I N E R C I J S K I   I   N E I N E R C I J S K I   S U S T A V I

Poznato nam je dnevno iskustvo pri vožnji nekim vozilom da pri promjeni iznosa brzine vozila ili promjeni smjera vozila osjećamo neočekivano djelovanje, koja traje tako dugo dok vozilo ponovno ne ide jednoliko po pravcu. U ovom dijelu predavanja ćemo izvesti upravo oblike tih prividnih sila koje nisu rezultat sila koje smo do sada upoznali, nego načina gibanja sustava u kojem se promatrano tijelo promatra. Pođimo od jednostavne usporedbe sila koje djeluju na tijelo u dva različita fizikalna i koordinatna sustava.

Sustav S je inercijski i u njemu vrijedi drugi Newtonov zakon koji smo prihvatili:

$$\vec{F} = m\vec{a}_I \tag{4.1}$$

Sila $\vec{F}$ je stvarna,realna sila , jedna od onih iz prošlog poglavlja ili sila koju na primjer proizvodi živo biće svojim djelovanjem na tijelo. Indeks I u (4.1) nas podsjeća na činjenicu da se radi o akceleraciji u inercijskom sustavu S.
Neinercijski sustav S' giba se u odnosu na S (relativnom, dakle onom u odnosu na S) akceleracijom : $\vec{a}_R$. Tada je jasno da se ukupna akceleracija u inercijskom sustavu može rastaviti u dva vektorska doprinosa (ovu izjavu ćemo u nastavku i pokazati i dokumentirati):

$$\vec{a}_I = \vec{a}_R + \vec{a}_{NI} \tag{4.2}$$

gdje je $\vec{a}_{NI}$ akceleracija u neinercijalnom sustavu. Ako relaciju (4.2) pomnožimo s masom tijela koje promatramo u oba sustava, i uzmemo u obzir (4.1), imamo:

$$\vec{F} - m\vec{a}_R = m\vec{a}_{NI} \tag{4.3}$$

Desna strana u (4.3) je uzrok akceleracije u neinercijskom sustavu. Odavle je jasno: čak i iako na tijelo ne djeluje stvarna sila $\vec{F}$, u neinercijskom sustavu djeluje sila: $-m\vec{a}_R$. U neinercijskom sustavu, radi specifičnosti gibanja tog sustava prema inercijskom, javlja se, ponavljamo prividna ili pseudo sila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_R \tag{4.4}$$

Ilustracija zaključka o neinercijskoim silama Atwoodovim padostrojem.

Atwoodov padostroj se sastoji od koloture s horizontalnom osi rotacije čije je trenje s osi zanemarivo. Preko koloture je prebačena nit , čije trenje sa kotačem koloture je zanemarivo. Nit ima zanemarivu masu i jedina joj je uloga osigurati prijenos sile kroz nit napetošću niti. Znači da se sila koja djeluje na jednom kraju niti pronosi bez promjene do točke na kojoj je nit pričvršćena na drugo tijelo. Prirodno nit pronosi silu i sa drugog kraja na prvi kraj. Važno je uočiti da u napetoj niti postoji jedna jedinstvena sila N koja se njome pronosi. Na niti vješamo dva tijela različitih masa (nit se postavlja vertikalno). Mase tijela označimo indeksima 1 i 2 s tim da je masa 2 veća od mase 1. Odaberimo smjer rezultantne akceleracije niti kao pozitivan. Primjenom Newtonovih zakona imamo:

$$m_2 a = m_2 g - N \tag{4.5}$$

$$m_1 a = N - m_1 g \tag{4.6}$$

Izračunom N iz obadvije relacije slijede:

$$N = m_2 g - m_2 a = m_1 g + m_1 a \tag{4.7}$$

Iz gornjih relacija dobivamo:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \tag{4.8}$$

$$N = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{4.9}$$

Na ovom mjestu je zgodno komentirati (4.8). Sustav masa se kreće akceleracijom koja je rezultanta suprotnih sila težina dva tijela , a ta rezultanta tjera obadvije mase (vidi nazivnik u (4.8)). Konačni je zaključak: tijela u Atwoodovom padostroju su tijela u akceleriranom sustavu. Na predavanju ćemo ilustrirati uključenjem dinamometra, koji mjeri napetost niti, efekt prividnih sila koje nastaju u ubrzanom sustavu. Usporedit će se napetost niti u mirovanju za obadva tijela, s onom koja je prisutna u ubrzanom sustavu.

