Statistika i osnovna mjerenja

Slučajne varijable

M. Makek

2017/2018

Slučajna varijabla

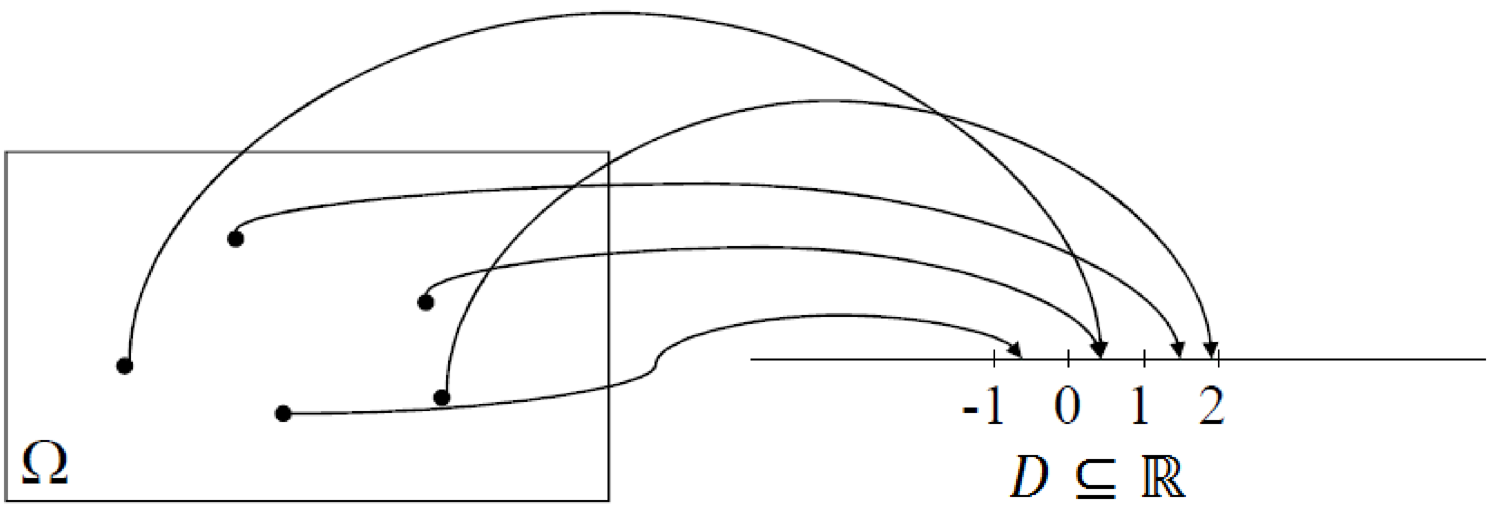
- Ω je prostor elementarnih događaja ω_j (definiranih u aksiomatskom, općenitom pristupu)
- ***slučajna varijabla X je funkcija***, koja svakom ishodu pokusa $\boldsymbol{\omega_i}$ iz Ω pridružuje neki broj ***x*** iz skupa realnih brojeva:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

- n.b. slučajna varijabla nije varijabla već funkcija i nije slučajna. Naziv potječe od činjenice da je domena od X skup slučajnih događaja, a obzirom da se uvriježio mi ćemo ga koristiti.

Slučajna varijabla

- Ako je Ω prostor elementarnih događaja slučajna varijabla pridružuje neki realni broj svakom elementarnom događaju ω.



D je skup svih vrijednosti slučajne varijable

Slučajna varijabla

<u>Primjer: bacanje 2 kocke</u>

- Prostor el. događaja Ω ima ukupno 36 elemenata $\omega=(i,j)$ gdje $i=1..6$ i $j=1..6$

a) Možemo definirati slučajnu varijablu X koja je jednaka sumi brojeva na kockama: $X(\omega)=i+j$

   → slučajna varijabla X događajima pridružuje vrijednosti 2…12 ili skraćeno kažemo slučajna varijabla poprima vrijednosti 2…12

b) Možemo definirati slučajnu varijablu Y koja je jednaka apsolutnoj razlici brojeva na kockama: $Y(\omega)=|i-j|$

