H A R M O N I Č K I   O S C I L A T O R

Harmonički oscilator je odigrao ogromnu ulogu u razvoju fizike, jer je postao modelom za niz pojava u prirodi. Intuitivno je prihvatljivo: ako sustav ima položaj ravnoteže, a pri udaljavanju od ravnoteže sila vraća objekt prema ravnoteži i uz to je proporcionalna odmaku od ravnoteže, kada sustav odmaknemo od ravnoteže i prepustimo samom sebi nastat će titranje oko tog ravnotežnog položaja. To je fizikalna suština koju ćemo najprije ilustrirati na rješavanju 2. Newtonovog zakona na raznim primjerima, da bismo na kraju generalizirali fenomen harmoničkih oscilacija na opći slučaj titranja oko stabilnih konfiguracija.

TIJELO VEZANO OPRUGOM (na horizontalnoj podlozi bez trenja)

Kada je sustav u ravnoteži (opruga nije ni rastegnuta ni stisnuta) , položaj tijela je x_0. Opis sile koja vraća tijelo prema ravnotežnoj poziciji ako je u novom položaju x, koja je proporcionalna odmaku od ravnotežnog položaja jest:

$$F = -K(x - x_0) = m\ddot{x} \qquad (10.1)$$

gdje je K konstanta opruge. Supstituiranjem nove varijable za odmak (izraz u zagradi u (10.1),

$$x - x_0 = \psi \qquad \dot{x} = \dot{\psi} \qquad \ddot{x} = \ddot{\psi} \qquad (10.2)$$

Uvođenjem te nove varijable iz (10.2) u (10.1) imamo :

$$\ddot{\psi} + \frac{K}{m}\psi = 0 \qquad \frac{K}{m} \equiv \omega_0{}^2 \qquad \ddot{\psi} + \omega_0{}^2\psi = 0 \qquad (10.3)$$

Posljednja jednadžba od (10.3) je univerzalni zapis za (slobodni) harmonički oscilator. ω_0 je karakteristična kružna frekvencija harmoničkog oscilatora. Ovo ime će biti uskoro opravdano. U daljnjem tekstu ćemo integrirati diferencijalnu jednadžbu (10.3), no radi intuicije ćemo zamijeniti taj korak demonstracijom upotrebe zakona sačuvanja energije.

$$E = T + P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x - x_0)^2 \qquad (10.4)$$

Desni član – potencijalu energiju smo za harmoničku silu izračunali u (5.18). Uvrštenjem nove varijable u (10.4) slijedi:

$$\dot{\psi}^2 + \omega_0{}^2\psi^2 = \frac{2E}{m} \qquad (10.5)$$

(10.3) i (10.5) su u suštini ekvivalentne formulacije svojstava harmoničkog oscilatora.
Demonstrira se titranje horizontalnog oscilatora.

TIJELO OBJEŠENO NA OPRUGU

Neka nam je pozitivna orijentacija osi prema gore. Neka je z_0 koordinata nerastegnute opruge. Neka je z položaj tijela/kraja opruge u proizvoljnom trenutku. Tada je jednadžba gibanja :

$$F = m\ddot{z} = -mg - K(z - z_0) \qquad (10.6)$$

Supstitucijom

$$\psi = z - z_0 + \frac{mg}{K} \qquad (10.7)$$

slijedi iz (10.7) uvrštenog u (10.6) diferencijalna jednadžba za ψ :

$$\ddot{\psi} + {\omega_0}^2 \psi = 0 \qquad (10.8)$$

Što je identično s (10.3). Energijskim bi se razmatranjima lako pokazalo da i izraz (10.5) i u ovom slučaju ima svoj ekvivalent; jedino je na desnoj strani malo kompliciranija kombinacija numeričkih konstanti. Demonstrira se titranje vertikalnog oscilatora i utjecaj mase.

MATEMATIČKO NJIHALO u aproksimaciji malih kutova

Tijelo mase m je obješeno na nit dužine l , tangenta na putanju je x-os, kut otklona od ravnoteže je ϑ . Za male pomake je

$$\ddot{x} = l\ddot{\vartheta} \qquad (10.9)$$

Povratna sila, koja vraća njihalo u položaj ravnoteže je:

$$F = -mg\sin\vartheta \qquad (10.10)$$

Za male kutove vrijedi:

$$\sin\vartheta \approx \vartheta \qquad (10.11)$$

Pomoću gornje tri relacije se 2. Newtonov zakon može napisati kao:

$$F = ml\ddot{\vartheta} = -mg\vartheta \qquad (10.12)$$

Odatle uz malo preraspoređivanje slijedi:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \qquad (10.13)$$

To je zapravo jednadžba matematički istovjetna s (10.3) samo s drukčijim izrazom za kružnu frekvenciju.

