U V O D:

Poštovani studenti i studentice!

Ovim trenutkom Vi ulazite u četverosemestralni projekt Općih fizika kojim se postavljaju temelji za razumijevanje cjelokupnog materijalnog svijeta na način koji Vas treba pripremiti za samostalno zaključivanje i istraživanje. U ovom kolegiju se ne pretpostavlja srednješkolsko znanje fizike! Svi pojmovi i relacije bit će ovdje izvođeni iz prvih principa.

Tehnički detalji, literatura i savjeti o tome kako postupati u tom projektu iznosit će se na Seminarima.

Studij fizike vodi se u neposrednom ispitivanju uzročno-posljedičnih (kauzalnih) veza među prirodnim pojavama kao i traganja za konstituentima (osnovnim građevnim elementima) materijalnog svijeta. U Vašim trenucima teškoća s razumijevanjem gradiva, imajte na umu da se to znanje čovječanstva akumuliralo i formuliralo kao fizikalne zakone kroz period duži od 6000 godina; Vi ćete pak te temelje usvojiti u periodu od dvije godine!

U studiju fizike bitno je vrlo kvalitetno poznavanje matematike. Fizikalne veličine imaju razna matematička svojstva. Kada se ustanovi matematičko svojstvo fizikalne veličine, tada je već spreman matematički formalizam kako s tom veličinom postupati. Nadalje, ako su poznati odnosi medju fizikalnim veličinama, matematički formalizam spreman je za proračun posljedica odnosa među veličinama. Naime fizika ne samo da objašnjava fenomene, nego daje i numeričko predviđanje posljedica zadanih uzroka.

P O Č E T N A   M A T E M A T I Č K A   P R I P R E M A :

SKALARI, VEKTORI., TENZORI

Poznato je iskustvo da rezultat mjerenja temperature ne zavisi o smjeru orjentacije termometra. Slično svojstvo imaju veličine poput duljine štapa, tlaka u mediju ili mase tijela. Takve veličine nazivamo skalarima. S matematičkog gledišta (dok ne gledamo detaljnije njihovu dublju prirodu koju ćemo kasnije nazvati dimenzijom te veličine), takve veličine se reprezentiraju realnim brojevima. EKSPERIMENTALNA ILUSTRACIJA:
temperatura,tlak,vlažnost zraka,masa…
Ako radarom ili nekim drugim mjerenjem pratimo položaj aviona prema stalnom objektu, znamo da uz numerički opis udaljenosti trebamo znati i smjer u kojem se avion nalazi u odnosu na stalni objekt. Slično pri opisu brzine vozila u pustinji treba, uz broj kilometara koji se na sat prevaljuje, znati i orjentaciju automobila prema, na primjer, stranama svijeta. EKSPERIMENTALNA ILUSTRACIJA: praćenje tijela radiusvektorom.
Tenzori su još kompleksnije veličine, čija svojstva ne ćemo koristiti operativno u ovom projektu, ali će se pojaviti kasnije tijekom studija. ILUSTRACIJA: precesija zvrka
Pretpostavljam da ste operacije s realnim brojevima savladali u srednjoj školi. Stoga profesionalni posao započinjemo pregledom svojstava i operacija s vektorima.

Vektorska veličina je zadana svojim: iznosom, smjerom i smislom. Na primjer gravitacijska sila vuče tijelo određenom jakošću (mjerljivom istezanjem opruge koja je uravnotežuje), vertikalnim smjerom i smislom prema dolje.

VEKTORSKE OZNAKE

Oznaka $\vec{A}$ podrazumijeva da je veličina po matematičkim svojstvima vektor, to jest da njezin potpuni opis uključuje iznos, smjer i smisao. Iznos vektora se označava na dva načina: $A = |\vec{A}|$. (1.1)

Primjer položajnog vektora: $|\vec{r}| = r = 5m$ označava da je naš objekt udaljen u nekom smjeru 5 metara od točke od koje se udaljenost mjeri.

Jedinični vektor:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1.2}$$

se dobiva od originalnog vektora $\vec{A}$ kad se iznos originalnog vektora dijeljenjem s tim istim iznosom svede na jedinicu. Znači da je preostao samo smjer/smisao . To jest

$$|\hat{A}| = 1 \tag{1.3}$$

ZBRAJANJE DVA VEKTORA:

Zbrajanje dva vektora vrši se poznatim zakonom paralelograma. Na kraj strelice prvog vektora nanosi se translacijom početak drugog vektora. Kako su stranice paralelograma paralelne (a paralelne stranice jednake po iznosu), jasno je da se obratnim poretkom operacija (započinjanjem s drugim vektorom i dodavanjem prvog) dobije isti rezultat. Očit je znači zakon komutacije u vektorskom zbrajanju:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.4}$$

Student se lako uvjerava crtanjem i u zakon asocijacije:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \tag{1.5}$$

Protivni (nasuprotni) vektor : Neka vrijedi $\vec{A} + \vec{B} = 0 \;\; ili \;\; \vec{A} = -\vec{B}$ (1.6)

Tada su $\vec{A} \; i \; \vec{B}$ protivni ili nasuprotni vektori. Sve veličine su im identične osim što imaju suprotni smisao.

