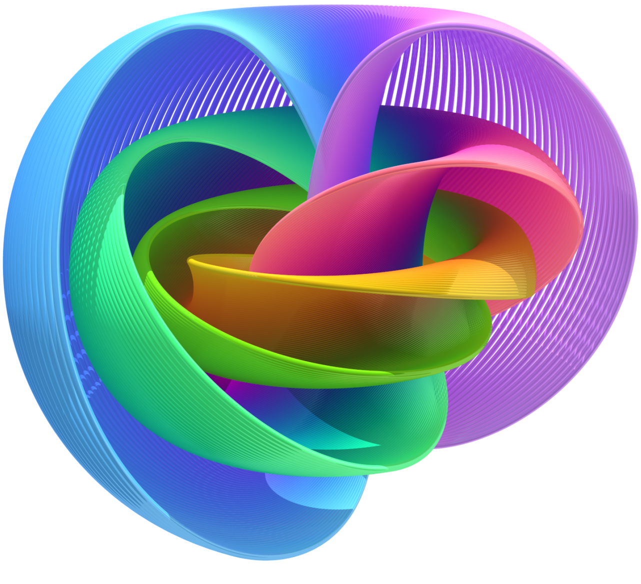
Krešimir Kumerički

Grupe, simetrije i tenzori u fizici



Slika na naslovnici: Niles Johnson, *Hopfova fibracija*
TikZ kôd ilustracija u knjizi: Mark Anthony Bromuela, Sveučilište Chittagong

Dokument odgovara `git` verziji `d163e8b` (tag: `ver-0.9.3`) datuma 2025-04-24.

Mojim roditeljima

Sadržaj

Predgovor

Ovo je udžbenik koji je nastao za potrebe nastave iz kolegija *Teorija grupa* i *Simetrije u fizici* koje sam niz godina držao na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu studentima istraživačkog smjera studija fizike. Kolegiji se drže na trećoj godini studija, kad su studenti već ovladali osnovama linearne algebre, jer poznavanje vektorskih prostora i algebre matrica je temeljni preduvjet za gradivo ove knjige. Drugi preduvjet je poznavanje osnova kvantne mehanike, jer su upravo u kontekstu kvantne mehanike načela simetrije primjenjivana u fizici s najviše uspjeha.

Povijesno, simetrije su često bile vodilja fizičarima, a posebno je Albert Einstein u svojim teorijama relativnosti pokazao do koje je mjere moguće ostvariti nove spoznaje o prirodi konzistentnom primjenom načela simetrija. Njihova sveobuhvatnost ide do te mjere da je danas naše najapstraktnije razumijevanje pojma elementarne čestice, moderne realizacije antičke ideje atoma, sasvim izraženo kroz simetrije tog objekta. Riječima Stevena Weinberga, „*Čestice su grudice energije i impulsa. No što su energija i impuls nego brojevi definirani translacijama u vremenu i prostoru. Čestica nije ništa drugo nego reprezentacija njene grupe simetrija. Svemir je enorman direktni produkt reprezentacija grupa simetrija.*" [Crease i Mann, 1996.].

Osnovni cilj ove knjige je dati u ruke studentu alat široke upotrebljivosti. Prva četiri poglavlja, koja daju matematičke osnove teorije konačnih grupa s primjenama na fizikalne situacije su cjelina od koje bi koristi mogao imati svaki fizičar. Zadnja četiri poglavlja su više od koristi teorijskim fizičarima; zadnja dva štoviše teorijskim fizičarima posebno zainteresiranima za fiziku visokih energija.

Krešimir Kumerički
U Zagrebu, 31. ožujka 2025.

Poglavlje 1

Grupe - opći pojmovi

1.1 Definicija grupe i primjeri

Moć teorije grupa leži u njenoj apstraktnosti koju je poznati fizičar Arthur Eddington ilustrirao riječima

> *Potrebna nam je super-matematika u kojoj su operacije jednako nepoznate kao i veličine na koje te operacije djeluju, te super-matematičar koji ne zna što radi kada izvodi te operacije. Takva super-matematika je teorija grupa.*

Možda je Eddingtonova karakterizacija teorije grupa kao „super-matematike" malo pretjerana, jer teorija grupa je čvrsti dio standardne matematike, ali točno je da je upotrebljivost ove teorije iznenađujuće široka i da najraznolikiji matematički i fizikalni objekti imaju strukturu grupe. Stoga je poželjno prvo definirati pojam grupe maksimalno apstraktno, bez pozivanja na njene konkretne primjere i realizacije:

Definicija 1.1.1 (Grupa)
Grupa $(G, \star)$ je skup objekata G na kojem je definirana binarna operacija $\star$ tako da su zadovoljena sljedeća svojstva:

1) $g_1 \star g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G$ (zatvorenost)

2) $g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$ (asocijativnost)

3) $\exists e \in G \mid g \star e = e \star g = g \quad \forall g \in G$ (egzistencija jedinstvenog identiteta)

4) $\forall g \in G \ \ \exists g^{-1} \mid g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$ (egzistencija inverza za svaki element)

Dat ćemo sada nekoliko klasičnih primjera skupova G i pripadajućih binarnih operacija $\star$ kao ilustraciju gore navedene široke primjene grupa.

Primjer 1.1.2 ($\mathbb{Z}$, $+$)
Lako se uvjeriti da skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ čini grupu obzirom na binarnu operaciju običnog zbrajanja brojeva:

1) $n, m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ n + m \in \mathbb{Z}$

2) $n + (m + k) = (n + m) + k \quad \forall n, m, k \in \mathbb{Z}$

3) $0 + n = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ (nula je identitet tj. „jedinični element")

4) $n + (-n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ ($-n$ je inverzni element od n)

Primjer 1.1.3 ($\mathbb{Z}$, $\cdot$)
S druge strane, taj isti skup $\mathbb{Z}$ nije grupa obzirom na operaciju množenja. Naime, aksiom zatvorenosti je zadovoljen jer množenjem cijelih brojeva dobivamo cijele brojeve. Asocijativnost je također zadovoljena: $m(nk) = (mn)k$. Broj 1 je identitet jer za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi da je $1n = n$. No aksiom postojanja inverza za svaki element nije zadovoljen. Inverz od n je broj $\frac{1}{n}$, ali taj broj nije element skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ (osim za specijalne slučajeve kad je $n \in \{-1, 1\}$ što nije dovoljno).

Ovaj primjer ilustrira da je za potpunu definiciju pojma grupe nužno specificirati i skup i binarnu operaciju. U praksi, često je iz konteksta očito na koju se binarnu operaciju misli pa se njeno navođenje izostavlja.

Primjer 1.1.4
Skup dvije matrice

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

čini grupu obzirom na uobičajeno množenje matrica. Promotrimo li pak skup *svih* 2×2 matrica vidimo da on *ne* čini grupu jer nije zadovoljen aksiom egzistencije inverza. Naime, neregularne matrice (one čija determinanta iščezava) nisu invertibilne. Međutim, ukoliko se ograničimo samo na skup regularnih 2×2 matrica dobivamo grupu koja se naziva *opća linearna grupa* u dvije dimenzije i označava grupnoteorijskom oznakom GL(2).

Grupu zovemo *Abelova (abelovska, komutativna)* ako $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1$. Na primjer $(\mathbb{Z}, +)$ je Abelova dok grupa GL(2) to nije jer množenje matrica općenito ne komutira. Broj elemenata grupe nazivamo *red grupe*. Obzirom na njega razlikujemo:

- *Konačne grupe*. Primjeri su npr. $(\{1, -1\}, \cdot)$ ili grupa iz primjera 1.1.4.
- *Beskonačne diskretne grupe* koje imaju prebrojivo* beskonačan broj elemenata. Primjer je $(\mathbb{Z}, +)$.
- *Beskonačne kontinuirane grupe* koje imaju neprebrojiv broj elemenata i čije elemente možemo zamisliti kao kontinuirani skup točaka. Ukoliko su zadovoljeni neki dodatni uvjeti, vidi 5. poglavlje, ove grupe se nazivaju Liejeve grupe. Primjeri su $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ i GL(2).