ODNOS VEKTORA POLOŽAJA;BRZINE I UBRZANJA INERCIJSKOG I NEINERCIJSKOG SUSTAVA:

Inercijski sustav S miruje i njegovi su jedinični vektori nepromjenljivi. Položaj promatrane točke u prostoru opisuje njen radijvektor $\vec{r}_I$. Ishodište drugog sustava S' opisano je vektorom $\vec{r}_{IO}$ gdje indeks I podsjeća da je početak vektora ishodište inercijskog sustava, a O označuje da se prati ishodište (obično označeno kao O) proizvoljnog sustava. U tom proizvoljnom sustavu položaj iste promatrane točke mjeren od ishodišta O je opisan vektorom $\vec{r}$. Jasno da vrijedi temeljna veza vektora položaja u dvama sustavima:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_{I0} + \vec{r} \tag{4.10}$$

Sustav S' ne samo da proizvoljno mijenja svoj položaj , kako prati vektor $\vec{r}_{IO}$, nego i rotira oko proizvoljne osi kutnom brzinom $\vec{\omega}$. Napisat ćemo niz relacija u inercijskom sustavu, koje smo već imali prije ((1.50) za kordinate, (1.60) za brzine i (1.62) za akceleracije:

$$\vec{r}_I = \hat{x}_I x_I + \hat{y}_I y_I + \hat{z}_I z_I \tag{4.11}$$

Jedinični vektori imaju indeks I da se naglasi njihova pripadnost inercijskom sustavu.

$$\frac{d\vec{r}_I}{dt} = \hat{x}_I \dot{x}_I + \hat{y}_I \dot{y}_I + \hat{z}_I \dot{z}_I = \vec{v}_I \tag{4.12}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_I}{dt} = \hat{x}_I \ddot{x}_I + \hat{y}_I \ddot{y}_I + \hat{z}_I \ddot{z}_I = \vec{a}_I \tag{4.13}$$

Potpuno analogne relacije vrijede za položajni vektor ishodišta proizvoljnog sustava i pripadne vremenske drivacije:

$$\vec{r}_{IO} = \hat{x}_I x_{IO} + \hat{y}_I y_{IO} + \hat{z}_I z_{IO} \tag{4.14}$$

$$\frac{d\vec{r}_{IO}}{dt} = \hat{x}_I \dot{x}_{IO} + \hat{y}_I \dot{y}_{IO} + \hat{z}_I \dot{z}_{IO} = \vec{v}_{IO} \tag{4.15}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{IO}}{dt} = \hat{x}_I \ddot{x}_{IO} + \hat{y}_I \ddot{y}_{IO} + \hat{z}_I \ddot{z}_{IO} = \vec{a}_{IO} \tag{4.16}$$

Sve gornje veličine su veličine opisane u inercijskom sustavu S.