ODUZIMANJE VEKTORA:

U potpunoj analogiji s realnim brojevima

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.7}$$

gdje je $(-\vec{B})$ protivni vektor vektora $\vec{B}$.

MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM:

$k\vec{A}$ je vektor čiji iznos je $k|\vec{A}|$, leži na istom pravcu kao i $\vec{A}$ a smisao mu je isti kao i $\vec{A}$ ako je k pozitivan broj , smisao mu je suprotan od $\vec{A}$ ako je k negativan. OPREZ: k ne mora biti samo realni broj nego i fizikalna veličina koja je skalar (primjer je temperatura).
Pri množenju vektora skalarom vrijedi zakon distribucije:
$k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$. (1.8)

SKALARNI UMNOŽAK (PRODUKT) DVA VEKTORA:

Po definiciji je $\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$, (1.9)
gdje oznaka $\cos(\vec{A},\vec{B})$ predstavlja kosinus kuta između vektora $\vec{A}\,i\,\vec{B}$. Više je svojstava skalarnog produkta jasno iz ove definicije. Kako je funkcija kosinusa simetrična obzirom na predznak svog argumenta t.j. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, to je skalarni produkt komutativan:
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ (1.10)
Također postoji svojstvo distribucije:
$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$ (1.11)
Ponekad je za studenta zgodno prihvaćati skalarni produkt kao umnožak iznosa jednog od vektora s projekcijom drugog vektora na njegov smjer. Ovo će posebno doći do izražaja pri računanju veličine rada koji je skalarni produkt vektora sile i puta.

Primjer kosinusnog poučka:
$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ skalarnim množenjem samim sobom (kvadriranjem) prelazi u :
$A^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2 = C^2$ to jest: $C^2 = A^2 - 2AB\cos(\vec{A},\vec{B}) + B^2$

Student također može sam provjeriti kako se jednostavno može napisati jednadžba ravnine koju karakterizira vektor $\vec{N}$ koji ima slijedeća svojstva: okomit je na zadanu ravninu a njegov iznos jednak je udaljenosti ravnine od ishodišta. Tada vektor položaja svake točke u ravnini: $\vec{r}$ zadovoljava slijedeću jednadžbu: $\vec{r}\cdot\vec{N} = N^2$!

RASTAVLJANJE VEKTORA NA KOMPONENTE u PROSTORNOM SUSTAVU:

Ako označimo s $\hat{x}, \hat{y}, i\ \hat{z}$ jedinične vektore duž osi pravokutnog prostornog sustava,
Tada se svaki vektor može rastaviti u svoje komponente, vektore paralelne osima sustava čiji su iznosi projekcije zadanog vektora na koordinatne osi. Uzmimo primjer vektora položaja proizvoljne točke u prostoru (radijvektor te točke) :
$\vec{r} = r_x\hat{x} + r_y\hat{y} + r_z\hat{z}$ gdje se projekcije vektora dobivaju postupkom $r_x = \vec{r}\cdot\hat{x}$ i analogno za ostale komponente.

VEKTORSKI PRODUKT DVA VEKTORA:

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\equiv\hat{C}AB\sin(\vec{A},\vec{B})$ (1.12)

gdje je jedinični vektor $\hat{C}$ definiran kao vektor okomit na ravninu definiranu vektorima $\vec{A}\, i\, \vec{B}$, a njegov smisao preko pravila desne ruke. (Prsti desne ruke idu od vektora $\vec{A}$ prema vektoru $\vec{B}$, a palac pokazuje smisao jediničnog vektora $\hat{C}$.)
Iznos vektora $\vec{C}$ je očito produkt iznosa vektora $\vec{A}\, i\, \vec{B}$ i sinusa kuta medju njima. Kako je funkcija sinusa antisimetrična na promjenu predznaka svog argumenta $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ to vrijedi: $\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$ (1.13)

Drugim riječima vektorski produkt je antikomutativan!! Student može provjeriti da je za dva vektora (čija je dimenzija duljina) iznos vektorskog produkta = površina paralelograma čiji su oni stranice. Nadalje , za tri vektora u prostoru $\vec{a},\vec{b}\, i\, \vec{c}$ njihov mješoviti produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ zapravo je volumen paralelopipeda ograničenog trima vektorima.
I za vektorski produkt vrijedi zakon distribucije: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$. (1.14)

