R E L A T I V I S T I Č K A   M E H A N I K A

UVOD:

Nakon suštinskog razumijevanja Newtonovske mehanike, relativistička je mehanika slijedeći koncepcijski izazov studentu fizike . Dva su tome razloga:

1) Fenomeni relativističke mehanike su daleko od naših dnevnih iskustava jer se dešavaju pri brzinama koje su u redu veličine brzine svjetlosti.
2) Za teorijsko utemeljenje relativističke mehanike potrebno je uz prihvaćanje činjenice da je brzina svjetlost ista u svim inercijskim sustavima prihvatiti i visok stupanj apstrakcije s različitim vremenima raznih sustava i linearnosti veza prostorno-vremenskih koordinata.

POVIJEST MJERENJA BRZINE SVJETLOSTI

Olaf Roemer je 1676 godine zaključivao o brzini svjetlosti prateći gibanje Jupiterovog satelita Io. Dobivši kvalitetan rezultat za frekvenciju obilaska, ustanovio je da se ponavljanje iste pozicije Io u odnosu na Jupiter javlja sve kasnije kako se Zemlja udaljava od Jupitera. Mjereći to vremensko odstupanje (naprimjer zalaska Io za Jupiter) za minimalni i maksimalni razmak Zemlje i Jupitera dobio je podatak o tome koliko dugo svjetlost putuje tom razlikom razmaka Zemlje i Jupitera . Odatle je dobio prvu informaciju da svjetlost ne ide beskonačno brzo i informaciju koja je otprilke ta brzina. J. Bradley je opažao razliku kuta pod kojim se zvijezda stajačica opaža zavisno od toga da li je Zemljino kretanje u smjeru ili protivno smjeru zvijezde. Fizeau je rotirajućim zupčastim kotačem prekidao svjetlost , postavio na putu od otprilike 8,6 km zrcalo i opažao pri kojoj brzini rotacije reflektirana zraka nailazi na nazubljeni dio nakon što je u pravcu zrcala prošla kroz otvor između dva zuba. Slična je bila i Foucaltova metoda koji je umjesto zubaca koristio rotirajuća zrcala. Michelson je velikim putem od 2x22 milje došao u domenu veće točnosti za brzinu c $\approx 2{,}99 \times 10^{8}$ m/s.

TEORIJSKI SIGNAL U SMJERU NEZAVISNOSTI BRZINE SVJETLOSTI O SUSTAVU

Elektrodinamika, koju studiramo slijedeći semestar prekrasno daje ujedinjeni i neproturječan opis elektromagnetskih fenomena. Već smo konstatirali princip da fizikalni zakoni ne bi smjeli zavisiti o sustavu. Maxwellove jednadžbe također ne zavise o sustavu. No iz Maxwellovih jednadžbi slijedi numerička vrijednost brzine svjetlosti koja je tako u njih ugrađena. Time i ta numerička brzina treba biti konstanta. Povijesno, ovo nije bila baza za relativističku mehaniku, ali studentima može biti dodatni argument za teško prihvatljivu eksperimentalno ustanovljenu neovisnost brzine svjetlosti o sustavu.

TEORIJA ETERA I POKUŠAJ USTANOVLJENJA BRZINE SVJETLA PREMA ETERU

U doba pred rad Einsteina, vjerovalo se da je eletromagnetski val fenomen na sredstvu nazvanom eter, kao što je zvuk titranje zraka. Ako je brzina svjetla u eteru c, tada bismo kretanjem ususret svjetla trebali vidjeti da svjetlosni fenomen putuje brzinom v+c gdje je v brzina gibanja prema eteru. Slično bi pri gibanju u suprotnom smjeru trebali vidjeti brzinu c-v. Michelson i Morley su eksperimentalnu demonstrirali da gibanje Zemlje ne utječe na eksperimentalni rezultat mjerenja brzine svjetlosti. Ovdje ćemo iznimno morati pretpostaviti da student zna što je fenomen interferencije svjetlosti. Ako općenito valu koji dolazi iz istog izvora dozvolimo da se kreće dvjema stazama različitih duljina, kada valove ponovno

združimo, oni ce se pojačavati ako je razlika putova cijeli broj valnih dužina, a poništavati ako je razlika putova pola valne dužine. Michelson i Morley rascijepili su svjetlost polupropusnim zrcalom (pola intenziteta se reflektira a pola prolazi zrcalom). Jednu su zraku pustili smjerom „eterskog vjetra“ (to jest suprotno gibanju Zemlje) , a drugu okomito na taj smjer. Tada su na istu udaljenost od polupropusnog zrcala postavili prava zrcala. Svjetlost reflektirana na dva prava zrcala natrag na polupropusno zrcalo se sada preko polupropusnog zrcala slala na leću koja je tu ujedinjenu svjetlost koncentrirala u fokus. Tu se sada trebao dešavati interferencijski efekt zavisan od toga kolika je razlika putova zrake koja je išla niz i uz „eterski vjetar“ i zrake koja je išla okomito na „eterski vjetar“. Proračun razlike vremena za dvije različite putanje teče ovako.
Za zraku koja je išla niz i uz vjetar: uz oznaku l za razmak polupropusnog i realnog zrcala:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c+v} \tag{12.1}$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c-v} \tag{12.2}$$

Zakašnjenje te zrake jest:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = l(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}) = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-(v/c)^2} \tag{12.3}$$