   → slučajna varijabla Y događajima pridružuje vrijednosti 0…5 ili skraćeno kažemo slučajna varijabla poprima vrijednosti 0…5

Vrste slučajnih varijabli

- **Bernoullijeva slučajna varijabla** – s.v. koja opisuje događaj koji ima samo dva moguća ishoda (Bernoullijev događaj)
  - primjer: bacanje novčića
- **Diskretna slučajna varijabla** – s.v. za koju je skup mogućih vrijednosti konačan ili prebrojiv
  - primjer: bacanje novčića, bacanje kocke, rulet
- **Kontinuirana slučajna varijabla** – s.v. za koju je skup mogućih vrijednosti neki interval na brojevnom pravcu
  - primjer: vrijeme između 2 radioaktivna raspada iz nekog uzorka

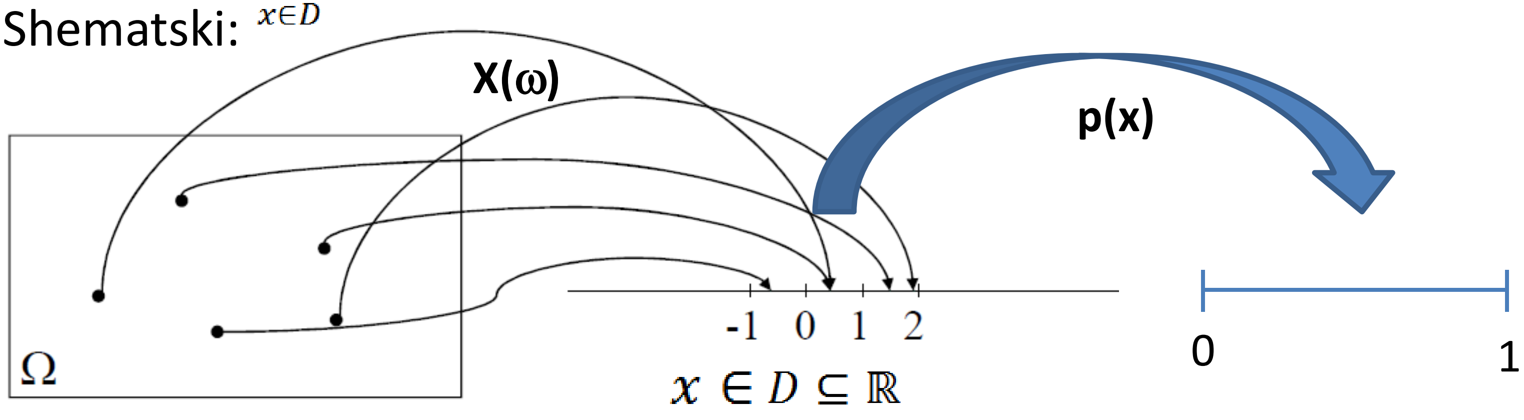
Diskretna slučajna varijabla

Def. *Raspodjela vjerojatnosti* diskretne slučajne varijable X definirana je za svaki $x \in D$:

$$p(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

(riječima: vjerojatnost da s.v. poprimi vrijednost x, koja odgovara vjerojatnosti da nastupi bilo koji elementarni događaj ω kojem je pridružena vrijednost x)

- Pri tome mora biti zadovoljen uvjet da suma svih vjerojatnosti mora biti jednaka 1: $\sum_{x \in D} p(x) = 1$
- Shematski:



Diskretna slučajna varijabla

Def. *kumulativna funkcija distribucije* (funkcija raspodjele) za diskretnu s.v. s raspodjelom vjerojatnosti *p(x)*:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} p(y)}$$

(riječima: *F(x)* je vjerojatnost da s.v. poprimi vrijednost manju ili jednaku *x*)