FUNKCIJA I NJEZINA DERIVACIJA:

Ukoliko imamo neku varijablu (obično se pretpostavlja da može poprimiti proizvoljnu vrijednost iz kontinuuma realnih brojeva) pod pojmom funkcija podrazumijeva se pravilo kako toj slobodnoj varijabli pridružiti matematičkim opisom postupka neku vrijednost. Dobivene vrijednosti se nazivaju i funkcijskim vrijednostima koje korespondiraju izabranim vrijednostima slobodne varijable. Jednostavan primjer je $y=f(x)=x^2$. Da bi se dobila funkcijska vrijednost, treba argument kvadrirati.

Derivacija funkcije različito se označava u literaturi no ima isti smisao: $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$ *ili ako je funkcija zavisna o vremenu* $\dot{f}(t)$. Definicija derivacije funkcije jest:

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim(\Delta x\to 0)\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1.15)$$

Na grafikonu na kojem su vrijednosti argumenta na x-osi a funkcijske na ordinati, derivacija ima značenje tangensa kuta koji tangenta na krivulju f(x) u točki x zatvara s osi x. Ova svojstva su studenti trebali savladati u srednjoj školi. Po potrebi ćemo na seminaru pokazati operativni postupak dobivanja derivacija za nekoliko elementarnih funkcija . Očekuje se da student zna napamet izraze za deriviranje elementarnih funkcija. Dobro je uočiti kako je trenutna brzina objekta (u jednodimenzionalnom gibanju) jednostavno derivacija funkcionalne zavisnosti prijeđenog puta s(t) po proteklom vremenu t .

$$v(t)=\lim(\Delta t\to 0)\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \qquad (1.16)$$

POOPĆENJE BRZINE JEDNODIMEZIONALNOG GIBANJA NA BRZINU U PROSTORU:

Zamislimo da nam je za svaki vremenski trenutak poznat položaj objekta koji se proizvoljno giba . To gibanje opisujemo radijvektorom $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Zasada ne ćemo ulaziti u tehničke detalje opisa tog gibanja (student na primjer može zamisliti da imamo analitički opis ponašanja projekcija vektora na koordinatne osi pravokutnog sustava). Neka je u trenutku t objekt na položaju opisanom vektorom $\vec{r}(t)$. Neka protekne dodatno vrijeme Δt . Tada je novi položaj objekta $\vec{r}(t+\Delta t)$. Pomak vektora između dva trenutka promatranja jest vektor : $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$. Ako vektor pomaka podijelimo s proteklim vremenom Δt dobit ćemo vektor srednje brzine u proteklom intervalu. Uočimo da je taj vektor vrlo kompaktna informacija koja istovremeno govori i o iznosu brzine i o njenom smjeru/smislu. Da bismo imali informaciju o trenutnoj brzini u vremenu t , jasno je da moramo smanjivati vremenski interval. Tako je u procesu limesa :

$$\vec{v}(t) = \lim(\Delta t \to 0)\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.17)$$

Početni i konačni gornji izraz močemo i drukčije čitati:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \qquad (1.18)$$

Ovo ima slijedeće značenje: sićušni vektor pomaka $d\vec{r}$ koji nastaje u sićušnom vremenskom intervalu dt dobiva se množenjem trenutne brzine $\vec{v}$ s tim sićušnim vremenskim intervalom dt. Matematičari preciznije definiraju pojam diferencijala, no za naše praktične potrebe mi ćemo se zadržati na ovom intuitivnom nivou navodeći $d\vec{r}\ i\ dt$ kao diferencijale pomaka i vremena.

POJAM AKCELERACIJE U PROSTORU:

Sada nam je prirodno nastaviti s istom procedurom za akceleraciju. Već u srednjoj školi učenici su upoznati da je akceleracija kvocijent promjene brzine i proteklog vremena. Doduše, u srednjoj školi se dominantno vježba primjere u kojima je akceleracija stalna, što naravno ne mora biti slučaj. Ako nam je brzina u trenutku t: $\vec{v}(t)$, a u trenutku koji kasni za Δt: $\vec{v}(t+\Delta t)$ tada je analogno proceduri proračuna prostorne brzine trenutna akceleracija:

$$\vec{a}(t) = \lim(\Delta t \to 0)\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.19)$$

Ako oznaku $\frac{d}{dt}$ prihvatimo kao naznaku deriviranja, a sjetimo se da je i brzina sama derivacija radijus vektora po vremenu imamo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.20)$$

Svi ovi koraci svode se na očitu činjenicu da je akceleracija druga derivacija vremenske zavisnosti vektora položaja po vremenu.