Kod okomite zrake trebamo uočiti da za vremenski interval Δt_3 zraka okomita na „eterski vjetar“ putuje put l u vertikalnom smjeru i put $v\Delta t_3$ u smjeru vjetra a u smjeru hipotenuze ta dva gibanja prelazi put $c\Delta t_3$. Po Pitagorinom poučku slijedi veza hipotenuze i kateta:

$$l^2 + (v\Delta t_3)^2 = (c\Delta t_3)^2 \tag{12.4}$$

Odatle slijedi:

$$\Delta t_3 = \frac{l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{12.5}$$

Isti takav vremenski interval je potreban povratnoj zraci:

$$\Delta t_4 = \Delta t_3 \tag{12.6}$$

Tako je razlika u vremenu dolaska dvije zrake natrag na polupropusno zrcalo:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 - 2\Delta t_3 = \frac{2l}{c}\left[\frac{1}{1-(v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] \tag{12.7}$$

Množenjem s c (12.7) razlika vremena dolaska pretvara se u razliku prevaljenih puteva. Ta razlika puteva se trebala manifestirati kroz interferencijski fenomen, što se nije desilo. Detaljniji opis tog aspekta ide ovako. Ako se aparatura kojom smo gledali fenomen zarotira za 90 stupnjeva, i tada gleda razlika putova u odnosu na gornju, tada je ukupna razlika dvije konfiguracije 2cx vremenski interval (12.7). (ako još u (12.7) upotrijebimo činjenicu da je v mnogo manji od c, tada je razlika puteva za nerotiranu i rotiranu konfiguraciju:

$$\Delta = \frac{4l}{c}\left[\frac{1}{1-(v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] \approx 2l\frac{v^2}{c^2} \tag{12.8}$$

Ova se udaljenost trebala usporediti s valnom duljinom upotrijebljenog svjetla da se ispita postoji li fenomen interferencije. Kvocijent gornje razlike putova podijeljen s valnom duljinom daje nam informaciju za koliki dio valne dužine se dvije konfiguracije razlikuju.

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2l}{c}(\frac{v}{c})^2 \tag{12.9}$$

Uvrštenjem konkretnih brojeva za Michelson Morley aparaturu taj je kvocijent treba iznositi oko 0,4. To znači ako smo u jednoj konfiguraciji Michelsonovog uređaja imali maksimalni intenzitet u fokusu leće, tada bi u zarotiranoj konfiguraciji trebali imati praktički minimum. Michelson- Morley uređaj međutim nije registrirao nikakvu razliku. Naprotiv, dokazao je da se bez obzira da li brzinu svjetla mjerimo u smjeru gibanja Zemlje ili okomito na taj smjer, potrebno vrijeme jest isto i gibanje Zemlje ne utječe na ishod mjerenja.

DANAS POZNATA SVOJSTVA BRZINE SVJETLOSTI

a) Brzina širenja elektromagnetskih valova u slobodnom prostoru ne zavisi o frekvenciji
b) Brzina svjetlosti ne zavisi o brzini izvora ili opažača
c) Nije moguće prenošenje čestica ili poruka brzinom većom od brzine svjetlosti
d) Brzina svjetlosti je ugrađena u Maxwellove jednadžbe. Kako one nisu ovisne o sustavu nije ni brzina svjetlosti

EKSPERIMENTALNA DEMONSTRACIJA DA JE GRANIČNA BRZINA GIBANJA c

Elektroni su ubrzavani stalnim električnim poljem, čime se znala energija koju su akceleracijom dobili. Studenti koji imaju elementarno poznavanje električnih pojava (a mi smo to također pokazali pri demonstraciji rješavanja Newtonovih jednadžbi u električnom polju) znaju da pri prolazu kroz električno polje jakosti E , na duljini l elektron naboja q dobiva energiju qEl . U nerelativističkoj mehanici to ide u kinetičku energiju dobro poznatom relacijom:

$$qEl = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12.10}$$

Prema (12.10) brzina elektrona bi se mogla neograničeno povećavati dizanjem njegove energije. U navedenom pokusu mjerena je i brzina elektrona jednostavnom metodom proleta. Mjereno je vrijeme potrebno da elektron prevali put između dva detektora. Nakon tog mjerenja provedeno je još jedno kontrolno mjerenje energije elektrona. Naime pratilo se koliko elektronski snop grije metu u kojoj se zaustavlja. Najprije je utvrđeno da elektronu doista možemo kontrolirano i provjereno dizati energiju. S druge strane, njegova brzina brzo odstupa od očekivanja (12.10) kada se energija elektrona poveća u područje reda veličine

$$E = m_e c^2 \tag{12.11}$$

Gdje je m_e masa mirovanja elektrona. Zaključak je eksperimenta dvojak . Relacija (12.10) ne vrijedi za velike brzine. Eksperiment je također pokazao da se dizanjem energije diže i dalje brzina elektrona ali samo asimptotski prema brzini c. Ovaj je eksperiment demonstrirao fizičar W. Bertozzi! Ovaj eksperiment nije bio poznat u Einsteinovo vrijeme i spominjemo ga samo zato da studenti budu svjesni da danas postoje vrlo snažni dodatni eksperimentalni dokazi svi u smjeru potvrde Einsteinove specijalne teorije relativnosti.