FIZIKALNO NJIHALO u aproksimaciji malih kutova

Objekt mase M obješen je tako da je udaljenost od objesišta do težišta l . Opća veza momenta sile i vremenske derivacije momenta impulsa (7.21) se u slučaju rotacije oko jedne osi reducira na (7.57) . U našem slučaju sila teža proizvodi na tijelo moment sile oko objesišta:

$$M_\omega = -lMg\sin\vartheta \qquad (10.14)$$

Tako prema (7.57) imamo:

$$M_\omega = -lMg\sin\vartheta = I_\omega\ddot{\vartheta} = \ddot{\vartheta}(I_{CM} + Ml^2) \qquad (10.15)$$

U aproksimaciji malih kuteva sinus kuta zamjenjujemo kutom pa slijedi:

$$\ddot{\vartheta} + {\omega_0}^2\vartheta = 0 \qquad (10.16)$$

gdje je

$${\omega_0}^2 = \frac{lMg}{I_{CM} + Ml^2} = \frac{g}{l}\cdot\frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}} \qquad (10.17)$$

Jasno je da se izborom $I_{CM} = 0$ u (10.17), (10.16) svodi na (10.13), što je sasvim očekivano. No kako smo izvod za fizikalno njihalo načinili preko momenta sile, jasno je da smo istu metodu mogli primijeniti i na matematičkom njihalu s istim rezultatom. Demonstrira se fizikalno njihalo.

EKVIVALENCIJA DVIJU FORMI JEDNADŽBI HARMONIČKOG OSCILATORA

Pokazat ćemo da so obadva opisa ponašanja harmoničkog oscilatora (10.3) i (10.5) ekvivalentna . Ako (10.3) pomnožimo s $\dot{\psi}dt$ imamo:

$$\ddot{\psi}\dot{\psi}dt + \omega_0^2\psi\dot{\psi} = 0 \quad to \quad jest \quad d(\frac{1}{2}\dot{\psi}^2) + d(\frac{1}{2}\omega_0^2\psi^2) = 0 \qquad (10.18)$$

Integriranjem (10.18) dobiva se

$$\dot{\psi}^2 + \omega_0^2\psi^2 = const \qquad (10.19)$$

što je oblik koji ima jednadžba (10.5). S druge strane ako pođemo od jednadžbe (10.5) i nju diferenciramo dobivamo: (10.18) i korakom dijeljenja s $\dot{\psi}dt$ dobivamo oblik (10.3).

RJEŠAVANJE JEDNADŽBE (10.3) metodom pogađanja:

Lako se možemo uvjeriti da je rješenje jednadžbe (10.3) oblika:

$$\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10.19)$$

$\psi_0 \ i \ \varphi$ su proizvoljne (integracijske) konstante.

Izračunajemo prvu i drugu derivaciju (10.19):

$$\dot{\psi} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \ddot{\psi} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\psi \qquad (10.20)$$

Početak i kraj desne relacije u (10.20) pokazuju da oblik (10.19) doista jest rješenje diferencijalne jednadžbe harmoničkog oscilatora (10.3).

RJEŠAVANJE JEDNADŽBE (10.3) integriranjem:

Gore smo već pokazali da je oblik (10.3) ekvivalentan s (10.19) koji je zapravo oblika (10.5). Stoga možemo početi od (10.19):

$$\dot{\psi}^2 + \omega_0^2\psi^2 = konst = \psi_0^2\omega_0^2 \qquad (10.21)$$

Odatle slijedi:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0(\sqrt{\psi_0^2 - \psi^2} \qquad (10.22)$$

Iz (10.22) operacijama dijeljenja i proširivanja imamo:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\psi_0^2 - \psi^2}} \equiv \frac{d(\frac{\psi}{\psi_0})}{\sqrt{1-(\frac{\psi}{\psi_0})^2}} = \omega_0 dt \qquad (10.23)$$

Studenti trebaju prepoznati srednji izraz u gornjem redu kao diferencijal funkcije arkus kosinus:

$$d\left[arc\cos\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)\right] = d(\omega_0 t) \tag{10.24}$$

Integriranjem dobivamo:

$$arc\cos\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) = \omega_0 t + \varphi \tag{10.25}$$

to jest:

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{10.26}$$

To je upravo analitički oblik rješenja koje smo pogodili s (10.19) . Prokomentirat ćemo rješenje (10.26) koje je ljepše napisano u formi (10.19). Tijekom ovog izvoda vidjeli smo da u postupcima dva integriranja pojavljuju dvije integracijske konstante: ψ_0 *i* φ. Kako faktor $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ periodički titra u vremenu, tada je faktor ψ_0 amplituda tog titranja. Pojava φ pak kontrolira u kojoj se fazi titranje nalazi u početnom trenutku. Ako je $\varphi = 0$ zavisnost titranja je zavisnost kosinusne funkcije, to jest počinje s maksimalnom amplitudom. Ako je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, tad je zavisnost o vremenu sinusnog tipa, to jest u početnom trenutku amplituda je jednaka nuli i najprije u vremenu raste.

PERIOD I KRUŽNA FREKVENCIJA HARMONIČKOG OSCILATORA

Kada analiziramo analitički oblik opisa titranja harmoničkog oscilatora (10.19), jasno je da se vrijednost koordinate u vremenu ponavlja s vremenom T kada argument kosinusne zavisnosti poveća svoju vrijednost za 2π . To prema (10.19) znači:

$$\omega_0(t+T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi \tag{10.27}$$

To jest

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{10.28}$$

Vrijeme ponavljanja položaja tijela pri harmonijskom titranju T nazivamo periodom titranja. Kako je učestalost titraja (frekvencija titranja) obrnuto proporcionalna s T,

$$f = \frac{1}{T} \tag{10.29}$$

slijedi:

$$\omega_0 = 2\pi f \quad \textit{ili u drugoj notaciji za frekvenciju} \quad \omega_0 = 2\pi\nu \tag{10.30}$$

Razlog za ime kružna frekvencija za ω_0 je vidljiv već iz (10.30). No još direktniji uvid jest pogled na originalni izraz (10.19). Naime to je ujedno opis položaja projekcije tijela (na x os), koje radijusom ψ_0, kutnom brzinom ω_0 kruži oko ishodišta koordinatnog sustava.

REVERZIBILNO (Katerovo) NJIHALO:

Pri studiju fizikalnog njihala odredili smo ovisnost kružne frekvenicje fizikalnog njihala o udaljenosti težišta objekta od njegovog objesišta kao i o masi objekta i njegovom momentu tromosti oko središta tromosti u izrazu (10.17).

$$\omega_0^{\;2} = \frac{lMg}{I_{CM} + Ml^2} = \frac{g}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{Ml^2}} \qquad (10.17)$$

Možemo se pitati kolika je duljina matematičkog njihala iste frekvencije. Iz (10.13) i (10.17) Da bi njihala bila iste frekvencije treba vrijediti:

$$\omega_0^{\;2} = \frac{g}{l + \frac{I_{CM}}{Ml}} = \frac{g}{L} \qquad (10.17a)$$

Gdje je L duljina matematičkog njihala iste frekvencije kao što je ona fizikalnog njihala.
Iz (10.17a) direktno slijedi veza duljina matematičkog i fizikalnog njihala:

$$l^2 - lL + \frac{I_{CM}}{M} = 0 \qquad (10.17.b)$$

Možemo se sjetiti Vietovih formula za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$l_1 + l_2 = L \qquad l_1 \cdot l_2 = \frac{I_{CM}}{M} \qquad (10.17c)$$

Za zadanu kružnu frekvenciju matematičkog njihala duljine L postoje dvije udaljenosti objesišta fizikalnog njihala od središta mase s istom frekvencijom. Razmak među objesištima je upravo duljina ekvivalentnog matematičkog njihala. Demonstrirat će se rad takvog (Katerovog) fizikalnog njihala i uspoređivati s ekvivalentnim matematičkim njihalom.

PONAŠANJE KINETIČKE I POTENCIJALNE ENERGIJE HARMONIČKOG OSCILATORA (model masa + opruga)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^{\;2}x_0^{\;2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10.31)$$

$$P = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^{\;2}x_0^{\;2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10.32)$$

Iz (10.31) i (10.32) slijedi

$$E = T + P = \frac{1}{2}m\omega_0^{\;2}x_0^{\;2} = \frac{1}{2}Kx_0^{\;2} \qquad (10.33)$$

Iz (10.31) i (10.32) slijedi da se energija prelijeva iz potencijalnu u kinetičku i obratno tijekom oscilacija. Iz (10.33) zaključujemo da je ukupna energija jednaka maksimalnoj potencijalnoj, što je također za očekivati. Možemo pitati kolika je prosječna kinetička energija oscilatora tijekom jednog perioda.

$$\overline{T} = \frac{1}{2}Kx_0^{\;2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)_{prosječro} = \frac{1}{2}Kx_0^{\;2}\frac{1}{2}(1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi))_{prosječro} \qquad (10.34)$$

Kako je prosječna vrijednost konstante upravo konstanta, a prosječna vrijednost sinusa i kosinusa po periodu iščezava, to vrijedi:

$$\overline{T} = \frac{1}{4} K x_0{}^2 \tag{10.35}$$

Identičnom procedurom dobiva se očekivani rezultat koji je za potencijalnu energiju isti kao za kinetičku.

