirastom varijable:

$$\frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x} \tag{5.22}$$

Gornji kvocijent pri limesu kada $\Delta x \to 0$ nazivamo parcijalnom derivacijom potencijalne energije po varijabli x.

$$\lim(\Delta x \to 0) \frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \tag{5.23}$$

Intuitivno govoreći (5.23) je brzina promjene potencijalne energije u točki s koordinatama x,y,z ako se razmatra samo promjene nastale mijenjanjem koordinate x. U istom smislu imamo i diferencijal u smjeru x:

$$d_x P = \frac{\partial P}{\partial x} dx \tag{5.24}$$

Po svom značenju je to infinitezimalna promjena P koja odgovara infinitezimalnoj promjenu dx. Istu proceduru možemo načiniti mijenjajući samo koordinatu y, a zatim posebno koordinatu z. Tako bismo dobili:

$$d_y P = \frac{\partial P}{\partial y} dy \tag{5.25}$$

$$d_z P = \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.26}$$

Ako istovremeno imao sva tri pomaka, sveukupni diferencijal promjene jest:

$$dP = \frac{\partial P}{dx} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.27}$$

Sada možemo usporediti dva izraza za dP (5.4) i (5.27) pa imamo:

$$dP = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{\partial P}{dx} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \tag{5.28}$$

Diferencijali dx,dy,dz su međusobno nezavisni. Stoga u izrazu (5.28) faktori koji uz njih stoje moraju biti nezavisni. Znači imamo tri jednakosti:

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.29}$$

Prema (5.29) poznajemo komponente sile F iz parcijalnih derivacija potencijalne energije koju ta sila daje. Izrazi (5.29) mogu se kompaktno napisati:

$$\vec{F} = -(\hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z}) \tag{5.30}$$

U prijašnjim odsječcima smo izvodili kako iz analitičkog opisa sile u prostoru izračunati potencijalne energiju. Ovdje smo s (5.30) dobili obratnu proceduru: kako iz zadane potencijalne energije izračunati silu koja tu potencijalnu energiju uzrokuje.

MATEMATIČKI OPERATOR GRADIJENTA:

Pišemo ovaj odsječak , jer je višegodišnje iskustvo pokazalo da studenti jesu spremni prihvatiti izvod (5.30), no imaju poteškoća s formalnim nazivom operacije koja slijedi i široko se koristi u literaturi. Relaciju (5.30) možemo napisati tako da izvadimo oznaku potencijalne energije iz zagrade i smjestimo je iza nje. Možemo o tome misliti kao o svojstvu distribucije množenja na slučaj sume. U novoj notaciji znači imamo:

$$\vec{F} = -(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z})P \tag{5.31}$$

Temeljno je znati da (5.31) po definiciji znači isto što i (5.30)
U matematici je običaj naznaku postupka koji će se s nekom funkcijom činiti nazvati operatorom. U ovom slučaju faktor ispred funkcije P u (5.31) naznačuje da će se funkcija P najprije derivirati po x i rezultat množiti s jediničnim vektorom osi x. Paralelno će se iste operacije učiniti i za ostale smjerove i konačno će uslijediti zbrajanje raznih komponenti u jedinstveni vektor sile. Taj operator se naziva gradijentom i piše se:

$$grad \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{5.32}$$

U (5.32) nema znači posebnih matematičkih ili fizikalnih svojstava, to je jednostavno konvencija za skraćeno pisanje koje matematičke operacije (na primjer deriviranje , množenje s jediničnim vektorima i zbrajanje komponenti) kojim redoslijedom treba činiti da se dobije rezultat primjene operatora grad na funkciju, koja je u slučaju (5.31) potencijalna energija. Tako u široko prihvaćenoj notaciji imamo:

$$\vec{F} = -grad\ P \equiv -\vec{\nabla}P \tag{5.33}$$

Uočavamo da je oznaka $\vec{\nabla}$ *alternativa za oznaku* grad. Intuitivno je operacija grad naznaka deriviranja funkcije u prostoru. Ovaj segment predavanja je posvećen traženju sile iz potencijalne energije. Studentu je za početak dovoljna relacija (5.30). No s vremenom je dobro koristiti gradijent odnosno vektorski operator nabla $\vec{\nabla}$ jer to osigurava kompaktnost pisanja, a kasnije će poticati i razvoj intuicije.

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA HOMOGENO GRAVITACIJSKO POLJE:

U (5.10) smo uz konvenciju o izboru integracijske konstante pokazali:

$$P(\vec{r}) = mg \cdot z \tag{5.34}$$

Prema (5.31) slijedi za odgovarajuću silu:

$$\vec{F} = -(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}) = -(\hat{x}\frac{\partial(mgz)}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial(mgz)}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial(mgz)}{\partial z}) \tag{5.35}$$

Kako u gornjem slučaju potencijalna energija zavisi samo o z i to linearno, parcijalne derivacije po x i y iščezavaju a parcijalna derivacija poz z je radi linearnosti samo konstantni član ispred varijable z. Tako je rezultat:

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \tag{5.36}$$

To smo i očekivali. S tim smo opisom i počeli u (5.8).

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA CENTRALNO GRAVITACIJSKO POLJE:

$$P(\vec{r}) = -GMm\frac{1}{r} \tag{5.37}$$

$$\vec{F} = -grad(-GMm\frac{1}{r}) = GMm\, grad(\frac{1}{r}) \tag{5.38}$$

$$grad(\frac{1}{r}) = \left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \right] \qquad (5.39)$$

$$\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \hat{x}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}(-\frac{1}{2})\cdot 2x = -\frac{\hat{x}x}{r^3} \qquad (5.40)$$

Analognim postupkom imamo za ostale komponente gradijenta odgovarajuće izraze. Kada sve te komponente zbrojimo, imamo:

$$grad(\frac{1}{r}) = -(\frac{\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z}{r^3}) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (5.41)$$

Uvrštenjem (5.41) u (5.38) slijedi:

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (5.42)$$

To je izraz s kojim smo u (5.11) i počeli!