OSNOVNE TVRDNJE SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

1) Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijskim sustavima
2) Prostor je homogen i izotropan, a vrijeme u svakom inercijskom sustavu teče jednoliko
3) Osnovni fizički zakoni su isti za dva opažača koji se gibaju stalnom relativnom brzinom

Studenti mogu imati problema s činjenicom da gornje tvrdnje vode na intuitivno neočekivane rezultate. Stoga su neki skloni u njih sumnjati. S vremenom ipak prihvaćaju da je stalnost brzine svjetlosti eksperimentalna činjenica, a da je homogenost i izotropnost vremensko-prostorog sustava jedina moguća početna pretpostavka.

EINSTEINOV VLAK : INDIKACIJA PROBLEMA S ISTOVREMENOSTI U DVA RAZNA SUSTAVA

Zamislimo da smo putnik u vlaku koji ide određenom brzinom. Ako u sredini vlaka bljesne svjetlo, prema gornjim pretpostavkama 1) i 3) , svjetlosni signal treba istovremeno dospjeti do obadva kraja vlaka. Ako smo putnik izvan vlaka, koji miruje dok vlak putuje, jasno je da ćemo opaziti da je svjetlo prije došlo do kraja vlaka koji se (izvana gledajući približava , a kasnije do kraja vlak koji se od mjesta bljeska udaljava. I OBADVA OPAŽAČA MORAJU BITI U PRAVU. Einstein uočava da nešto nije u redu s konceptom istovremenosti. Što je istovremeno u jednom sustavu, nije istovremeno u drugom sustavu. VREMENA u raznim sustavima teku RAZLIČITO.

IZVOD LORENTZOVIH TRANSFORMACIJA

Pretpostavimo da imamo dva inercijska sustava S i S' . Pri tome su sve njihove osi paralalne. Sustav S' se giba na desno(u smjeru pozitivne x osi) brzinom v u sustavu S. Radi pretpostavke 2). veza između prostornih i vremenskih koordinata dva sustava mora biti linearna . Ako to ne bi bilo ispunjeno, postojala bi nejednolikost toka vremena ili nehomogenost prostora. Najopćenitija linearna veza jest:

$$x = ax' + bt' \qquad (12.12)$$

$$t = dx' + et' \qquad (12.13)$$

Konstante a,b,d,e treba odrediti. Zasada imamo informaciju da sustav S' putuju jednoliko brzinom v . Dozvoljeno nam je podesiti satove tako da u trenutku kada se ishodišta dva sustava poklope počinjemo mjeriti vrijeme:

$$x(0) = 0 = x'(0) \qquad (12.14)$$

Promatrajmo sada gibanje ishodišta (x'=0) u sustavu S. Njegova vremensko prostorne koordinate se ponašaju kao:

$$x = bt' \quad t = et' \qquad (12.15)$$

No ta točka putuje brzinom v pa vrijedi prema (12.14):

$$v = \frac{x}{t} = \frac{b}{e} \qquad (12.16)$$

To je prva relacija među nepoznatim koeficijentima.

Obrnutim izborom koordinate $x = 0$ koja se giba u S' ulijevo , znači ima brzinu –v istim putem dobivamo:

$$-v = \frac{x'}{t'} = -\frac{b}{a} \qquad (12.17)$$

Iz (12.16) i (12.17) imamo :

$$a = e \qquad (12.18)$$

i

$$b = va \qquad (12.19)$$

S gornjim imamo veze među koordinatama s manjim brojem konstanti:

$$x = ax' + avt' \qquad (12.20)$$

$$t = at' + dx' \qquad (12.21)$$

Ako u vrijeme kada ishodišta koincidiraju (12.14) pustimo svjetlosni signal iz ishodišta, mora vrijedit,i dok se signali šira duž x-osi, radi iste vrijednosti brzine svjetlosti u dva sustava:

$$x^2 = c^2 t^2 \tag{12.22}$$

$$x'^2 = c^2 t'^2 \tag{12.23}$$

Uvrštenjem (12.20) i (12.21) u (12.22) imamo:

$$a^2 x'^2 + 2a^2 v x' t' + a^2 v^2 t'^2 = a^2 t'^2 c^2 + 2at' dx' c^2 + d^2 x'^2 c^2 \tag{12.24}$$

Relacije (12.23) i (12.24) trebaju biti konzistentne. Znači da se koeficijenti uz iste potencije varijabli x' i t' mogu izjednačiti.

$$a^2 - c^2 d^2 = 1 \tag{12.25}$$

$$2a^2 v = 2adc^2 \tag{12.26}$$

Iz (12.26) računamo d:

$$d = \frac{av}{c^2} \tag{12.27}$$

Uvrštenjem (12.27) u (12.25) dobivamo relaciju za koeficijent a:

$$a^2 - \frac{a^2 v^2}{c^2} = 1 \tag{12.28}$$

Odatle slijedi vrijednost :

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{12.29}$$

Kombiniranjem (12.27) i (12.29) imamo i vrijednost za d :

$$d = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.30}$$

Tako Lorentzove transormacije među x koordinatama glase:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.31}$$

A među vremenima:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.32}$$

Ovo je povijesni Einsteinov zahvat kojim je modificirao našu predrasudu o apsolutnom vremenu. Svaki sustav ima svoje vrijeme. To vrijeme unutar sustava se može sinkronizirati slanjem svjetlosnog signala, za koji znamo kojom brzinom putuje tako da unutar svakog sustava možemo imati jedinstveno vrijeme. Vremena u različitim sustavima mogu se samo uspoređivati preko Lorentzovih transformacija (12.31) i (12.32) koje se naravno mogu generalizirati i na slučajeve da signali ne putuju samo duž x osi. To je vrlo lagano učiniti. Naime pokazat ćemo da se u slučaju translacije sustava duž x-osi komponente u dva sustava u transverzalnom smjeru ne razlikuju .

