G I B A N J E T I J E L A U P O L J U S I L E $\hat{r}C/r^2$

Pod utjecajem takve sile se gibaju otprilike planeti oko Sunca (otprilike jer i oni međusobno djeluju što komplicira stvarne proračune) . I naelektrizirane kugle su pod djelovanjem sile istog analitičkog opisa. Za slučaj privlačne sile Kepler je formulirao tri zakona. Kako ih se često spominje, mi ćemo ih ovdje navesti u poretku koji je on formulirao. Međutim, matematički tretman koji ih opravdava nije po svojoj težini u istom poretku , pa ćemo ih dokazivati / ilustrirati drukčijim redom.

Prvi Keplerov zakon konstatira da su putanje planeta oko Sunca elipse pri čemu je Sunce u jednom od njenih fokusa. Drugi Keplerov zakon kaže da radijus vektori koji idu od Sunca do planete prebrisavaju u jednakim vremenskim razmacima jednake površine. Treći Keplerov zakon govori da se kubovi glavnih osi njihovoh elipsa odnose kao kvadrati perioda njihovih ophodnji.

RADIJALNOST SILE I DRUGI KEPLEROV ZAKON.

Kako su vektor sile $\hat{r}C/r^2$ i radijus vektor položaja planete kolinearni (imaju isti ili suprotni smjer), to je moment sile takvog matematičkog opisa na planet jednak nuli:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times \hat{r}C/r^2 = 0 \qquad (11.1)$$

Prema vezi momenta sile i momenta impulsa, vremenska derivacija momenta impulsa jednaka je nuli. To znači da je

$$\vec{r}\times\vec{p} = vektorska\ konst \qquad (11.2)$$

Pokazat ćemo da (11.2) upravo iskazuje drugi Keplerov zakon. Naime (11.2) možemo pomnožiti s drugom konstantom: $(1/2m)$ gdje je m masa koja se pojavljuje u impulsu i dobiti novu relaciju:

$$\frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{p} = nova\,konstanta \qquad (11.3)$$

Veličina s lijeve strane (11.3) je zapravo brzina prebrisavanje površine koju vrši radijus vektor.
Najprije razmotrimo veličinu:

$$\frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{p} \equiv \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} \qquad (11.4)$$

Još od definicije vektorskog produkta pamtimo da je njegovo značenje površina paralelograma zatvorenog s ta dva vektora. Vektorski produkt radijus vektora i brzine kojom se radijus vektor miče je površina paralelograma koju radijus vektor u jedinici vremena tvori svojim kretanjem. Sektorska brzina, to jest brzina prebrisavanja površine od strane radijus vektora je samo polovica površine stvorene prema definiciji vektorskog produkta. Tako (11.4) sektorska brzina radijus vektora planetarnog gibanja i upravo smo dokazali da je stalna. Ovo je karakteristika svih centralnih sila!

OPIS STALNOSTI MOMENTA IMPULSA PREKO POLARNIH KOORDINATA

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{r} \times (m\frac{d\vec{r}}{dt}) = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \tag{11.5}$$

Kako vektorski produkt jediničnog radijus vektora sa samim sobom iščezava, to preostaje samo:

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\hat{r} \times \hat{\varphi} \tag{11.6}$$

Naravno to je vektor okomit na ravninu gibanja, no za naša buduća razmatranja iz opisa (11.6) i stalnosti momenta impulsa (11.2) slijedi da je veličina opisana polarnim varijablama:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = konstanta \tag{11.7}$$

POTENCIJALNA ENERGIJA TOČKASTE MASE U POLJU JEDNOLIKE SFERNE LJUSKE

Razmatranje koje slijedi višestruko je važno. Naime i točkaste mase i točkasti naboji interagiraju kako smo pokazali silama koje možemo karakterizirati potencijalnom energijom proporcionalnom s $1/r$ gdje je r njihova udaljenost. U slijedećem tekstu će se pokazati da je potencijalna energija točkaste mase u odnosu na jednoliko rapoređenu masu po nekoj kugli, dok je točka izvan te sfere ista kakva bi bila potencijalna energija iste točkaste mase kad bi ljuska imala masu koncentriranu u središtu te kugle. U (5.14) smo izveli da je potencijalna energija masa m i M :

$$U = -GMm\frac{1}{r} \tag{11.8}$$

Neka je masa M razmazana jednoliko po sfernoj ljusci radijusa r . Uočimo diferencijal površine te ljuske da, koji je prstenastog oblika osno simetrično smješten oko pravca između m i središta kugle M . Njegovu masu možemo izraziti kao:

$$dM = \frac{M}{4\pi r^2}da = \frac{M \cdot 2\pi r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta}{4\pi r^2} = \frac{M}{2}\sin\vartheta \cdot d\vartheta \tag{11.9}$$

