Statistika i osnovna mjerenja

Račun pogreške

M. Makek

2019/2020

Obrada rezultata mjerenja

- Prvi dio kolegija – obrada rezultata mjerenja je uvod koji je nužan za pristup laboratorijskim vježbama
- Praktični pristup – primjeri, formule i zadatci
- Sadržaj:
  - ❑**Račun pogreške**
  - ❑**Grafički prikaz rezultata**
  - ❑**Metoda najmanjih kvadrata**
- Cilj: statistički obraditi i pravilno prikazati rezultate mjerenja

RAČUN POGREŠKE

Vrste pogrešaka pri mjerenjima

Neovisna mjerenja

Ovisna mjerenja

Opća srednja vrijednost i nepouzdanost

Mjerenje fizikalnih veličina

- Cilj mjerenja je utvrditi brojčanu vrijednost neke veličine
- Zbog raznih utjecaja rezultat mjerenja $\boldsymbol{x_i}$ odstupa od prave vrijednosti veličine $\boldsymbol{X}$
- Odstupanje pojedine izmjerene vrijednosti od prave vrijednosti se naziva <u>pogreškom mjerenja</u>: $\boldsymbol{\Delta x = x_i - X}$
- Nastojanje eksperimenta je da izmjerena vrijednost bude što bliže pravoj vrijednosti i da pogreška mjerenja bude *pravilno procijenjena* kako bi rezultat bio valjan

Pogreške mjerenja

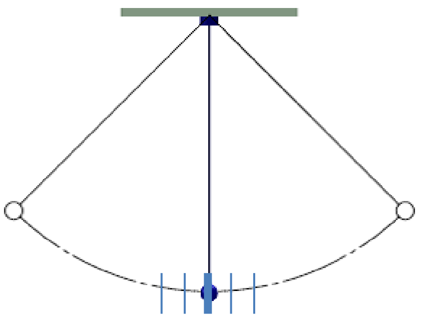
Razlikujemo tri tipa pogrešaka mjerenja:

- Slučajne pogreške
- Sistematske pogreške
- Grube pogreške

Grube pogreške

- Mogu nastati naglim poremećajem u okolini ili uređaju – npr. kvar
- Također mogu nastati zbog propusta eksperimentatora – npr. krivo očitanje ili zapisivanje rezultata
- Mjerenja za koja je ustanovljeno da sadrže grube pogreške treba odbaciti iz daljnje obrade ili ponoviti u ispravnim uvjetima

Sistematske pogreške (I)



Primjer:

- Mjerimo period titranja matematičkog njihala pomoću štoperice
- Moguće situacije:
  a) Vrijeme na štoperici odstupa od stvarnog vremena za konačan iznos. Npr. kad štoperica pokazuje 60 s, u stvarnosti je to 59 s

     → sva mjerenja vremena su sustavno manja za 59/60 ~ 1.7%

  b) Prilikom pritiska na gumb štoperice potrebno je neko vrijeme τ da uređaj reagira.

     → vrijeme reakcije uvijek uzrokuje kašnjenje mjerenja za isti iznos τ

  c) Kut očitavanja daje krivi ravnotežni položaj

     → kut očitavanja uzrokuje pogrešno mjerenje vremena za isti iznos t

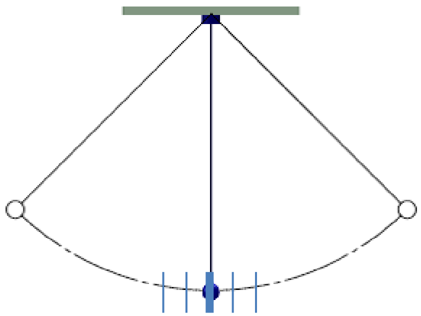
Sistematske pogreške (II)

Netočnosti mjerenja **uzrokovane mjernim uređajem ili tehnikom**

→ npr. pogrešno kalibrirana ili pomaknuta skala

- Prilikom ponavljanja mjerenja javljaju se u istom smjeru i iznosu (reproducibilnost!)
- Nisu predmetom statističke analize
- Mogu se ukloniti ili smanjiti na nekoliko načina:
  - poboljšanjem aparature ili tehnike – npr. preciznija kalibracija
  - planiranjem mjerenja – mjerenje se u nekim situacijama može organizirati tako da se sistematske pogreške ponište.
    Primjer: kada mjerimo vrijeme štopericom svaki puta kad pritisnemo gumb mjerenja kasni za vrijeme τ. U slučaju mjerenja perioda njihala isto vrijeme kašnjenja je prisutno pri pokretanju i zaustavljanju štoperice, pa se ove dvije pogreške poništavaju.

