G R A V I T A C I J S K A   S I L A :

Ovim odsječkom započinjemo reviju sila koje ćemo koristiti u semestru Mehanika. Gravitacijska sila je među prvima od sila koje susrećemo. U laboratorijskim uvjetima (dok se udaljenost objekta od središta Zemlje ne mijenja bitno, akceleracija koja potječe od gravitacijske sile je stalna. Neočekivano ćemo demonstrirati da u vakuumskim uvjetima, da bismo izbjegli razlike u trenju objekta sa zrakom, sva tijela imaju istu akceleraciju bez obzira na masu, ili oblik. Akceleracija tijela također ne ovisi o brzini tijela! Ovdje ćemo nakratko spomenuti tešku masu za razliku od inercijske mase koju smo diskutirali. Gravitacijska sila djeluje zapravo na svojstvo tijela nazvano teškom masom. Napravit ćemo ovdje paralelu s elementarnim znanjem iz srednje škole. Studenti znaju da u električnom polju E to električno polje djeluje na naboj q silom koja je po iznosu F=qE. Teška masa se pojavljuje u izrazu za gravitacijsku silu na način koji oponaša naboj u slučaju električnog polja:

$$\vec{F}_g = m_g \cdot \vec{g} \tag{3.1}$$

U gornjem izrazu je $\vec{F}_g$ gravitacijska sila, čiji dominantni učinak možemo demonstrirati istezanjem opruge na koju tijelo objesimo. m_g je spomenuta teška masa, a $\vec{g}$ je gravitacijska akceleracija koja je u našim krajevima 9.81 metara u sekundi kvadratnoj; uvijek usmjerena prema dolje; (otprilike) u smjeru centra Zemlje. Iako poznajemo vrlo dobro svojstva gravitacijske sile, mi nemamo jednostavno i očito objašnjenje zašto su (prema svim dosadašnjim mjerenjima) teška i troma masa proporcionalne, što nam ostavlja mogućnost da ih jednostavno izjednačimo. Dakle:

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{gdje sada m inercijska masa.} \tag{3.2}$$

Ovo nam sad omogućuje usporedbu drugih sila s gravitacijskom, a također i uspoređivanje masa preko gravitacijskih sila koje na temelju tih masa djeluju!

Gibanje tijela u homogenom gravitacijskom polju:
Već smo spomenuli da u sobnim uvjetima sva tijela doživljavaju jedinstvenu gravitacijsku akceleraciju:

$$\vec{a} = \vec{g} \tag{3.3}$$

Ako z os sustava orijentiramo prema gore, slijedi:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\hat{z}g$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \tag{3.4}$$

Prvim integriranjem gornjih jednadžbi slijedi:

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_{z,0} \qquad \frac{dx}{dt} = v_{x,0} \qquad \frac{dy}{dt} = v_{y,0} \tag{3.5}$$

Ponovnim integriranjem imamo konačne izraze za koordinate:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0 \qquad x = v_{x,0}t + x_0 \qquad y = v_{y,0}t + y_0 \tag{3.6}$$

Simboli u (3.6) bivaju očiti ako se u (3.5) i (3.6) ubacuje vrijeme t=0 $v_{x,0}$, $v_{y,0}$ $v_{z,o}$ su komponente brzine u trenu t=0 a x_0 , y_0 z_0 koordinate u istom trenu. U suštini smo ponovili rezultat (1.26) kada smo studirali primjenu integriranja na jednoliko ubrzano gibanje, što gibanje u homogenom gravitacijskom polju i jest. Jedina je razlika u činjenici da ovdje znamo uzrok akceleracije: gravitacijska sila! Simboli u dvjema izrazima (1.26) i (3.6) različito izgledaju, no njihovo fizikalno značenje je identično!

Mirovanje tijela na horizontalnoj podlozi (bez trenja) u gravitacijskom polju.