$$y = y' \qquad z = z' \tag{12.33}$$

Gornju tvrdnju ćemo dokazati putem koji je Einstein često koristio, naročito u svojoj korespondenciji s N. Bohrom; misaonim eksperimentom. (U misaonom eksperimentu zamišljamo pokus , čiji nam je ishod očit na temelju našeg znanja fizike, iako je sam pokus u sadašnjem tehnološkom okruženju praktički neizvedljiv). Neka se u sustavu S nalazi štap duljine L u smjeru y osi . Neka se u sustavu S' u smjeru paralelne osi y' nalazi štap iste duljine L. Neka se sustavi S i S' nalaze u stanju relativnog gibanja kako je gore opisano; znači samo duž osi x/x' . Ako ne bi vrijedila jednakost y koordinata, jedna od veličina y,y' bila bi manja. To bi značilo da možemo zaključiti slijedeće: šiljak na kraju skraćenog štapa bi ostavio posjekotinu na dužem štapu. No svi inercijski sustavi su ravnopravni. Promatrajući događaj sa stanovišta drugog sustava, relacija kraći-duži bi bila obrnuta. Naravno nije moguće da je jedan te isti štap istovremeno i dulji i kraći od drugog. Tako smo tvrdnju (12.33) dokazali. U uzdužnom smjeru takvo zaključivanje ne će biti moguće. Student treba uočiti , kako ne bi bio zbunjen, da u slučaju uspoređivanja duljina transverzalnih štapova, obadva se kraja štapa susreću s odgovarajućim krajevima štapova u drugom sustavu U ISTOM TRENUTKU. To pak ne će biti slučaj kada štapovi budu položeni paralelno smjeru relativnog gibanja.

Konačni rezultat za analitičku povezanost vremensko-prostornih koordinata inercijskih sustava S i S' koji se međusobno kreću relativnom brzinom v duž osi x kako je to opisano na početku jest:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad y=y' \qquad z=z' \qquad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.34)$$

Ovo su čuvene Lorentzove transformacije. Korektno je spomenuti da je analitički oblik transformacija u prostornom dijelu bio predlagan i prije Einsteina. No Einstein je bio taj koji je načinio radikalni zahvat na kritici apsolutnog vremena, pridijeli je svakom sustavu njegovo vrijeme i za vremena u različitim sustavima da analitički izraz za njihovu povezanost. Time prividno jesu mogući razni paradoksi. Na primjer slijed istih događaja u raznim sustavima ne mora biti identičan. Pokazuje se međutim da je to posebna klasa događaja, koji su prostorno toliko udaljeni, da svjetlosni signal ne stigne doprijeti od jednog do drugog da bi prenio bilo kakvu informaciju. Drugim riječima, takvi događaji se fizikalno ne mogu povezati! U tom slučaju vremenski odnos takva dva događaja i nema fizikalnih posljedica!

Radi analiza fenomena skraćivanja duljine i dilatacije vremena od interesa su nam i transformacije obratne od (12.34), to jest one u kojima veličine S' sustava pišemo pomoću veličina S sustava. Te obratne transformacije možemo dobiti počevši s izvodom od (12.12) do (12.34) s time da zamijenimo uloge S i S' koordinata. Pri tome su prirodno zamjenjuje i predznak relativne brzine v. Tako obratne transformacije glase:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.35)$$

SKRAĆIVANJE DULJIINE ŠTAPA KOJI SE GIBA OPAŽENO IZ MIRNOG SUSTAVA.

Pokazat ćemo da se štap koji u S' sustavu miruje i ima određenu duljinu u sustavu S u kojem se štap giba ima kraću duljinu. Najprije moramo naučiti ispravno govoriti o duljini objekta u nekom sustavu. To je razmak (razlika koordinata, ako je duljina duž jedne koordinatne osi) ustanovljen u jednom trenutku. Neka znači štap miruje u S' tako da su mu krajevi $x_1' \; i \; x_2'$.
Tada je njegova vlastita, prava duljina:

$$L_0 = x_2' - x_1' \qquad (12.36)$$

Promatrajmo sada objekt (štap) koji miruje u S' u sustavu S. Neka su satovi podešeni tako da je u trenutku susreta ishodišta sustava $t' = t = 0$. Prema (12.35) računamo prostorne koordinate S' sustava:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.37)$$

Duljina štapa u sustavu S dobiva se usporedbom x koordinata krajeva štapa za identična vremena:

$$t_2 = t_1 \qquad (12.38)$$

Ako u razliku koordinata iz (12.37) uvrstimo (12.38) dobivamo:

$$x_2' - x_1' = L_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12.39)$$

Kako je L razlika koordinata uz istovremenost u sustavu S (relacija (12.38), to predstavlja dužinu štapa u sustavu S. Direktna posljedica (12.39) jest:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (12.40)$$

Kako je numerička vrijednost korijena na desnoj strani (12.40) uvijek manja od 1, štap koji prolijeće sustavom ima duljinu manju od duljine u sustavu u kojem miruje.