Slučajne pogreške (I)



Primjer:

- Mjerimo period titranja njihala pomoću štoperice

  → u tom slučaju **mjerni uređaj** čine čovjek + štoperica
- Izvršimo 10 mjerenja i dobivamo vrijednosti koje se razlikuju
- Što može dovesti do razlike u rezultatima mjerenja:
  a) Brzine reakcije kod uključivanja/zaustavljanja štoperice
  b) Preciznost štoperice (zaokruživanje decimala)
  c) Nejednako očitavanje ravnotežnog položaja njihala

  → nesavršenost mjernog uređaja

  d) Promjene ravnotežnog položaja njihala u vremenu, npr. zbog drmanja postolja na kojem se nalazi ili strujanja zraka

  → utjecaj okoline

Mjerenje	T [s]
1.	12.5
2.	11.9
3.	13.0
4.	13.1
5.	12.6
6.	12.2
7.	12.7
8.	11.6
9.	13.4
10.	12.8

Slučajne pogreške (II)

- Svojstva slučajnih pogrešaka:
  - Ponavljanjem mjerenja dobivaju se različiti rezultati - slučajne pogreške različite po iznosu i smjeru
  - Mogu se statistički obraditi (čime ćemo se mi baviti)
- Uzrok pogreške su nestalni uvjeti mjerenja:
  - Preciznost mjernog uređaja
  - Promjena okoline
- Smanjenje slučajnih pogrešaka:
  - Usavršavanje mjernog uređaja ili tehnike (npr. automatizacija mjerenja u našem primjeru)
  - Izolacija od okoline
  - Ponavljanjem mjerenja i statističkom obradom može se preciznije odrediti prava vrijednost fizikalne veličine

Slučajnu pogrešku možemo definirati kao *neodređenost rezultata* zbog konačne preciznosti uređaja i fluktuacija u uvjetima mjerenja.

Neovisna mjerenja

- Izvodimo niz mjerenja neke fizikalne veličine $\boldsymbol{X}$ i dobivamo rezultate $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$, koji se međusobno razlikuju zbog prisustva slučajnih pogrešaka
- Da bi odredili najvjerojatniju vrijednost mjerene veličine i pogrešku mjerenja definiramo sljedeće pojmove:
  - Srednja vrijednost
  - Srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja
  - Srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine
  - Relativna nepouzdanost
  - Maksimalna apsolutna pogreška

Srednja vrijednost

- izračunava se kao aritmetička sredina izmjerenih vrijednosti
- za *n* mjerenja aritmetička sredina je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Uzimamo da je upravo $\bar{x}$ najvjerojatnija prava vrijednost ***X*** mjerene fizikalne veličine → $\bar{x}$ govori o očekivanoj vrijednosti mjerene veličine

Srednja kvadratna pogreška mjerenja (standardna devijacija)

- kvadratna odstupanja izmjerenih vrijednosti od srednje vrijednosti

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- za dovoljno velik n (~10 mjerenja), m poprima ustaljenu vrijednost
- govori o pouzdanosti pojedinog mjerenja
- iskazuje rasipanje rezultata kao posljedicu preciznosti uređaja → ***mjera preciznosti uređaja***

