Statistika i osnovna mjerenja

Osnove kombinatorike

M. Makek

2017/2018

OSNOVNI POJMOVI KOMBINATORIKE

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Permutacije

Varijacije

Kombinacije

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Kombinatorijski problem:

- Želimo popuniti prazna mjesta 1 i 2
- Imamo n_1 elemenata kojima možemo popuniti mjesto 1 ($A_1,\ldots, A_{n1}$)
- Imamo n_2 elemenata kojima možemo popuniti mjesto 2 ($B_1,\ldots, B_{n2}$)
- Na koliko se različitih načina mogu popuniti prazna mjesta 1 i 2?

	A_1	**A_2**	**…**	**A_{n1}**
B_1	A_1B_1	A_2B_1	…	$A_{n1}B_1$
B_2	A_1B_2	A_2B_2	…	$A_{n1}B_2$
…	…	…	…	…
B_{n2}	A_1B_{n2}	A_2B_{n2}	…	$A_{n1}B_{n2}$

→ Može se kombinirati svaki A sa svakim B, stoga imamo $\mathbf{n_1 n_2}$ načina

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

- Pretpostavimo da imamo k praznih mjesta
- Imamo n_1 elemenata kojima možemo popuniti mjesto 1 ($A_1, \dots, A_{n1}$)
- Imamo n_2 elemenata kojima možemo popuniti mjesto 2 ($B_1, \dots, B_{n2}$)
- Imamo n_k elemenata kojima možemo popuniti mjesto k ($Y_1, \dots, Y_{nk}$)

TM: k mjesta možemo popuniti na $n_1 n_2 \dots n_k$ načina

→ Dokaz teorema je indukcijom iz prethodnog primjera

Primjer:

- ❑ 2 predjela
- ❑ 3 glavna jela
- ❑ 3 deserta

Možemo složiti 18 različitih jelovnika

Permutacije bez ponavljanja

- Pretpostavimo da imamo **n različitih elemenata A_1,…, A_n** koje možemo poredati u niz na više načina → svaki takav niz zovemo **permutacija**
- Koliko ima permutacija n elemenata?
  - Ekvivalentno pitanje je: na koliko se načina može popuniti n mjesta s n elemenata?

- 1. mjesto možemo popuniti na n načina → preostaje n-1 elemenata
- 2. mjesto možemo popuniti na n-1 načina → preostaje n-2 elemenata
- k. mjesto možemo popuniti na n-(k-1) način
- n. mjesto možemo popuniti na n-(n-1) = 1 način

Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju n mjesta mogu se popuniti na:

$$\boxed{P^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \overset{\text{def}}{=} n!}$$ (čitamo: n faktorijela)

po dogovoru je: 0!=1

Permutacije bez ponavljanja

Primjer: koliko riječi možemo složiti iz znakova **A, P, N**?

- Prvo mjesto možemo odabrati na 3 načina:
  - A _ _
  - P _ _
  - N _ _
- Drugo mjesto možemo odabrati na 2 načina:
  - A P _ , A N _
  - P A _ , P N _
  - N A _ , N P _
- Treće mjesto na jedan način:
  - A P N , A N P
  - P A N , P N A
  - N A P , N P A
- Ukupno 3! = 6 načina

Permutacije s ponavljanjem

- Pretpostavimo da imamo **n elemenata $A_1,\ldots, A_n$** od kojih je r_1, r_2, ..., r_k identičnih. Koliko ima permutacija takvih n elemenata?
- <u>Primjer</u>: koliko ima permutacija niza AABBB?

AABBB	BAABB	BBAAB	BBBAA
ABABB	BABAB	BBABA	
ABBAB	BABBA		
ABBBA			

Za svaki od ovih nizova postoje:
- 2! identična koji se dobiju permutacijama A
- 3! identična koji se dobiju permutacijama B

- $n=5$, $r_1=2$, $r_2=3$

  → broj različitih permutacija: n! / (r1!r2!) = 5! / (2!3!) = 10

Permutacije s ponavljanjem

- Ako imamo r_1 identičnih elemenata znači da se njihovom zamjenom ne dobivaju nove permutacije -- > dobivamo grupe od po $r_1!$ identičnih permutacija. Broj takvih grupa je $n!/r_1!$
- Od preostalih $n-r_1$ elemenata imamo r_2 identičnih. Taj skup permutacija dijeli se na grupe od po $r_2!$ identičnih permutacija. Broj permutacija je $n!/ r_1!\, r_2!$
- Općenito je onda broj permutacija $r_1, \ldots, r_k$ jednakih elemenata:

$$\boxed{P^{(n)}{}_{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$$

- Ovo je poopćenje relacije za broj permutacija

  → Ako su $r_1, r_2, \ldots r_k = 1$ onda se ova relacija svodi na slučaj permutacija bez ponavljanja