NEODREĐENI INTEGRAL:

Kada smo jednom savladali pojam derivacije funkcije i naučili tehnike deriviranja, neodređeni integral nije ništa drugo nego operacija inverzna deriviranju. U procesu deriviranja smo poznatim metodama određivali tablicu korespondencije $f(x) \to \frac{df(x)}{dx}$. Procedura povratka od derivacije na funkciju čiji je neki izraz derivacija jest određivanje neodređenog integrala. Ako na primjer imamo funkciju $g(x)$ i znamo da je ona derivacija funkcije $h(x)$, tada to simbolički pišemo: $\int g(x) \cdot dx = h(x)$. Također se profesionalno kaže da je $h(x)$ primitivna funkcija od $g(x)$. Za elementarne funkcije očekuje se da studenti znaju tablicu derivacija. Jasno je da se istom tablicom mogu poslužiti i u obratnom smjeru. Međutim, tijekom studija, studenti će u matematičkim kolegijima naučiti mnogo više o procedurama integriranja.

ODREĐENI INTEGRAL:

Radoznali student će se pitati zašto se pojavljuju oznake integrala i diferencijala u simboličkoj formuli za primitivnu funkciju $h(x)$ gore. To je povezano s problemom određivanja površine koja se nalazi ispod krivulje g(x) iz gornjeg primjera između dvije vrijednosti argumenta (na primjer x_1 i x_2). Vratimo se početnoj vezi funkcijskih vrijednosti prije prijelaza u limes:

$$g(a) \cdot \Delta x = h(a + \Delta x) - h(a) \qquad (1.21)$$

Napišimo analogni izraz za slučaj kada su argumenti u relaciji pomaknuti za još jedan Δx :

$$g(a + \Delta x) \cdot \Delta x = h(a + 2\Delta x) - h(a + \Delta x) \qquad (1.22)$$

Uočimo, ako bismo dva izraza zbrojili, na desnoj strani bi se članovi oblika $h(a + \Delta x)$ poništili!!! To znači ako bismo načinili sumu izraza:

$\sum_{n=0}^{n=N-1} g(a + n\Delta x)\Delta x$, na drugoj strani jednakosti bismo dobili (uz kraticu $N \cdot \Delta x = b$) $h(b) - h(a)$. Tako je naš rezultat:

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} g(a + n\Delta x)\Delta x = h(b) - h(a) \qquad (1.23)$$

Pogledajmo sada geometrijsko značenje lijevog izraza $g(a) \cdot \Delta x$. To je površina stupića koji od osi x ide do funcijske vrijednosti g(a) a ima širinu Δx. Zbrajanjem površina takvih stupića od vrijednosti argumenta a do vrijednosti argumenta b, mi dobivamo približni izraz za površinu ispod krivulje g(x) od točke x=a do točke x=b. Ta je pak površina jednaka razlici funkcijskih vrijednosti primitivne funkcije h(x) na krajnjim točkama : h(b)-h(a)!!! U limesu kada $\Delta x \to 0$ (broj sumanada N ide u beskonačnost) , lijeva strana postaje egzaktan izraz za površinu. Tako se relacija sa sumom pretvara u određeni integral:

$$\int_a^b g(x) \cdot dx = h(b) - h(a) \qquad (1.24)$$

U fizici ćemo često imati potrebu proračuna suma gornjeg oblika. Važno je zapamtiti značenje veze takve sume u procesu limesa (kada intervali postaju sve manji) s funkcijskim vrijednostima primitivne funkcije na krajevima intervala. (primitivna funkcija $\equiv$ neodređeni integral).

PRIMJERI UPOTREBE INTEGRALA ZA JEDNOLIKA GIBANJA:

Slučaj jednolikog gibanja:
Kod jednolikog gibanja (nema akceleracije) brzina je stalna ; označimo je s $\vec{v}_0$. To znači :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \quad \to d\vec{r} = \vec{v}_0 dt \to \int d\vec{r} = \int \vec{v}_0 dt \to \vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{c} \qquad (1.25)$$

Konačni izraz za vektor položaja sadrži dvije činjenice: položaj objekta kod jednolikog gibanja je određen konstantnim vektorom $\vec{c}$ koji ima smisao vektora položaja u trenutku t=0 i promjenljivog vektora koji se u smjeru vektora $\vec{v}_0$ jednoliko produljuje s proticanjem vremena t.