U (11.8) kut ϑ je kut između između spomenutog pravca poveznice i radijus vektora koji ide od centra kugle M na prsten mase dM opisane s (11.8). Diferencijal potencijalne energije koji pripada interakciji m s dM je prema gornjem izrazu (11.8) :

$$dU = -G\frac{mdM}{r_1} \tag{11.10}$$

Udaljenost promatranog prstena od mase m smo označili s r_1 i ona se prirodno pojavljuje u (11.10); sve su točke prstena jednako udaljene od m .
Kosinusni poučak povezuje spomenute veličine:

$$r_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta \tag{11.11}$$

Razmak središta kugle s masom M i mase m je R u jednadžbi (11.11). Očito da za zadane R i r postoji zavisnost među r_1 i ϑ preko (11.11). Diferenciranjem te jednadžbe tako imamo:

$$2r_1dr_1 = 2Rr\sin\vartheta \cdot d\vartheta \qquad \text{ili} \qquad \sin\vartheta \cdot d\vartheta / r_1 = dr_1/(Rr) \tag{11.12}$$

Uvrštavanjem (11.9) u (11.10) i korištenjem izraza (11.12) za $\sin\vartheta \cdot d\vartheta / r_1$ dobivamo za diferencijal potencijalne energije:

$$dU = -GmM \frac{dr_1}{2rR} \tag{11.13}$$

Ukupnu potencijalnu energiju dobivamo integriranjem doprinosa sviju prstenova pri čemu se integracijaska varijabla mijenja :

a) za slučaj da je m izvan M od R-r do r+R pa je u tom slučaju potencijalne energija:

$$U = -GmM \cdot \frac{1}{2Rr} \int_{R-r}^{r+R} dr_1 = -\frac{GmM}{2Rr}(r + R - R + r) = -GmM / R \tag{11.14}$$

Tako smo dokazali tvrdnju s početka odsječka da je potencijalna energija točkaste mase u polju ljuske mase jednoliko raspoređene po sferi ista kao da je ljuskasta masa sva koncentrirana u središtu sfere.

b) Ako je masa m unutar sfere, tada integracija (11.13) ide od r-R do R+r , što znači da se tijekom proračuna (11.14) zamjenjuju granice integracije, pa izraz u zagradi postaje R+r-r+R i konačni rezultat postaje:

$$U = -\frac{GmM}{r} \tag{11.15}$$

Neočekivano potencijalna energija u untrašnjosti kugle postaje konstanta. Ova činjenica će biti naročito važna u električnim problemima slijedećeg semestra.

Rezultat a) gornjeg razmatranja možemo sa slučaja točkaste mase i sferične jednolike ljuske poopćiti i na slučaj dvije jednolike sferne ljuske pa i na pune kugle. Naime , ako imamo slučaj dvije jednoliko razmazane masene kuglaste ljuske, najprije za svaku točke jedne sfere možemo utjecaj druge sfere svesti na jednu te istu točku: centar te druge sfere. Tada nam je ostao već riješeni problem točkaste druge mase i jednolike ljuske prve mase, što se sada svodi na dvije mase koncentrirane u središtima kugala!