SUSTAV MALO POMAKNUT IZ STABILNE RAVNOTEŽE PONAŠA SE KAO HARMONIČKI OSCILATOR

Neka je α varijabla koja opisuje pomak od ravnoteže. Tada možemo potencijalnu energiju razviti u red:

$$P(\alpha) = P(0) + (\frac{\partial P}{\partial \alpha})\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\alpha^2 + ... \tag{10.36}$$

Kinetička energija mora biti proporcionalna kvadratu brzine promjene α .

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\alpha}^2 \tag{10.37}$$

U izrazu (10.36) prva derivacija potencijalne energije po varijabli mora iščezavati, jer za dovoljno mali α , minimum ne bi bio u pretpostavljenoj točki $\alpha = 0$.
Tako da u prvoj aproksimaciji imamo za energiju sustava:

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} K \alpha^2 \tag{10.38}$$

što je strukturno identično s (10.19), jednadžbom harmoničkog oscilatora.
Demonstrirat će se titranje sustava izvedenog iz statičke stabilne ravnoteže koje nije tipa opruge ni njihala.

Slijedeća varijanta harmoničkog oscilatora će biti onaj u kojem postoji gušenje silom trenja.
Kao uvod, razmotriti ćemo posljedice česte pojave u prirodi da je trenje proporcionalno brzini. Intuitivno obrazloženje takvog odnosa smo načinili u odsječku o sili trenja.

TRENJE RAZMJERNO BRZINI

Gibanje tijela kroz sredstvo s kojim je trenje proporcionalno brzini:

$$m\dot{v} = -bv \tag{10.39}$$

$$\frac{dv}{v} = d(\ln v) = -\frac{dt}{\tau} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \qquad \text{gdje je} \tag{10.40}$$

Integriranjem slijedi:

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.41}$$

Kinetička energija tijela tijekom ponašanja (10.41) jest:

$$T = \frac{1}{2} m v_0{}^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \tag{10.42}$$

GRANIČNA BRZINA PADANJA TIJELA

Ako u vertikalno gibanje prema dolje uključimo silu (10.39) imamo:

$$m\ddot{z} = -mg + bv \qquad (10.43)$$

Očito se doseže granična brzina kada iščezne akceleracija to jest kada je :

$$v_{graničra} = \frac{mg}{b} = g\tau \qquad (10.44)$$

Ovo svojstvo se koristi kod padobrana !

GUŠENI HARMONIČKI OSCILATOR

Uzevši u obzir oblik silu trenja iz (10.39) jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora se proširuje na:

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} \qquad (10.45)$$

Uz pokrate:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \quad i \quad \omega_0{}^2 = \frac{K}{m} \qquad (10.46)$$

(10.45) poprima oblik:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (10.47)$$

Ovo je vrlo raširena notacija za gušeni harmonički oscilator. Pokušat ćemo pogoditi rješenje oblikom:

$$x = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.48)$$

Vremenske derivacije takvog rješenja su:

$$\dot{x} = x_0 e^{-\beta t}(-\beta)\cos(\omega t + \varphi) + x_0 e^{-\beta t}(-\omega)\sin(\omega t + \varphi) \qquad (10.49)$$

$$\ddot{x} = x_0 e^{-\beta t}(-\beta)^2\cos(\omega t + \varphi) + x_0 e^{-\beta t}(-\beta)(-\omega)\sin(\omega t + \varphi)\cdot 2 + x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.50)$$

Uvrštavanjem ovih derivacija u (10.47) i kraćenjem s zajedničkim faktorom te grupiranjem članova uz sinusne i kosinusne funkcije imamo:

$$\sin(\omega t + \varphi)\cdot(2\beta\omega - \frac{\omega}{\tau}) + \cos(\omega t + \varphi)\cdot(\beta^2 - \omega^2 - \frac{\beta}{\tau} + \omega_0{}^2) = 0 \qquad (10.51)$$

Kako su sinus i kosinus nezavisne i neiščezavajuće funkcije gornji je zahtjev moguće ispuniti ako su faktori u zagradama jednaki nuli:

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \qquad (10.52)$$

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 - \frac{1}{4\tau^2} \qquad (10.53)$$

Tako smo našli rješenje titranja gušenog harmoničkog oscilatora oblika (10.48) , s tim da vrijede izbori konstanti (10.52) i (10.53). S druge strane x_0 i φ su integracijske konstante i njihove se vrijednosti određuju prema, na primjer, početnim uvjetima.