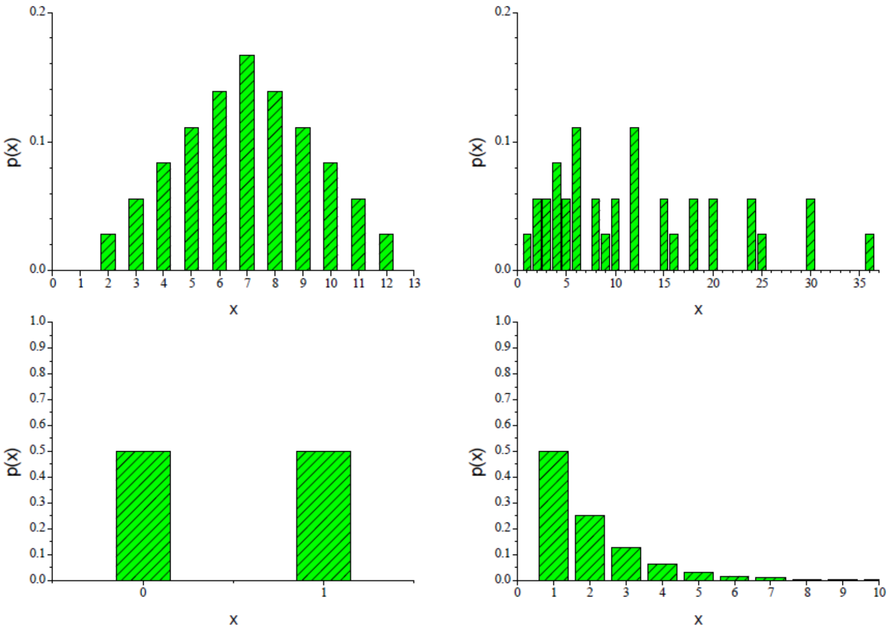
- pri tome vrijedi: $F(-\infty) = 0 \; i \; F(+\infty) = 1$

Za bilo koja dva broja a i b (a≤b) vrijedi: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$

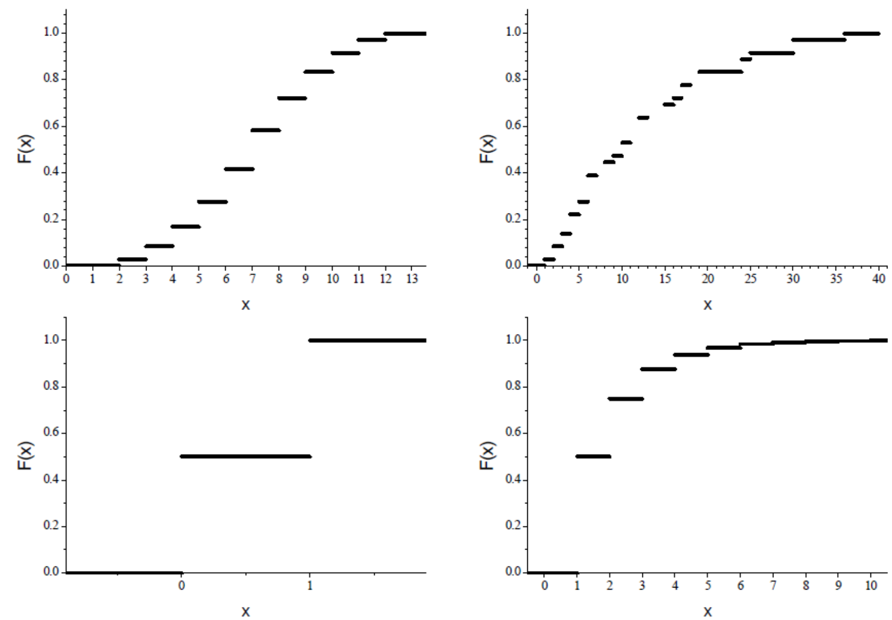
gdje je "a-" najveća vrijednost varijable X koja je < a.