Edukativna napomena. Mnogi američki udžbenici na ovom mjestu testiraju razumijevanje relativistike na slijedeći način. Neka štap dulji od zgrade(s dvoma vratima postavljenim jednima nasuprot drugima) prolijeće zgradom brzinom bliskom svjetlosti. Da li se istovremenim zatvaranjem vrata , u trenutku dolaska prednjeg kraja štapa do stražnjih vrata, može konstatirati da je cijeli štap (iako u svom sustavu mirovanja dulji od zgrade) nalazi sav u zgradi??? Šokantan odgovor je potvrdan, ako je brzina štapa dovoljno visoka da bi prema (12.40) stao u zgradu. Naravno, nakon istovremenog zatvaranja vrata, zadnja vrata se moraju smjesta i ponovno otvoriti, kako se štap-projektil ne bi zabio u zatvorena vrata.

USPORAVANJE SATA

Ovo je još jedan relativistički fenomen koji s jedne strane uznemiruje našu intuiciju, no s druge strane ovdje imamo direktnu potvrdu da su relativistički proračuni eksperimentalno u skladu s procesima opaženim u prirodi! Neka se sata nalazi u sustavu S' u stanju mirovanja. Neka je registrirao da je između dva događaja protekao vremenski period τ . Situaciju možemo preko relativističkih koordinata opisati kao:

$$x_2' = x_1' \qquad (12.41)$$

Sat se nije micao u S' .

$$t_2' - t_1' = \tau \qquad (12.42)$$

Proteklo vrijeme je po našoj definiciji τ. Upotrijebit ćemo sada (12.34) i to u njenom vremenskom dijelu izražavajući preko koordinata S' vremena u sustavu S:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.43}$$

Odbijanjem izraza za t_1 od izraza za t_2 u (12.43) i korištenjem (12.41) slijedi:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.44}$$

Kako je nazivnik u (12.44) manji od jedinice, to znači da opažač u sustavu u kojem sat putuje registrira veći vremenski razmak. Vrijeme teče najbrže u sustavu u kojem opažač/sat miruje. To se vrijeme naziva i vlastitim vremenom sustava. Ova pojava usporenja sata se i eksperimentalno opaža. Jedna od temeljnih čestica, mion, raspada se dobro definiranim vremenom raspada u mirnom sustavu. No kada imamo snop miona dobro definirane brzine, možemo izmjeriti da se vrijeme raspada produljuje upravo prema (12.44). Nadalje, na temelju relacije (12.44) prenose se snopovi nestabilnih čestica velikih brzina preko udaljenosti od više stotina metara, iako bi se pri maloj brzini transporta raspali već na centimetarskim udaljenostima.

SVJETLOSNI SAT:

Neka u S' imamo slijedeći satni mehanizam. Postavljena su dva planparalelna ogledala. (Značenje riječi: ogledala su isječci dvije paralelne ravnine.) Neka su postavljena tako da su im središta na okomici dviju ravnina. Ako s jednog od zrcala emitiramo zraku okomito na zrcalo,svjetlost će se trajno reflektirati među njima. Ako je razmak među ravninama L, tada za jedan odlazak svjetlosne zrake od početnog zrcala i njezin povratak na isto zrcalo treba vrijeme:

$$\tau = \frac{2L}{c} \tag{12.45}$$

To možemo smatrati vremenskim etalonom svjetlosnog sata i vremenski interval određivati prema tome koliko je titraja načinio svjetlosni sat u ispitivanom intervalu! Na punoj je liniji našeg proučavanja ispitati, koje vrijeme opaža da je potrebno za odlazak i povratak promatrač, u čijem se sustavu svjetlosni sat giba brzinom v paralelno ravninama zrcala. Možemo sada izračunati vrijeme koje registrira opažač dok svjetlosni sat prolijeće pokraj njega potrebno za jedan titraj sata. Svjetlo u jednom smjeru sada putuje katetom trokuta kojeg čine razmak zrcala L i put koji prevali zrcalo u vrijeme t/2 putujući brzinom v, gdje je t vrijeme potrebno za put od jednog do drugog zrcala, a kako ga registrira mirni opažač. Dakle :

$$(ct/2)^2 = L^2 + (vt/2)^2 \tag{12.46}$$

Odatle možemo izračunati t :

$$t = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.47}$$

Vidimo da svjetlosni sat usporava kako smo upravo predvidjeli razmatranjem o usporavanju sata (12.44).

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE BRZINE:

U nerelativističkoj fizici brzine su se transformirale među inercijskim sustavima vrlo jednostavno. Brzini u jednom sustavu trebalo je (vektorski) dodati samo relativnu brzinu među sustavima. Ta je jednostavnost potjecala od pretpostavke jednog, jedinstvenog, apsolutnog vremena koje jednoliko i istom brzinom teče u svim inercijskim sustavima. Einstein nam je pokazao da tome nije tako. Kako se, relativistički, pomak i vrijeme različito i separatno transformiraju to je nažalost veza brzina u raznim sustavima mnogo zamršenija. Ispostavit će se da to ima dalekosežne posljedice. Globalno gledajući, relativističke transformacije brzina natjerat će nas na specifičnu definiciju impulsa, koja će se moći interpretirati i kao promjenljivost mase objekta zavisno o brzini objekta.

