

# **Modeliranje volatilnosti vrijednosnica na Zagrebačkoj burzi**

**Dragan Šestović**

**i**

**Mladen Latković**

**Fizički odsjek  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Sveučilište u Zagrebu  
Bijenička cesta 32  
10000 Zagreb  
Hrvatska**

**Siječanj, 1998.**

## Sažetak

Za dobar opis rizika kojem je izložen neki portfelj vrijednosnica, kao i za pojedinačne vrijednosnice ili valute, potrebno je načiniti predviđanja drugih momenata u vremenskim serijama, tj. varijabilnosti. Empirijska istraživanja pokazuju da su vremenske serije s financijskih tržišta heteroskedastične, što znači da volatilnosti nisu konstantne u vremenu. Stoga su razvijeni prikladni matematički modeli koji te efekte uzimaju u obzir. U ovom članku je prikazano kako se u tu svrhu koriste modeli iz GARCH (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) familije. Pokazali smo značenje pojedinih parametara u GARCH(1,1) modelu, te da je vrlo upotrebljavani model za heteroskedastičnost vremenskih serija EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) specijalni slučaj IGARCH modela. Korištenjem metode maksimalne vjerojatnosti odredili smo parametre modela za dionice Plive (PLI-AA), Zagrebačke banke (ZAB-O), te indeksa CROBEX i S&P500. Pokazali smo kako upotreba navedenih metoda poboljšava predviđanja tržišnog rizika.

## **Volatility modeling of assets from Zagreb Stock Exchange**

### **Abstract**

For proper valuation of risk to which the portfolio of financial assets is exposed, it is necessary to forecast the second moments of financial time series, that is variabilities. The empirical investigations show that financial time series are heteroskedastic, i.e. their volatility is not constant in time. For that reason the appropriate mathematical models were developed which take this effect into account. In this paper we study one particular member of GARCH family of models that successfully describe heteroskedasticity, i.e. GARCH(1,1) model. We show the significance of the model parameters, and also make the connection between the frequently used EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) model which is a special case of IGARCH model (Integrated GARCH). Using the maximum likelihood method we calculate the model parameters for Pliva ordinary share (PLI-AA), Zagrebačka banka ordinary share (ZAB-O), the Zagreb Stock Exchange share price index CROBEX and index S&P500. By using these models we show how one can improve risk-forecasting process.

## O autorima

### **Dragan Šestović**

Fizički odsjek  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Bijenička cesta 32  
10000 Zagreb

telefon: 460-5562  
e-mail: [dragan@phy.hr](mailto:dragan@phy.hr)

Doktor znanosti iz područja teorijske fizike, viši asistent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

### **Mladen Latković**

Fizički odsjek  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Bijenička cesta 32  
10000 Zagreb

telefon: 460-5559  
e-mail: [laci@phy.hr](mailto:laci@phy.hr)

Magistar znanosti iz područja teorijske fizike, asistent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

## 1. Uvod

Svjedoci smo eksplozivnog porasta trgovanja različitim financijskim instrumentima na primarnim i sekundarnim financijskim tržištima u svijetu i u našoj zemlji. Pojedini izvori navode da je dnevni volumen trgovanja na deviznim tržištima i tržištima financijskih derivata oko deset puta veći od ukupnog dnevnog međunarodnog prometa roba i servisa [1]. Uz stara i vrlo uređena tržišta zemalja zapadne Evrope, sjeverne Amerike i Japana, postoje i tzv. izranjajuća tržišta (*emerging markets*) koja su vrlo zanimljiva investitorima, a to su prije svega tržišta u Aziji (u zadnje vrijeme žestoko potresena), te tržišta u južnoj Americi. U novije vrijeme pojavljuju se i tržišta u postkomunističkim zemljama istočne i jugoistočne Evrope (*frontier markets*). U potonje spada i tržište vrijednosnica u Hrvatskoj.