Opisano tijelo miruje jer na njega uz gravitacijsku silu djeluje i normalna reakcija podloge. Ova intuitivno trivijalna situacija zaslužuje pažnju jer vježba primjenu Newtonovih zakona, a s druge strane upozorava na razlog zašto tijelo na pada iako je u gravitacijskom polju. Redom: na tijelo djeluje gravitacijska sila

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{3.7}$$

Sada u igru ulazi podloga. Tijelo svojom težinom pritišće podlogu. U mikroskopskoj slici čestice tijela pokušavaju prodrijeti među molekule podloge. Ukoliko je podloga dovoljno čvrsta, njene molekule će se oduprijeti prodoru. (U bogatijim laboratorijima studenti imaju priliku vidjeti da se podloga često i malo deformira kao rezultat sile $\vec{F}_g$). Po trećem Newtonovom zakonu, sila kojom tijelo pritišće podlogu, podloga jednakom ali nasuprotnom silom djeluje na tijelo. Ova se sila zove normalnom reakcijom podloge (okomito ili normalno na horizontalnu površinu; reakcija, jer to jest sila iz trećeg Newtonovog aksioma : akcija i reakcija). U literaturi je rašireno ovu silu označavati s $\vec{N}$. Tijelo je u ravnoteži i miruje jer na njega djeluju protivne sile:

$$\vec{F}_g + \vec{N} = 0 \qquad \text{To jest,} \qquad \vec{N} = -\vec{F}_g \tag{3.8}$$

Gibanje na kosini (bez trenja i kotrljanja):

Podloga je nagnuta prema ravnini za kut ϑ. Paralelno kutu nagiba podloge postavljamo os z (izabrana tako da duž nje djeluje rezultanta sila). Y os postavljamo horizontalno a x os okomito na ostale dvije. Duž x osi nemamo rezultantne sile (tijelo ne propada kroz podlogu, nego se po njoj giba). Nadalje duž x-osi djeluje jedna komponeta gravitacijske sile: $-mgco\vartheta$. Ovu komponentu uravnotežuje normalna reakcija podloge: N, tako da za rezultantnu silu $\vec{F}$ vrijedi:

$$F_x = -mg\cos\vartheta + N = 0 \tag{3.9}$$

Okomito na ravninu nema sile; tijelo početno nije imalo brzinu okomito na ravninu, dakle u smjeru x-osi ne će biti gibanja (to jest odstupanja od x=0)

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = v_{y,0}t + y_0 \tag{3.10}$$

$$F_z = -mg\sin\vartheta \;\Rightarrow\; m\frac{dv_z}{dt} = -mg\sin\vartheta \;\Rightarrow\; z = -\frac{1}{2}g\sin\vartheta t^2 + v_{z,o}t + z_0 \tag{3.11}$$

Pokusom ćemo demonstrirati paraboličnu prirodu gibanja opisanog gornjim izrazima.

NEWTONOV ZAKON OPĆE GRAVITACIJE:

Vrlo velikim brojem mjerenja je demonstrirano, a i astronomskim opažanjima potvrđeno da se dvije sferne mase privlače silama:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad \vec{F}_{2\to 1} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{r}_1 - r_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{3.12}$$

G je gravitacijska konstanta: $G = 6.671 \cdot 10^{-11}\, Nm^2 kg^2$

Gravitacijska konstanta ubrzanja $\vec{g}$:

Ako promatramo tijelo mase m pod utjecajem gravitacijske sile Zemlje $\vec{F}$ i označimo masu Zemlje s M i udaljenost tijela od centra Zemlje s $\vec{r}$ (tijelo nije u untrašnjosti Zemlje), tada iz (3.12) slijedi da je sila na tijelo:

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} = (-GM\frac{\vec{r}}{r^3})m \tag{3.13}$$

Izraz u zagradi predstavlja vrijednost gravitacijske akceleracije na danom radijusu r. Treba zapamtiti da sveukupna akceleracija tijela za objekt koji se nalazi na Zemlji treba biti korigirana (iznos nije velik) za činjenicu da Zemlja rotira. O tome se govori u odsječku o inercijskim silama neinercijskih sustava.

Frekvencija obilaska Zemljinog satelita:
Iz (3.13) slijedi izraz za iznos akceleracije kojeg Zemlja daje u radijalnom smjeru satelitu mase m koji kruži nana radijusu r. Da bi gibanje bilo kružno mi smo u (1.66) iznijeli kolika je radijalna akceleracija potrebna da bi gibanje bilo kružno.
Izjednačavanjem ta dva izraza imamo:

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r \tag{3.14}$$

Kako je kutna brzina povezana s frekvencijom ophodnje jednostavno:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{3.15}$$

Kombiniranjem (3.14) i (3.15) imamo:

$$\nu^2 = \frac{GM}{4\pi^2 r^3} \tag{3.16}$$

Ova relacija je povezana s povijesno važnim 3. Keplerovim zakonom jer na jednostavnom slučaju kružnog gibanja pokazuje vezu vremena ophodnje $T = 1/\nu$ s radijusom kruženja u gravitacijskom slučaju.