Slučaj jednoliko ubrzanog gibanja (akceleracija je stalna i iznosi $\vec{a}_0$):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0 \to \vec{v}(t) = \int \vec{a}_0 \cdot dt = \vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0 \to \vec{r}(t) = \int (\vec{a}_0 t + \vec{v}_0) \cdot dt = \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{c} \quad (1.26)$$

U gornjem smo postupku preskočili korake koje smo svladali kod primjera jednolikog gibanja. U konačnom izrazu za vremensku zavisnost vektora položaja pojavile su se dvije konstante. Značenje $\vec{v}_0$ lako kontroliramo uvrštenjem vremenskog trenutka t=0 u izraz za brzinu: to je brzina u trenutku t=0. Značenje konstante $\vec{c}$ očitavamo uvrštenjem t=0 u izraz ra radijvektor. To je kao i u prijašnjem primjeru vektor položaja objekta u trenutku t=0.

PRIMJER DERIVIRANJA UMNOŠKA U KOJEM SU PRISUTNI VEKTORI:

Ima više mogućnosti potrebe deriviranja umnoška u kojem su prisutni vektori. Najjednostavniji su : $f(t)\cdot\vec{a}(t), \vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t), \vec{a}(t)\times\vec{b}(t)...$ Pokazat ćemo na primjeru prvog slučaja ideju postupka, koji u potpunosti oponaša postupak s umnoškom skalarnih funkcija.

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\cdot\vec{a}(t) \equiv \lim(\Delta t \to 0)\ \frac{f(t+\Delta t)\cdot\vec{a}(t+\Delta t) - f(t)\cdot\vec{a}(t)}{\Delta t}\right] =$$
$$= \lim(\Delta t \to 0)\left[\frac{f(t+\Delta t)\cdot\vec{a}(t+\Delta t) - f(t)\cdot\vec{a}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{f(t)\cdot\vec{a}(t+\Delta t) - f(t)\cdot\vec{a}(t)}{\Delta t}\right] =$$
$$= \frac{df(t)}{dt}\cdot\vec{a}(t) + f(t)\frac{d\vec{a}}{dt} \qquad (1.27)$$

U ovom izvodu smo u drugom redu dodali i oduzeli isti član u brojnicima, kako bi olakšali put do pravila. Potpuno analogno se dokazuje:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\right] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\frac{d\vec{b}(t)}{dt} \qquad (1.29)$$

i također:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\frac{d\vec{b}(t)}{dt} \qquad (1.30)$$

SVOJSTVA DERIVACIJE VEKTORA STALNOG IZNOSA:

Po pretpostavci vrijedi: $|\vec{r}| = r = kons\tan ta$

Derivirajmo po vremenu $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = (kons\tan ta)^2$ Derivacija konstane je nula:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \qquad (1.31)$$

Slijede dva ekvivalentna zaključka:

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad \text{to jest } \vec{r}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (1.32)$$

Vektor i njegova derivacija su okomiti i vektor i njegov diferencijal su okomiti jedan na drugoga. Ovo je naročito važno kod gibanja po kružnici.

VEKTOR KUTNE BRZINE:

U ravninskom polarnom sustavu položaj je određen s varijablama r (udaljenost od središta sustava) i φ (kut kojeg spojnica središta i promatrane točke zatvara s osnovnom osi sustava; student može tu os zamišljati kao x-os iz pravokutnog ravninskog sustava). Kutna brzina se vrlo kompaktno opisuje vektorom koji je okomit na trenutnu ravninu kretanja, čiji je iznos

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv \lim(\Delta\varphi \to 0)\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \equiv \dot{\varphi} \qquad (1.33)$$

Ako s $\hat{\omega}$ označimo jedinični vektor okomit na ravninu gibanja u trenutku t povezan s gibanjem pravilom desne ruke, tada je vektor kutne brzine:

$$\vec{\omega} = \hat{\omega}\cdot\dot{\varphi} \qquad (1.34)$$

JEDINIČNI VEKTORI POLARNOG RAVNINSKOG SUSTAVA:

Vektor položaja $\vec{r}$ često će se prikazivati preko svog iznosa i jediničnog vektora u svom smjeru: $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$ odakle se dijeljenjem s r lako računa taj jedinični vektor $\hat{r}$. Drugi jedinični vektor polarnog ravninskog sustava jest azimutalni jedinični vektor: $\hat{\varphi}$. On je po definiciji jediničnog iznosa, okomit je na vektor $\hat{r}$, a otklonjen je od njega za $\pi/2$ u smjeru protivnom gibanju kazaljke na satu. (u matematici to je pozitivni smjer). Lako se provjerava:

$$\hat{\varphi} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{r}}{\omega\cdot r} \qquad (1.35)$$

za slučaj gibanja u jednoj ravnini.