Velika aktivnost na tržištima vrijednosnica dovela je do izuzetnog razvoja kvantitativnih financijskih metoda. Rezultati analiza financijskih vremenskih serija su od neprocjenjive važnosti u donošenju odluka. Od posebne važnosti je procjena tržišnog rizika za subjekte na financijskim tržištima. Pod tržišnim rizikom podrazumijevamo rizik usljed neizvjesnosti zarade i prinosa koje mogu nastati promjenama cijena vrijednosnica (assets), kamatnih stopa ili tečajeva valuta, njihovih volatilnosti (volatility) i likvidnosti [2]. Tržišni rizik je usko povezan sa volatilnošću cijena vrijednosnica i korelacijama između različitih vrijednosnica. Osim toga postoji međusobna ovisnost između volatilnosti i očekivanog prinosa. Investitori zahtijevaju veće prinose od vrijednosnica sa većim rizikom. U skladu s empirijskim nalazima razvijeni su modeli za povezivanje očekivanog prinosa i rizika, a najpoznatiji su CAPM (Capital Asset Pricing Model) [3] i APT (Arbitrage Pricing Theory) [4].

U zadnje vrijeme javlja se i izuzetan porast zanimanja za financijske izvedenice (derivatives). Za doprinose teorijskoj analizi cijena ovih instrumenata 1997 godine je Nobelova nagrada za ekonomiju dodijeljena M. Scholesu i R. C. Mertonu [5]. Napomenimo da se u budućnosti očekuje pravno uređivanje okvira za trgovanje ovakvim instrumentima u Hrvatskoj. Izvedenice imaju veliku ulogu u ograničavanju rizika (*hedging*), te povećavaju likvidnost cijelog financijskog sistema. Od izuzetnog značaja je kvantitativno određivanje „pravedne“ cijene tih instrumenata. Da bi se pravedna cijena izvedenica odredila potrebno je imati prikladne matematičke modele ponašanja vrijednosnica. Volatilnost vrijednosnice je jedan od najvažnijih parametara za određivanje cijena opcije.

Potreba za kvantificiranjem tržišnog rizika, uz ostale vrste rizika u bankarskoj industriji istaknuta je i u novim dokumentima BIS-a (*Bank for International Settlements*). BIS danas djeluje kao međunarodno priznati forum za koordinaciju centralnih banaka i ostalih regulatorskih tijela u većini zemalja OECD-a. U prijedlogu od siječnja 1996. godine BIS djelomično usklađuje svoje prijedloge sa praksom u vodećim svjetskim bankama, gdje se koriste vrlo sofisticirane metode za određivanje tržišnih rizika u transakcijama sa različitim vrijednosnicama. Tako se predlaže da banke konstantno izračunavaju tržišni rizik svojih portfelja za 10 dana unaprijed unutar intervala pouzdanosti od 99%.

Sve navedeno nas navodi na potrebu da se ozbiljno pozabavimo s modeliranjem volatilnosti vrijednosnica na Hrvatskom tržištu. Iako se slična razmatranja trebaju provoditi i na slučaju deviznih tržišta i kamatnih stopa, mi ćemo se ovdje ograničiti na

promatranje tržišta dionica. Kao primjer analizirati ćemo dvije najlikvidnije dionice s našeg tržišta, Plive i Zagrebačke banke, a kojima se istovremeno trguje i na Londonskoj burzi, te indeksa našeg tržišta CROBEX i indeksa Njujorške burze S&P500.

U 2. poglavlju pokazat ćemo da su vremenske serije dionica heteroskedastične, tj. pojedina razdoblja su okarakterizirana povećanom volatilnošću (a time i rizikom), dok su u pojedinim razdobljima tržišta mirnija. U 3. poglavlju ćemo pokazati kako se GARCH (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) modelom mogu opisati ovi efekti. U 4. poglavlju pokazat ćemo kako se metodom maksimalne vjerojatnosti mogu odrediti parametri modela za promatrane dionice. Uz pomoć dobivenih parametara pokazat ćemo u 5. poglavlju kako navedene metode poboljšavaju predviđanje volatilnosti, a time i procjenu tržišnog rizika. Zaključci i smjernice za daljnje analize heteroskedastičnosti financijskih serija na domaćem tržištu bit će dani u 6. poglavlju.