DJELOVANJE ELEKTRIČNE SILE:

Elektromagnetizam ćemo studirati slijedeći semestar na fundamentalan način uz mnogo dublje razumijevanje njegovih potankosti. Ovdje će se upotrijebiti samo nekoliko konfiguracija električnih sila s dvije namjere. S jedne strane različiti primjeri poslužit će nam za vježbe kako proračunati gibanje tijela kada imamo matematički opis sile koja na tijelo djeluje. S druge strane steći ćemo sposobnost razumijevanja rada osciloskopa, jednog od vrlo važnih laboratorijskih instrumenta i sprave kojom ćemo često demonstrirati na ekranu ponašanje veličine u vremenu ili pak međuzavisnost veličina.

Coulombov zakon:
Ako imamo dva električna naboja označena s $q_1\ i\ q_2$ s položajnim vektorima $\vec{r}_1\ i\ \vec{r}_2$ tada među njima vladaju sile:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = kq_1q_2\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3} \qquad (3.17)$$

slično gravitacijskoj sili, gdje je $k = 8.988\cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$; C je oznaka za jedinicu naboja.
Uvodimo pojam električnog polja:

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} \qquad (3.18)$$

Dakle to je sila na jedinični naboj. Također se kaže da se djelovanje sile faktorizira u naboj na kojeg ona djeluje i električno polje. Koncept polja je od ogromne važnosti u fizici , ne samo u elektromagnetizmu. Naime on udaljava izvor (razlog djelovanja – u ovom slučaju naboje koji djeluju) iz našeg daljnjeg razmišljanja i ostavlja da se fizičar suoči sa stanjem prostora – poljem- u kojem na svaki naboj djeluje sila proporcionalno jakosti tog naboja! Očito je polje točkastog naboja Q smještenog u ishodište u točki s radijvektorom $\vec{r}$:

$$\vec{E} = kQ\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (3.19)$$

Gibanje u homogenom električnom polju:
Ovo pretpostavlja da je polje istog smjera i jakosti i prostoru.
$\vec{E} = \vec{const}$ povlači da je sila konstantna pa prema tome i akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = konst.\ vektor \qquad (3.20)$$

Situaciju konstantne akceleracije smo sreli već dva puta i znamo da se integriranjem dobiva zavisnost položajnog vektora o vremenu (1.26):

$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_o$ gdje su značenja početne brzine i položaja ista kao u (1.26) (3.21)

Ako specijaliziramo situaciju na slučaj kad vrijeme počinjemo mjeriti u trenutku kad iz ishodišta kreće čestica bez brzine imamo:

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 \quad \vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m}t \qquad (3.21)$$

Izborom da električno polje koincidira s osi z slijedi :

$$v_z = \frac{qE}{m}t \quad z = \frac{qE}{2m}t^2 \qquad (3.22)$$

Kombiniranjem dviju relacija unutar (3.22):

$$z = \frac{m}{2qE}v^2 \quad \text{što je ekvivalentno} \quad qEz = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.23}$$

Ovako usputno dobivenu relaciju (3.23) studenti će kasnije prepoznati kao zakon sačuvanja energije. Naime lijeva strana druge relacije u (3.23) predstavlja rad koje je polje izvršilo na naboju, a desna strana kinetičku energiju koju je time naboj stekao. Komentar relacija (3.23) student koji se nije sretao s pojmovima energije može jednostavno za sada preskočiti!

Otklanjanje čestica u homogenom električnom polju.
Ova situacija još uvijek podliježe obliku rješenja problema sa stalnom akceleracijom, čije je opće rješenje izraz (1.26). Specijalni su uvjeti sada da se čestica kreće stalnom brzinom $\vec{v}_0$ u smjeru osi z, a električno polje djeluje u smjeru osi y. U smjeru osi x nema brzine. Dakle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_x = konst = 0 \Rightarrow x = konst_1 = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_z = v_0 \tag{3.25}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} \Rightarrow v_y = \frac{qE}{m}t \tag{3.26}$$

Znači naboj putuje u y-z ravnini. Komponenta brzine u z smjeru je stalna, a u y smjeru raste proporcionalno vremenu. Trenutni nagib putanje naboja prema z osi ϑ je jasno određen omjerom pripadnih brzina:

$$tg\vartheta = \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{qE}{m}t}{v_o} \tag{3.27}$$