Možemo razdijeliti tri osnovne klase rješenja jednadžbe gušenog harmoničkog oscilatora:
Za slučaj $\omega^2 > 0$ imamo doista prigušeno osciliranje, koje amplitudom opada u vremenu. To je potkritično gušenje.
Kada je $\omega_0{}^2 = 0$ više i nemamo titranja ; to je takozvano kritičko gušenje.
Konačno je moguće i natkritično gušenje; $\omega^2 < 0$, kada kosinusno titranje prelazi u dodatno hiperboličko ponašanje.

PRISILNO TITRANJE GUŠENOG HARMONIČKOG OSCILATORA

Predavanje počinje demonstracijom sustava matematičkog njihala koji se pogoni periodičkim horizontalnim micanjem objesišta. Ustanovljuje se dramatična ovisnost amplitude rezultatnog titranja o frekvenciji micanja objesišta. Također se tjera harmonički oscilator s oprugom periodičkom prisilom na titranje. Ponovno se nalazi da amplituda titranja dramatično ovisi o frekvenciji sile koja tjera sustav na titranje. Ovo su uvodne demonstracije prisilnog titranja gušenog harmoničkog oscilatora koje nas inspiriraju da diferencijalnu jednadžbu koja slijedi niže pokušamo riješiti harmoničkim (sinusoidalnim ilil kosinusiodalnim oblicima vremenske zavisnosti).

Kada na gušeni harmonički oscilator djeluje vanjska prisila harmoničkog titranja, jednadžba gibanja se modificira:

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega t \qquad (10.54)$$

Uz pokrate iz prijašnjeg odsječka i pokratu: $\alpha = F_0 / m$ možemo (10.54) pisati:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \alpha_0 \cos\omega t \qquad (10.55)$$

Matematički formulirano, ovo je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima drugog reda koja je uz to nehomogena. Nehomogenošću se naziva član na desnoj strani koji je također zavisan o vremenu. Teorija takvih diferencijalnih jednadžbi pokazuje da se opće rješenje jednadžbe tipa (10.55) može konstruirati iz općeg rješenja homogene jednadžbe (takva je je jednadžba (10.45) i njeno rješenje (10.38)) i jednog rješenja jednadžbe (10.55).

(VIDI NAPOMENU o rješavanju ovakvih diferencijalnih jednadžbi koja slijedi za nekoliko stranica.)

Cilj nam je znači pogoditi to specijalno rješenje. Ono mora titrati frekvencijom ω jer inače ne bi zadovoljavalo jednadžbu (10.55). Stoga ćemo pokušati s formom:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.56)$$

Slijede izrazi za vremenske derivacije:

$$\dot{x} = x_0(-\omega)\sin(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{x} = x_0(-\omega^2)\cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.57)$$

Kada (10.57) uvrstimo u (10.55) i iskoristimo adicijski teorem za trigonometrijske funkcije te grupiramo članove uz sinusni i kosinusni član imamo: uz pokratu zajedničkog faktora:

$$\cos\omega t(-\omega^2\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi + {\omega_0}^2\cos\varphi - \frac{\alpha_0}{x_0}) + \sin\omega t(\omega^2\sin\varphi - \frac{\omega}{\tau}\cos\varphi - {\omega_0}^2\sin\varphi) = 0 \quad 10.58$$

Iz uvjeta da faktor uz sinus iščezava slijedi:

$$tg\varphi = \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - {\omega_0}^2} \qquad (10.59)$$

Iz uvjeta da faktor uz kosinus iščezava, slijedi:

$$\frac{\alpha_0}{x_0} = ({\omega_0}^2 - \omega^2)\cos\varphi - \frac{\omega}{\tau}\sin\varphi \qquad (10.60)$$

Kombiniranjem (10.60) i (10.59) dobivamo:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}} \qquad (10.61)$$

Očito postoji rješenje oblika (10.56), čije su konstante određene jednoznačno s (10.59) i (10.61) . Također je očito da amplituda tog titranja dramatično zavisi od frekvencije prisile i dostiže svoj maksimum kada pogodimo frekvenciju slobodnog oscilatora. S mnogo više potankosti svojstava harmoničkog oscilatora upoznat ćemo se u trećem semestru : Titranja i valovi. Naime, pri formiranju valova, komponente sustava harmonički osciliraju. Stoga je dobro poznavanje harmoničkog titranja temelj i za razumijevanje valnih fenomena. Nadalje, funkcije sinusa i kosinusa, rješenja slobodnog oscilatora, često se zovu harmonijskim funkcijama ili harmoničkim rješenjima.