RAČUN SILE IZ POTENCIJALNE ENERGIJE ZA ELASTIČNU CENTRALNU SILU:

$$\vec{F} = -grad(\frac{1}{2}Kr^2) \qquad (5.43)$$

$$\vec{F} = -K\frac{1}{2}\left[\hat{x}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\right] = \qquad (5.46)$$

$$= -K(\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z) = -K\vec{r}$$

Što odgovara početnoj relaciji (5.16).

DEFINICIJA I PRIMJERI EKVIPOTENCIJALNIH PLOHA:

Ploha na kojoj je potencijalna energija stalna naziva se ekvipotencijalnom plohom. U slučaju homogenog gravitacijskog polja potencijalna energija je stalna ako je koordinata z stalna. (vidi (5.34)). Znači da su u ovom slučaju ekvipotencijalne ravnine horizontalne plohe. Primjeri takvih ekvipotencijalnih ploha su površine jezera i mora. Primjena ekvipotencijalnih vremena poznata je još bar od staroegipatskih graditelja koji su spojene cijevi ispunjene vodom koristili za nivelaciju točaka! Inspekcijom izraza (5.37) i (5.43) vidimo da u tom slučaju potencijalana energija zavisi samo o radijusu položaja tijela. Sukladno tome zaključujemo da su ekvipotencijalne plohe u tim slučajevima kugle. Važno svojstvo ekvipotencijalnih ploha slijedi iz (5.4). Naime ako se mičemo po ekvipotencijalnoj plohi, po definiciji je dP=0 , a prema (5.4) i element rada sile je također jednak nuli! Dok se gibamo po ekvipotencijalnoj plohi ne vršimo rad protiv sile za koju je ploha definirana!

SILNICE I GRADIJENT POTENCIJALNE ENERGIJE:

Silnicama nazivamo linije koje u svakoj prostornoj točki pokazuju smjer sile. Pokazat ćemo da je smjer sile, koja ima ekvipotencijalne plohe okomit na ekvipotencijalnu plohu! Izaberimo točku na ekvipotencijalnoj plohi. Kroz tu točku povucimo tangencijalnu ravninu. Diferencijal potencijalne energije dok smo u točki dodira tangencijalne ravnine s ekvipotencijalnom plohom iščezava dok je diferencijalni pomak unutar tangentne ravnine. Postavimo koordinatni sustav tako da su u tangentnoj ravnini osi x i y, a os z je na njih okomita. U tako odabranom sustavu je u točki dodira:

$$gradP = \hat{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial P}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.47}$$

no znamo da se P ne mijenja u smjerovima unutar tangencijalne ravnine; stoga parcijalne derivacije po x i y varijabli iščezavaju. Preostaje zaključak da je gradijent potencijalne energije okomit na ekvipotencijalnu plohu! Kako su gradijent potencijalne energije i smjer odgovarajuće sile povezani relacijom (5.33), to je i smjer sile okomit na ekvipotencijalnu plohu! U primjeru homogenog gravitacijskog polja ekvipotencijale su horizontalne a silnice vertikalne. Kod slučajeva kuglastih ekvipotencijala, silnice su radijalne (u smjeru radijusa).

Gradijent potencijala je uvijek usmjeren duž smjera najbržeg porasta potencijalne energije u zadanoj točki. To proizlazi iz (5.27), koju možemo napisati i kao $dP = gradP \cdot d\vec{r}$. Držimo li modul pomaka i gradijent konstanim, a variramo samo kut među njima, očito dP ima najveću vrijednost kada su gradijent i pomak paralelni!

POTENCIJAL:

Potencijal se definira kao omjer potencijalne energije tijela i iznosa one veličine na koju se potencijalna energija odnosi. Tako je gravitacijski potencijal nekog tijela jednak omjeru gravitacijske energije koju probno tijelo ima u gravitacijskom polju i iznosa mase probnog tijela. Električki potencijal je omjer električne potencijalne energije koju u polju tijela ima probni naboj i iznos probnog naboja. U literaturi postoji više simbola za potencijal, stoga ćemo ovdje upotrebljavati jednostavno punu riječ, a indeks će označavati vrstu.

$$Potencijal_g = -\frac{GM}{r} \tag{5.48}$$

G je gravitacijska konstanta, M je masa tijela koje proizvodi gravitacijsku silu, a r je udaljenost od tijela na kojoj se gravitacijski efekt opaža. Jedinica za gravitacijski potencijal je J/kg.

$$Potencijal_{elek} = \frac{kQ}{r} \tag{5.49}$$

Q je naboj koji proizvodi električnu silu, k je konstanta iz Coulombovog zakona, a r je udaljenost na kojoj se promatra električko djelovanje naboja Q. Jedinica za električki potencijal je J/ C. (Joule podijeljen s Coulombom).

SNAGA:

Snaga je veličina koja prati brzinu vršenja rada:

$$Snaga = \frac{dW}{dt} \tag{5.50}$$

Uzimajući u obzir (5.2) i (5.50) imamo:

$$Snaga = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{5.51}$$

Gdje je $\vec{v}$ *brzina kojom se svladava sila* $\vec{F}$. Jedinica za snagu je Watt= J/s .