  Primjer 1.1.5 (Grupa simetrija)
  Skup svih transformacija simetrije nekog konkretnog objekta tj. transformacija koje ostavljaju taj objekt nepromijenjen nužno tvore grupu obzirom na binarnu operaciju kompozicije transformacija $\circ$:

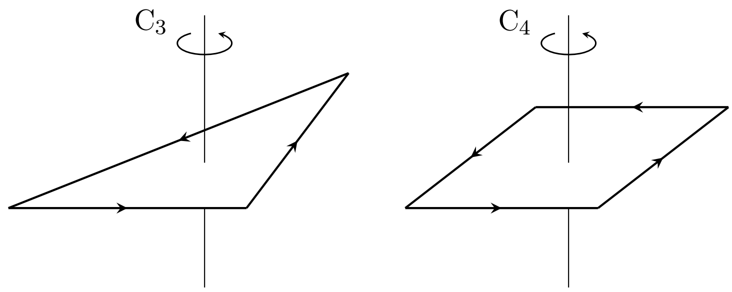
  1) zatvorenost: ako ni g_1 ni g_2 ne mijenjaju objekt, ne mijenja ga ni njihova kompozicija $g_2 \circ g_1$
  2) asocijativnost: transformacije možemo interpretirati kao funkcije na skupu svih stanja objekta koji transformiramo, a kompozicija funkcija je asocijativna
  3) identiteta: transformaciju koja ne radi ništa tj. ne mijenja objekt također smatramo transformacijom
  4) suprotna transformacija je isto simetrija (dobra vježba iz apstraktnog razmišljanja je uvjeriti se da za svaku transformaciju objekta postoji suprotna)

Činjenica da transformacije simetrije čine grupu nam je od velikog značaja. To će nam sada omogućiti elegantnu konstrukciju mnogih važnih grupa, a kasnije će nas zanimati grupe simetrija fizikalnih objekata. „Objekt” na kojeg djeluju transformacije grupe simetrija može biti nekakav realan fizikalni objekt poput kristala, ali može biti i nešto apstraktniji entitet poput kvantnomehaničke valne funkcije ili bilo kakvog matematičkog objekta kojeg možemo definirati. Važno je imati na umu da su sam pojam i svojstva grupe

*Beskonačan skup je *prebrojiv* ukoliko je moguće uspostaviti bijektivno preslikavanje između tog skupa i skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Npr. skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ jest prebrojiv, dok skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ to nije.

neovisni o tom objektu. Zamisao tog objekta ćemo iskoristiti da identificiramo skup transformacija simetrije, da vizualiziramo pojedine transformacije i da fizikalno interpretiramo rezultate teorije grupa, ali nikad ne smijemo izgubiti iz vida da je grupa sasvim apstraktan matematički pojam.

Primjer 1.1.6 (Ciklička grupa C_n)
Ciklička grupa C_n je grupa simetrija rotacija pravilnog poligona s n usmjerenih stranica.



Elementi grupe C_n su rotacije za kuteve $2\pi r/n$, $(r = 0, 1, \dots, n-1)$ oko osi koja okomito probada središte poligona. Usmjerenost stranica isključuje rotacije oko osi koje leže u ravnini poligona. (Iako je poligon ravninski lik ovdje ga zamišljamo u 3D prostoru.)

Specifično svojstvo cikličkih grupa je da je sve elemente grupe moguće dobiti uzastopnim komponiranjem („množenjem") jednog od njih sa samim sobom. Tako npr. uzastopnim komponiranjem rotacije za kut $2\pi/3$ sa samom sobom dobivamo ostale dvije rotacije koje sačinjavaju grupu C_3: rotaciju za $4\pi/3$ i rotaciju za 0 radijana. Ukoliko označimo „generirajuću" rotaciju grupe C_n (onu za kut $2\pi/n$) simbolom c onda je skup elemenata grupe

$$\{c, c^2, \dots, c^n = e\} , \tag{1.1}$$

odnosno grupu C_n možemo alternativno definirati kao grupu generiranu elementom c sa svojstvom $c^n = e$ i pisati kao definicioni izraz

$$\mathrm{C}_n = \langle c \mid c^n = e \rangle . \tag{1.2}$$

Ovakvo navođenje generatora i njegovih (ili njihovih ako ih ima više, vidi kasnije) svojstava je kompaktni način definiranja grupe poznat i kao *prezentacija* grupe. (Što nikako ne treba miješati s *reprezentacijom* grupe što je nevezani pojam kojeg ćemo kasnije definirati!)

Treću mogućnost za definiciju ove i drugih grupa pruža nam grupna tablica množenja (poznata i kao Cayleyjeva tablica). Naime, obzirom da je apstraktna grupa potpuno određena time da se navede skup elemenata koji je sačinjavaju te time da se potpuno specificira kako se ti elementi množe (tj.

kakva je binarna operacija u grupi), grupu C_3, npr., je moguće definirati naprosto kao skup elemenata koji zadovoljavaju slijedeću tablicu množenja:

$$\begin{array}{c|ccc} g_1\backslash\, g_2 & e & c & c^2 \\ \hline e & e & c & c^2 \\ c & c & c^2 & e \\ c^2 & c^2 & e & c \end{array} \tag{1.3}$$

Konvencija je da prvi redak i stupac tablice odgovaraju množenju s jediničnim elementom što zapravo čini naslovni redak i stupac suvišnim i ovu je tablicu moguće i jednostavnije zapisati samo kao

$$\begin{array}{|ccc} \hline e & c & c^2 \\ c & c^2 & e \\ c^2 & e & c \end{array} \tag{1.4}$$

Grupne tablice množenja zadovoljavaju tzv. svojstvo latinskog kvadrata poznato i kao

> **Teorem 1.1.7** (Teorem o razmještaju)
> Svaki element grupe se pojavljuje jednom i samo jednom u svakom stupcu ili retku grupne tablice množenja.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tj. da se u nekom retku dvaput pojavi isti element, recimo a. To znači da je a moguće dobiti množenjem prvog elementa iz tog retka, neka je to k, s dvama različitim elementima, recimo m i n: $km = a$ i $kn = a$. To bi značilo da je $km = kn$, a egzistencija inverza omogućuje „skraćivanje” ovakvih relacija tj. množenje slijeva s k^{-1} pa dobivamo $m = n$ što je kontradiktorno jer smo pretpostavili da su m i n različiti elementi. Do slične bi kontradikcije dovela pretpostavka ponavljanja istog elementa dvaput u istom stupcu. □

Treba uočiti da nam binarna operacija definirana tablicom množenja koja je u standardnom obliku gdje prvi redak i stupac odgovaraju jediničnom elementu i koja poštuje teorem o razmještaju automatski garantira zadovoljavanje tri aksioma grupe: *zatvorenost* (u tablici se pojavljuju samo elementi grupe), *egzistencija identiteta* (po konstrukciji prvog retka i stupca) i *egzistencija inverza* (u svakom retku se nužno pojavljuje i jedinični element i odgovarajući stupac je onda stupac inverza). Međutim, svojstvo *asocijativnosti* nije nužno zadovoljeno i treba ga provjeriti nekim drugim načinom*.

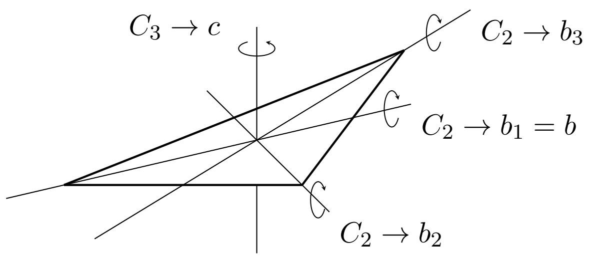
Ove dvije alternativne definicije grupe putem prezentacije (1.2) ili putem tablice množenja (1.4) naglašavaju apstraktnu prirodu grupe jer se nigdje ne oslanjaju na ideju da je C_3 grupa simetrija trokuta.

*Eksplicitna provjera može biti mukotrpna. Od pomoći je procedura poznata kao Lightov test asocijativnosti.

Inače, C_n, za $n = 2, 3, 4$ i 6, spada u kristalografske *točkaste grupe* kakvih ima ukupno 32*. Točkaste grupe su grupe prostornih simetrija savršenih beskonačnih periodičnih kristala koje ostavljaju barem jednu točku nepomičnom. (Za razliku od npr. translacije za konstantu rešetke koja je isto simetrija kristala, ali nijednu točku ne ostavlja na mjestu.)

