Statistika i osnovna mjerenja

Teorija vjerojatnosti

M. Makek
2017/2018

Uvod

- **Pokus** – bilo koji postupak ili proces koji rezultira opažanjem
- **Ishod** – moguć rezultat pokusa (različiti ishodi se međusobno isključuju)
- **Elementarni događaj** – pojedini ishod nekog pokusa
- **Prostor elementarnih događaja** – skup svih ishoda nekog pokusa
- Ako je Ω prostor elementarnih događaja onda je:
  - Događaj – svaki podskup od Ω
  - Elementarni događaj - jednočlani podskup od Ω
  - Složeni događaj – višečlani podskup od Ω
  - Sigurni događaj – cijeli Ω
  - Nemoguć događaj – prazan skup

Primjer: bacanje kocke

- 6 mogućih ishoda (elementarnih događaja)
- Složeni događaj – npr. parni ili neparni brojevi
- Siguran događaj – bilo koji broj od 1 - 6

Vjerojatnost a priori
(klasična definicija vjerojatnosti)

- Uzmimo pokus koji završava s konačno mnogo (*n*) ishoda tj. elementarnih događaja, koji su jednako mogući.
- <u>Definicija</u>: vjerojatnost proizvoljnog događaja *A* je dana omjerom broja *povoljnih* elementarnih događaja n_A i *ukupnog* broja elem. događaja *n*:

$$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n}}$$

- Iz ove definicije slijedi:
  - 0 <= P(A) <= 1 (vjerojatnost je između 0 i 1)
  - $n_A=0 \rightarrow P(A) = 0$ (ako niti jedan elementarni događaj ne realizira A, tj. A je nemoguć događaj, onda je njegova vjerojatnost jednaka 0)
  - $n_A=n \rightarrow P(A) = 1$ (ako svi elementarni događaji realiziraju A, tj. A je siguran događaj, njegova je vjerojatnost 1)
- Nedostaci ovakve definicije su:
  - pretpostavka o jednako mogućim događajima (tu već pretpostavljamo neku vjerojatnost pa je definicija kružna)
  - Definirana na konačnom skupu događaja

Vjerojatnost a priori

- Primjer 1: bacanje 2 kocke
  - Rezultat svakog bacanja je par brojeva (x_1,x_2)
  - Ukupno 36 elementarnih događaja čini prostor elementarnih događaja
  - Definirajmo ***složen događaj*** A kao onaj kod kojeg je suma brojeva na obje kocke jednaka 6
  - Elementarni događaji koji realiziraju A su:

    (1,5), (2,4),(3,3),(4,2),(5,1) → $n_A=5$

  → P(A) = 5/36

Vjerojatnost a priori

- Primjer 2: uzorak proizvoda
  - Pretpostavimo da imamo 500 proizvoda
  - Proizvođač garantira da je među njima maksimalno 5% neispravnih
  - Želimo ovo provjeriti uzimajući uzorak od 5 proizvoda

A. Koja je vjerojatnost da se među tih 5 proizvoda nađu 2 (tj. ~40%) loša?

1. Na koliko načina možemo odabrati uzorak od 5 proizvoda? → $K_5^{(500)} = \binom{500}{5}$
2. Na koliko načina se može odabrati uzorak u kojem je od 5 proizvoda 2 loša?

→ $K_2^{(25)} K_3^{(475)} = \binom{25}{2}\binom{475}{3}$

Vjerojatnost takvog događaja je: $P(A) = \frac{\binom{25}{2}\binom{475}{3}}{\binom{500}{5}}$ **= 0,021**

Koristimo tablicu logaritama faktorijela

Obzirom da je vjerojatnost takvog događaja vrlo mala (~2%) moglo bi se zaključiti da ako se među 5 nađu 2 loša proizvoda ukupni uzorak mora sadržavati više od 5% defektnih proizvoda i da garancija proizvođača nije ispunjena.

Za prethodni primjer:
Kako računati s velikim faktorijelama?