Početne relacije u našem razmatranu su veze među prostorno-vremenskim koordinatama (12.34) ; sada dobro poznate Lorentzove transformacije. Ako pratimo događaj u sustavu S od početnih koordinata objekta : (x,y,z,t) , nakon vremenskog diferencijala dt , koordinate istog objekta će imati iznose: (x+dx,y+dy,z+dz,t+dt). Kao i do sada brzine su:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{12.48}$$

Analogno su brzine u sustavu S':

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad v_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{12.49}$$

Uzimajući dx' i dt' u relacijama (12.34) kao slobodne , nezavisne diferencijale, možemo prema (12.34) napisati i odgovarajuće izraze za dx, dy, dz, dt:

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.50}$$

Uvrštavanjem diferencijala iz (12.50) u izraze (12.48) dobivamo izraze za pojedine komponente brzina:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}} \tag{12.51}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v_y'}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{12.52}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v_z'}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{12.53}$$

Očito su veze među brzinama u relativističkoj mehanici vrlo kompleksne. Brzine se ne dobivaju jednostavnim vektorskim zbrajanjem. Dapače, u transformaciji jedne komponente, konkretno u transformacijama transverzalnih brzina, učestvuje i longitudinalna komponenta brzine!

DOPPLEROV EFEKT

Klasični Dopplerov efekt je fenomen u kojem se frekvencija učestalosti signala emitiranih jednom frekvencijom pri opažanju detektorom mijenja radi relativnog kretanja izvora bilo s obzirom na detektor ili s obzirom na sredstvo. Klasični Dopplerov efekt podrazumijeva i nerelativističke uvjete i širenje signala putem sredstva-medija za propagaciju (širenje) signala.

Potpuno općenite okolnosti , u kojima se vektori gibanja izvora i detektora nalaze u proizvoljnom odnosu ćemo pojednostavniti na jednodimenzionalni slučaj. Neka je u vrijeme t=0 razmak između izvora i detektora bio jednak a . Označimo s v_d i v_i brzine detektora i izvora. Neka je u $t = t_i$ emitiran puls signal iz izvora .Taj signal je detektiran u detektoru koji se giba u vrijeme $t = t_d$.

Ako je u t=0 izvor u ishodištu, detektor je na udaljenosti a. U vrijeme emisije signala izvor je na položaju $v_i t_i$, a detektor je na položaju $v_i t_i + a$. Kako signal putuje do detektora konačnom brzinom v_z to će biti detektiran u detektoru u vrijeme iza emisije : t_d . Tako signal treba ukupno prevaliti put: $a + v_d t_d - v_i t_i$ krećući se brzinom v_z vrijeme $t_d - t_i$. Znači,

$$a + v_d t_d - v_i t_i = v_z (t_d - t_i) \tag{12.54}$$

Slijedeći puls se emitira nakon vremenskog razmaka pulsova u izvoru Δt_i a kasni za prvim pulsom u detektoru za Δt_d . Tako imamo novi odnos konstruiran na način (12.54) :

$$a + v_d (t_d + \Delta t_d) - v_i (t_i + \Delta t_i) = v_z (t_d + \Delta t_d - t_i - \Delta t_i) \tag{12.55}$$

Odbijanjem relacije (12.54) od (12.55) slijedi:

$$(v_z - v_i)\Delta t_i = (v_z - v_d)\Delta t_d \tag{12.56}$$

Tako za vremenski razmak pulsova (perioda pulsova) u izvoru Δt_i i razmak u detektoru Δt_d vrijedi odnos:

$$\frac{\Delta t_d}{\Delta t_i} = \frac{v_z - v_i}{v_z - v_d} \tag{12.57}$$

Kako su periodi titranja i frekvencije titranja recipročno povezani, to je odnos emitirane i detektirane frekvencije:

$$\frac{\nu_d}{\nu_i} = \frac{v_z - v_d}{v_z - v_i} \tag{12.58}$$

Studenti znaju da na primjer pri stacionarnom promatraču (brzina detektora je nula) , izvor koji nam se približava prema (12.58) ima višu frekvenciju od onog koji se udaljava. Na tom principu radi vrlo važna dijagnostička aparatura: „Color Doppler“ . Naime reflektirani ultrazvuk s krvnih zrnaca u našem kardiovaskularnom sustavu tim efektom daje informacije o brzini protjecanja krvi na nekoj lokaciji u tijelu. Naravno, ime boja u naslovu metode nema vezu s optikom. Naime na ekranu na kojem se daje koordinatni prikaz rasporeda strujanja krvi, intenzitet brzine se prikazuje bojom .

RELATIVISTIČKI DOPPLEROV EFEKT

Relativistički Dopplerov efekt se od klasičnog razlikuje u dva bitna aspekta. Jedan je naravno relativistička priroda fenomena. No prešutno, bez naglašavanja, implicira se da u ovom slučaju ne postoji medij poput zraka ili etera; elektromagnetski val se širi kao titranje polja u prostoru.