VEKTORI $\vec{v}\ i\ \vec{\omega}$ PRI GIBANJU PO KRUŽNICI:

Pri gibanju po kružnici iz definicije kuta u radijanima za diferencijal prijeđenog puta ds vrijedi: $ds = r\cdot d\varphi$; ako to podijelimo s diferencijalom proteklog vremena imamo za brzinu:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \dot{\varphi} = r\omega \qquad (1.36)$$

Ako uzmemo u obzir i orijentaciju vektora $\vec{\omega}$, možemo provjeriti da postoji veza:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \hat{\varphi} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \qquad (1.37)$$

OPĆENITI IZRAZI ZA BRZINU I UBRZANJE :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + r \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (1.38)$$

Ovdje smo dobili rastavljanje brzine u radijalnom i azimutalnom smjeru. Derivaciju jediničnog radijalnog vektora (stalni mu je iznos) računamo pravilom koje smo upravo ustanovili:

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r \cdot \vec{\omega} \times \hat{r}$ Korištenjem veze $r \cdot \hat{r} = \vec{r}$ u desnom sumandu slijedi:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1.39)$$

Deriviranjem gornjeg izraza po vremenu dobiva se akceleracija:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{r}\dot{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) =$ (Korištenjem pravila o deriviranju produkata i jediničnih vektora)

$$\vec{a} = \hat{r} \cdot \frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.40)$$

U slijedećem koraku ćemo za posljednji faktor koristiti relaciju za brzinu (1.39). Također ćemo koristiti i izraz za derivaciju jediničnog radijalnog vektora koja je specijalizacija (1.37) za situaciju jediničnog vektora.

$$\vec{a} = \hat{r} \cdot \ddot{r} + \dot{r} \cdot \vec{\omega} \times \hat{r} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{r} \cdot \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{r} \cdot \ddot{r} + 2\dot{r}\vec{\omega} \times \hat{r} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.41)$$

Gornji će izrazi pokazati ogromnu važnost kada budemo razmatrali kako se povezuju sile koje djeluju u različitim koordinatnim sustavima kada se ti sustavi općenito kreću jedan u odnosu na drugi.

BRZINA I UBRZANJE U POLARNOM SUSTAVU RAVNINE:

Specijalizirat ćemo gornja razmatranja na slučaj gibanja unutar ravnine koristeći također jedinične vektore: radijalni i azimutalni! Posebnost tog sustava leži u činjenici da je $\vec{\omega} \cdot \vec{r} \equiv 0$.
Prvi izraz za brzinu iz prethodnog odsječka možemo napisati i ovako:

$\vec{v} = \hat{r} \cdot \dot{r} + \vec{\varphi} \cdot r\dot{\varphi}$ (već smo pokazali da je $r \cdot \dot{\varphi}$ obodna brzina).

Da bismo iskoristili gornji izraz za akceleraciju napisat ćemo opći rezultat za dvostruki vektorski produkt; taj ćemo izraz uskoro dokazati u ovom semestru:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Navedenim se pravilom dvostruki vektorski produkt u izrazu za akceleraciju svodi na $-\vec{r}\cdot(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$. Tako akceleracija postaje:

$$\vec{a}=\hat{r}\ddot{r}+2\dot{r}\omega\hat{\varphi}+\dot{\omega}r\hat{\varphi}-\vec{r}\,\omega^2 \tag{1.41}$$

ili razdvajanjem komponenti:

$$\vec{a}=\hat{r}(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)+\hat{\varphi}(2r\dot{\varphi}+\dot{\omega}r) \tag{1.42}$$

Azimutalni dio je katkad zgodno pisati: $\hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$. Navedeni opis akceleracije u polarnom sustavu bit će vrlo koristan pri studiju gibanja pod utjecajem centralnih sila i dobivanja jednog od Keplerovih zakona.

VEKTORI U KARTEZIJEVOM SUSTAVU:

Svojstva vektora su u suštini neovisna o koordinatnom sustavu. Mi ćemo dominantno upotrebljavati Kartezijev sustav s tri međusobno okomite koordinatne osi. U fizici su u opticaju još dva sustava: polarni i cilindrični.

Kod polarnog sustava prva je koordinata udaljenost točke od ishodišta sustava. Kroz ishodište prolazi izabrana ravnina. Kut otklona zrake iz ishodišta prema proizvoljnoj točki od okomice na ravninu je druga koordinata ϑ. Položaj točke se zatim projicira na tu ravninu . U ravnini postoji i izabrana zraka koja prolazi ishodištem. Kut koji projekcija spojnice točke i ishodišta i izabrane zrake u ravnini zatvara jest kut φ .