## 2. Volatilnosti u vremenskim serijama dionica

Na slici 1. prikazano je kretanje cijena i volumena trgovanja dionicama Plive (PLI-AA) u razdoblju od 3.9.1996. do 31.12.1997. godine. Već sa slike se vidi da se pojedina razdoblja međusobno razlikuju po volatilnosti cijene. No, ono što najviše zanima investitore su prinosi. U tu svrhu se mogu izračunati logaritamski prinosi, tj. razlike logaritama zaključnih cijena postignutih u periodu od jednog dana. Kasnije ćemo vidjeti zašto su logaritamski prinosi prikladniji za prikaz dnevnih promjena cijena. No, pri procjenjivanju dinamike volatilnosti promatramo kvadrat inovacije prinosa  $\eta_i^2 = (r_i - r)^2$ , tj. kvadrat razlike logaritamskog prinosa i srednjeg logaritamskog prinosa (*squared excess return*). Prosječna vrijednost ovih veličina u cijelom periodu predstavlja najjednostavniju procjenu varijabilnosti (kvadrata volatilnosti) tokom cijelog perioda i važan je parametar za orijentaciju kod trgovanja sa dionicama i procjenu cijena financijskih izvedenica baziranih na cijeni tih dionica. Kratak pogled na sliku 2. koja prikazuje kvadrat inovacije, može nas uvjeriti da se varijabilnost kvadrata prinosa dionice Plive mijenja u vremenu. Lako se uočavaju područja grupiranja velikih kvadrata razlike prinosa u vremenima s većom volatilnosti, kao i područja s manjom volatilnošću. Brojni empirijski radovi pokazuju da je to općenit slučaj na svim financijskim tržištima [2]. Također, primjetimo da u vremenu odmah nakon “burzovnog sloma”, koji se je dogodio 28.10.1997. godine, dolazi do snažnih volatilnosti u prinosima.

## 3. Matematičko modeliranje volatilnosti

Da bi se izvršila kvantitativna analiza vremenskih serija i odredile procjene budućih kretanja cijena i volatilnosti potrebno je naći prikladne matematičke modele. Široko prihvaćeni model kretanja cijena vrijednosnica je model geometrijskog Brownovog gibanja. Brownovim gibanjem je originalno nazvano stohastičko gibanje mikroskopskih čestica u kapljici vode, no danas se upotrebljava u širokom spektru različitih pojava u prirodnim znanostima, tehnici i ekonomiji.

Geometrijsko Brownovo gibanje je proces opisan sljedećim matematičkim modelom:

$$\begin{aligned} S_i &= S_{i-1}(1 + \mu + \eta_i) \\ \eta_i &= \sigma_i \varepsilon_i \end{aligned} \quad (1)$$

gdje je  $S_j$  cijena u trenutku  $t_j$ ,  $\mu$  je srednji kontinuirani prinos,  $\eta_i$  je inovacija, tj. slučajni faktor koji uzrokuje stohastičko kretanje cijena,  $\sigma_i$  je volatilnost, a  $\varepsilon_i$  slučajni broj iz normalne raspodjele  $N(0,1)$ . Iako je geometrijsko Brownovo gibanje karakterizirano s konstantnom volatilnošću, dodali smo vremenski indeks dozvoljavajući mogućnost da volatilnost slijedi neku vremensku dinamiku. Nedostatak ovog modela je u tome što cijena može postići negativnu vrijednost, te se stoga on modificira tako da se promatraju prirodni logaritmi cijena. Logaritmiranjem izraza za cijene u (1) dobivamo jednadžbu za veličinu  $s_j = \ln(S_j)$ :

$$s_i = s_{i-1} + r + \eta_i \quad (2)$$

gdje je  $r$  srednji logaritamski prinos. U slučaju konstantne volatilnosti inovacije, gornji izraz daje standardni model za modeliranje kretanja cijena na financijskim tržištima. Uz takvu pretpostavku prikladna procjena volatilnosti cijena dionica za danu vremensku seriju je dana izrazom:

$$\sigma = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \eta_i^2 \quad (3)$$

što predstavlja standardnu devijaciju prinosa u promatranom razdoblju. No, ako želimo uvažiti heteroskedastičnost vremenskih serija, možemo pretpostaviti da bliža povijest inovacija više utječe na volatilnost u trenutku  $t+1$ , nego daljnja povijest. Stoga možemo inovacijama u proteklom razdoblju pridijeliti različite težine u sumaciji. Jedan od najjednostavnijih modela s takvim svojstvom je EWMA model (*Exponentially Weighted Moving Average*):

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=t}^{-\infty} \lambda^i \eta_i^2 \quad (4)$$

Iz tog izraza se lako može konstruirati rekurzivna relacija pomoću koje se volatilnost u  $t+1$  izračunava pomoću volatilnosti i inovacije primjećene u trenutku  $t$ .