Studentima se pokazuje Bartonovo njihalo. Ono se sastoji od fizikalnog njihala relativno velike mase . To masivno njihalo se pušta u pogon. Preko zajedničke osovine fizikalno njihalo postaje izvor harmoničke sile koja tjera niz matematičkih njihala različitih dužina. Opaža se da matematička njihala titraju različitim amplitudama zavisno o duljinama svojih niti. Najveće amplitude imaju njihala čija frekvencija slobodnog titranja odgovara frekvenciji uzbude. Taj se fenomen zove rezonancijom.

SNAGA VANJSKE SILE usrednjene po periodu titranja

Ovo je razmatranje važno radi uočavanja ovisnosti unosa energije u oscilator vanjskom silom o bliskosti frekvencije prisile sa frekvencijom oscilatora, što ima jasne fizikalne posljedice. Kada se u Meksiku desio čuveni razorni potres opažen je fenomen da su porušene upravo one zgrade, čije su dimenzije imale frekvencije titranja razornog vala. Njima je, radi jasne zavisnosti unosa energije u objekt o rezonantnim svojstvima objekta, unošena u titranje najveća energija. Snagu usrednjenu po periodu titranja označit ćemo s P , a proceduru usrednjenja sa znakovima < >, dok se usrednjena veličina postavlja među te znakove:

$$P = < F\dot{x} > = < F_0 \cos \omega t \cdot (-\omega) x_0 \sin(\omega t + \varphi) > \qquad (10.62)$$

$$P = F_0 \frac{\alpha_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}} (-\omega) < \cos \omega t \cos \varphi + \cos^2 \omega t \sin \varphi > \qquad (10.63)$$

Srednja vrijednost kosinusne funkcije po periodu je jednaka nuli (vrijednosti funkcije su jednako pozitivne i negativne tokom perioda). Pri izvodu (10.34) smo pokazali da je

$$< \sin^2(\omega t + \varphi) > = \frac{1}{2} \qquad (10.64)$$

Potpuno analogno se dokazuje

$$< \cos^2(\omega t + \varphi) > = \frac{1}{2} \qquad (10.65)$$

Tako za P imamo međurezultat:

$$P = \frac{1}{2} m \frac{\alpha_0^{\,2}}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega^2) + (\omega/\tau)^2}} (-\omega) \sin\varphi \qquad (10.66)$$

Student lako može verificirati trigonometrijsku relaciju:

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} \qquad (10.67)$$

Izraz za tangens faze φ imamo u (10.59) pa ga preko (10.67) možemo supstituirati u (10.66):

$$P = \frac{1}{2} m \frac{\alpha_0^{\,2}}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega^2) + (\omega/\tau)^2}} (-\omega) \frac{(\omega/\tau) \cdot \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^{\,2}}}{\dfrac{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)}} \qquad (10.68)$$

Nakon sređivanja (10.68) se pojednostavljuje:

$$P = \frac{(1/2) m \alpha_0^{\,2} \tau}{1 + (\dfrac{\omega_0^{\,2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2} = \frac{(1/2) F_0^{\,2} \cdot (\tau/m)}{1 + (\dfrac{\omega_0^{\,2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2} \qquad (10.69)$$

Iz (10.69) je razvidno da maksimalna snaga ulazi u sistem na frekvenciji $\omega = \omega_0$, kada nazivnik ima minimalnu vrijednost , a maksimalna snaga je

$$P_{maks} = (1/2) F_0^{\,2} \cdot (\tau/m) \qquad (10.70)$$

ŠIRINA REZONANCIJE

Vrlo se često u fizici postavlja pitanje širine vrha nekog fenomena. U profesionalnoj je upotrebi termin i veličina koji se naziva punom širinom za polovicu maksimuma. Pod tim se podrazumijeva interval vrijednosti varijable (o kojoj promatrana veličina ovisi) , na čijim rubovima zavisna veličina pada na polovicu maksimalne vrijednosti. Veličina se označava kao FWHM (Full Width at the Half of the Maximum). Znajući maksimalnu vrijednost snage prema (10.70) vidimo da su vrijednosti ω one za koje je ispunjeno:

$$(\frac{\omega_0^{\,2} - \omega^2}{(\omega/\tau)})^2 = 1 \qquad (10.71)$$

Odatle slijedi:

$$\frac{\omega}{\tau} = \pm(\omega_0^{\,2} - \omega^2) \qquad (10.72)$$

Rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe dobiva se da je razmak fizikalnih rješenja :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \qquad (10.73)$$