U sustavu S' su jedinični vektori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Kao i cijeli S' sustav oni su rotirani vektorom $\vec{\omega}$. Iz tog razloga možemo za njihove derivacije po vremenu pisati izraz analogan (1.37):

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x} \qquad \frac{d\hat{y}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y} \qquad \frac{d\hat{z}}{dt} = \hat{\omega} \times \hat{z} \tag{4.17}$$

Radijvektor točke u neinercijskom sustavu opisan je s jediničnim vektorima neinercijskog sustava:

$$\vec{r} = \hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z \tag{4.18}$$

Znajući kako se derivira produkt i vodeći računa o derivacijama jediničnih vektora kroz relacije (4.16)-(4-18), imamo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z) + \hat{x}\dot{x} + \hat{y}\dot{y} + \hat{z}\dot{z} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v} \tag{4.19}$$

Gdje je $\vec{v}$ vektor brzine gibanja promatrane točke kako ga vide jedinični vektori sustava koji se okreće s $\vec{\omega}$. Druga derivacija po vremenu vektora $\vec{r}$ slijedi deriviranjem (4.19) upotrebom pravila za deriviranje produkta i uvažavanjem opisa vektora $\vec{r}$ *i* $\vec{v}$ u (4.18) i (4.19) te pravila za deriviranje jediničnih vektora (4.17):
Rezultat jest:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{a} \tag{4.20}$$

Gdje je $\vec{a}$ akceleracija toče kako je u rotirajućem sustavu vide jedinični vektori tog sustava:

$$\vec{a} = \hat{x}\ddot{x} + \hat{y}\ddot{y} + \hat{z}\ddot{z} \tag{4.21}$$

Znajući vezu među vektorima položaja (4.10) možemo ga derivirati po vremenu i za desnu stranu koristiti izraze (4.15) i (4.19).

$$\vec{v}_I \equiv \frac{d\vec{r}_I}{dt} = \vec{v}_{IO} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v} \tag{4.22}$$

I postupajući analogno pri još jednom deriviranju:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_{IO} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{a} \tag{4.23}$$

Student će lako usporediti ovaj izraz s izrazom (1.41) koji mu je strukturno vrlo blizak. Razlike su male. Nastaju samo od činjenice da se udaljavanje od ishodišta (neinercijskog sustava) drukčije prati u dva slučaja.

Sada možemo pratiti nastanak raznih prividnih ili pseudosila. Slučaj $\vec{a} = 0, \vec{\omega} = 0, \vec{v} = 0$ koji nastupa samo pri translacijskoj akceleraciji ishodišta smo već konzumirali, samo podsjećamo da po receptu (4.4) nastupa u neinercijskom sustavu pseudosila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{a}_{IO} \tag{4.24}$$

Anegdotalno možemo studenta podsjetiti pitanja koje je Nobelovac Feynman kao dijete postavljao svom ocu: „ Zašto se lopta postavljena na kolica počne gibati prema kraju kolica ako kolica povučemo (akceleriramo) prema naprijed?“. Odgovor je naravno pojava pseudosile u akceleriranom sustavu.

Coriolisova sila

Slijedeća je sila ona u kojoj su $\vec{a}_{OI} = \vec{a} = 0$. Tada nastupa Coriolisova pseudosila:

$$\vec{F}_p = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} \quad (4.25)$$

Ova se sila manifestira na slijedećim primjerima:Foucaultovo njihalo i uočeno pravilo da rijeke koje teku prema jugu na našoj polutci deru desnu obalu. Pojavu da se ravnina gibanja njihala rotira kao rezultat rotacije Zemlje se demonstrira studentima.

Centrifugalna sila:

$$\vec{F}_p = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad (4.26)$$

je poznata svakom tko se vozio na vrtuljku.

Težina tijela koje na Zemlji miruje:

Po definiciji je težina tijela sila koju u (neinercijskom) sustavu treba uravnotežiti da bi tijelo mirovalo.

$$\vec{F}_{tež} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_p \quad (4.27)$$

gdje je u slučaju mirnog tijela na površini Zemlje (koje s njom rotira) $\vec{F}_p$ dan s (4.26).

To je razlogom da težina tijela varira s geografskom širinom pozicije na kojoj se mjeri!