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1 - \lambda) \eta_t^2 \quad (5)$$

Parametar  $\lambda$  predstavlja faktor gušenja, tj. njena recipročna vrijednost pokazuje koliko daleko inovacija ili slučajni šok u jednom periodu utječe na volatilnosti u budućim periodima. Ovaj model se često u praksi koristi za kratkoročna predviđanja. Takav se model koristi i u poznatoj J. P. Morgan/Reuters RISKMETRICS metodologiji određivanja rizika [2].

EWMA model možemo generalizirati tako da dozvolimo da se suma koeficijenata u rekurzivnoj relaciji (5) razlikuje od jedinice, uz dodatak konstantnog člana. Tako dobivamo GARCH(1,1) model koji se u praksi pokazao vrlo uspješnim [6,7]:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha\eta_t^2 \quad (6)$$

gdje parametri modela zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$0 \leq \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \leq 1 \quad (7)$$

Značenje pojedinih parametara postaje jasnije ako relaciju (6) napišemo na nešto drugačiji način:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_t^2 + \alpha(\eta_t^2 - \sigma_t^2) \quad (8)$$

Član  $(\eta_t^2 - \sigma_t^2)$  predstavlja šok u seriji volatilitnosti dok parametar  $\alpha$  određuje koliko jako taj šok utječe na volatilitnosti u budućnosti. Recipročna vrijednost suma parametara  $\alpha + \beta$  pokazuje s kolikom brzinom se taj efekt guši u vremenu. Može se pokazati [6,7] da se na osnovi informacija u trenutku  $t$  može procijeniti varijabilnost nakon  $n$  perioda unaprijed, uz pomoć relacije:

$$E_t[\sigma_{t+n}^2] = (\alpha + \beta)^n (\sigma_t^2 - V) + V, \quad (9)$$

gdje je  $V$  bezuvjetna procjena volatilitnosti:

$$V = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (10)$$

Ukoliko je  $\alpha + \beta$  mali broj tada se procjena varijabilnosti brzo približava bezuvjetnoj varijabilnosti  $V$ . Kada je  $\alpha + \beta = 1$  dobivamo model s dugom memorijom, tj. IGARCH model (*Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Lako se uočava da je EWMA model samo specijalni slučaj IGARCH modela, uz  $\omega = 0$ .

Napomenimo još da se iste jednadžbe mogu koristiti i za modeliranje korelacija među vremenskim serijama, što je vrlo značajno za upravljanje portfeljima. Npr., u slučaju portfelja sastavljenog od dvije dionice, potrebno je modelirati tri druga momenta  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_{12}$ . U slučaju  $N$  dionica moramo modelirati  $N + N(N-1)/2$  varijabli, a broj parametara koji su potrebni za modeliranje portfelja se dobiva tako da tu vrijednost pomnožimo sa brojem parametara za jednu varijablu (u slučaju GARCH(1,1) modela to su 3 parametra). Ovakva modeliranja su numerički vrlo zahtjevna, ali uz pomoć danas dostupnih računala moguće ih je provesti.

#### 4. Empirijsko procjenjivanje parametara GARCH(1,1) modela

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se mogu procijeniti parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ , i  $\omega$  za danu vremensku seriju. U tu svrhu se možemo poslužiti metodom maksimalne vjerojatnosti. Neka je  $L(\eta_t, \eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-T}; \alpha, \beta, \omega)$  vjerojatnost da se uz dane parametre  $\alpha$ ,  $\beta$ , i  $\omega$  dogodi vremenska serija  $\{\eta_t, \eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-T}\}$ . Pretpostavimo sada obrnutu situaciju, dana je vremenska serija, a tražimo parametre. Pokazuje se da se ti parametri mogu dobiti ako

nađemo maksimum funkcije  $L$ , uz uvjete dane u relaciji (7). Može se pokazati da je funkcija  $L$  dana izrazom:

$$L = \sum_{i=1}^T \left[ -\ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \frac{\eta_i^2}{\sigma_i^2(\alpha, \beta, \omega)} - \frac{1}{2} \ln \sigma_i^2(\alpha, \beta, \omega) \right] \quad (11)$$

Maksimizacija funkcije  $L$  po parametrima modela vrši se pomoću numeričkog algoritma za traženje maksimuma funkcije uz zadane uvjete na parametre. U tu svrhu korištene su standardne rutine za optimalizaciju iz numeričke biblioteke NAG.