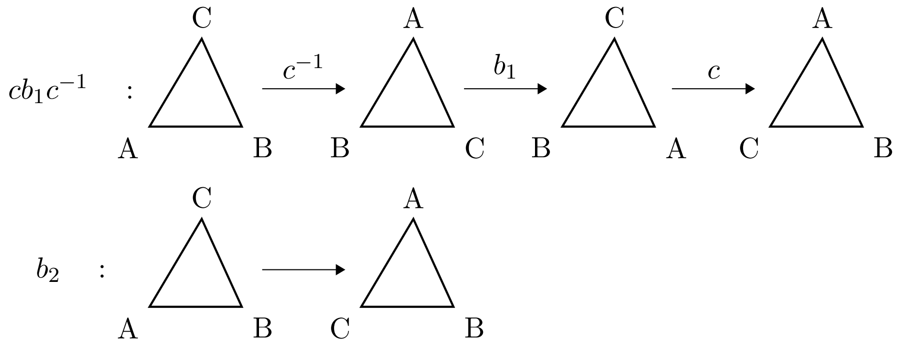
Može se pokazati da jedini elementi tih grupa mogu biti kompozicije rotacija za 60° i 90° te inverzije $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ (tzv. *teorem kristalografske restrikcije*).

Primjer 1.1.8 (Dihedralna grupa D_3)
Dihedralna grupa D_3 je grupa simetrija rotacija pravilnog poligona s tri stranice tj. trokuta. Prema slici



vidimo da su elementi grupe rotacije e, c i c^2 baš kao i kod grupe C_3, te dodatno rotacije b_1, b_2 i b_3 za kut 180° oko triju horizontalnih osi.

Uočimo sada neka svojstva množenja u toj grupi. Kao prvo, vrijedi da je $b_2 = c b_1 c^{-1}$ i kažemo da su b_2 i b_1 međusobno *konjugirani* preko elementa c. Da je to tako vidi se iz slike:



Na sličan način se možemo uvjeriti da je $b_2 = b_1 c$ i $b_3 = b_1 c^2$, odnosno da c i $b \equiv b_1$ generiraju sve ostale transformacije pa elemente grupe možemo zapisati kao

$$\{e, c, c^2, b, bc, bc^2\} . \tag{1.5}$$

*U trodimenzionalnom prostoru. U dvodimenzionalnom prostoru postoji 10, a u jednodimenzionalnom prostoru samo dvije točkaste grupe.

To sugerira da bismo grupu D_3 mogli probati definirati prezentacijom

$$\mathrm{D}_3 \stackrel{?}{=} \langle c, b \mid c^3 = b^2 = e \rangle \ , \tag{1.6}$$

no ova definicija nije kompletna jer nam nedostaje još i pravilo za komutiranje elemenata (koje nam nije trebalo za grupu C_3 koja je Abelova). Njega dobijemo tako da iskombiniramo dvije gore dobivene relacije: $b_2 = cb_1c^{-1} = bc$ i pomnožimo zdesna s c:

$$cb = bc^2 \ . \tag{1.7}$$

Ova relacija sad omogućuje da proizvoljan umnožak elemenata grupe (npr. bcb^2c^5b svedemo na oblik $b^\alpha c^\beta$ gdje je $\alpha < 2$ i $\beta < 3$, tj. na jedan od elemenata iz (1.5). Za kompaktan zapis prezentacije grupe D_3 koji će se onda moći lako generalizirati i na ostale D_n grupe, množimo gornju komutacijsku relaciju (1.7) slijeva s b i zdesna s c i dobivamo $bcbc \equiv (bc)^2 = b^2c^3 = e$ pa možemo pisati

$$\mathrm{D}_3 = \langle c, b \mid c^3 = b^2 = (bc)^2 = e \rangle \ . \tag{1.8}$$

Ova definicija se generalizira na grupu simetrija poligona s n stranica ovako (vidi zadatak 1.6.)

$$\mathrm{D}_n = \langle c, b \mid c^n = b^2 = (bc)^2 = e \rangle \ , \tag{1.9}$$

ili, ekvivalentno i praktičnije za komutiranje elemenata prilikom množenja

$$\mathrm{D}_n = \langle c, b \mid c^n = b^2 = e, cb = bc^{n-1} \rangle \ , \tag{1.10}$$

što onda sadrži i definiciju grupe D_2 poznate i kao *Kleinova četvorna grupa* (njem. *Vierergruppe*), za koju nemamo odgovarajući poligon kao objekt grupe simetrija.

1.2 Podgrupe

Za operacije s grupama i njihovu klasifikaciju centralni je pojam *podgrupe*:

Definicija 1.2.1 (Podgrupa)
Podgrupa H grupe G je neprazni podskup $H \subset G$ koji i sam tvori grupu obzirom na grupnu operaciju definiranu na G.

Svaka grupa ima trivijalne podgrupe $H = \{e\}$ i $H = G$, a podgrupu koja je različita od ovih dviju trivijalnih zovemo *prava* podgrupa.

Primjer 1.2.2
C_2={e, b} i C_3={e, c, c^2} su prave podgrupe od D_3

Primjer 1.2.3
Grupa translacija i točkasta grupa su podgrupe grupe svih prostornih simetrija kristala.

Definicija 1.2.4 (Susjedna klasa)
Lijeva susjedna klasa (engl. coset) podgrupe H obzirom na element $g \in G$ je skup

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

Odnos pripadnosti elementa g_1 lijevoj susjednoj klasi obzirom na element g_2, $g_1 \in g_2H$, uspostavlja *relaciju ekvivalencije*[*] između ta dva elementa u grupi G, $g_1 \sim g_2$. To između ostalog znači i da bilo koji element klase možemo jednako koristiti kao reprezentanta klase tj. da ako je $g_k \in gH$ onda je $g_kH = gH$.

Susjedne klase po nekoj podgrupi H su međusobno disjunktne i zahvaljujući Teoremu o razmještaju sve imaju isti broj elemenata (jednak redu od H) pa tako definiraju jednu particiju grupe G:

H	g_1H	g_2H
g_3H	$\cdots$	g_nH

Na slici je kao prva postavljena lijeva susjedna klasa po jediničnom elementu $eH = H$. Zbog navedene disjunktnosti klasa i jedinstvenosti jediničnog elementa ostale susjedne klase naravno ne sadrže jedinični element i samim time one nisu podgrupe. Promatrajući ovu sliku lako se uvjerimo u točnost Lagrangeovog teorema:

Teorem 1.2.5 (Lagrange)
Red podgrupe dijeli red grupe.

Tako u Primjeru 1.2.2 redovi podgrupa C_2 i C_3, 2 i 3, dijele red grupe D_3,

[*] Općenito, *relacija ekvivalencije* je binarna relacija $a \sim b$ između elemenata nekog skupa koja ima slijedeća svojstva

1) $a \sim a \quad \forall a$ (refleksivnost)

2) $a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a$ (simetričnost)

3) $a \sim b \;$ i $\; b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c$ (tranzitivnost)

Primjeri relacija ekvivalencije su: „osoba a je rođena na isti dan kad i osoba b" ili „trokut a je sličan trokutu b", dok npr. „broj a je veći ili jednak broju b" nije relacija ekvivalencije jer nije simetrična. (Ona je antisimetrična. Binarna relacija na skupu koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija uređaja*.) Svaka relacija ekvivalencije cijepa skup na disjunktne podskupove koji se zovu *klase ekvivalencije*.

6. Skup čiji su elementi predstavljeni kvadratičima na gornjoj slici ima svoj naziv:

> **Definicija 1.2.6** (Kvocijentni skup)
> Skup svih različitih lijevih susjednih klasa
>
> $$G/H \equiv \{gH \mid g \in G\}$$
>
> zove se *lijevi kvocijentni skup* grupe G po podgrupi H.

Potpuno analogno se definiraju *desna susjedna klasa* Hg i *desni kvocijentni skup* $H\backslash G$.