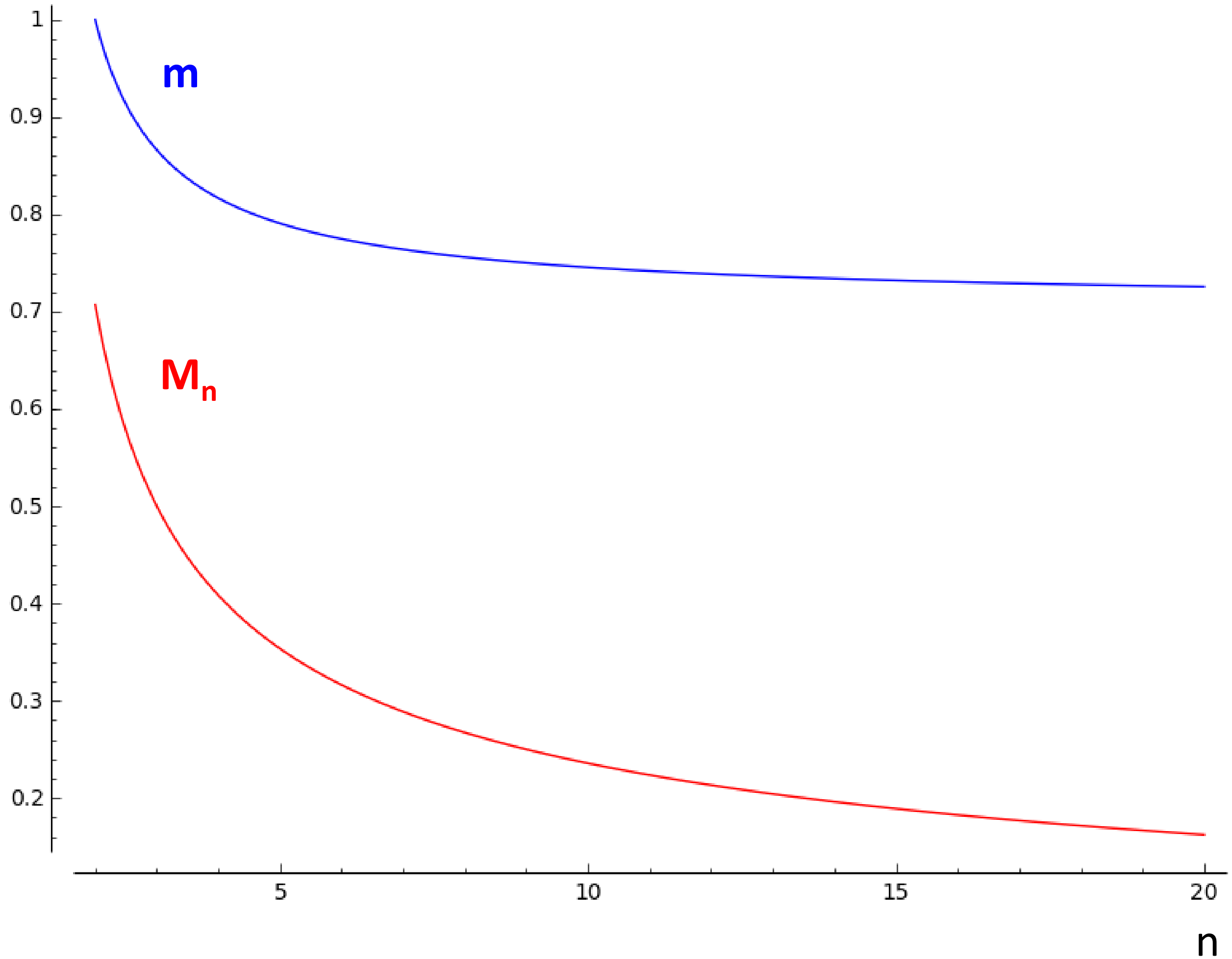
Srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine (nepouzdanost)

- Ako izvedemo veći broj mjerenja očekujemo da će fizikalna veličina biti preciznije određena
- Mjera *preciznosti rezultata* je srednja kvadratna pogreška aritmetičke sredine:

$$M_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- M_n se smanjuje sa brojem mjerenja proporcionalno ~ 1/√n → povećava se preciznost rezultata
- Govori o ***pouzdanosti rezultata***

Pogreške u odnosu na broj mjerenja



Maksimalna apsolutna pogreška

- najveće odstupanje pojedinačnog mjerenja od aritmetičke sredine:

$$\Delta x = |\bar{x} - x_i|_{max}$$

- Ponekad zbog prirode eksperimenta ne možemo izračunati M_n:
  - ako imamo samo jedno mjerenje
  - ako sva mjerenja daju isti rezultat pa je M_n=0
- Tada procjenjujemo maksimalnu pogrešku Δx

Relativna nepouzdanost

- ako je poznat M_n:

$$R = \frac{M_n}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

- ako nije poznat M_n :

$$R = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Rezultat

- pišemo u obliku:

$$x = \bar{x} \pm M_n$$

- ako nije poznat M_n:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

Zaokruživanje rezultata

Primjer:

– pri ponavljanju mjerenja perioda njihala dobili smo srednju vrijednost: $T = 2.453$ s

– pogreška mjerenja iznosi: $\Delta T = 0.223$ s

– Rezultat pišemo kao: $T = 2.5 \pm 0.2$ s

Prva značajna znamenka

Pouzdana znamenka

Prva nepouzdana znamenka

Pogreška se u pravilu zaokružuje na prvu znamenku različitu od nule

Rezulat se zaokružuje na prvu nepouzdanu znamenku – onu koja je na istom decimalnom mjestu kao i zaokružena pogreška