Diskretna slučajna varijabla
primjeri

Raspodjele vjerojatnosti



Kumulativne funkcije raspodjele



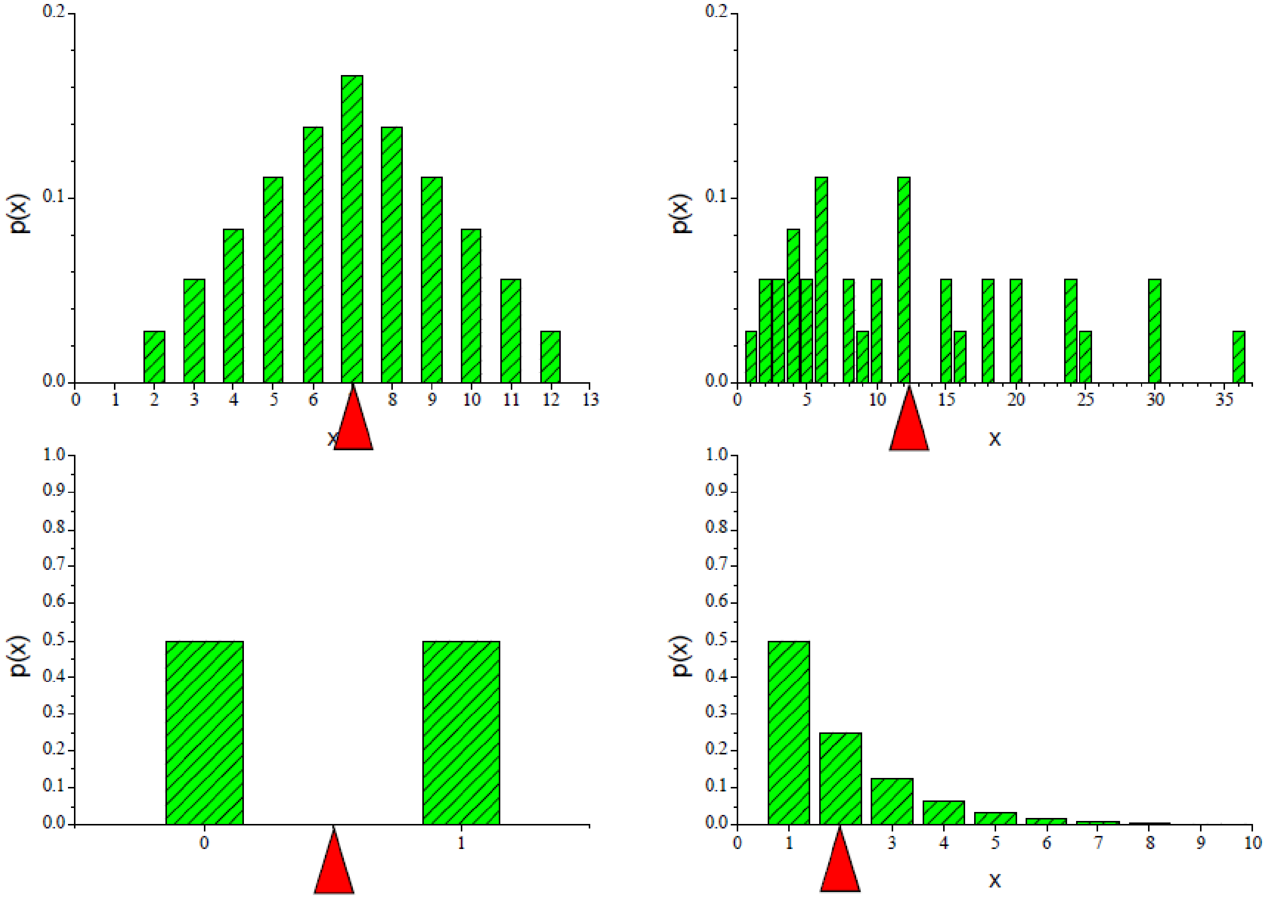
Diskretna slučajna varijabla

Def. *Očekivana vrijednost* diskretne slučajne varijable

- Za diskretnu s.v. *X* sa skupom mogućih vrijednosti *D* i raspodjelom vjerojatnosti *p(x)* definirano očekivanje ili srednju vrijednost kao:

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)}$$

Primjeri: očekivanje diskretne slučajne varijable



$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

Diskretna slučajna varijabla

Def. *Varijanca* diskretne slučajne varijable

- Za diskretnu s.v. *X* sa raspodjelom vjerojatnosti *p(x)* definira se varijanca:

$$\boxed{V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in D} (x - \mu_X)^2 p(x) = E[(X - \mu_X)^2]}$$