> **Primjer 1.2.7** (D_3)
> Promotrimo podgrupu $H = \mathrm{C}_3 = \{e, c, c^2\}$ grupe $G = \mathrm{D}_3$. Dvije lijeve susjedne klase su
>
> 1) $eH = H = \{e, c, c^2\}$ i
>
> 2) $bH = \{b, bc, bc^2\}$,
>
> a kvocijentni skup je $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3 = \{eH, bH\}$. Postoji i kvocijentni skup $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2$

> **Definicija 1.2.8** (Normalna podgrupa)
> Podgrupa za koju vrijedi $gH = Hg$, $\forall g \in G$, zovemo *normalna* ili *invarijantna.*

> **Primjer 1.2.9** (D_3)
> $G = \mathrm{D}_3$, $H = \mathrm{C}_3$. Eksplicitnim množenjem se uvjerimo da je $b\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_3 b$, a za ostale elemente $g \in \mathrm{D}_3$ jednakost lijevih i desnih susjednih klasa je trivijalna. Dakle, C_3 je normalna podgrupa od D_3. S druge strane $\mathrm{C}_2 = \{e, b\}$ nije normalna podgrupa od D_3 jer npr. $c\mathrm{C}_2 \neq \mathrm{C}_2 c$.

Očito je da su za normalnu podgrupu H lijevi i desni kvocijentni skupovi identični $G/H = H\backslash\mathrm{G}$.

Zanimljivo je pitanje u kojim okolnostima i sam kvocijentni skup čini grupu. Za to je potrebno definirati binarnu operaciju elemenata kvocijentnog skupa tj. „množenja” susjednih klasa. Prirodno je pokušati s definicijom množenja dvije klase A i B „svaki element sa svakim”:

$$AB = \{ab \mid a \in A \text{ i } b \in B\} . \tag{1.11}$$

Pitanje je međutim predstavlja li ovako definirano množenje skupova A i B konzistentnu definiciju množenja susjednih klasa tj. je li AB nužno susjedna klasa, ukoliko su to A i B? To zahtijeva prvi aksiom definicije grupe. Lako se možemo uvjeriti da tako definirano množenje *ne* funkcionira na kvocijentnom skupu $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2$, gdje je $\mathrm{C}_2 = \{e, b\}$. Npr. umnožak susjednih klasa $e\mathrm{C}_2 = \{e, b\}$ i $c\mathrm{C}_2 = \{c, bc^2\}$ je $\{e, bc, bc^2, b^2c^2 = c^2\}$ što je skup koji nije susjedna klasa! S druge pak strane množenje susjednih klasa u kvocijentnom skupu $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$ uvijek rezultira susjednom klasom. Razlog tome je što je C_3 *normalna* podgrupa, a za normalnu podgrupu H množenje klasa možemo provesti kao:

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2HH = (g_1g_2)H \ , \tag{1.12}$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili normalnost podgrupe H i gdje je $(g_1g_2)H$ nužno susjedna klasa jer je $g_1g_2 \in G$. Lako se uvjeriti da su i ostali aksiomi grupe zadovoljeni pa zaključujemo da kvocijentni skup po normalnoj podgrupi čini grupu koju zovemo *kvocijentna grupa*[*]

Primjer 1.2.10 ($\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$)
Tablica množenja u ovom kvocijentnom skupu je dana relacijama

$$(e\mathrm{C}_3)(e\mathrm{C}_3) = ee\mathrm{C}_3 = e\mathrm{C}_3 \tag{1.13}$$
$$(e\mathrm{C}_3)(b\mathrm{C}_3) = b\mathrm{C}_3 \tag{1.14}$$
$$(b\mathrm{C}_3)(e\mathrm{C}_3) = b\mathrm{C}_3 \tag{1.15}$$
$$(b\mathrm{C}_3)(b\mathrm{C}_3) = e\mathrm{C}_3 \tag{1.16}$$

Lijevi i desni kvocijentni skupovi su jednaki

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3 = \{\{e, c, c^2\}, \{b, bc, bc^2\}\} \\
&\mathrm{C}_3\backslash\mathrm{D}_3 = \{\{e, c, c^2\}, \{b, cb = bc^2, c^2b = bc\}\} = D_3/C_3
\end{aligned}$$

i imaju grupnu strukturu jednaku grupi C_2.

S druge strane C_2 nije normalna, lijevi i desni kvocijentni skupovi

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2 &= \{\{e, b\}, \{c, cb = bc^2\}, \{c^2, c^2b = bc\}\} \\
\mathrm{C}_2\backslash\mathrm{D}_3 &= \{\{e, b\}, \{c, bc\}, \{c^2, bc^2\}\} \neq \mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2
\end{aligned}$$

nisu jednaki i $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2$ nije grupa.

---

[*] Nešto je teže uvjeriti se u činjenicu da bi i drugačiji pokušaji definiranja množenja susjednih klasa od (1.11) doveli do nužnosti da podgrupa bude normalna. Npr. mogli bismo umjesto oslanjanja na (1.11) *definirati* množenje susjednih klasa kao $(g_1H)*(g_2H) = (g_1g_2)H$. Tako bi prvi aksiom grupe naizgled bio osiguran samom definicijom binarne operacije. No pokazuje se da je ovakva definicija množenja susjednih klasa konzistentna, u smislu da ne ovisi o izboru reprezentirajućih elemenata g_1 i g_2, i opet samo ako je podgrupa normalna, nakon čega ta definicija postaje ekvivalentna definiciji (1.11).

Grupe koje nemaju normalnih podgrupa zovu se *jednostavne*[*] , a one koje nemaju normalnih Abelovih podgrupa zovu se *polujednostavne*.

Za normalne grupe iz definicije 1.2.8 slijedi odmah i da je $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$. Zanimljivo je promatrati djelovanje ove operacije $g \ldots g^{-1}$ i na skupove koji nisu podgrupa te na pojedine elemente grupe:

Definicija 1.2.11 (Konjugirani elementi)
Dva elementa a i b grupe G su *konjugirani* ukoliko postoji $g \in G$ takav da je $a = gbg^{-1}$.

Konjugacija je također relacija ekvivalencije:

1) $a = e^{-1}ae \ \Rightarrow \ a \sim a$

2) $a = g^{-1}bg \ \Rightarrow \ b = g^{-1}a(g^{-1})^{-1}$

3) $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$,
$a = ghch^{-1}g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$, $gh \in G$

Konjugacija (baš kao i svaka relacija ekvivalencije) definira particiju skupa na klase.

$$\text{klasa od } a = \{b \mid b = gag^{-1}, \quad g \in G\}$$

Klasa od $e = \{e\}$ što znači da klase, izuzev ove trivijalne, nisu podgrupe.

Za Abelove grupe svaki element je klasa za sebe.

Kako normalne podgrupe zadovoljavaju $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$, slijedi da su one sastavljenje od *cijelih* klasa konjugacije.

Primjer 1.2.12 (Klase konjugacije grupe D_3)
Tri klase konjugacije od D_3 su:

1) (e)

2) (c, c^2)

3) (b, bc, bc^2)

[*]Mi se nećemo baviti simetrijama algebarskih jednadžbi, ali spomenimo da je Évariste Galois povezao njihovu općenitu rješivost (mogućnost da se sva rješenja prikažu u obliku izraza koji uključuju konačni broj primjena osnovnih matematičkih operacija i korijena na koeficijente jednadžbe) s nejednostavnošću pripadajuće grupe simetrija skupa rješenja. Onda je dokazavši da su grupe simetrija skupa rješenja za jednadžbe reda većeg od 5 jednostavne pokazao da te jednadžbe nisu rješive. To je otkriće predstavljalo kraj teorije algebarskih jednadžbi i rođenje teorije grupa.

i odgovaraju rotacijama za različite kuteve: 0°, 120° i 180°. Konjugirajući elementi preslikavaju međusobno osi rotacije. Normalna podgrupa C_3 se sastoji od cijelih klasa (prve dvije), dok podgrupa $\mathrm{C}_2 = \{e, b\}$ nema to svojstvo i nije normalna.