Primjer

- Mjerenje perioda ***T*** matematičkog njihala
- Na temelju izmjerenih vrijednosti dobivamo:

$$\bar{T} = 12{,}6\ s$$

$$m = 0{,}6\ s$$

$$M_{10} = 0{,}2\ s$$

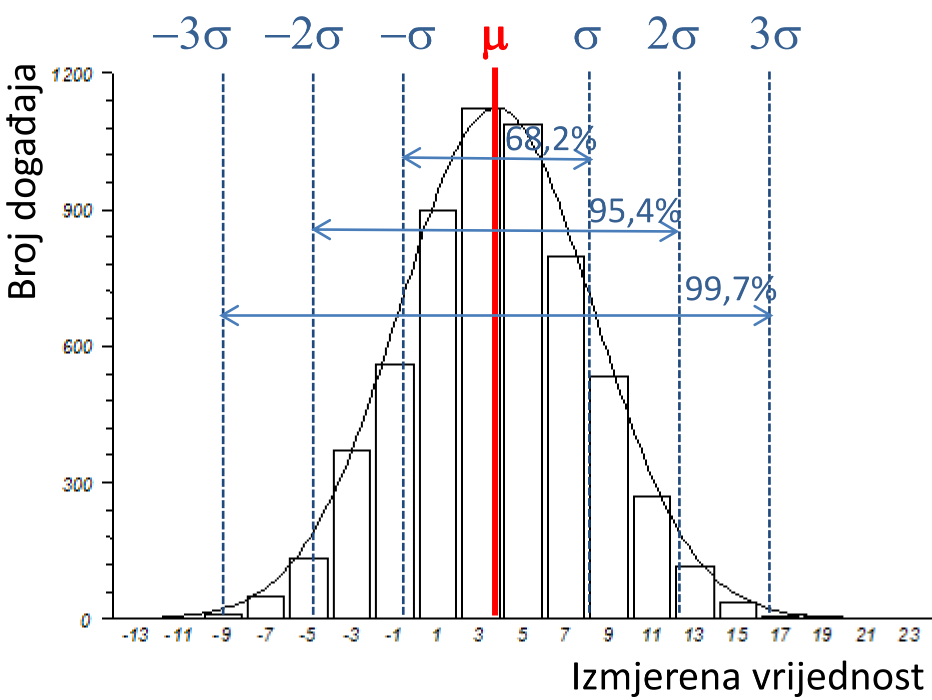
- Pa pišemo rezultat mjerenja:

$$T = 12{,}6 \pm 0{,}2\ s$$

Mjerenje	T [s]
1.	12,5
2.	11,9
3.	13,0
4.	13,1
5.	12,6
6.	12,2
7.	12,7
8.	11,6
9.	13,4
10.	12,8

Gaussova raspodjela

- Ako ponavljamo mjerenje veličine *x*, dobit ćemo niz rezultata $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, koji se međusobno razlikuju zbog prisustva slučajnih pogrešaka
- Može se pokazati da vrijednosti dobivene ponavljanjem mjerenja slijede ***Gaussovu*** raspodjelu. (Pri tome zanemarujemo sistematske greške.)



Rezultat mjerenja prikazan kao:

$$x = \bar{x} \pm M_x$$

srednja vrijednost ($\bar{x}$)

nepouzdanost (M_x)

može se opisati pomoću Gaussove raspodjele:

$$\sim e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

gdje pretpostavljamo: $\bar{x} = \mu$

$$M_x = \sigma / \sqrt{n}$$

Ovisna mjerenja

- Tražena veličina *F* je funkcija neposredno izmjerenih veličina x_i, $F = f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)$
- Najvjerojatnija vrijednost je srednja vrijednost:

$$\bar{F} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots \bar{x}_n)$$

- Ako su veličine x_i međusobno neovisne onda je srednja kvadratna pogreška veličine *F*:

$$M_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\bar{x}} M_i \right)^2}$$

- Rezultat pišemo kao: $F = \bar{F} \pm M_F$

Ovisna mjerenja

Primjer: želimo odrediti ubrzanje sile teže mjerenjem perioda titranja (T) i duljine niti (l) matematičkog njihala

- Ubrzanje sile teže je dano relacijom: $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$
- Uzmimo da su neovisnim mjerenjima dobiveni rezultati:
  - ***l*** = 0.850 ± 0.002 m
  - ***T*** = 1.849 ± 0.003 s
- Srednje ubrzanje sile teže je: $\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2}$
- Srednja kvadratna pogreška je:

$$M_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} M_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} M_T\right)^2} \qquad M_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} M_l\right)^2 + \left(2\,\frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3} M_T\right)^2}$$