- Može se pojednostavniti:
  a) Korištenjem Stirlingove formule:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

  b) Uporabom logaritama faktorijela
     (dano u tablicama)
  c) Logaritmiranjem Stirlingove formule a) + b)

Vjerojatnost a posteriori

- Primjer: bacanje novčića
  - Ako znamo daje novčić “pošten” onda možemo definirati ***a priori*** vjerojatnost:
    - Elementarni događaji P i G su jednako vjerojatni $p_P=p_G$
    - Slijedi: $p_P+p_G = 1 \rightarrow p_P=p_G=0{,}5$
  - Ako ne znamo da novčić daje jednako vjerojatne ishode onda možemo novčić bacati puno puta (n) i odrediti koliko puta se pojavljuje G (n_G), a koliko puta P (n_P)
  - Tada možemo definirati ***a posteriori*** vjerojatnost kao:

$$P(G) = \frac{n_G}{n} \qquad P(P) = \frac{n_P}{n}$$

Vjerojatnost a posteriori

- Definicija: vjerojatnost događaja **A** jednaka je relativnoj frekvenciji pojavljivanja tog događaja $f_r(A)$ u nizu od n pokusa:

$$f_r(A) = \frac{f_A}{n}$$

  - vrijedi pod pretpostavkom da su pokusi izvedeni pod jednakim uvjetima te da je izveden dovoljan broj pokusa da se $f_r(A)$ ne mijenja s n, tj. da su relativne frekvencije stabilne
- Nedostaci ovakve definicije:
  - Što znači dovoljan broj pokusa?
  - Koja je vjerojatnost jednog događaja (ako ne možemo ponavljati pokus puno puta)?

Suprotna vjerojatnost

- Vjerojatnost da se događaj *A* **ne** desi
  - Ne događanje ***A*** je događaj koji ćemo označiti sa $\bar{A}$
  - Ako je vjerojatnost za događaj *A, P(A),* onda je vjerojatnost da se *A* **ne desi**: $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$
  - Suprotna vjerojatnost još se označava i sa Q(A) te vrijedi:

$$\boxed{P(A) + Q(A) = 1}$$

- <u>Primjer</u>: Imamo 10 proizvoda od kojih 5 dobrih i 5 neispravnih
  - Ako najednom uzmemo 3 proizvoda koja je vjerojatnost da barem jedan od njih bude neispravan – <u>ekvivalentno</u>: koja je vjerojatnost da se desi suprotan događaj onom kada su sva tri proizvoda ispravna?
  - Vjerojatnost da imamo 3 ispravna je: $P(A) = \binom{5}{3} / \binom{10}{3}$ =**1/12**
  - Vjerojatnost da nastupi suprotan događaj je:

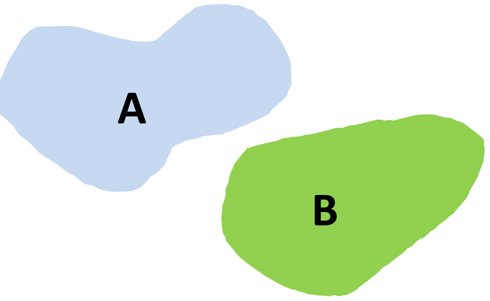
$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \mathbf{0{,}917}$$

Isključivost događaja

- <u>Definicija</u>: Događaji A i B se **međusobno isključuju** ako istovremeno ne mogu nastupiti oba.
  <u>Analogno</u>: događaji se međusobno isključuju ako se istovremeno može pojaviti samo jedan od njih

  → znači da ne postoji elementaran događaj koji bi istovremeno realizirao događaje A i B

  grafički se to može prikazati dis-junktnim skupovima točaka u ravnini



  → **skupovi elementarnih događaja koji realiziraju A odn. B su disjunktni**

Zbrajanje vjerojatnosti

- Pretpostavimo da se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_k$ međusobno isključuju
- Zanima nas koja je vjerojatnost da se desi ili A_1 ili $A_2, \ldots,$ ili A_k?
- Takav događaj označavamo s $A_1+A_2+\ldots+A_k$

  ("+" među događajima se čita "**ili**" i znači da se može desiti samo 1 događaj)

- Vrijedi: $\boxed{P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)}$

vjerojatnost da se desi složeni događaj jednaka je sumi vjerojatnosti komponentnih događaja

- Dokaz slijedi iz definicije vjerojatnosti (npr. a priori):

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \frac{\sum_i m_i}{n} = \sum_i \frac{m_i}{n} = \sum_i P(A_i)$$

Zbrajanje vjerojatnosti

- Primjer: bacanje kocke
  - Pretpostavimo da svakom broju na kocki pripada jednaka vjerojatnost P=1/6
  - Kolika je vjerojatnost da broj na kocki bude paran?