što je puna širina na polovici rezonancije (FWHM)

NAPOMENA O RJEŠAVANJU LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI DRUGOG STUPNJA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.

Značenje opisa jednadžbi je slijedeće. U jednadžbi se pojavljuju prva i druga derivacija funkcije ali u prvoj potenciji kao i sama funkcija. Ako je s druge strane linearne kombinacije derivacija i funkcije znaka jednakosti nula, imamo homogenu klasu takvih jednadžbi. Tome ćemo najprije posvetiti pažnju. Ovakve se jednadžbe mogu očito riješiti pretpostavkom da funkcija zavisi eksponencijalno o varijabli. Naime, kada ovu pretpostavku supstituiramo u diferencijalnu jednadžbu i odsepariramo eksponencijalni faktor, na mjestu druge derivacije ostat će kvadrat eksponenta eksponencijalne zavisnosti, na mjestu prve derivacije će ostati sam eksponent, a na mjestu funkcije ostat će faktor 1 . Time se diferencijalna jednadžba transformirala u kvadratnu jednadžbu za eksponent eksponencijalne funkcije. Kako ta jednadžba ima dva korijena, imat ćemo dva linearno nezavisna rješenja. Tu je i objašnjenje zašto smo bili uspješni u konstrukciji harmonijskih i eksponencijalno rastućih ili padajućih rješenja. Ako su rješenja realna, imamo realne eksponencijalne modove. Ako su imaginarna, imamo sinusoidalno i kosinusoidalno ponašanje. Ako su kompleksna, imamo produkt sinusiode i eksponencijale kao kod gušenog oscilatora. Tako se načelno rješava klasa homogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima i dobiva dva nezavisna rješenja, čijim kombiniranje s proizvoljnim konstantama pokrivamo sva moguća rješenja.

Pređimo sada na klasu nehomogenih jednadžbi da bi dokazali našu tvrdnju da se tada rješenje nalazi općim rješenjem homogene jednadžbe, kojem treba dodati jedno rješenje nehomogene. Uzet ćemo za model jednadžbu prisilnog titranja (10.55).

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = \alpha_0 \cos\omega t \qquad (10.55)$$

Nju možemo pisati i preko simboličkog linearnog operatora:

$$L \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + \omega_0^{\,2}\right) \qquad (10.74)$$

Neka su $x_1(t)\, i\, x_2(t)$ dva nezavisna rješenja homogene jednadžbe. Tada vrijedi:

$$Lx_1 = 0\; i\; Lx_2 = 0 \qquad (10.75)$$

Ako su $C_1\; i\; C_2$ proizvoljne konstante i linearna kombinacija rješenja je rješenje , to jest:

$$L(C_1 x_1 + C_2 x_2) = C_1 L x_1 + C_2 L x_2 = 0 \qquad (10.76)$$

Ako sada dodamo jedno specijalno rješenje nehomogene jednadžbe (u gornjoj analizi to je rješenje (10.56))), imat ćemo u toj notaciji ukupno rješenje:

$$x_{ukupno} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + x \qquad (10.77)$$

Ako ga uvrstimo u (10.55) imamo:

$$\mathrm{L}(C_1 x_1 + C_2 x_2 + x) = L(C_1 x_1 + C_2 x\ \ ) + Lx = 0 + Lx \qquad (10.77)$$

No za Lx imamo radi zadovoljavanja nehomogene jednadžbe

$$Lx = \alpha_0 \cos\omega t \qquad (10.78)$$

Tako x_{ukupno} zadovoljava nehomogenu jednadžbu , a općenito je rješenje jer ima dvije proizvoljne konstante, koje se mogu prilagođavati (početnim) uvjetima na rješenje.

Studenti će vidjeti i Oberbeckovo njihalo (dva identična modela matematičkih njihala povezana međusobno s niti napete lakšim teretom) koje rezonantno uzbuđuju jedno drugo.

