Statistika i osnovna mjerenja

Metoda najmanjih kvadrata

M. Makek

2017/2018

METODA NAJMANJIH KVADRATA

Linearna regresija

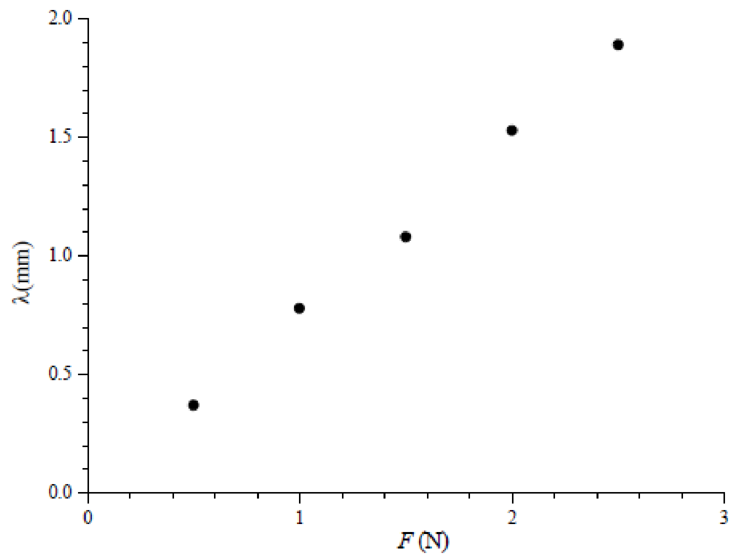
Linearizacija ovisnosti

Nelinearna regresija

Linearna regresija
(veza zavisne i nezavisne varijable linearna)

- Primjer:
  - Mjerimo ovisnost produljenja opruge (λ) o primjenjenoj sili (*F*)
  - Izmjereni su podaci te je nacrtan graf:

F(N)	λ(mm)
0,5	0,37
1	0,78
1,5	1,08
2	1,53
2,5	1,89



- Čini se da točke imaju linearnu ovisnost. Kako odrediti pravac koji “najbolje” slijedi točke?

Metoda najmanjih kvadrata
kod linearne regresije

- Od nekog pravca $\boldsymbol{y=ax+b}$ točka (x_i, y_i) odstupa za ε_i odnosno vrijedi možemo pisati: $\boldsymbol{y_i=ax_i + b + \varepsilon_i}$
- Princip najmanjih kvadrata:

  Od svih pravaca regresije najvjerojatniji je onaj za koji je suma kvadrata odstupanja minimalna

$$S(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 = min$$

- odnosno $\dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0 \quad \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0$

Metoda najmanjih kvadrata

kod linearne regresije

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_i 2[y_i - (ax_i + b)](-x_i)$$

$$= \sum_i 2\left[-x_i y_i + \left(a x_i^2 + b x_i\right)\right]$$

$$= 2\sum_i -x_i y_i + 2a\sum_i x_i^2 + 2b\sum_i x_i$$

$$\boxed{a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i - \sum_i x_i y_i = 0} \qquad (1)$$

Metoda najmanjih kvadrata

kod linearne regresije

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_i 2[y_i - (ax_i + b)]$$

$$= 2\sum_i y_i - 2a\sum_i x_i - 2b\sum_i 1$$

$$\sum_i y_i - a\sum_i x_i - bn = 0$$

$$\boxed{b = \frac{\sum_i y_i - a\sum_i x_i}{n}} \qquad (2)$$

Metoda najmanjih kvadrata

kod linearne regresije

- Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) i sređivanjem dobivamo izraze za koeficijente pravca:

$$\boxed{a = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a\sum x_i\right)}$$