Ako sada pretpostavimo da je naboj putovao između pločica koje su stvarale homogeno električno polje put L (duljina pločica duž osi z) tada je vrijeme t u (3.27) u kojem traje otklanjanje putanje od smjera z:

$$t = \frac{L}{v_0} \tag{3.28}$$

Sada možemo ući s (3.28) u (3.27):

$$tg\vartheta = \frac{qEL}{mv_0^{\;2}} \tag{3.28}$$

Ovo nalazi primjenu u radu osciloskopa. Naime, koristi se točkasti izvor elektrona koji ih izbacuje stalnom brzinom v_0. Na pločicama za otklanjanje daje se željena vrijednost E da bi se na ekranu udaljenom za stalnu udaljenost kutom određenim s (3.28) osvijetlila točka koordinate determinirane tim kutom. Uobičajeno je horizontalnu koordinatu snopa upravljati tako da raste linearno u vremenu, a vertikalnu predati na upravljanje fizikalnoj veličini koju želimo ispitivati. Tako u tom slučaju slika na ekranu predstavlja prikaz:

$y = f(t)$, gdje je f ispitivana veličina. (3.29)

DJELOVANJE MAGNETSKE SILE:

Od studenta se u ovom semestru ne će tražiti razumijevanje zašto magnet na relativno neočekivan način djeluje na naboj u gibanju. Ako se naboj giba brzinom $\vec{v}$ a magnetsko polje ima jakost $\vec{B}$, tada na naboj q djeluje sila:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.30)$$

Razmotrit ćemo najjednostavniji slučaj u kojem su brzina naboja i magnetsko polje okomiti. Iz izraza za silu u drugom Newtonovom zakonu i ovog eksplicitno izraza za magnetsku silu imamo:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.31)$$

Pomnožimo posljednju jednakost skalarno s $\vec{v}$. Tada mješoviti produkt $(\vec{v} \times B) \cdot \vec{v}$ iščezava radi kolinearnosti dva faktora u njemu. (ovo se vidi ili iz „geometrijske interpretacije mješovitog produkta kao volumena zadanog s tri vektora“ ili kroz izraz s determinantom koja iščezava ako su joj dva retka identična). Znači iz (3.31) s navedenim množenjem slijedi:

$$0 = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.32)$$

Svojstvo da skalarni produkt vektora i njegove derivacije iščezava sreli smo kod vektora stalnog iznosa. (vidi razmatranja (1.31), (1.32).

Na istom mjestu smo zaključili da se u tom slučaju ponašanje vektora stalnog iznosa dade opisati kao:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (3.33)$$

Ako se s ovim vratimo u (3.31) i u vektorskom produktu brzine i polja zamijenimo poredak,

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (-\frac{q\vec{B}}{m}) \times \vec{v} \qquad (3.34)$$

Jedna od mogućnosti da ova relacija bude ispunjena jest:

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m} \qquad (3.35)$$

Fizikalna posljedica ove relacije jest rotacija naboja u homogenom magnetskom polju frekvencijom (3.35), koju mnogi zovu ciklotronskom frekvencijom, radi njene primjenljivosti u radu klasičnog ciklotronu u kojem je magnetsko polje homogeno i vremenski nepromjenljivo.

OSNOVNE SILE U PRIRODI:

Nakon uvida u gravitacijsku i elektromagnetsku silu spominjemo još dvije osnovne sile u prirodi. U četvrtom semestru ćemo susresti nuklearne sile koje se javljaju unutar atomske jezgre : nuklearna jaka sila i nuklearna slaba sila. Kako im kažu i imena , one se prvenstveno razlikuju svojom jakošću unutar jezgre. Slikovito možemo reći da jaka sila kontrolira staze nukleona (protona i neutrona) u jezgri, dok slaba sila vrši pretvorbe među njima. Ovu će materiju studenti postepeni učiti na višim godinama. Ovdje smo nabrojali temeljne sile samo radi opće fizičarske kulture. U nastavku teksta još ćemo upoznati netemeljne sile koje su međutim od velike praktične važnosti.