U tablici 1. navedeni su rezultati proračuna parametara GARCH(1,1) modela za vremenske serije dionica Plive (PLI-AA), Zagrebačke banke (ZAB-O), indeksa Zagrebačke burze CROBEX, te indeksa S&P500 kao primjer vremenske serije sa razvijenog financijskog tržišta. Rezultate za parametar  $\omega$  smo ispustili jer su oni povezani s ostalim parametrima preko relacije (10).

**Tablica 1.**

	$\alpha$	$\Delta\alpha$	$\beta$	$\Delta\beta$	$\alpha+\beta$
PLI-AA	0.36	0.1	0.5	0.07	0.86
ZAB-O	0.65	0.15	0.0001	0.04	0.65
CROBEX	0.43	0.1	0.56	0.06	0.99
S&P500	0.16	0.07	0.82	0.06	0.98

Kod tri domaće serije parametar  $\alpha$  je prilično velik što pokazuje da volatilitnost jako ovisi o inovaciji u prethodnom vremenskom koraku. Suma parametara  $\alpha+\beta$  za CROBEX je vrlo bliska jedinici, što pokazuje efekte duge memorije u seriji. To je čest slučaj kod indeksa tržišta, a dokaz tome je i indeks S&P500. Za vremenske serije koje pokazuju efekte duge memorije mogu se upotrebljavati i jednostavniji modeli IGARCH tipa, pa i EWMA. U slučaju dionice ZAB-O vidimo da je parametar  $\beta=0$ , a kako je suma  $\alpha+\beta$  daleko od jedinice, možemo reći da se šokovi u serijama prinosa brže guše u vremenu, za razliku od dionice PLI-AA.

## 5. Predviđanje rizika

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se GARCH(1,1) model koristi za jednodnevne procjene volatilitnosti, tj. rizika držanja dionice, i to na primjeru Plivine dionice. Na slici 3. prikazani su prinosi dionica i procjene rizika na dva načina. Jedan način je da volatilitnost dionice izračunamo po standardnoj formuli (3). Tako izračunatu vrijednost koristimo kao procjenu volatilitnosti tijekom cijelog perioda. U drugom načinu koristimo GARCH(1,1) model sa optimiziranim parametrima. Vrijednost volatilitnosti u trenutku  $t$  možemo aproksimativno odrediti iz realizirane vremenske serije za inovacije do tog trenutka, uz pomoć relacije dobivene rekurzivnom primjenom jednadžbe (6):

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{k=1}^{n-1} \beta^{k-1} + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{t-k}^2 \beta^{k-1} \quad (12)$$

gdje je  $n$  broj koji ovisi o toleranciji koju unaprijed zadajemo. Lako je pokazati da ako je  $\gamma$  tolerancija određivanja varijabilnosti, tada se red do kojega trebamo sumirati u drugom članu izraza (12) može odrediti pomoću jednostavne procjene:

$$n \approx \frac{\ln(\gamma)}{\ln(\beta)} \quad (13)$$

U slučaju Plivinih dionica dovoljno je izabrati 12 članova da bi se dobila volatilitnost uz toleranciju od  $10^{-5}$  (što je oko 0.03% od srednje volatilitnosti u promatranom intervalu). U graf smo ucrtali interval od  $1,65 \cdot \sigma$ , te na taj način smo dobili interval unutar kojega očekujemo apsolutnu vrijednost prinosa u sljedećem danu, uz pouzdanost od 95%. Ovu veličinu možemo nazvati rizikom držanja dionice. Često se ona označava kao VaR (Value at Risk) [2]. Ravnim iscrtkanim linijama ucrtan je interval računat pomoću relacije (3), a puna linija označava interval dobiven GARCH(1,1) modelom uz upotrebu relacije (12). GARCH(1,1) daje promjenjive volatilitnosti i njome se mogu „uhvatiti” velike volatilitnosti koje nastupaju u pojedinim razdobljima. U periodima mirnijeg tržišta (u sredini grafa) model daje niže i prikladnije procjene volatilitnosti, nego metoda s konstantnom volatilitnosti. Pojednostavljena procjena volatilitnosti (3) je opterećena doprinosima velikih volatilitnosti u nekim danima trgovanja kao što je “burzovni slom” od 28.10.1997., pa daje preveliku volatilitnost u mirnijim područjima. Uz navedene metode mogu se procjenjivati jednodnevne varijabilnost i za veća vremenska razdoblja. U tu svrhu nam može pomoći relacija (9) za procjenu jednodnevne varijabilnosti  $n$  dana unaprijed. Iz nje se vidi da će takve procjene za veća vremenska razdoblja konvergirati ka srednjoj volatilitnosti, tj. vrijednosti izračunatoj relacijom (10). Suma parametara  $\alpha + \beta$  određuje koliko brzo će procjena konvergirati ka srednjoj vrijednosti. U primjeru Plive to se zbiva već za periode veće od desetak dana. Međutim u primjeru CROBEX-a koji pokazuje karakteristiku integriranosti vremenske serije, tj. efekt duge memorije, šok u današnjem trenutku utječe na vrlo daleku budućnost. Višednevnu procjenu varijabilnosti možemo dobiti sumacijom jednodnevnih procjena u cijelom promatranom razdoblju. Kako se u slučaju integriranih serija, tj. IGARCH modela, procjene jednodnevne varijabilnosti u nekom budućem periodu poklapaju sa procjenom za sljedeći period dobiva se jednostavni zakon za skaliranje volatilitnosti:

$$\sigma_{t+T/t} = \sqrt{T} \sigma_{t=1/t}$$

Kod donošenja ovakvih zaključaka treba biti vrlo oprezan jer dugoročna skaliranja procjene volatilitnosti mogu dovesti do krivih rezultata, i to posebno u slučajevima vremenskih serija koje pokazuju tendenciju zadržavanja blizu određenog nivoa (kamatne stope, devizni tečajevi), ili kada postoje izvana nametnuti rubovi koji ograničavaju gibanje cijena. Nedostaci takvog skaliranja se mogu naći i u činjenici da se parametri modela nalaze numeričkim optimiziranjem za određene vremenske korake (npr. dan), a zatim se koriste za procjenjivanje volatilitnosti u dužim periodima (mjesec, godina).

Kao što smo već napomenuli, ovaj postupak se može provesti i za modeliranje korelacija između vrijednosnica koje čine portfelj, čime se dolazi do mogućnosti za bolje procjenjivanje rizika portfelja.