PUTANJA TIJELA U POLJU SILE OPISA $\hat{r}C / r^2$

Kada razmatramo dvije mase koje se privlače, pravilan račun bi išao smjerom koji ćemo kasnije ilustrirati, to jest transformacijom gibanja pojednih masa na opis pomoću koordinata težišta i vektora koji opisuje relativno gibanje. Tako se problem dva tijela reducira na mnogo jednostavniji problem jednog tijela to jest na promatranje ponašanja vektora njihovog relativnog položaja. U slučaju razmatranja Zemlje i Sunca , masa Sunca je bitno veća od mase Zemlje. Stoga se navedeni vektor relativnog položaja može zamijeniti slikom u kojoj Sunce miruje, a Zemlja se giba pod utjecajem Sunčeve gravitacije. U (11.6) smo opisali konstantnost momenta impulsa u polju radijalne sile. Radi toga je moment impulsa stalan ne samo po iznosu , nego i po smjeru. To pak znači da je vektorski produkt vektora položaja koji iz ishodišta (Sunca) pratimo položaj Zemlje i brzine Zemlje stalan po smjeru. To znači da je gibanje Zemlje ograničeno ravninom razapetom radijus vektorom Zemlje i njenom brzinom u jednom trenutku. Zemlja iz te ravnine ne može izaći, jer bi time bilo narušeno sačuvanje vektora impulsnog momenta. Stoga posljedice drugog Newtonovog zakona u slučaju centralne sile možemo razmatrati unutar jedne ravnine. Najpovoljniji je za račun polarni sustav. Korištenjem izraza za akceleraciju, koji smo dobili u (1.42) imamo za navedenu specijalnu silu slijedeću relaciju:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\left[\ \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \ \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\ \ \right] = \frac{C}{r^2}\hat{r} \tag{11.16}$$

Ulogu iščezavanja drugog (azimutalnog) dijela akceleracije i njene posljedice smo već utvrdili. Usporedbom radijalnih komponenti slijedi:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{C}{r^2} \tag{11.17}$$

No prema (11.7) se kutna brzina može opisati i uz pomoć modula momenta impulsa L:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \tag{11.18}$$

Uvrštenjem (11.18) u (11.17) imamo jednostavniju diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = \frac{C}{mr^2} \tag{11.19}$$

Ova se diferencijalna jednadžba dade pojednostaviti supstitucijom, pri kojoj vodimo računa da su obadvije veličine : r i nova varijabla u obadvije složene funkcije najprije polarnog kuta φ , a polarni kut zavisi o vremenu t . Supstitucija glasi:

$$r[\varphi(t)] = \frac{1}{u[\varphi(t)]} \tag{11.20}$$

Za vremenske derivacije radijusa slijedi:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{Lu^2}{m} = -\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{L}{m} \tag{11.21}$$

$$\ddot{r} = -\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}\cdot\frac{L}{m} = -\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cdot\frac{L^2}{m^2}\cdot u^2 \tag{11.22}$$

Ako (11.22) uvrstimo u (11.19) i zamijenimo r s u prema (11.20) , a zatim sredimo dobivamo:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{Cm}{L^2} \tag{11.23}$$

Gdje je A integracijska konstanta. Student može lako provjeriti da je rješenje gornje diferencijalne jednadžbe:

$$u = -\frac{Cm}{L^2} + A\cos\varphi \tag{11.24}$$

Također je jasno da je ovo rješenje dobiveno sukladno našem znanju o rješavanju linearnih nehomogenih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima! Sjećajući se veze varijabli r i u (11.20) , imamo stazu tijela:

$$\frac{1}{r} = -\frac{Cm}{L^2} + A\cos\varphi \tag{11.25}$$

Načinit ćemo posebnu analizu analitičkog opisa krivulje (11.25) i pokazati da ona predstavlja jednadžbu čunjosječnice; krivulje koja u Kartezijevim koordinatama jest zapisana preko polinoma drugog stupnja. U stvari ovo je generalni zapis za presjeke plašta stošca s ravninom. Mogući presjeci su elipsa, parabola i hiperbola. Kružnica je naravno specijalni slučaj elipse.