→To je vjerojatnost da broj bude ili 2 ili 4 ili 6

→Vjerojatnost za takav događaj je:

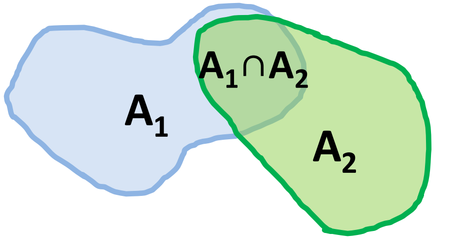
$P(Paran) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 0{,}5$

Nezavisni događaji

- Događaji A_1 i A_2 su **nezavisni** ako pojavljivanje jednog ne mijenja vjerojatnost pojavljivanja drugog
- Kasnije ćemo pokazati da za nezavisne događaje vrijedi da je vjerojatnost istovremenog pojavljivanja događaja A_1 i A_2 jednaka umnošku vjerojatnosti pojedinih događaja, tj:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)}$$

- Grafički se može pokazati da je skup elementarnih događaja koji realiziraju i A_1 i A_2 jednak presjeku skupova elementarnih događaja za A_1 i A_2



- Implicitan uvjet je da se događaji A_1 i A_2 ne isključuju – drugim riječima događaji koji se isključuju ne mogu biti nezavisni

Množenje vjerojatnosti

- Pretpostavimo da se događaji A_1, A_2, …, A_k međusobno ne isključuju → mogu se dogoditi istovremeno
- Zanima nas koja je vjerojatnost da se istovremeno dese i A_1 i A_2, …, i A_k?
- Takav događaj označavamo s $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ ("∩" se čita "**i**")
- Može se pokazati da prethodni primjer vrijedi i općenito:

$$\boxed{P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i P(A_i)}$$

→ Vjerojatnost ovakvog složenog događaja je jednaka umnošku vjerojatnosti svih komponentnih događaja

Množenje vjerojatnosti

Primjer – koincidentno opažanje čestica

- Uzmimo da želimo opažati reakciju raspada piona:

$$\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$$

- U reakciji se kao produkti pojavljuju elektron, pozitron i foton
- Efikasnost detektora za opažanje elektrona ili pozitrona je ε_{e+e-}= 0,9
- Efikasnost detektora za opažanje fotona je ε_{γ}=0,2

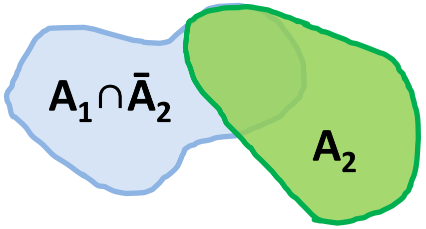
Kolika je vjerojatnost opažanja ovakvog događaja?

- Efikasnost detektora možemo poistovjetiti sa vjerojatnošću opažanja
- Ako pretpostavimo da je opažanje svake od čestica nezavisan događaj onda je vjerojatnost opažanja ovog događaja jednaka vjerojatnosti za istovremeno (koincidentno) opažanje ove tri čestice:

  → $P(\pi^0) = P(e^+)P(e^-)P(\gamma)$ = 0,162

Svojstva nezavisnih događaja

Tvrdnja: ako su A_1 i A_2 nezavisni onda su i A_1 i $\bar{A}_2$ nezavisni



- Iz grafičkog prikaza slijedi:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

- Zbog nezavisnosti A_1 i A_2 možemo pisati:

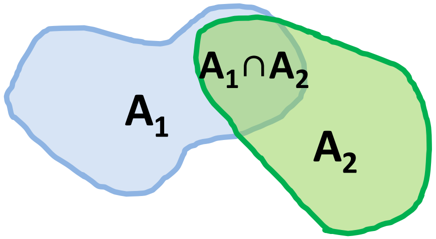
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \bar{A}_2) &= P(A_1) - P(A_1)P(A_2) \\ &= P(A_1)[1 - P(A_2)] \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2) \end{aligned}$$