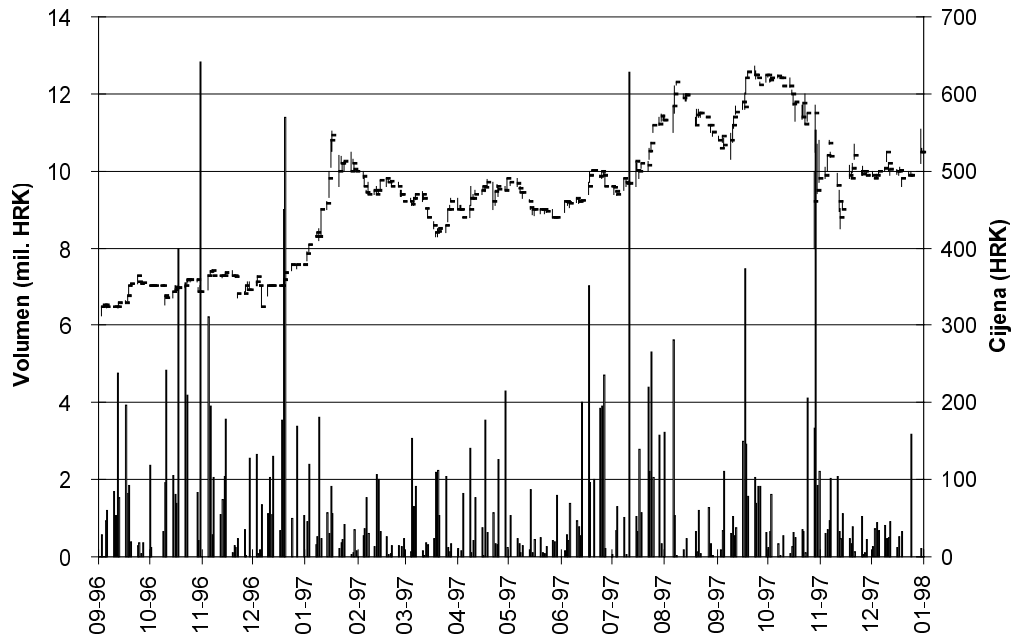
## 6. Zaključak

U ovom članku pokazali smo kako se pomoću GARCH(1,1) modela mogu predviđati volatilnosti vrijednosnica. Izračunali smo parametre modela za nekoliko karakterističnih dionica s hrvatskog tržišta kapitala. Pokazali smo kakve praktične rezultate daje ova metoda za kratkoročno predviđanje rizika. Kod vremenskih serija dionica Plive (PLI-AA), ova metoda znatno poboljšava kratkoročna predviđanja rizika, s obzirom na predviđanje s konstantnom volatilnošću. Za predviđanja jednodnevnih volatilnosti, a za više od desetak dana unaprijed, GARCH(1,1) model ne daje poboljšanja. Međutim, za vremenske serije kod kojih je  $\alpha + \beta$  blizak jedinici, kao što je to slučaj sa indeksom CROBEX, GARCH(1,1) model se može upotrijebiti i za znatno duža razdoblja, uz stanovit oprez. Ova metoda se može generalizirati i za modeliranje volatilnosti portfelja. Za to je potrebno pomoću iste metode modelirati i kovarijabilnosti između pojedinih vrijednosnica u portfelju.

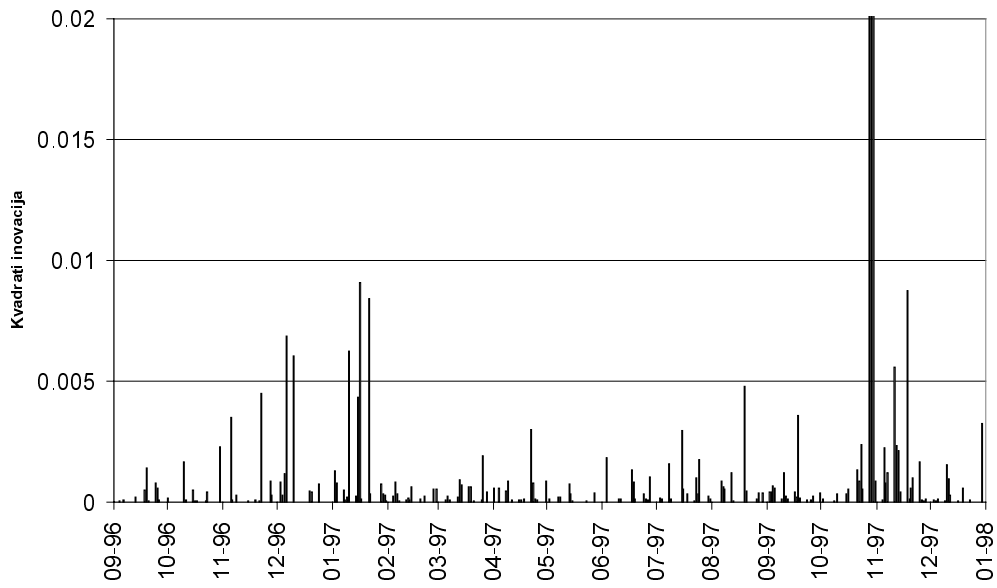
## Literatura

- [1] P. Siercu and R. Upsal (1995), *International Financial Markets and Firm*, International Thomson Publishing Company, London.
- [2] J. P. Morgan and Reuters (1996), *RISK METRICS: Technical Document*.
- [3] R. Merton (1973), An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 41, 867-887.
- [4] S. Ross (1996), The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.
- [5] F. Black and M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659, i R. C. Merton (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- [6] T. Bollerslev, R. F. Engle, and D. B. Nelson (1993), *ARCH models*, iz R. F. Engle i D. McFadden (eds), *The Handbook of Econometrics*, Vol. 4, North-Holland, Amsterdam.
- [7] J. Hamilton (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