Zatim će se studentima još jednom demonstrirati ovisnost amplitude titranja o udaljenosti frekvencije od rezonantne frekvencije kao uvod u razmatranja o širini rezonancije

ŠIRINA REZONANCIJE

Vrlo se često u fizici postavlja pitanje širine vrha nekog fenomena. U profesionalnoj je upotrebi termin i veličina koji se naziva punom širinom za polovicu maksimima. Pod tim se podrazumijeva interval vrijednosti varijable (o kojoj promatrana veličina ovisi) , na čijim rubovima zavisna veličina pada na polovicu maksimalne vrijednosti. Veličina se označava kao FWHM (Full Width at the Half of the Maximum). Znajući maksimalnu vrijednost snage prema (10.70) vidimo da su vrijednosti ω one za koje snaga pada na polovicu maksimalne vrijednosti dane izrazom:

$$\left(\frac{{\omega_0}^2 - \omega^2}{(\omega/\tau)}\right)^2 = 1 \qquad (10.71)$$

Odatle slijedi:

$$\frac{\omega}{\tau} = \pm({\omega_0}^2 - \omega^2) \qquad (10.72)$$

Rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe dobiva se da je razmak fizikalnih rješenja :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \qquad (10.73)$$

što je puna širina na polovici rezonancije (FWHM). Zaključak o razmaku fizikalnih rješenja se lako vidi analizom (10.72). Naime dvije kvadratne jednadžbe imaju svaka po dva rješenja: Ona s pozitivnim predznakom za ω/τ

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + {\omega_0}^2} \qquad (10.72a)$$

a ona s negativnim predznakom za ω/τ

$$\omega_{3,4} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + {\omega_0}^2} \qquad (10.72b)$$

Pozitivne (fizikalno smislene) vrijednosti kružne frekvencije su samo one iz (10.72a) i (10.72b) s pozitivnim predznakom ispred korijena. Njihova je razlika $\Delta\omega$ očito je dana s (10.73).

FAKTOR DOBROTE (Q faktor) OSCILATORSKOG SUSTAVA

U mnogim primjenama oscilirajućih sustava faktor dobrote Q je važna praktična veličina. Intuiciju o njemu možemo dobiti iz dva nezavisna razmatranja. Vratimo se najprije izrazu (10.61) za amplitudu prisilnog titranja i uvrstimo za kružnu frekvenciju $\omega = \omega_0$, dakle rezonantnu vrijednost. Tada se dobije za amplitudu njenu (maksimalnu) vrijednost u rezonanciji:

$$x_0(rezonantno) = \frac{\alpha_0}{(\omega_0 / \tau)} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\tau}{\omega_0} = (\frac{F_0}{m\omega_0^{\ 2}}) \cdot (\omega_0 \tau)$$

Izraz u lijevoj zagradi je odstupanje od položaja ravnoteže ako bi na oscilator primijenili stalnu silu F_0. Faktor u drugoj okrugloj zagradi govori nam koliko je puta rezonantna amplituda veća od amplitude postignute stalnom silom. To je upravo faktor dobrote Q.
S druge strane,vremenskom analizom snage unutar perioda titranja može se također pokazati da je $Q/2\pi$ broj titraja, koje čini sustav prepušten sam sebi, potreban da energija u oscilatorskom sustavu padne za faktor 1/e. Naime iz oblika titranja za relativno slabo gušeni oscilator lako se vidi da energija u oscilatoru pada relacijom: $E = E_0 e^{-t/\tau}$. Ako je N broj titraja potreban za pad energije za faktor e , očito $NT = \tau$, gdje je T period titranja; u rezonanciji to je T_0. Ujedno vrijedi $\omega_0 = 2\pi / T_0$. Kombiniranjem dva posljednja izraza slijedi: $N = \frac{\omega_0 \tau}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi}$. To je potvrda drugog svojstva faktora dobrote koji smo gore naveli.
Neki američki udžbenici koriste Q da bi karakterizirali oscilator umjesto parametra τ .

PONAŠANJE FAZE OSCILATORA PRI VARIJACIJI FREKVENCIJE PRISILE

Iz relacije (10.59) vidimo da je za $\omega < \omega_0$ φ negativan. To znači da oscilator kasni za prisilom. U rezonanciji to kašnjenje dosiže vrijednost $\pi / 2$. Za $\omega > \omega_0$ φ mijenja predznak i oscilator je ispred prisile u svom titranju. Ovo ponašanje faza demonstrira se aktivacijom Bartonovog njihala kada oscilatori prođu kroz fazu tranzijenata.