U izvodu ćemo koristiti varijantu (12.35) Lorentzovih transformacija. Izvor se nalazi u sustavu S na koordinati x=0 . Prvi signal emitira se u vrijeme $t_1 = 0$ a drugi u $t_2 = \tau$. Prema izrazu za vrijeme iz (12.35), $t_1' = 0$, a

$$t_2' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.59}$$

No u trenutku odašiljanja drugog signala sa stanovišta sustava S' , izvor se nalazi na koordinati:

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.60}$$

Da bi svjetlost došla do ishodišta sustava S' treba prijeći put (12.60) idući brzinom c , tako da uz t_2' dodatno kasni vremenski interval.

$$-x_2'/c = \frac{\tau v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12.61}$$

Tako je ukupni razmak signala u vremenu u sustavu S':

$$\Delta t' = t_2' + (-x_2'/c) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\tau v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \tag{12.62}$$

Odnos frekvencija je naravno recipročan:

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \tag{12.63}$$

Ovaj izraz za Dopplerov pomak je bio sudbonosan za prve indikacije teorije velikog praska. Naime on omogućuje određivanje brzina kojima se svemirski objekti udaljavaju od promatrača. Prva indikacija o širenju Svemira došla je iz činjenice da se dalji objekti udaljavaju brže od bližih, što je jedino u skladu s modelom prvobitne eksplozije, pri kojoj najbrži objekti , nakon određenog vremena jesu i najudaljeniji objekti.

RELATIVISTIČKI IMPULS OBJEKTA

Lorentzove transformacije su neizbježna posljedica eksperimentalno utvrđene neovisnosti brzine svjetlosti o inercijskom sustavu. Pri daljnjoj prilagodbi fizikalnih varijabli relativistici prirodno je zahtijevati da se definicije fizikalnih veličina izvedu na način koji osigurava da se one u nerelativističkoj situaciji vrate na naše stare definicije. S druge strane želimo da do sada ustanovljeni fizikalni zakoni vrijede i u relativističkom slučaju. Razmotrit ćemo sada modifikaciju koja je potrebna da bi impuls objekta bio sačuvana veličina pri elastičnom sudaru. Posljedica će biti takva generalizacija definicije koja omogućuje obadva gornja zahtjeva.

Pokazat ćemo najprije da se sa starom definicijom impulsa kao produkta nepromjenljive mase i (relativističke) brzine generalno ne čuva impuls u elastičnom sudaru dvije jednake mase.

U sustavu centra mase naravno nemamo problema:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{poč} = 0 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{kon} \tag{12.64}$$

Naime u sustavu CM prije i poslije sudara vrijede jasno slijedeći odnosi:

	v_{1x}	v_{1y}	v_{2x}	v_{2y}
Prije sudara	v_x	$-v_y$	$-v_x$	v_y
Poslije sudara	v_x	v_y	$-v_x$	$-v_y$

Načinimo sada transformaciju brzina u sustav S' prema izrazima za transformaciju brzina (12.51) i (12.52). Pri tome se izrazi za brzine u S' razlikuju za predznak relativne brzine v (to jest gdje god je upisan v u obratnoj transformaciji treba pisati (-v)). Nadalje je brzina sustava S' jednaka

$$v = -v_x \tag{12.65}$$

Uvrštavanjem (12.65) u izraze za izražavanje brzina u S' sustavu preko onih u S sustavu imamo za novu tabelu brzina :

$$(v_{1x}')_{poč} = \frac{v_x - (-v_x)}{1 - \frac{v_x(-v_x)}{c^2}} = \frac{2v_x}{1 + \frac{v_x^2}{c^2}} = (v_{1x}')_{kon} \tag{12.66}$$

$$(v_{1y}')_{poč} = \frac{-v_y}{1 - \frac{v_x(-v_x)}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = \frac{-v_y}{1 + \frac{v_x^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = -(v_{1y}')_{kon} \tag{12.67}$$

$$(v_{2x}')_{poč} = \frac{-v_x - (-v_x)}{1 - \frac{-v_x(-v_x)}{c^2}} = 0 = (v_{2x}')_{kon} \tag{12.68}$$

$$(v_{2y}')_{poč} = \frac{v_y}{1 - \frac{-v_x(-v_x)}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = -(v_{2y}')_{kon} \tag{12.69}$$

Inspekcijom rezultata (12.66) – (12.69) množenih s masom ustanovljujem da je u x smjeru ukupni impuls (zbroj impulsa dva tijela) sačuvan u x smjeru. Naime u S' sustavu impuls prve čestice se nije promijenio, a isto vrijedi za drugu. S druge strane y komponenta impulsa u S' sustavu prije sudara jest:

$$m\frac{-v_y}{1 + v_x^2/c^2}\sqrt{1 - v_x^2/c^2} + m\frac{v_y}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} > 0 \tag{12.70}$$

Nakon sudara ta komponenta impulsa mijenja predznak; znači nije sačuvana.

Zaključujemo da se stara definicija impulsa ne može uskladiti sa zakonom sačuvanja impulsa. U našem se razmatranju problem manifestirao u y komponenti. Porijeklo je u slijedećoj činjenici. Dok je $dy = dy'$ *nije istovremeno* $dt = dt'$ i to je razlog problema. Međutim ako bismo u definiciju uvrstili deriviranje po vremenu u kojem tijelo miruje (po τ iz naših razmatranja o transformaciji vremena), to je vrijeme jedinstveno i problem bi i u y smjeru bio riješen.
Znači ispravna definicija impulsa jest za y smjer:

$$p_y = m\frac{dy}{d\tau} = m\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (12.71)$$

Stoga se impuls definira:

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v} \qquad (12.72)$$

Tako govorimo o relativističkom ponašanju mase:

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (12.73)$$

RELATIVISTIČKA ENERGIJA

Promjena definicije impulsa inducira promjenu definicije sile i energije. Sada je sila:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (12.74)$$