U cilidričnom sustavu se najprije izabire osnovna ravnina koja ide ishodištem. Udaljenost proizvoljne točke od izabrane ravnine je koordinata z . Iz proizvoljne točke se potom spušta okomica na izabranu ravninu. Ta točka pak ima svoje ravninske polarne koordinate čije određivanje smo već prije opisali.

Jedinični vektori Kartezijevog sustava:
Duž svake od tri okomite osi Kartezijevog sustava su jedinični vektori paralelni trima osima: $\hat{x}, \hat{y}\, i\, \hat{z}$. Kako su ti vektori jedinični po iznosu i međusobno okomiti, to među njima vrijede slijedeće relacije:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \qquad (1.43)$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0 \qquad (1.44)$$

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}\,,\ \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}\,,\ \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} \qquad (1.45)$$

Kartezijeve koordinate vektora
se određuju projiciranjem vektora na pojedine osi. Prikloni kutevi između zrake koja ide promatranom točkom i koordinatnih osi su $\alpha\ za\ x\ os, \beta\ za\ y\ os\ i\ \gamma\ za\ z\ os$. Tako vrijedi za Kartezijeve koordinate:

$$x = r_x = \hat{x}\cdot\vec{r} = r\cos\alpha \ ,\quad y = r_y = \hat{y}\cdot\vec{r} = r\cos\beta \ ,\quad z = r_z = \hat{z}\cdot\vec{r} = r\cos\gamma \qquad (1.46)$$

Nadalje očito vrijedi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma \qquad (1.48)$$

Čime dobivamo relaciju među kutovima:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1.49)$$

Radijvektor možemo prikazati pomoću komponenti:

$$\vec{r} = \hat{x}\cdot x + \hat{y}\cdot y + \hat{z}\cdot z = \hat{x}\cdot(\vec{r}\cdot\hat{x}) + \hat{y}\cdot(\vec{r}\cdot\hat{y}) + \hat{z}\cdot(\vec{r}\cdot\hat{z}) \qquad (1.50)$$

Ovakav prikaz vrijedi općenito za svaki vektor:

$$\vec{a} = \hat{x}\cdot a_x + \hat{y}\cdot a_y + \hat{z}\cdot a_z = \hat{x}\cdot(\vec{a}\cdot\hat{x}) + \hat{y}\cdot(\vec{a}\cdot\hat{y}) + \hat{z}\cdot(\vec{a}\cdot\hat{z}) \qquad (1.51)$$

Zbrajanje vektora preko komponenti:

$$\vec{a} + \vec{b} = \hat{x}\cdot(a_x + b_x) + \hat{y}\cdot(a_y + b_y) + \hat{z}\cdot(a_z + b_z) \qquad (1.52)$$

Množenje vektora skalarom preko komponenti:
$$k \cdot \vec{a} = \hat{x} \cdot (ka_x) + \hat{y} \cdot (ka_y) + \hat{z} \cdot (ka_z) \qquad (1.53)$$

Skalarni produkt vektora preko komponenti:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z) \cdot (\hat{x}b_x + \hat{y}b_y + \hat{z}b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1.54)$$
Ovdje smo iskoristili svojstvo distributivnosti i relacije za skalarne produkte okomitih jediničnih vektora. (šest skalarnih produkata je jednako nuli).

Kvadrat iznosa vektora:
Slijedi kao specijalni slučaj gornje relacije kada su vektori jednaki:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2} \qquad (1.55)$$

Proračun kuta između dva vektora:
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \qquad (1.56)$$

Vektorski umnožak preko determinante Kartezijevih koordinata:
Korištenjem svojstva distribucije i pravila za vektorsko množenje jediničnih vektora imamo:
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z) \times (\hat{x}b_x + \hat{y}b_y + \hat{z}b_z) = \\ &= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - b_x a_y) \equiv \qquad (1.57) \\ &\equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$
Studenti koji gore ne prepoznaju determinantu trećeg stupnja trebaju prihvatiti da je pred njima pokrata pod kojom se podrazumijeva po definiciji raspis s kojim je determinanta povezana znakom definicije red iznad nje.