Metoda najmanjih kvadrata

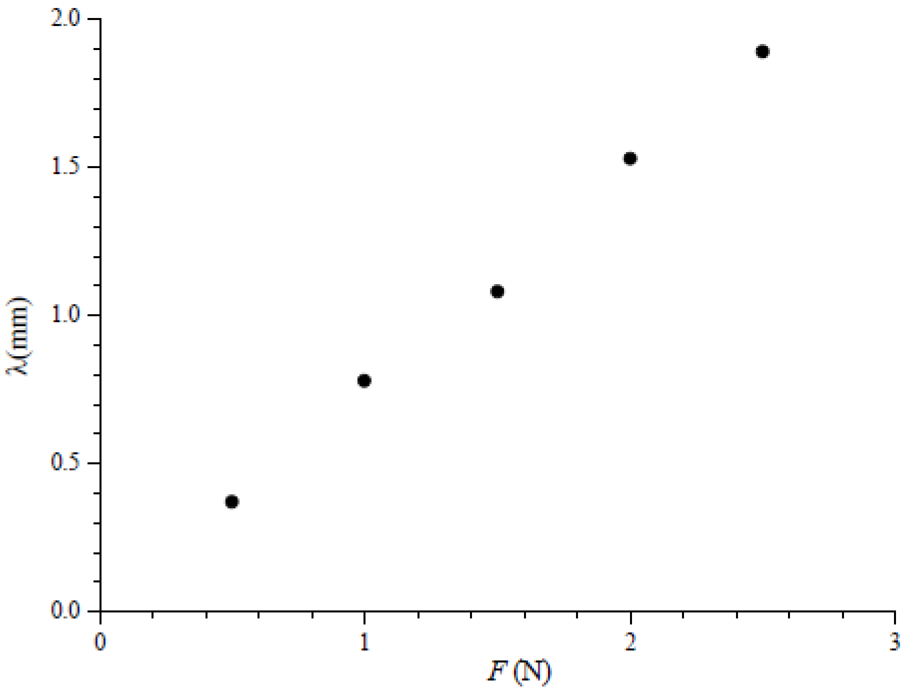
- Nepouzdanosti koeficijenata slijede iz izraza za *a* i *b* te izraza za propagaciju pogreške kod zavisnih mjerenja:

$$M_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)}\left[\frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} - a^2\right]}$$

$$M_b = M_a\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

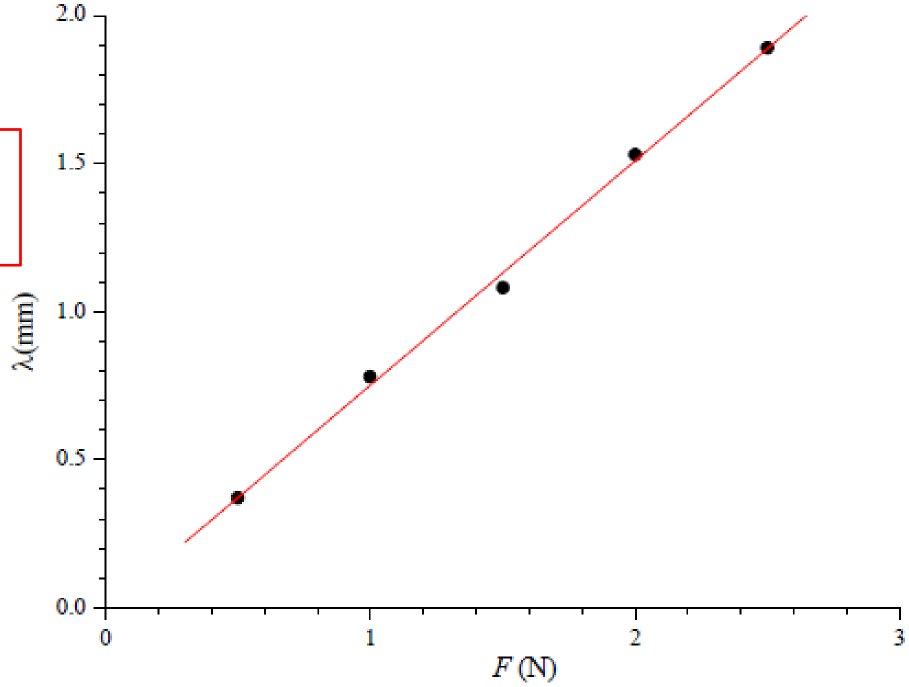
Metoda najmanjih kvadrata

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0.5	0.37	0.25	0.137	0.185
2	1.0	0.78	1.0	0.608	0.78
3	1.5	1.08	2.25	1.166	1.62
4	2.0	1.53	4.0	2.341	3.06
5	2.5	1.89	6.25	3.572	4.72
Σ	**7.5**	**5.65**	**13.75**	**7.824**	**10.365**