1.3 Homomorfizam i izomorfizam grupa

Vidjeli smo u primjeru 1.2.10 kako kvocijentna grupa $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$ ima isti broj elemenata i istu tablicu množenja kao grupa C_2. Dakle u apstraktnom smislu teorije grupa te su grupe identične. Za prepoznavanje takvih situacija, umjesto uspoređivanja grupnih tablica množenja pogodnije je identificirati preslikavanje s jedne grupe na drugu koje „čuva" grupnu binarnu operaciju. Takvo preslikavanje se naziva *homomorfizam*:

Definicija 1.3.1 (Homomorfizam)
Neka su A i B grupe, a $f : A \to B$ preslikavanje koje komutira s grupnom operacijom tj. za koje vrijedi

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in A \, .$$

Onda kažemo da je f *homomorfizam* grupe A u grupu B.

Primjer 1.3.2
Preslikavanje s grupe D_3 na kvocijentnu grupu $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$ definirano kao

$$f(g) = g\mathrm{C}_3 \, ,$$

je homomorfizam jer

$$f(a)f(b) = (a\mathrm{C}_3)(b\mathrm{C}_3) = (ab)\mathrm{C}_3 = f(ab).$$

Primjer 1.3.3
Preslikavanje s grupe C_3 na trivijalnu grupu $\mathrm{C}_1 = \{e\}$ koja sadrži samo jedinični element, definirano kao $f(g) = e, \forall g \in \mathrm{C}_3$, je homomorfizam.

Vidimo da homomorfizam općenito ne mora biti injekcija tj. da se više elemenata može preslikavati u isti element. Homomorfizam koji je i bijekcija zovemo *izomorfizam* i pišemo $A \cong B$ ili $A = B$.

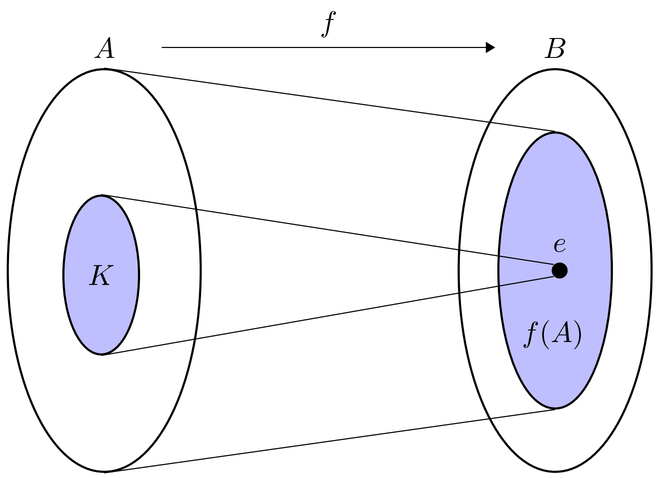
Izomorfne grupe su s apstraktnog stanovišta jednake (imaju istu tablicu množenja).

Primjer 1.3.4
Grupa C_2 je, osim već spomenutog izomorfizma s kvocijentnom grupom $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$, izomorfna i npr. s grupama

$$(\{1,-1\},\cdot) \qquad \text{i} \qquad \left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\},\cdot\right) .$$

Primjer 1.3.5
Grupa $\mathbb{Z}_n$ je skup cijelih brojeva $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, uz binarnu operaciju zbrajanja modulo n. Jedinični element je naravno 0, a cijelu grupu generira element 1 i grupa je izomorfna cikličkoj grupi C_n. Stoga mnogi autori cikličke grupe označavaju $\mathbb{Z}_n$, a u primjenama u fizici se često sreće C_2 koju ćemo onda i mi zbog sklada s literaturom nekad zvati $\mathbb{Z}_2$.

Slika homomorfizma $f(A)$ (skup svih elemenata u B koji imaju original u A) je podgrupa od B. Uvjerite se u to.



Slika 1.1: Kernel K homomorfizma $f : A \to B$ je podgrupa grupe A, a slika $f(A)$ homomorfizma je podgrupa grupe B.

Slika $f(e_A)$ jediničnog elementa e_A iz A je jedinični element e_B u B jer množenjem relacije

$$f(e_A)f(b) = f(e_A b) = f(b)$$

s desna s $f(b)^{-1}$ dobivamo

$$f(e_A) = f(b)f(b)^{-1} = e_B .$$

No moguće je da se i drugi elementi iz A osim jediničnog e_A preslikavaju u jedinični element e_B u B (u primjeru 1.3.3 se svi tako preslikavaju). *Kernel* homomorfizma se naziva skup svih elemenata od A koji se preslikavaju u jedinični element iz B.

$$K \equiv \ker(f) \equiv \{k \in A \mid f(k) = e_B\} .$$

Kernel od $f : A \to B$ je normalna podgrupa od A. Uvjerite se u to.

Kernel je iznimno korisna podgrupa, između ostalog i zahvaljujući sljedećem važnom teoremu:

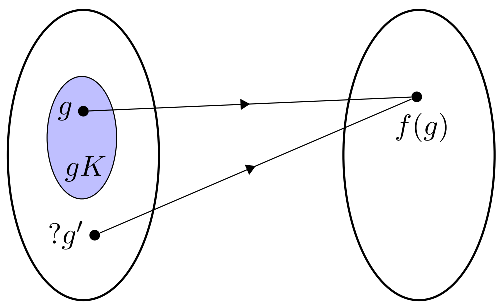
Teorem 1.3.6 (Teorem o izomorfizmu)
Ako je $f : G \to G'$ homomorfizam s kernelom K, onda vrijedi

1) Svaki element susjedne klase gK se preslikava u isti element $f(g)$.

2) Slika homomorfizma $f(G)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi po kernelu G/K.

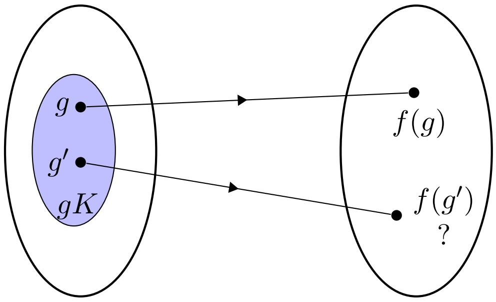
(Skup G/K je grupa jer je K normalna podgrupa.)

*Dokaz**: Pridruživanje koje čini izomorfizam iz stavka 2) teorema je $f(g) \leftrightarrow gK$. Pokažimo da je to pridruživanje dobro definirano i bijekcija te da čuva grupnu strukturu. Da bi se uvjerili da je pridruživanje $f(g) \mapsto gK$ dobro definirano, treba se uvjeriti da je susjedna klasa gK jedinstveno određena izborom $f(g)$. Naime, postoji opasnost da različiti originali od $f(g)$ ne pripadaju istoj klasi kako je ilustrirano na



No, različiti originali od $f(g)$, dakle g i g' iz G takvi da je $f(g) = f(g')$ zadovoljavaju $f(g^{-1}g') = f(g^{-1})f(g') = f(g)^{-1}f(g') = f(g)^{-1}f(g) = e$ što znači da je $g^{-1}g'$ jednak nekom elementu k kernela od f, $g^{-1}g' \equiv k \in K$ što množenjem s g slijeva daje $g' = gk$ pa je nužno $g' \in gK$.

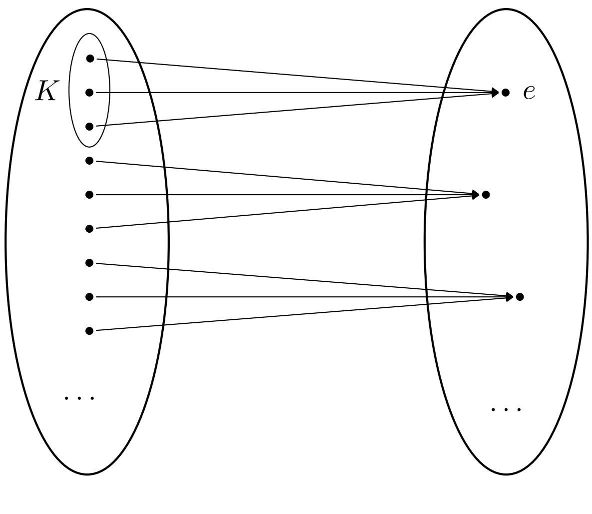
Druga opasnost je da inverzno pridruživanje $gK \mapsto f(g)$ ovisi o izboru elementa g iz K tj. da se različiti elementi klase gK ne preslikavaju u isti $f(g)$ kako je ilustrirano na



No različiti element g' iz susjedne klase gK je oblika $g' = gk$ za neki $k \in K$ što znači da je $g^{-1}g' \in K$ i mora se preslikavati u jedinični element $f(g^{-1}g') = e$ pa po svojstvu homomorfizma f imamo $f(g)^{-1}f(g') = e$ i množenjem slijeva s $f(g)$ dobivamo željeno svojstvo $f(g') = f(g)$, čime istovremeno i dokazujemo prvi dio teorema.