ELASTIČNA SILA:

U čvrstim tijelima (za razliku od plinova i tekućina) postoje među molekulama materijala relativno jake privlače sile. Radi njih na primjer ne možemo s jednim tijelom bez velikog napora prodrijeti u drugo tijelo. Kada se tijela podvrgnu različitim vanjskim utjecajima kao što su : istezanje, sabijanje, torzija (zakretanje jednog presjeka tijela u odnosu na drugi), smicanje (translacija jednog presjeka u odnosu na drugi)… tijela u početku reagiraju elastičnom deformacijom koja se sastoji od produljenje, kompresije, zaokreta… koji su proporcionalni vanjskoj prisili. U elastičnom režimu tijela se vraćaju nedeformiranom obliku kada vanjska prisila prestane. U elastičnom istezanju tijela Hook je otkrio jednostavnu pravilnost za tijelo duljine l:

$$\Delta l = kF \tag{3.36}$$

Produljenje tijela Δl je proporcionalno vanjskoj sili F. U Hookovom zakonu vrši se parametrizacija ovog rastezanja na slijedeći način:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \tag{3.37}$$

Naime produljenje tijela je proporcionalno ne samo sili nego i duljini tijela a obrnuto proporcionalno površini S poprečnog presjeka tijela koje se rasteže. Konstanta proporcionalnosti se unosi preko Youngovog modula E , po konvenciji napisanog u nazivniku izraza (3.37). Youngov modul karakterističan je za materijal i može se naći u odgovarajućim tablicama.

Izraz (3.37) može se intuitivno približiti studentima. Zamislimo da na tijelu označimo n poprečnih oznaka. Time je njegova originalna duljina razdijeljena u n segmenata duljine l/n. Ako tijelo podvrgnemo rastezanju sile F , svi će se mali segmenti duljine l/n produljiti za isti iznos. Ukupno produljenje cijelog tijela je to veće što ima više segmenata upravo te duljine l/n (pri tome ne bi pomoglo umjetno povećanje broja n gušćim postavljanjem oznaka, nego stvarno dodavanje novih segmenata). Tako razumijemo proporcionalnost produljenja tijela s njegovom duljinom. Pojavu površine S u nazivniku objašnjavamo ovako: Ako bi isto tijelo uzdužno razrezali na m štapića materijala, jasno je da svaki od njih uravnotežuje silu F/m. Dodavanjem još takvih segmenata , da bismo zadržali isto produljenje, morali bismo povećati silu proporcionalno povećanju broja štapića. Drugim riječima povećali bi silu proporcionalno načinjenom povećanju presjeka tijela. Dakle relativno produljenje jest proporcionalno omjeru F/S. Relacija (3.37) vrijedi samo u t.zv. elastičnom području. Ponašanje materijala prati se dijagramom kidanja produljenjem na apscisi i silom na ordinati. Na početku vrijedi proporcionalnost (3.37). Na kraju tijelo popušta i prekida se. U međuintervalu nastaju pojave specifične za materijal.

SILA TRENJA:

Sila trenja pojavljuje se neizbježno u svim našim dnevnim aktivnostima. Silu trenja upotrebljavamo i za pokretanje i za zaustavljanje. Prisutna je unutar svih strojeva koje koristimo. Ovdje ćemo se koncentrirati na fenomenološke aspekte (opis bez dubokog teorijskog uvida) , ali ćemo pružiti studentu ipak sliku o njenom porijeklu. Zamislimo dvije površine predmeta u kontaktu (na primjer knjiga koja leži na horizontalnom stolu) uz prisutnost okomitog pritiska okomitog na kontaktnu plohu. Ma kako glatke bile te površine, pod mikroskopom bismo uočili izbočenja iz osnovne plohe. Ako su plohe makroskopski ravnine, (ravnina je određena s tri točke) postoje tri mjesta na kojima neravnine izbočene iz jedne plohe u drugu zaprečavaju klizanje među plohama kada ako gornje tijelo silom nastojimo pomaknuti horizontalno preko donjeg tijela. Ipak, ako je horizontalna sila dovoljno jaka, doći će ili do mikroskopskog izdizanja tijela i zaobilaženja neravnine ili do lomljenja mikrozapreke. Nadalje je intuitivno prihvatljivo da će jednom pokrenuto tijelo trebati manju silu za nastavak gibanja nego za pokretanje. Konačno, ako sada počnemo velikom brzinom prelaziti preko tijela, frekvencija sudara mikrozapreka će se povećati i bit će ponovno potrebna veća sila za to brže gibanje; to veća što je gibanje brže. Ovo razmatranje je dobra podloga da lakše prihvatimo eksperimentalno utvrđena pravila o svojstvima sile trenja. Silom trenja općenito zovemo silu koja se javlja prilikom pokretanja ili tijekom gibanja objekta. Ovdje ćemo detaljnije razmatrati trenje među plohama materijala, no trenje se događa i pri gibanju tijela u tekućini ili u plinu!