- Varijanca je jednaka sumi očekivanih kvadratnih odstupanja odn. jednaka je očekivanju kvadrata odstupanja od srednje vrijednosti
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ se naziva standardnom devijacijom ili standardnim odstupanjem s.v. *X*
- Također vrijedi: $V(X) = \sum_{x \in D} (x^2 - 2x\mu_X + \mu_x^2) p(x)$

$$V(X) = \sum_{x \in D} x^2 p(x) - 2\mu_X \sum_{x \in D} x p(x) + \mu_X^2 \sum_{x \in D} p(x)$$

$$V(X) = \sum_{x \in D} x^2 p(x) - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \Rightarrow \boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Primjer: bacanje 2 kocke

- Definiramo slučajnu varijablu *X* kao sumu ishoda bacanja 2 kocke
- X poprima vrijednosti: x=2…12
- Raspodjela vjerojatnosti:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(x)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

- Očekivanje: $E(X)$= 7,0
- Standardna devijacija: σ_X = 2,4

Funkcija diskretne slučajne varijable

Očekivanje funkcije *g(X)* diskretne slučajne varijable *X je dano s*:

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{x \in D} g(x)p(x)$$

- Specijalno za ***linearnu funkciju*** vrijedi:

$$E(aX + b) = \sum_{x \in D} (ax + b)p(x) = a \sum_{x \in D} xp(x) + b \sum_{x \in D} p(x)$$

  – Slijedi: $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$

  – U ovom specijalnom slučaju može se reći da je očekivanje funkcije jednako funkciji očekivanja

Funkcija diskretne slučajne varijable

- *Varijanca funkcije* *g(X)* diskretne slučajne varijable *X* je dana s:

$$V(g(x)) = \sum_{x \in D} \left(g(x) - E(g(X))\right)^2 p(x)$$

- može se pokazati da vrijedi:

$$\boxed{V(g(X)) = E(g^2(X)) - [E(g(X))]^2}$$

- Specijalno za ***linearnu funkciju*** vrijedi:

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

  – Odnosno: $\boxed{\sigma_{aX+b} = a\sigma_X}$

Centralni moment r-tog reda

- Definira se kao:

$$\boxed{M_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_{x \in D} (x-\mu)^r p(x)}$$

- Iz definicije slijedi:
  - ❑ $M_0 = 1$
  - ❑ $M_1 = 0$
  - ❑ $M_2 = \sum_{x \in D} (x-\mu)^2 p(x) = V(X)$

→ Centralni moment drugog reda jednak je varijanci

Pomoćni moment r-tog reda

- Definira se kao:

$$\boxed{m_r = \sum_{x \in D} x^r p(x)}$$

- Iz definicije slijedi:
  - ❑ $m_0 = 1$
  - ❑ $m_1 = E(X) = \mu_x$

  → pomoćni moment prvog reda jednak je očekivanju slučajne varijable

Veza centralnih i pomoćnih momenata

- Može se pokazati da su centralni i pomoćni momenti povezani relacijom (dokaz izostavljamo):

$$M_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} m_{r-k} m_1^k$$

- Npr.: $M_2 = m_2 - m_1^2$

  → Što je otprije poznata relacija $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Funkcija izvodnica

- Za diskretnu slučajnu varijablu definiramo funkciju izvodnicu:

$$g(t) = \sum_{x \in D} e^{tx} p(x)$$

- Iz definicije slijedi:

$$g'(t=0) = \sum_{x \in D} x \cdot p(x) = m_1$$

$$g''(t=0) = \sum_{x \in D} x^2 \cdot p(x) = m_2$$

$$g^{(r)}(t=0) = \sum_{x \in D} x^r \cdot p(x) = m_r$$

→ pomoću funkcije izvodnice mogu se dobiti svi pomoćni, a posredno i centralni momenti slučajne varijable

Momenti višeg reda

- Služe se detaljnu karakterizaciju raspodjela
- Moment trećeg reda:

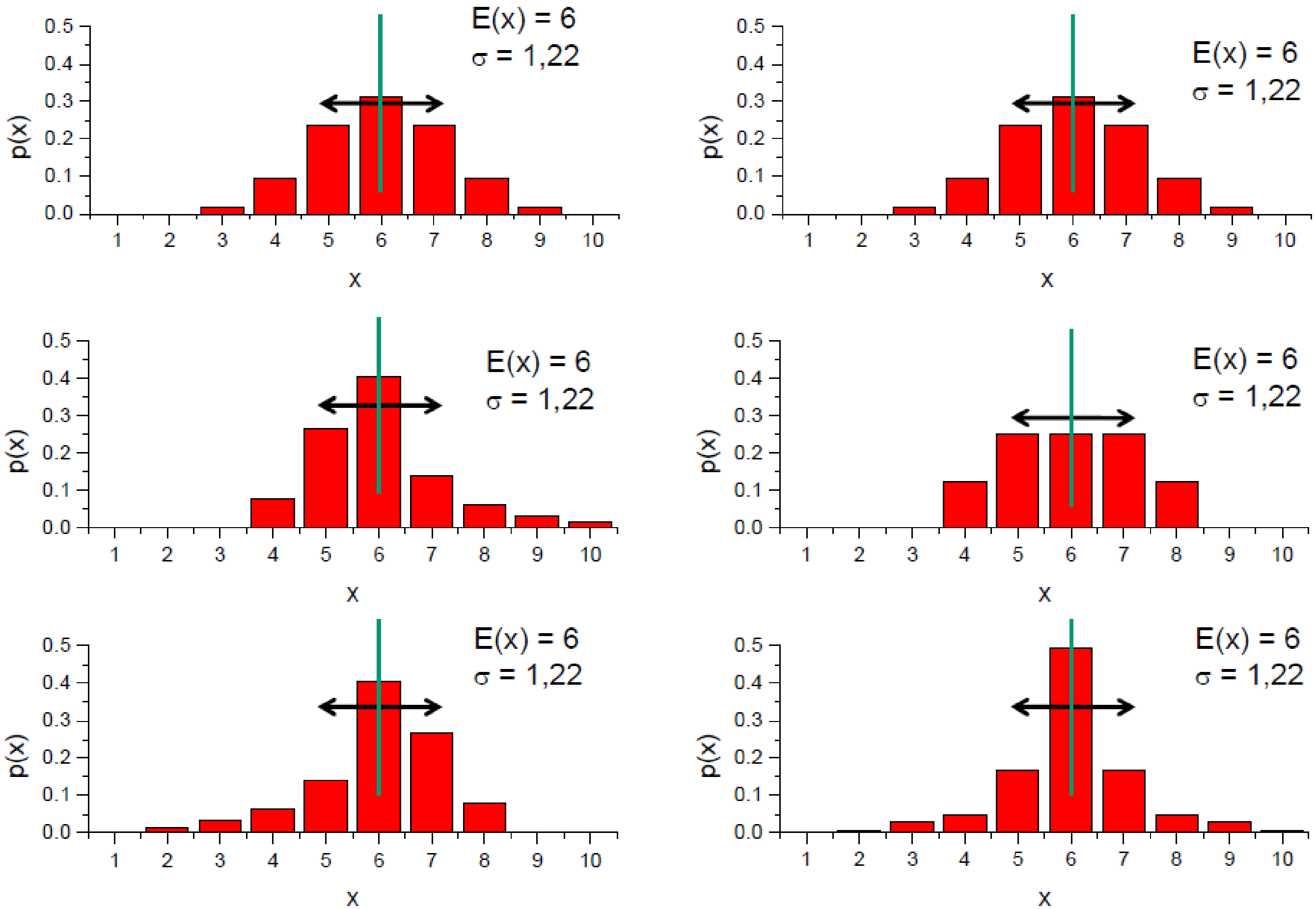
  → koeficijent asimetrije $\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}$

  – α_3 = simetrična raspodjela
  – $\alpha_3 > 0$ nagnuta udesno
  – $\alpha_3 < 0$ nagnuta ulijevo
- Moment četvrtog reda:

  → koeficijent spljoštenosti $\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}$

  – $\alpha_4 = 3$ normalno spoljoštena raspodjela
  – $\alpha_4 > 3$ šiljata raspodjela
  – $\alpha_4 < 3$ široka raspodjela

Momenti višeg reda



Sve raspodjele imaju jednako očekivanje i standardnu devijaciju
→ možemo ih bolje karakterizirati momoću momenata višeg reda

Momenti višeg reda