Težina tijela u jednostavnim akceleriranim sustavima:

Razmotrimo dizalo koje se akcelerira prema gore i uzmimo pozitivni smjer prema gore: $\vec{a}_{OI}$ je usmjeren prema gore i pozitivan i iznosom jednak iznosu stvarne akceleracije dizala a. Pseudosila je tada

$$\vec{F}_p = -ma \quad (4.27)$$

Kako je i gravitacija istog smjera imamo:

$$F_{tež} = -ma - mg \quad (4.28)$$

U dizalu koje akcelerira prema gore osjećamo se težim. Obratom predznaka akceleracije svi fenomeni povezani s njom mijenjaju predznak i mi se osjećamo lakši.

U posebnom slučaju naša težina (u neinercijskom sustavu) iščezava. Iz na primjer (4.28) iščitavamo da je to situacija kada dizalo slobodno pada. (u sustavu u kojem je pozitivni smjer prema gore tada je $a = -g$).

Pokus s Coriolisovom silom:

Prati se ravnina njihanja njihala koje se sastoji od teške kugle na vrlo dugoj žici. Početna ravnina se utvrđuje laserskom zrakom koja obasjava žicu i u položaju ravnoteže i u položaju odmaknutom od ravnoteže određenim niti koja je izvukla kuglu iz položaja ravnoteže. Prepaljivanjem niti oslobađa se njihalo. U početku njihalo titra tako da ga obasjava laserska zraka. Nakon nekog vremena opaža se osvjetljenje žice samo u trenucima prolaska kroz položaj ravnoteže.

GALILEIeve TRANSFORMACIJE I GALILEIeva INVARIJANTNOST:

Relativističke pojave kod velikih brzina koje duboko narušavaju klasičnu intuiciji razvijenu u dnevnim uvjetima studirat ćemo na samom kraju semestra. Sada ćemo se ograničiti na vezu koordinata sustava (zgodno je pretpostaviti da je jedan od njih inercijski) koji međusobno jednoliko translatiraju. Pri malim brzinama dozvoljeno je pretpostaviti da vrijeme teče jednako u obadva sustava. Izabrat ćemo, da u t=0 trenutku položaji ishodišta sustava koincidiraju, a koordinatne osi sustava ćemo izabrati tako da se translacija dešava duž njihovih x osi. y i z osi izabrat ćemo tako da su posebno y osi dva sustava paralelne i posebno z osi također. Ako unutar inercijskog sustava S sustav S' jednoliko translatira duž x osi udesno brzinom V tada je veza među x koordinatom u sustavu S i x' koordinatom iste točke u sustavu S':

$$x=x'+Vt \qquad (4.29)$$

dok su vrijednosti drugih dviju koordinata iste u obadva sustava:

$$y=y' \qquad z=z' \qquad (4.30)$$

Ovo se može napisati i u općenitijem i kompaktnijem obliku

$$\vec{r} = \vec{r}\,'+\vec{V}t \qquad (4.31)$$

Ako relaciju (4.31) deriviramo jednom po vremenu slijedi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V} \qquad \vec{v} = \vec{v}\,'+V \qquad (4.32)$$

Gdje su $\vec{v}$ *i* $\vec{v}\,'$ brzine promatrane točke u sustavima S i S' a $\vec{V}$ je relativna brzina sustava. Relacija (4.32) je prirodna i dobro poznata relacija o slaganju brzina , koja pri malim brzinama vrijedi. Ponovnim deriviranjem relacija (4.32) dobit ćemo vezu akceleracija u dva sustava. Kako je relativna brzina među sustavima $\vec{V}$ konstantna to njezina vremenska derivacija iščezava:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} \qquad \vec{a} = \vec{a}\,' \qquad (4.33)$$

Akceleracije opažene u dvama sustavima su identične. Kako su akceleracije manifestacije sila, to znači da su sile , kako ih vide dva sustava, identične. Sada, ako je prvi sustav inercijski i u njemu vrijede Newtonovi zakoni, radi identiteta sila i akceleracija , isti fizikalni zakoni vrijede u obadva sustava! Ta izjava naziva se Galileievom invarijancijom.