Metoda najmanjih kvadrata

$a = 0.756$ mm/N $M_a = 0.038$ mm/N
$b = -0.004$ mm $M_b = 0.063$ mm

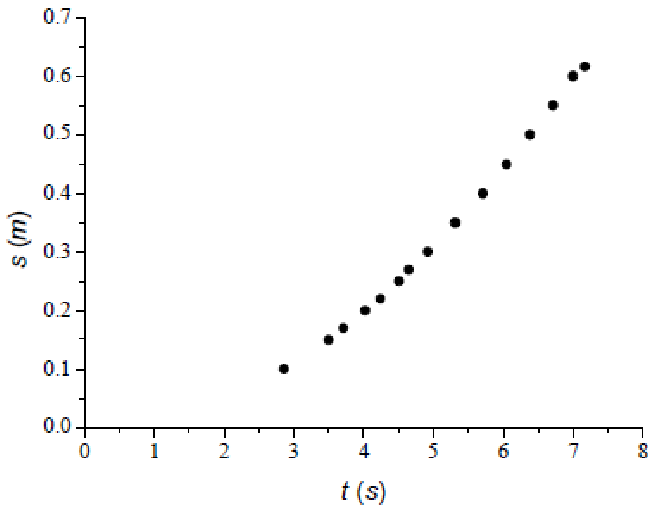


Linearizacija

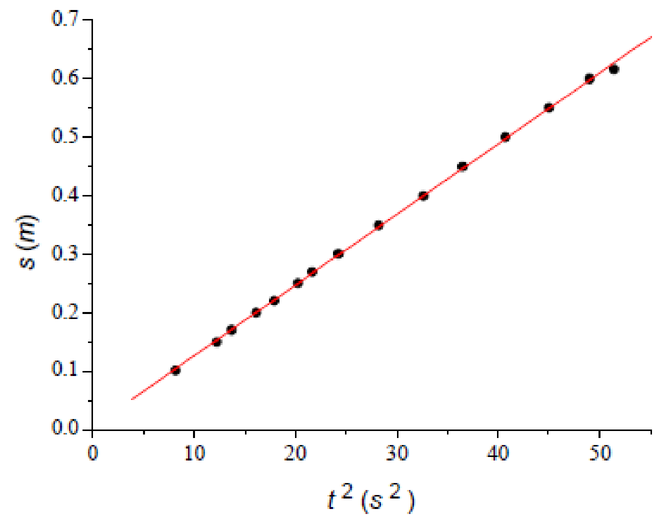
<u>Primjer 1:</u>

Kvadratna ovisnost $\boldsymbol{s(t) = 1/2at^2}$ → *linearna ovisnost* $\boldsymbol{s(t^2)=s(u)=1/2a\ u}$

→ dalje se računa s(u) kao da se radi o linearnoj regresiji



$u = t^2$



<u>Primjer 2</u>: linearizacija se vrši logaritmiranjem relacije → dalje račun za linearnu regresiju.

Nelinearna regresija

- u slučaju kada zavisna varijabla nelinearno ovisi o nezavisnoj
- primjer – tjerani prigušeni harmonički oscilator:

$$y(\omega) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

- potrebno je odrediti parametre *A*, ω_0 *i* τ, za koje je suma kvadrata odstupanja minimalna:

$$S(A, \omega_0, \tau) = \sum_i \left(y_i - \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \right)^2$$

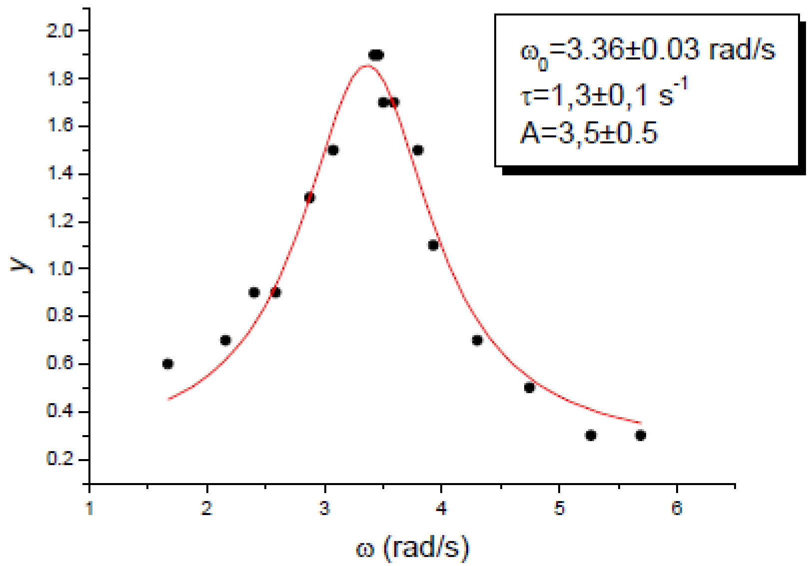
- Iz uvjeta minimizacije:

$$\frac{\partial S(A, \omega_0, \tau)}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial S(A, \omega_0, \tau)}{\partial \omega_0} = 0 \qquad \frac{\partial S(A, \omega_0, \tau)}{\partial \tau} = 0$$

- Slijede koeficijenti *A*, ω_0 *i* τ

Nelinearna regresija

- primjer



$$y = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega / \tau)^2}}$$