- Čime je prema definicija nezavisnih događaja dokazana tvrdnja

Ostali složeni događaji

- Uzmimo događaje A_1 i A_2 koji su međusobno **ne** isključuju
- Kolika je vjerojatnost da nastupi barem jedan od tih događaja, tj. A_1 ili A_2 ili A_1 i A_2?
- Takav složeni događaj označavamo s $\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2}$
- Iz grafičkog prikaza slijedi:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)}$$



- U specijalnom slučaju kad su A_1 i A_2 nezavisni događaji, vrijedi:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)}$$

Ostali složeni događaji

- Prethodnu relaciju možemo napisati na drugačiji način:
  - po definiciji: $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2})$
  - $\overline{A_1 \cup A_2}$ znači da se **ne** dogodi A_1 ili A_2 ili oba
  - Ekvivalentno možemo reći da će se dogoditi događaj suprotan A_1 i suprotan A_2 : $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$
- Slijedi: $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$
- Općenito vrijedi:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k)}$$

- A posebno za nezavisne događaje:

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_k)}$$

Ostali složeni događaji

- Primjer:
  - A,B,C su nezavisni događaji koji se međusobno ne isključuju
  - U nekom pokusu oni imaju vjerojatnosti: P(A)=0.5, P(B)=0.3 i P(C)=0.1
  - Koja je vjerojatnost da nastupi bar jedan od događaja?

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0{,}685$$

Konstantna vjerojatnost

- Događaji čija vjerojatnost se ne mijenja tijekom pokusa
  - Vjerojatnost da događaj nastupi u nekom pokusu:

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = p$$

  - Vjerojatnost da događaj ne nastupi u nekom pokusu:

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = \cdots = 1 - p = q$$

  - Vjerojatnost da događaj nastupi barem jednom u seriji od k pokusa:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_k)$$

(događaji su po definiciji nezavisni jer se događaju u različitim pokusima)

  - Slijedi: $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = 1 - q^k}$

Konstantna vjerojatnost

- Primjer:
  - U nekom pokusu događaj A nastupa uz vjerojatnost P(A)=p=0,4
  - Koliko pokusa treba učiniti da u njima sa vjerojatnošću od 95% nastupi barem jedan događaj?

    $P = 1-q^n = 0.95$

    $\rightarrow 0,6^n=0.05$

    $\rightarrow$ **n= 5,86 ~ 6**

Uvjetna vjerojatnost

- Kolika je vjerojatnost da se dogodi A ako se dogodio B?
  - Označava se sa **P(A|B)** (čitamo "A ako je B")
  - Skup elementarnih događaja koji realiziraju B onda postaje prostorom elementarnih događaja za A|B
  - U tom prostoru A∩B elementarnih događaja realizira dog. A
- Slijedi da je: $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ (uvjet P(B)>0)
- Jednako vrijedi: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Iz čega slijedi: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

(vjerojatnost istovremenog zbivanja dva događaja jednaka je produktu apsolutne vjerojatnosti prvog i uvjetne vjerojatnosti drugog)

Nezavisnost događaja

- Definicija: događaji A i B su nezavisni onda i samo onda kad vrijedi:

P (A|B) = P(A)

(Vjerojatnost da se dogodi A ne ovisi o tome da li se dogodio B)

- Iz relacije za uvjetnu vjerojatnost vrijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

- Iz toga slijedi relacija koju smo prije uveli:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Potpun sistem događaja