Varijacije bez ponavljanja

- Pretpostavimo da imamo **n različitih elemenata $A_1, \ldots, A_n$** koje želimo **poredati** u niz od **r** članova, ne dopuštajući ponavljanje jednog te istog elementa A_k → svaki takav niz zovemo **varijacija n-tog reda i r-tog razreda**
- Koliko ima takvih varijacija?
- Zamislimo da treba popuniti niz od **r** članova s **n** različitih elemenata (pri tome je uvijek r≤n):
  - 1. mjesto možemo popuniti na n načina
  - 2. mjesto možemo popuniti na n-1 način
  - r. mjesto možemo popuniti na n-(r-1) način
- Slijedi da je broj varijacija n-tog reda i r-tog razreda:

$$V_r^{(n)} = n(n-1)\ldots(n-r+1) \quad / \quad \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Varijacije bez ponavljanja

- Primjer:
  - Imamo na raspolaganju 27 slova
  - Želimo odabrati oznake od 2 slova za registarske tablice
  - Koliko oznaka možemo napraviti?

→ Obzirom da ovdje razlikujemo poredak slova i ne dopuštamo ponavljanje slova, radi se o varijacijama 27. reda i 2. razreda

→ $V = 27!/25! = 702$

Varijacije s ponavljanjem

- Pretpostavimo da imamo **n različitih elemenata $A_1, \ldots, A_n$** koje želimo **poredati** u niz od **r** članova, dopuštajući ponavljanje jednog te istog elementa A_k $\rightarrow$ svaki takav niz zovemo **varijacija n-tog reda i r-tog razreda s ponavljanjem**
- Koliko ima takvih varijacija?
  - 1. broj možemo odabrati na n načina
  - 2. broj možemo odabrati na n načina
  - r. broj možemo odabrati na n načina
- Slijedi da je broj varijacija n-tog reda i r-tog razreda s ponavljanjem:

$$\boxed{\bar{V}_r^{(n)} = n^r}$$

- Pri tome r može biti manji, jednak ili veći od n

Kombinacije bez ponavljanja

- Pretpostavimo da imamo **n različitih elemenata $A_1, \ldots, A_n$** od kojih želimo **odabrati r** članova, ne dopuštajući ponavljanje jednog te istog elementa
  $\rightarrow$ Odabrana r-torka se naziva **kombinacija n-tog reda i r-tog razreda**
- Za razliku od varijacija ovdje ne pridajemo značaj poretku odabranih elemenata $\rightarrow$ dvije kombinacije razlikuju se samo ako sadrže različite elemente
- Koliko ima takvih kombinacija?
  - uzmimo da smo odabrali varijacije $V_r^{(n)}$
  - varijacije grupiramo u skupove koji sadrže iste elemente, ali s različitim poretkom $\rightarrow$ svaki takav skup će sadržavati r! varijacija
- Slijedi da je broj kombinacija:

$$K_r^{(n)} = \frac{V_r^{(n)}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{r}$$

(čitamo: n povrh r)

Kombinacije bez ponavljanja

- Možemo postaviti dva ekvivalentna pitanja:
  - na koliko načina je moguće odabrati r elemenata od njih n? Odg. (n povrh r)
  - na koliko načina je moguće odabrati (n-r) elemenata od njih n? Isto onoliko, na koliko je moguće eliminirati r elemenata. Odg. (n povrh r)
- Slijedi: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$
- Što se lako vidi i matematički:

$$\binom{n}{n-r} = \left(\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}\right)\left(\frac{n!}{(n-r)!r!}\right) = \binom{n}{r}$$

Kombinacije bez ponavljanja

- Primjer loto 7/39:
  - Ukupno 39 brojeva
  - Treba odabrati 7 brojeva
    - ne ponavljaju se
    - poredak nije bitan

  → radi se o kombinacijama 39. reda i 7. razreda

  → $K = 39!/(7!\ 32!) = 15\ 380\ 937$