Mješoviti umnožak preko determinante Kartezijevih koordinata:
Ako zamislimo da vektorski produkt $(\vec{b} \times \vec{c})$ trebamo pomnožiti skalarno s $\vec{a}$ to jest

izračunati $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, pogledajmo raspis koji bismo dobili za vektorski produkt. Ako bismo ga skalarno množili s $\vec{a}$, prema svojstvima skalarnih produkata jediničnih vektora svaki put bi na mjestu jediničnog vektora u raspisu na njegovo mjesto došla odgovarajuća komponenta vektora $\vec{a}$. Na primjer, u raspisu bi na mjesto $\hat{x}$ došao a_x i analogno za ostale komponente. Sveukupni rezultat jest da bi se u determinanti jedinični vektori zamijenili komponentama vektora $\vec{a}$, dakle:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x\, a_y\, a_z \\ b_x\, b_y\, b_z \\ c_x\, c_y\, c_z \end{vmatrix} \tag{1.57}$$

Dvostruki vektorski umnožak:
Izvest ćemo sada rezultat koji smo koristili pri izvođenju rezultata za akceleraciju.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} = \tag{1.58}$$

Gornji izraz imamo punim korištenjem prvog izraza za vektorski produkt putem determinante. Njegov donji red su pripadne komponente vektorskog produkta iz okrugle zagrade , a prva dva reda su u punom skladu s već poznatim postupkom za računanje vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ s vektorom u okrugloj zagradi. Sada možemo raspisivati determinantu prema pravilima koje smo naučili:

$$\begin{aligned} &= \hat{x}\big[a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)\big] + \\ &+ \hat{y}\big[a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x)\big] + \\ &+ \hat{z}\big[a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)\big] \end{aligned}$$

Radi štednje prostora pokazat ćemo samo rezultat za x komponentu gornjeg izraza; ta komponenta (uz ispuštanje $\hat{x}$ faktora) se izlučivanjem b_x i c_x faktora može pisati:

$b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z) =$ dodavanjem i oduzimanjem produkta $a_x b_x c_x =$

$b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = b_x(\vec{a}\cdot\vec{b}) - c_x(\vec{a}\cdot\vec{b})$, što je x komponenta vektora : $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Analognim postupkom se pokazuje i za ostale dvije komponente da su odgovarajuće komponente gornjeg vektora. Tako smo dokazali identitet:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{1.59}$$

DERIVACIJE VEKTORA OPISANOG KARTEZIJEVIM KOORDINATAMA:

Derivacije se u ovom sustavu čine jednostavno, jer su jedinični vektori konstante. Stoga se u procesu deriviranja treba derivirati samo skalar koji opisuje iznos komponente. Uzmimo primjere brzine i ubrzanja.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{x}\cdot x + \hat{y}\cdot y + \hat{z}\cdot z) = \hat{x}\cdot\frac{dx}{dt} + \hat{y}\cdot\frac{dy}{dt} + \hat{z}\cdot\frac{dz}{dt} \tag{1.60}$$

Jasno je da je akceleracija kao druga derivacija položaja po vremenu (prva derivacija brzine):

$$\vec{a} = \hat{x}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{z}\frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.61}$$

Provjera izraza za brzinu dobivenog na dva načina za slučaj gibanja po kružnici.
Napišimo izraz za radijvektor na dva načina:

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \qquad (1.62)$$

ovdje su r i φ koordinate iste točke u polarnom sustavu i veza Kartezijevih i polarnih koordinata jest:

Brzinu dobivamo deriviranjem radijvektora po vremenu pri čemu ćemo koristiti jedinične vektore Kartezijevog sustava i izraze za x i y preko polarnih koordinata:

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\varphi)}{dt} = r\frac{d(\cos\varphi)}{dt} = -r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -y\cdot\omega$$

(1.63)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = x\omega \qquad (1.64)$$

ω je naravno kutna brzina to jest $\dot{\varphi}$.

Možemo to sada usporediti s rezultatom kojeg smo imali prije za kružno gibanje. Vektor $\vec{\omega}$ je usmjeren duž z osi pa vrijedi:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \qquad (1.65)$$

Kada se izvrijedni gornja determinanta dobiju se upravo izrazi dobiveni gore deriviranjem!

Ubrzanje kod kružnog gibanja:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x}\frac{dv_x}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y}{dt} = \hat{x}(-r\omega\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}) + \hat{y}(-r\omega\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}) =$$

korištenjem $\dot{\varphi} = \omega$ i već napisanom vezom Kartezijevih i polarnih koordinata:

$$= -\hat{x}x\omega^2 - \hat{y}y\omega^2 = -\omega^2\cdot\vec{r} \qquad (1.66)$$

Ovo je vrlo važan rezultat. U srednjoj školi ga se eventualno izvodilo uz pomoć geometrijskih crteža. Kada se tijelo giba po kružnici ono doživljava akceleraciju $\omega^2 r$ usmjerenu prema središtu oko kojeg se vrti. Koristeći vezu obodne brzine v i kutne brzine: $v = \omega r$, izraz za akceleraciju se može pisati i kao: $\frac{v^2}{r}$ koji se u srednjoj školi češće sretao.