Rad ovako definirane sile pri ubrzanju tijela je

$$W = \int \vec{F}d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)d\vec{s} \qquad (12.75)$$

$$W = \int \left[\frac{(m\cdot dv/dt)d\vec{s}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m\vec{v}d\vec{s}\,\frac{(-1/2)(-2\vec{v})(d\vec{v}/dt)(1/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}\right] \qquad (12.76)$$

$$W = \int \left[\frac{m\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(\vec{v}\cdot d\vec{s}/dt)(\vec{v}d\vec{v})/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}\right] \qquad (12.77)$$

$$W = \int \frac{m\vec{v}d\vec{v} - m\vec{v}d\vec{v}(v^2/c^2) + m\vec{v}d\vec{v}(v^2/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} \qquad (12.78)$$

$$W = \int d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \qquad (12.79)$$

Kako je diferencijal u (12.79) u suštini diferencijal relativističke energije, to je znači relativistička energija:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (12.80)$$

Vidljivo je da čak i pri brzini tijela v=0 postoji energija mirovanja tijela:

$$E = mc^2 \qquad (12.81)$$

NAPOMENA: velik dio literature u izrazu (12.73) masu mirovanja označava s m_0. Sukladno tome se u izrazu za energiju mirovanja masa označava istom oznakom. S druge strane , u toj literaturi, je oznaka m rezervirana za veličinu koju smo u (12.73) označili s m(v).

Kinetička je energija povećanje energije od energije mirovanja do energije koju tijelo ima pri brzini v. Dakle:

$$E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \qquad (12.82)$$

Student može lako pokazati u nerelativističkom limesu da izraz (12.82) prelazi u uobičajeni izraz za kinetičku energiju. Naime razvojem u faktora s korijenom u nazivniku dobivamo:

$$(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (1/2)v^2/c^2 + ... \qquad (12.83)$$

Kako je kinetička energija razlika energije tijela u gibanju (12.80) i energije tijela u mirovanju (12.81), očito se ta razlika u nerelativističkom limesu preko razvoja (12.83) svodi na:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \qquad (12.84)$$

što je otprije poznati rezultat. Rezultat (12.81) je mnogo puta verificiran u nuklearnim reakcijama. Naime tijekom nuklearnih reakcija ukupna masa sviju učesnika nije sačuvana . dolazi do takozvanog defekta mase. Ako s Δm označimo manjak mase nastao u nuklearnom procesu, tada se u istom procesu kinetička energija povećava za iznos Δmc^2. To je direktna verifikacija izraza (12.81) i naših razmatranja o energiji u relativističkim uvjetima. To je također izvor tvrdnje o ekvivalenciji mase i energije.

VEZA TOTALNE ENERGIJE I IMPULSA

Kvadriranjem i svođenjem na isti nazivnik student može lako provjeriti da je relacija (12.85) identitet:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 = 1 \qquad (12.85)$$

Ako relaciju pomnožimo s izrazom m^2c^4 i nakon toga za prvi član lijeve strane uvrstimo relaciju (12.80), a za drugi član lijeve strane koristimo (12.72), dobivamo slijedeću vezu totalne energije i impulsa:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad (12.86)$$

Ova je relacija verificirana pokusima sličnim onim kao što je opisani pokus W. Bertozzija. Naime totalna energija se može mjeriti t.zv. kalorimetrima, a impuls se dobiva iz radijusa zakrivljenosti nabijene čestice u magnetskom polju poznate jakosti.
Možemo još dodati da je u slučaju da je masa mirovanja objekta jednaka nuli (slučaju kvanta svjetla-fotona), E=pc.

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE IMPULSA I ENERGIJE

Poznate su nam Lorentzove transformacije skupa (x,y,z,t). Te su transformacije linearne i imaju u matematičkom smislu transformacijska svojstva vektora .Radi toga se govori da taj skup koordinata koji se naziva i događajem predstavlja četverovektor u prostoru Minkovskog. Specifično ime prostora potječe od činjenice da se invarijantni modul vektora definira različito od, na primjer, trodimenzionalnog slučaja gdje je modul ili norma vektora povezana s komponentama nama poznatom relacijom:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (12.87)$$

U prostoru Minkovskog četiri koordinate događaja su povezane poznatom relacijom:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (12.88)$$

No radi transformacijskih svojstava koja nalazimo u Lorentzovim relacijama skup (x,y,z,t) nazivamo četverovektorm. Pokazat ćemo jednostavnim argumentima da skup $(p_x, p_y, p_{z,} E/c^2)$ ima identična transformacijska svojstva kao i skup (x,y,z,t) ; to znači da je u istom smislu četverovektor.

Poći ćemo od relacija koje prihvatili definicijom impulsa:

$$p_x = mdx/d\tau \;\; p_y = mdy/d\tau \;\; p_z = mdz/d\tau \;\; E/c^2 = mdt/d\tau \qquad (12.89)$$

Kako su m i $d\tau$ konstante nezavisne o transformaciji, očito se skup$(p_x, p_y, p_{z,} E/c^2)$ transformira kao kao skup (dx,dy,dz,dt) to jest i kao skuo (x,y,z,t). Stoga možemo smjesta pisati:

$$p_x' = \frac{p_x - v(E/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;\; p_y' = p_y \;\; p_z' = p_z \;\; E'/c^2 = \frac{E/c^2 - (v/c^2)p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (12.90)$$

Stručnim rječnikom i vremensko prostorne koordinate i impulsno koordinate zajedno s E/c^2 imaju ista transformacijska svojstva sadržana u Lorentzovim transformacijama. I jedan i drugi skup jest četverovektor.