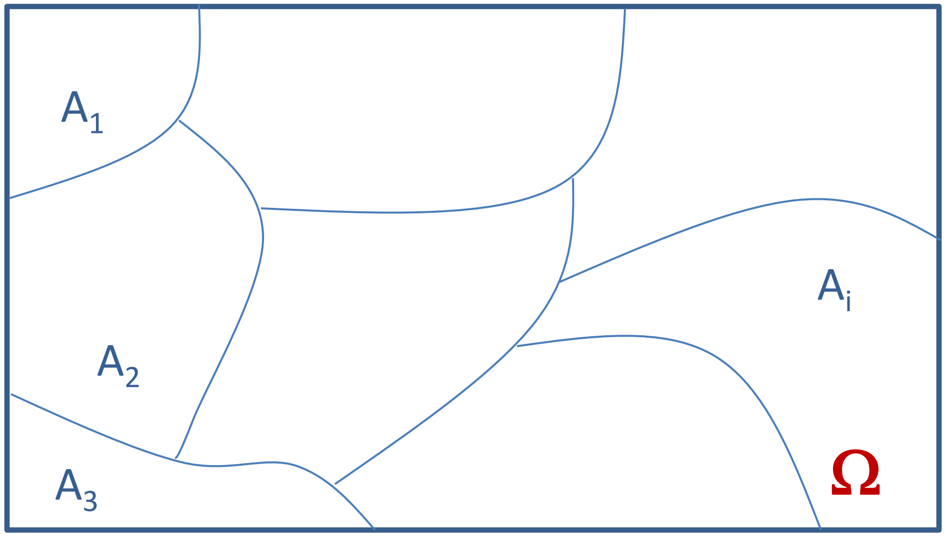
Neka za događaje A_i (i=1,2,…) vrijedi:

$$A_i \neq \emptyset, \forall i$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \forall i,j, \qquad i \neq j$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

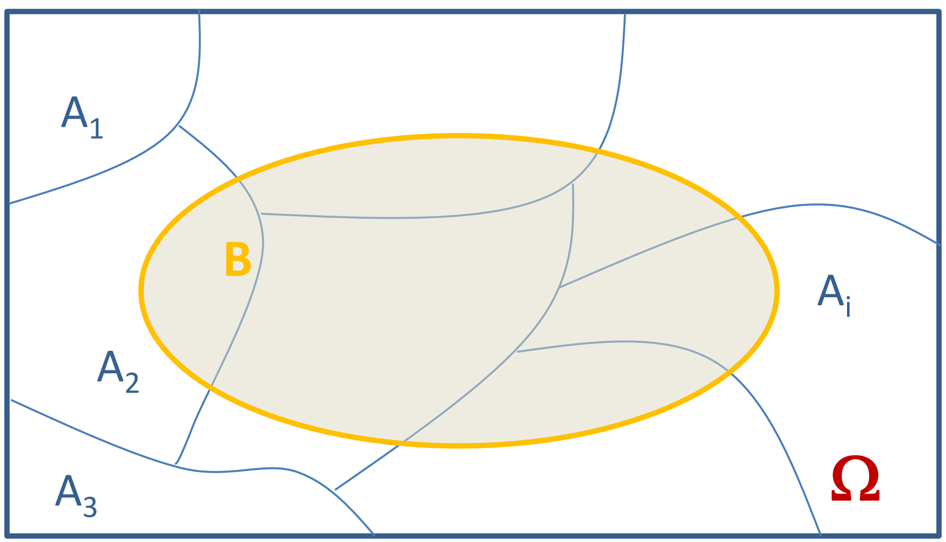
→ Događaji A_i čine potpun sistem događaja



Zakon totalne vjerojatnosti

- Neka A_i čine potpun sistem događaja
- Tada za bilo koji događaj B vrijedi:

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) \quad \rightarrow \quad \boxed{P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$



Bayesov teorem

- Neka A_i čine potpun sistem događaja i B neki događaj
- Za bilo koji događaj A_k vrijedi:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

- Slijedi ***Bayesov teorem***:

$$\boxed{P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}}$$

Bayesov teorem

- Primjer: kontrola proizvoda
  - Serija proizvoda sadrži 95% ispravnih proizvoda
  - Kontrola proglašava ispravan proizvod dobrim s vjerojatnoću od 98%
  - Kontrola proglašava neispravan proizvod dobrim s vjerojatnošću od 5%
- Koja je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila dobrim?
  - A_1 = proizvod stvarno dobar, $P(A_1) = 0.95$
  - A_2 = proizvod stvarno loš, $P(A_2) = 0.05$

  Potpun sustav događaja

  - B = kontrola proglašava proizvod dobrim
  - $P(A_1|B)$=?