Injekcija u oba smjera koju smo upravo dokazali znači da je preslikavanje $f(g) \leftrightarrow gK$ bijekcija. Potrebno je još samo uvjeriti se da to preslikavanje čuva grupno množenje. To se vidi iz toga što se umnožak elemenata slike homomorfizma $f(g)f(g') = f(gg')$ preslikava u susjednu klasu $(gg')K$ koja je po svojstvu normalnosti kernela jednaka odgovarajućem množenju $(gK)(g'K)$ u kvocijentnoj grupi G/K. Dakle $f(g) \leftrightarrow gK$ je izomorfizam. $\square$

Jedan korolar ovog teorema je da je svaki element g' iz G' slika istog broja elemenata iz G (jer vidjeli smo da sve susjedne klase po nekoj podgrupi imaju isti broj elemenata). Tako općeniti homomorfizam ima vrlo pravilni obrazac preslikavanja prikazan na sljedećoj slici



Drugi korolar je da je f izomorfizam ako i samo ako je kernel $K = \{e\}$.

Pojam kvocijentne grupe nam daje ideju svojevrsnog „dijeljenja" jedne grupe drugom. Nameće se pitanje, ukoliko je, kako smo vidjeli, $D_3/C_3 = C_2$, možemo li u nekom smislu smatrati da je $C_3 \times C_2 = D_3$? Odgovor je da to nije moguće općenito, ali jest u situaciji kad su *obje* grupe normalne podgrupe produktne grupe, što u primjeru D_3 nije slučaj.

Definicija 1.3.7 (Direktni produkt grupa)
Ako imamo dvije grupe (G, $\star$) i (H, $\circ$), onda je njihov *direktni produkt* grupa G$\times$H čiji su elementi svi uređeni parovi (g,h), $g \in$ G, $h \in$ H, a binarna operacija $\cdot$ je definirana prirodno po komponentama

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \star g_2, h_1 \circ h_2)\,. \tag{1.17}$$

Lako se uvjeriti da su zadovoljeni svi aksiomi grupe. Strogo uzevši, gore tražene normalne podgrupe od G$\times$H nisu baš G i H nego $\mathrm{G}' = \{(g,1)|g \in G\}$ i $\mathrm{H}' = \{(1,h)|h \in H\}$, ali one su izomorfne grupama G i H pa je sve prirodno i konzistentno. Čitaoc se lako može uvjeriti da je na primjer $C_2 \times C_2 = D_2$.

Zadaci

1.1. Dokažite da su jedinični i inverzni element grupe jedinstveni.

1.2. Konstrukcijom grupne tablice množenja pokažite da postoji samo jedna grupa reda 3.

1.3. Na isti način kao u prošlom zadatku pokažite da postoje samo dvije grupe reda 4.

1.4. Grupa je Abelova ako i samo ako je njena grupna tablica množenja simetrična. Dokažite da i za grupe koje nisu Abelove razmještaj jediničnih elemenata u tablici mora biti simetričan.

1.5. Dokažite da je grupa u kojoj je svaki element samom sebi inverz nužno Abelova.

1.6. Uvjerite se da je grupa simetrija pravilnog poligona s n neusmjerenih stranica izomorfna grupi $D_n = \langle c, b | c^n = b^2 = (bc)^2 = e\rangle$. (*Naputak*: Odredite transformacije poligona koje odgovaraju elementima c i b, pa se uvjerite da one zadovoljavaju $c^n = b^2 = (bc)^2 = e$. Usporedite broj elementa grupa.)

1.7. Centar Z grupe G je skup svih elemenata koji komutiraju sa svakim elementom grupe tj. $Z = \{z \in G \,|\, zg = gz \;\forall g \in G\}$. Pokažite da je Z normalna Abelova podgrupa od G.

1.8. Odredite klase konjugacije grupe D_4.

1.9. Pokažite da su sve grupe s prostim brojem elemenata cikličke.

1.10. *Red* elementa a grupe G je najmanji n takav da je $a^n = e$. Pokažite da je red svih elemenata jedne klase konjugacije isti.

1.11. Postoji li netrivijalni homomorfizam s grupe D_4 na grupu D_3?

1.12. Pokažite da je kvocijentna grupa $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_e$ izomorfna grupi C_2, gdje je $\mathbb{Z}_e$ grupa parnih cijelih brojeva.

1.13. Promotrite grupu nesingularnih kvadratnih $n \times n$ matrica $G = \{M\}$. Pokažite da je $f(M) = \det M$ homomorfizam. Koja grupa je kodomena tog homomorfizma?

Poglavlje 2

Reprezentacije grupa

Premda smo glavne primjere grupa u prošlom poglavlju, cikličke grupe C_n i dihedralne grupe D_n, definirali kao grupe simetrija poligona, naglašavali smo da je to samo pomoćni korak i da je stvarna narav grupe apstraktna, potpuno definirana svojstvima binarne operacije nad elementima skupa. No prava moć teorije grupa, i ne samo u fizici, ipak dolazi kroz konkretne realizacije grupe kao skupa transformacija nekog sustava. Za te potrebe, sustave ćemo prikazivati kao elemente vektorskih prostora, a elementi grupe će biti operatori nad tim prostorima. To pokriva sve važne situacije u fizici, a najvažnije i najnetrivijalnije primjene bit će u *kvantnoj* fizici gdje je odgovarajući vektorski prostor Hilbertov prostor kvantnomehaničkih stanja. Najvažnije pitanje kojim ćemo se baviti je određivanje na koje je sve načine moguće reprezentirati neku grupu kao skup operatora nad nekim prostorom. To će onda dati jednu važnu klasifikaciju sustava a time i odgovor na pitanje na koje se sve načine neka simetrija može javljati u prirodi.

2.1 Vektorski prostori i operatori na njima

Očekuje se da je čitaoc već upoznat s osnovama matematičke teorije vektorskih prostora, no u ovom ćemo odjeljku ipak ponoviti osnovne pojmove.

Definicija 2.1.1 (Vektorski prostor)
Vektorski prostor (ili linearni prostor) V nad poljem F je aditivna grupa (grupna operacija je zbrajanje vektora $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$) na kojoj je definirana operacija *množenja skalarom* iz F tako da su zadovoljeni aksiomi:

1) Zatvorenost: $a\boldsymbol{x} \in V \quad \forall a \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

2) Kvaziasocijativnost: $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x} \quad \forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

3) Egzistencija jedinice: $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad$ za $1 \in F$ i $\forall \boldsymbol{x} \in V$

4) Distributivnost zbrajanja u F: $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x} \quad \forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

5) Distributivnost zbrajanja u V: $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y} \quad \forall a \in F,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

Iz aksioma slijedi da je zbrajanje vektora u V komutativno tj. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$. Za naše potrebe, polje F je obično polje kompleksnih ili realnih brojeva, $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$, pa govorimo o *kompleksnom* ili *realnom* vektorskom prostoru. *Baza* vektorskog prostora je skup $\{\boldsymbol{e}_i\}$ linearno nezavisnih vektora koji *razapinju* V tj. svaki vektor iz V se može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze $\{\boldsymbol{e}_i\}$. *Dimenzija* vektorskog prostora definirana je kao broj vektora njegove baze (teorem je da sve baze imaju isti broj vektora).