ANALIZA POLARNE JEDNADŽBE ČUNJOSJEČNICE

Krećemo od rezultata (11.25). U njemu ćemo uvesti nove parametre umjesto starih kako bismo imali izraz u kojem parametri imaju bolju geometrijsku interpretaciju.

$$s = -\frac{1}{A} \qquad (11.26)$$

$$e = \frac{AL^2}{Cm} \qquad (11.27)$$

Time (11.25) postaje:

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{e} - \cos\varphi \qquad (11.28)$$

Ovo je oblik koji je standardiziran u analitičkoj geometriji. Prijelazom na Kartezijeve koordinate pokazat ćemo da je (11.28) jednadžba jedne od navedenih krivulja. U Kartezijevim koordinatama se (11.28) piše kao:

$$\frac{s}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{e} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ili \quad \frac{s+x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{e} \qquad (11.29)$$

Ako se u desnom izrazu (11.29) riješimo nazivnika i rezultat kvadriramo imamo:

$$e^2s^2 + e^2 \cdot 2sx + e^2x^2 = x^2 + y^2 \qquad (11.30)$$

Regrupiranjem i jednostavnim operacijama imamo slijed:

$$x^2(1-e^2) - 2sxe^2 + y^2 = e^2s^2 \qquad (11.31)$$

$$x^2 - \frac{2se^2}{1-e^2}\cdot x + \frac{s^2e^4}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2s^2}{1-e^2} + \frac{s^2e^4}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2s^2}{(1-e^2)^2} \qquad (11.32)$$

$$(x - \frac{se^2}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2s^2}{(1-e^2)^2} \qquad (11.33)$$

Sada pretpostavljamo da student zna oblike opisa čunjosječnica u centralnom obliku:

ELIPSA:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

HIPERBOLA:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

PARABOLA:

$$y^2 = 2px$$

Na temelju tog znanja možemo nastaviti diskusiju oblika putanje (11.33) koju smo dobili za izabrani oblik centralne sile .

Ako je $0<e<1$, tada je prema (11.33) putanja elipsa.
Ako je $e>1$, tada je putanja hipoerbolična .
Ako je e=1 (moramo jednadžbu prije analize pomnožiti s $(1-e^2)^2$) dobivamo parabolu.
U slučaju privlačne sile imamo eliptičnu putanju, koja u graničnom slučaju prelazi u parabolu. Kod odbojne sile putanja je hiperbolična. Ovo student može provjeriti povratkom na značenje originalnih parametara i njihovu vezu s geometrijskim parametrima.

Time smo dokazali prvi od Keplerovih zakona. Treći Keplerov zakon smo ilustrirali na primjeru kružnog gibanja i ovdje ga ne ćemo dalje proširivati.

REDUKCIJA PROBLEMA GIBANJA DVA TIJELA POVEZANIH MEĐUSOBNOM SILOM NA OPIS EKVIVALENTAN PROBLEMU JEDNOG TIJELA U POLJU SILE

Imamo tijela masa $m_1\, i\, m_2$ s radijus vektorima $\vec{r}_1\, i\, \vec{r}_2$. Sila koja među njima djeluje ima analitički opis zavisan o njihovom relativnom položaju: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Tako za opis problema imamo vezane difrencijalne jednadžbe:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{11.34}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{11.35}$$

Sjetimo se središta tromosti i relativnog položaja iz problema sudara:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \tag{11.36}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{11.37}$$

Zbrajanjem (11.34) i (11.35) slijedi:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \qquad \text{što je ekvivalentno s } \ddot{\vec{R}} = 0 \tag{11.38}$$

Težište sustava se giba jednoliko početnom brzinom!
Odbijanjem relacija (11.34) od (11.35) imamo:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1} + \frac{F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_2} \tag{11.39}$$

Ako se podsjetimo reducirane mase $\mu_{12} = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$ (11.49)
možemo sjećajući se (11.37) napisati:

$$\mu_{12}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{11.50}$$

Formalno gledajući ovo je upravo jednadžba gibanja čije rješavanje opisuje gibanje tijela mase μ_{12} u polju sile $\vec{F}$. Pri vizualiziranju događanja student treba imati na umu da vektor relativnog položaja prolazi središtem mase , da su dva tijela obadva udaljena od središta mase dok su njihove udaljenosti od središta mase obrnuto proporcionalna njihovim masama. Kako vrijeme teče, razmak se mijenja i duljinom i orjentacijom, ali uvijek tako da su odmaci od položaja središta mase obrnuto proporcionalni masama. Tako se obadva tijela gibaju! Međutim kada je masa jednog od njih tako velika u odnosu na drugu (slučaj Zemlja Sunce) gibanje velike mase se u praksi može zanemariti.