→ $P(A_1|B) = \dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$ = 0,997

→ Nakon kontrole serija će sadržavati 99,7% dobrih proizvoda

Nedostaci klasičnih definicija vjerojatnosti

- <u>A priori</u>: vjerojatnost proizvoljnog događaja *A* je dana omjerom broja povoljnih elementarnih događaja n_A i ukupnog broja elem. događaja ***n***
- Nedostaci ovakve definicije su:
  - pretpostavka o jednako mogućim događajima (tu već pretpostavljamo neku vjerojatnost pa je definicija kružna)
  - Definirana na konačnom skupu događaja
- <u>A posteriori</u>: vjerojatnost događaja **A** jednaka je relativnoj frekvenciji pojavljivanja tog događaja $f_r(A)$ u nizu od ***n*** pokusa
- Nedostaci ovakve definicije:
  - Koliki je broj pokusa dovoljan?
  - Koja je vjerojatnost jednog događaja ?
    (ako ne možemo ponavljati pokus puno puta)

Aksiomatska izgradnja teorije vjerojatnosti

- Ako poznajemo prostor elementarnih događaja Ω za neki pokus, svrha definicije vjerojatnosti je da svakom događaju $A \subseteq \Omega$ pridruži broj P(A), koji će biti precizna mjera šanse da se A ostvari
- Definicija vjerojatnosti treba biti općenita i obuhvaćati i klasične definicije vjerojatnosti
- Takvu definiciju temeljenu na aksiomima uveo je ***Kolmogorov*** 1933. godine
- Objekti u aksiomatskom pristupu su *slučajni događaji*

Kolmogorovi aksiomi

- Uzmimo da je Ω prostor elementarnih događaja
- Nekom događaju $A \subseteq \Omega$ želimo pridružiti vjerojatnost P(A)
- Pri tome tvrdimo da svako takvo pridruživanje mora zadovoljavati (aksiomi):

1. $P(A) \geq 0, \qquad \forall A$
2. $P(\Omega) = 1$
3. a) ako se konačan broj događaja međusobno isključuju (svaki par je disjunktan), vrijedi: $$P\left(\bigcup_{i}^{n} A_i\right) = \sum_{i}^{n} P(A_i)$$

   b) ako se prebrojivo beskonačan broj događaja međusobno isključuje, vrijedi: $$P\left(\bigcup_{i}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i}^{\infty} P(A_i)$$

Svojstva vjerojatnosti

I.

a) Zbog zatvorenosti skupa elementarnih događaja: $A, \overline{A} \in \Omega$

b) Prema definiciji suprotnog događaja je: $A \cap \bar{A} = \emptyset$

c) Siguran događaj: $P(A \cup \bar{A}) = 1$

- Iz a), b), c) i trećeg Kolmogorovog aksioma slijedi

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$$

II.

Iz prvog aksioma i relacije (I.) slijedi: $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

III.

Ako u relaciju (I.) umjesto A uvrstimo siguran događaj Ω, dobivamo:

- Uz postavku da je $\overline{\Omega} = \emptyset$ slijedi: $\boxed{P(\emptyset) = 0}$

Svojstva vjerojatnosti

IV.

- Uzmimo da je: $A_1 \subset A_2$
- Onda vrijedi: $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$
- Iz trećeg aksioma slijedi da je:

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)\text{, uz uvjet } A_1 \subset A_2$$

- Za bilo koja dva događaja ***A*** i ***B*** (ne nužno disjunktna) vrijedi:

$$\boldsymbol{A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]}$$

- Pa iz gornjih relacija slijedi:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}[B - (A \cap B)]$$

$$\rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

→ Sva ova svojstva poznata su i u klasičnoj definiciji vjerojatnosti

Podudarnost sa klasičnom definicijom

- Neka pokus ima velik broj mogućih ishoda – elementarnih događaja $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i}$
- Tada je vjerojatnost složenog događaja A: $P(A)=\sum_{\omega_i \subset A} P(\omega_i)$
- Ako imamo ***n*** jednako vjerojatnih ishoda (kao u definiciji a priori), onda je vjerojatnost svakog od njih: $P(\omega_i)=\frac{1}{n}, \forall i$
- Proizlazi da je vjerojatnost događaja A: $P(A)=\frac{n_A}{n}$

  gdje je $\boldsymbol{n_A}$ broj elementarnih događaja koji su podskupovi A

  → to je klasična definicija vjerojatnosti!