Primjer 2.1.2 (3D euklidski prostor)
Riječ je o „klasičnom" realnom vektorskom prostoru u kojem vrijedi osnovnoškolska geometrija. Jedna moguća baza je Kartezijeva $\boldsymbol{e}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{e}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}_3 = \hat{\boldsymbol{z}}$, tako da je

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\ . \tag{2.1}$$

Proizvoljni vektor često prikazujemo i kao stupac njegovih triju komponenata u konkretnoj bazi:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ . \tag{2.2}$$

Primjer 2.1.3 (Hilbertov prostor kvantnomehaničkih stanja vodikovog atoma)
Rješenja vremenski nezavisne Schrödingerove diferencijalne jednadžbe

$$H\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x})\ , \tag{2.3}$$

gdje je H hamiltonijan za vodikov atom, označavamo $\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$ i nazivamo stacionarna stanja. Ovdje je $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, a $n \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$. Stacionarnih stanja ima beskonačno i ona predstavljaju bazu beskonačnodimenzionalnog Hilbertovog vektorskog prostora svih mogućih kvantnomehaničkih stanja vodikovog atoma. Vektor u tom prostoru je proizvoljna superpozicija stacionarnih stanja

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} a_{nlm}\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})\ , \tag{2.4}$$

gdje su a_{nlm} proizvoljni kompleksni koeficijenti. Ovo je dakle kompleksni vektorski prostor.

Definicija 2.1.4 (Linearni operator)
Operator $T : V \to V$ na vektorskom prostoru V sa svojstvom

$$T(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = aT\boldsymbol{x} + bT\boldsymbol{y}$$

$\forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, je *linearan.*

U datoj bazi $\{\boldsymbol{e}_i\}$, operator T možemo prikazati kao matricu s elementima T_{ij} definiranu relacijom $T\boldsymbol{e}_j = \sum_i T_{ij}\boldsymbol{e}_i \equiv T_{ij}\boldsymbol{e}_i$, gdje uvodimo tzv. Einsteinovu sumacijsku konvenciju po kojoj se zbrajanje po dvaput ponovljenom indeksu podrazumijeva i znak sume se ne piše.

Djelovanje operatora T na vektor $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ rezultira vektorom $T\boldsymbol{x}$ s komponentama $(T\boldsymbol{x})_i = T_{ij}x_j$.

Primjer 2.1.5 (Operator rotacije u euklidskom prostoru)
Operatori rotacije nad raznim vektorskim prostorima će nam biti važan primjer jer je riječ o transformacijama s kojima imamo mnogo neposrednog iskustva, a istovremeno su vrlo netrivijalne i dobar primjer za velik dio teorije grupa i njenih reprezentacija. Rotacija oko z-osi za kut θ je

$$R_{z,\theta}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Primjer 2.1.6 (Hamiltonijan)
Kvantnomehanički hamiltonijan je važan primjer linearnog operatora na Hilbertovom prostoru: $H\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x})$. Vidjet ćemo da njegova važna značajka nije to što bi on sam bio element neke grupe simetrija, nego to što je pomoću njega moguće generirati elemente grupe vremenskih translacija.

Na vektorskim prostorima koji su nam od značaja, osim zbrajanja vektora i množenja skalarom često je moguće definirati i dodatne operacije, a možda najvažnija je skalarni produkt.

Definicija 2.1.7 (Skalarni produkt)
Skalarni produkt na vektorskom prostoru V je preslikavanje $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$

2) $(\boldsymbol{z}, a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0\,, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ i $a, b \in \mathbb{C}$.

Posljedica definicije je da vrijedi $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Moguća je i alternativna definicija skalarnog produkta kod koje je $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Ona se u fizici rijetko rabi, ali je dominantna u matematičkim tekstovima.

Primjeri skalarnog produkta su standardno množenje vektora $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ u 3D euklidskom prostoru ili „preklop” valnih funkcija $(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^*(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x})d^3x$ u Hilbertovom prostoru kvantnomehaničkih stanja.

Skalarni produkt omogućuje prirodnu definiciju *norme* vektora kao $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$. Vektorski prostor s definiranom operacijom skalarnog produkta se zove *unitarni prostor*. Alternativno se za takav prostor koriste i nazivi pre-Hilbertov ili euklidski prostor.

Ortonormirana baza vektorskog prostora je baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$ takva da je $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ i uvijek ju je moguće naći u unitarnom prostoru.

Definicija 2.1.8 (Unitarni operator)
Unitarni operator U je operator takav da je $(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Kažemo da unitarni operator „čuva” skalarni produkt. Obzirom da su skalarni produkt i norma vektora u kvantnomehaničkom Hilbertovom prostoru stanja povezani sa vjerojatnostima ishoda mjerenja, te kako je očuvanje vjerojatnosti prirodan zahtjev na operatore transformacija kvantnomehaničkih stanja, ti će operatori tipično biti reprezentirani unitarnim operatorima.

U ortonormiranoj bazi unitarni operator je predstavljen unitarnom matricom tj. matricom sa svojstvom $U^\dagger U = 1$ gdje je $U^\dagger \equiv U^{T^*}$ hermitski konjugirana matrica.

Definicija 2.1.9 (Hermitski konjugirani operator)
Hermitski konjugirani operator operatoru D je operator $D^\dagger$ definiran tako da vrijedi $(D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, D^\dagger\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

U ortonormiranoj bazi hermitski konjugirani operator je predstavljen hermitski konjugiranom matricom.

Definicija 2.1.10 (Hermitski operator)
Operator H se naziva hermitski ako vrijedi $(H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, H\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.
Takav operator je u ortonormiranoj bazi prikazan hermitskom matri-

com za koju vrijedi $H^\dagger = H$.

Hermitski konjugirani operator operatora D se naziva i adjungirani operator operatoru D (engl. *adjoint*), a hermitski operator se naziva i auto-adjungirani (engl. *self-adjoint*). Zapravo postoji suptilna matematička razlika između hermitskog i auto-adjungiranog operatora, ali fizičari je obično zanemaruju.

Teorem 2.1.11
Svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su realne.

Dokaz: Uzmimo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ za koji je $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$*. Skalarnim množenjem s $\boldsymbol{x}$ imamo $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, iz čega slijedi $\lambda^* = \lambda$ jer je kraćenje $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ omogućeno trećim svojstvom definicije (2.1.7) skalarnog produkta. □

Ovo svojstvo se odražava u činjenici da su kvantnomehanički operatori koji odgovaraju opservabilnim fizikalnim veličinama (koje su redovito realni brojevi) redovito hermitski.

I unitarne i hermitske matrice T se mogu dijagonalizirati transformacijom $S^{-1}TS = D$, gdje je S unitarna matrica.

2.2 Definicija reprezentacije i osnovna svojstva

Definicija 2.2.1 (Reprezentacija grupe)
Reprezentacija grupe $G = \{g_i\}$ je homomorfizam s G na grupu linearnih operatora $\Gamma = \{D(g_i)\}$, na nekom vektorskom prostoru V.

Dakle, reprezentacija je preslikavanje $G \to \Gamma$, gdje se pojedini elementi preslikavaju kao $g_i \mapsto D(g_i)$. Operatori $D(g_i)$ su pak preslikavanja $D(g_i) : V \to V$, gdje se pojedini vektori preslikavaju kao $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = D(g_i)\boldsymbol{x}$.

U žargonu se pojam „reprezentacija" zna odnositi ne samo na gornji homomorfizam već i na samu grupu Γ, pa čak i na vektorski prostor V. No to ne bi smjelo dovoditi do zabune.

Dimenzija reprezentacije je dimenzija vektorskog prostora V na koji operatori djeluju. Kako se operatori mogu u nekoj bazi predstaviti kao kvadratne matrice u literaturi se često rabi alternativna definicija reprezentacije kao

*Egzistencija takvog vektora slijedi iz fundamentalnog teorema algebre preslikavanja s apstraktne grupe na grupu matrica. Iz uvjeta homomorfizma

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$$

slijede razne stvari poput činjenice da je jedinični element uvijek reprezentiran jediničnom matricom jer $D(g)D(e) = D(ge) = D(g)$ povlači $D(e) = 1$.

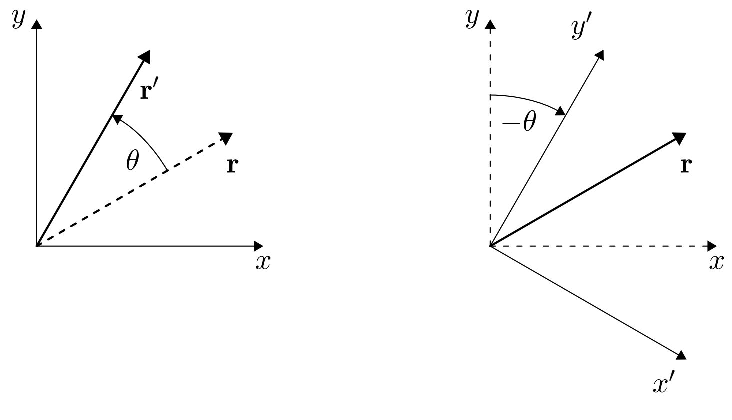
Uobičajena oznaka za operatore iz reprezentacije je slovo D od njemačke riječi „*Darstellung*" (reprezentacija). Primjenu teorije reprezentacija grupa na fiziku je u velikoj mjeri razvio E. P. Wigner.