Koeficijent trenja mirovanja:
Ako odaberemo dvije plohe nekih materijala u kontaktu, opišemo silu kojom se djeluje normalno na podlogu (težina knjige u prošlom pasusu) s N i označimo maksimalnu silu kojom tijelo vučemo paralelno kontaktnoj plohi, prije nego što se tijelo pokrenulo s $(F_t)_{\max}$ eksperimentalna je činjenica da su te dvije sile međusobno proporcionalne. Neočekivano je studentima, a demonstrira se pokusom, da za iste materijale sila trenja ne zavisi o kontaktnoj površini nego samo o normalnoj sili N . Sjećajući se mikroskopske slike ovo je sasvim razumljivo, jer u tvorbi sile učestvuju svega tri točke (neravnine) , a dubina propadanja neravnina jednih u druge zavisi samo o sili N ! Za opis ove činjenice se koristi koeficijent trenja mirovanja definiran s :

$$\mu = \frac{(F_t)_{\max}}{N} \tag{3.38}$$

Postoji i koeficijent trenja gibanja:

$$\mu' = \frac{(F_t)_{v=const}}{N} \tag{3.39}$$

Za silu trenja kod neke relativne brzine ploha. Pred studentima će se pokusom demonstrirati:

$$\mu > \mu' \tag{3.40}$$

U primjeru knjige na stolu, da bi došlo do gibanja, mora sila F , koja uzrokuje gibanja biti veća od sile trenja:

$$F - (F_t)_{\max} > 0 \qquad \text{ili} \qquad F - \mu N > 0 \tag{3.41}$$

Naravno, akceleracija tijela (koje je već u gibanju) bit će rezultat djelovanja rezultantne sile na masu tijela m :

$$F - \mu' N = ma \tag{3.42}$$

Trenje će načiniti i zaustavljanje tijela, ako je pa primjer sila F=0 u gornjem slučaju.

Mjerenje μ pomoću kosine:

Osim mjerenja sila u (3.38) i (3.39) , može se koeficijent trenja mirovanja odrediti i postavljanjem tijela na kosinu, povećavanjem kuta nagiba kosine do situacije u kojoj se tijelo pokreće. Ako je kut nagiba kosine α , tada je normalna reakcija podloge jednaka komponenti gravitacijske sile okomite na podlogu:

$$N = mg\cos\alpha \tag{3.43}$$

$$(F_t)_{\max} = mg\sin\alpha_{\max} \tag{3.44}$$

Gdje je na desnoj strani sinus maksimalnog kuta do kojeg se tijelo još nije pokrenulo. Tada je prema (3.38) i (3.44) :

$$\mu = tg\alpha_{\max} \tag{3.45}$$

Da bismo odredili korespondentni koeficijent trenja za gibanje, odredit ćemo za izabranu brzinu kut pod kojim kosina treba biti nagnuta da bi se realiziralo jednoliko gibanje tom brzinom. Tangens toga kuta analogno (3.45) odgovara koeficijentu trenja gibanja za tu brzinu.

Gibanje tijela na kosini uz trenje:

Tijelo je na kosini, os y je horizontalna, a os x je također u ravnini kosine okomita na y-os s pozitivnim smislom prema dolje. Newtonove jednadžbe gibanja u komponentama glase:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu' mg\cos\alpha\cdot\frac{v_x}{v} \tag{3.46}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu' mg\cos\alpha\frac{v_y}{v} \tag{3.47}$$

Faktori $\frac{v_x}{v}$ i $\frac{v_y}{v}$ u gornjim jednadžbama se pojavljuju kao rezultat projiciranja sile trenja koja se opire ukupnom vektoru brzine v duž smjera te brzine. Gornje jednadžbe su matematički vrlo komplicirane i mi ih ne ćemo rješavati. Radi se o komplicirano vezanim diferencijalnim jednadžbama a njihova kompliciranost je skrivena u nazivniku v koji je zapravo drugi korijen kvadrata prvih derivacija koordinata x i y po vremenu! Možemo međutim riješiti u kojoj je postoji samo komponenta brzine duž x osi. Tada se problem reducira na samo:

$$\frac{dv_x}{dt} = g\sin\alpha - \mu' g\cos\alpha = g\sin\alpha(1-\frac{\mu'}{tg\alpha}) \tag{3.48}$$

Tijelo se ubrzava ako je član $\frac{\mu'}{tg\alpha} < 1$.

Općenito trenje nastojimo smanjiti. U strojevima to se čini podmazivanjem uljima. S druge strane ima situacija i kada ga nastojimo povećati (padobran, povećanje pritiska guma trkaćih automobila na podlogu…) .