- Uvrštavanjem dobivamo: g=(9.82 ±0.04) ms^{-2}

Opća srednja vrijednost

- Izvedeno je ***m*** nizova mjerenja **iste** fizikalne veličine te je za svaki niz dobivena srednja vrijednost i kvadratna pogreška:

$$x_i = \bar{x}_i \pm M_i, \quad i = 1 \dots m$$

  → primjer fizikalna veličina je određena različitim eksperimentalnim metodama

- **Konzistentna mjerenja** – ako su razlike za svaki par mjerenja $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ usporedive s bilo kojim M_k
- **Nekonzistentna mjerenja** - ako su razlike $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ >> M_k tada zanemarujemo nepouzdanosti M_k, a veličine $\bar{x}_k$ smatramo nezavisnama te ih tako i analiziramo

Opća srednja vrijednost

- Za **konzistentna mjerenja** definiramo opću aritmetičku sredinu:

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{x}_i}{M_i^2} \right) M^2$$

- Gdje je *M* nepouzdanost:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} M_i^{-2}}}$$

- Rezultat pišemo u obliku:

$$x = \bar{x} \pm M$$

- Poseban slučaj **konzistentnih mjerenja** je kada je jedna pouzdanost M_k znatno manja od svih ostalih. Tada vrijedi $M \approx M_k$

Povećanje preciznosti rezultata
ili kako smanjiti pogreške?

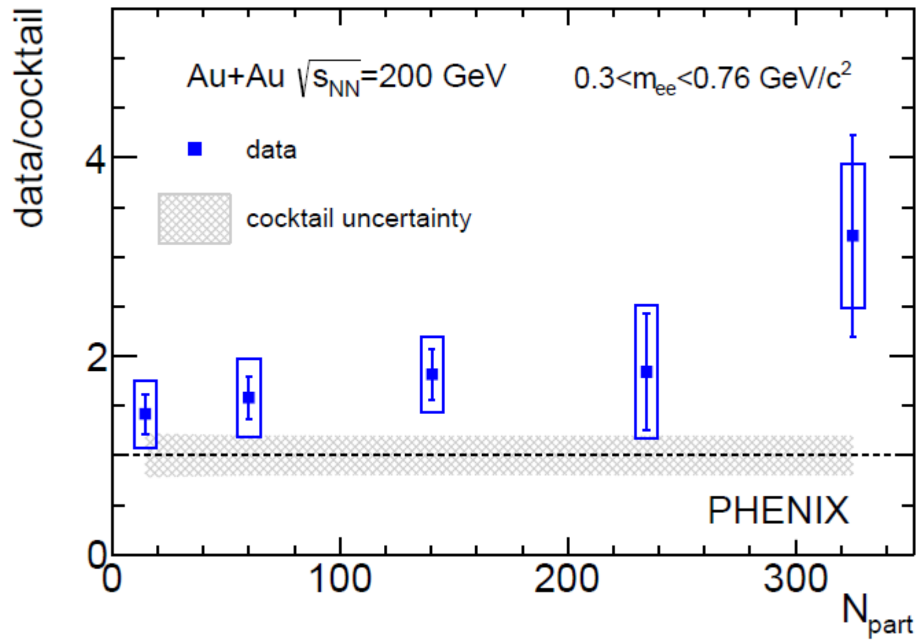
- Moguće sistematske pogreške treba reducirati pri planiranju eksperimenta – treba razviti i napraviti mjerni uređaj ili tehniku koja će omogućiti relativno male sistematke pogreške
  → bolji uređaj u pravilu znači skuplji uređaj
- Slučajne pogreške u pravilu se mogu smanjiti ponavljanjem mjerenja
  → dulje mjerenje znači skuplje mjerenje
- Koliko mjerenja treba napraviti? Toliko da slučajna (statistička) pogreška bude manja ili podjenaka sistematskoj
  → najčešče se pokazuje da je to financijski i vremenski najefikasnije rješenje

Statističke i sistematske pogreške

- Primjer mjerenja

→ Svaka izmjerena točka ima pripadajuću statističku pogrešku (vertikalne crte) i sistematsku pogrešku (pravokutnici)

→ Obje pogreške su usporedive



A. Adare *et al.* (PHENIX Collaboration), Phys. Rev. C 93 014904