Ukoliko je grupa operatora Γ *izomorfna* grupi G, reprezentaciju zovemo *vjerna*.

Primjer 2.2.2 (Reprezentacija grupe C_3 na 3D euklidskom prostoru) $C_3 = \{e, c, c^2\}$. Kako je pokazano gore, jedinični element je nužno reprezentiran jediničnom matricom

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Za operator $D(c)$ u koji se preslikava element c, možemo uzeti operator rotacije za $2\pi/3$ oko z-osi. Prilikom specifikacije matričnog zapisa operatora, treba razlikovati tzv. *aktivne* transformacije kod koji se mijenjaju vektori, a baza ostaje ista, te *pasivne* kod kojih vektori ostaju isti, a baza se mijenja, vidi sliku 2.1. Oba pristupa su regularna, ali tipično vode do razlika u nekim predznacima u izrazima pa treba pripaziti. Ako se ne kaže drukčije, transformacije u ovoj knjizi su



Slika 2.1: Aktivne transformacije (lijevo) i pasivne transformacije (desno).

„aktivne” i u tom slučaju

$$\begin{aligned} D(c) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{2.6}$$

te na kraju

$$D(c^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D(c)^2 \,. \tag{2.7}$$

Lako se provjeri da vrijedi definiciona relacija (1.2) grupe $D(c)^3 = 1$.

Ovo naravno nije jedina moguća reprezentacija grupe C_3. Mogli smo uzeti rotacije za iste kuteve oko bilo koje druge osi i tako dobiti beskonačno drugačijih reprezentacija.

Primjer 2.2.3 (Reprezentacija grupe C_3 na vektorskom prostoru stanja vodikovog atoma)
Operator koji reprezentira element $c \in \mathrm{C}_3$ će biti operator $D(c)$ koji transformira valne funkcije vodikovog atoma

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = D(c)\psi(\boldsymbol{x}) \,. \tag{2.8}$$

Kako može izgledati takav operator? Strogo uzevši, dovoljno bi bilo pronaći bilo kakav operator koji zadovoljava definiciono stvojstvo $D(c)^3 = 1$, ali pogodno je da to bude upravo operator rotacije za kut $2\pi/3$. Neka je $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$, dakle gledamo rotaciju stacionarnih stanja:

$$\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}) \overset{D(c)}{\mapsto} \psi'_{nlm}(\boldsymbol{x}) \tag{2.9}$$

$$\psi'_{nlm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{l'=0}^{n'-1} \sum_{m'=-l'}^{l'} D_{(nlm)(n'l'm')}(c)\, \psi_{n'l'm'}(\boldsymbol{x}) \,. \tag{2.10}$$

Ovdje smo iskoristili to da stacionarna stanja čine bazu prostora pa je transformirano stanje moguće napisati kao linearnu kombinaciju stacionarnih stanja. Koeficijente $D_{(nlm)(n'l'm')}(c)$ u toj linearnoj kombinaciji možemo zamisliti kao elemente beskonačnodimenzionalne matrice u beskonačno dimenzionalnoj bazi čiji su vektori indeksirani trojkom brojeva (nlm), analogno 3×3 matricama rotacije $D_{(i)(j)}$ u 3D euklidskom prostoru iz prošlog primjera.

Neka $D(c)$ opet bude rotacija oko z-osi. Rotacija čuva energiju pa se u razvoju (2.10) mogu pojavljivati samo koeficijenti s istim energijskim kvantnim brojem tj. mora biti $n' = n$. Na isti način, očuvanje *iznosa* momenta impulsa vodi na $l' = l$. Rotacija jedino može promijeniti projekciju momenta impulsa m tako da imamo

$$D_{(nlm)(n'l'm')}(c) = \delta_{nn'}\delta_{ll'}D^{(l)}_{mm'}(c)\ .$$

Ovdje je oznaka (l) u $D^{(l)}$ podsjetnik da matrica ovisi o l u najmanju ruku tako što su njene dimenzije $(2l+1)\times(2l+1)$. Uvrštavanjem ovog u (2.10) dobivamo veliko pojednostavljenje

$$\psi'_{nlm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{mm'}(c)\ \psi_{nlm'}(\boldsymbol{x})$$

tj. relevantna matrica rotacije je konačna. To je dokud možemo doći u ovom trenutku. U 6. poglavlju ćemo vidjeti da npr. za $l = 1$ i za bilo koji n matrica rotacije ima oblik

$$D^{(1)}_{mm'}(c) = \delta_{mm'}e^{-i2\pi m/3} = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\pi/3} \end{pmatrix}$$

tj. da rotacija oko z-osi ne mijenja niti m, što je logično. Za svaki l imamo drugačiju $(2l+1)$-dimenzionalnu reprezentaciju i očito ih ima beskonačno mnogo jer l općenito nije ograničen.

Oba ova primjera su nas dovela do beskonačnog broja različitih reprezentacija. Da bismo uveli red treba nam općenita formalna teorija reprezentacija grupa.

Jedan primjer tvrdnji koje vrijede sasvim općenito je da svaka grupa G ima tzv. *trivijalnu* reprezentaciju kod koje je svakom elementu pridružen jedinični operator

$$D(g) = 1 \quad \forall g \in G\ .$$

Odgovarajući vektorski prostor može biti proizvoljne dimenzionalnosti pa se čini da i ovih trivijalnih reprezentacija ima beskonačno različitih, ali očito je da one nisu različite na neki zanimljiv i važan način. Formalna teorija reprezentacija će nam omogućiti da smatramo različitima samo reprezentacije koje su različite na „zanimljiv" način.

Za zagrijavanje, uvjerimo se u istinitost još jedne općenite tvrdnje, koja vrijedi za jednodimenzionalne reprezentacije. One su posebno jednostavne jer kompozicija operatora (množenje matrica) postaje obično množenje brojeva. Za konačne grupe sve jednodimenzionalne reprezentacije imaju svojstvo $|D(g)| = 1$ za svaki $g \in G$. Naime, zbog konačnosti grupe, red n svakog elementa (vidi Zadatak 1.10.) je konačan. Svojstvo homomorfizma reprezentacije onda povlači da iz $g^n = e$ slijedi $D(g^n) = D(g)^n = D(e) = 1$, odnosno broj $D(g)$ je n-ti korijen jedinice pa može biti samo

$$D(g) = e^{i2\pi k/n} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \;\Rightarrow\; |D(g)| = 1 \,.$$

2.3 Ekvivalentne reprezentacije

Vidjeli smo kako element $c \in \mathrm{C}_3$ možemo reprezentirati na euklidskom prostoru matricom rotacije za kut $2\pi/3$ oko bilo koje osi i tako dobiti beskonačno mnogo različitih reprezentacija te grupe. No očito je da su sve te reprezentacije u nekom smislu ekvivalentne. Na tom tragu je sljedeća definicija.

Definicija 2.3.1 (Ekvivalentne reprezentacije)
Dvije reprezentacije grupe G, $\Gamma_1 = \{D^{(1)}\}$ i $\Gamma_2 = \{D^{(2)}\}$ su *ekvivalentne* ako postoji konstantni nesingularni operator S takav da je

$$D^{(1)}(g) = S D^{(2)}(g) S^{-1} \quad \forall g \in G \tag{2.11}$$

Ovdje se pod konstantnošću operatora S misli da on ne ovisi o g. Lako se uvjeriti da ovakva definicija uspostavlja relaciju ekvivalencije u smislu definicije iz fusnote na stranici 8.

Pokazat ćemo sada da u slučaju ekvivalentnih reprezentacija jednu možemo pretvoriti u drugu prelaskom iz jedne u drugu bazu vektorskog prostora (pa su u tom smislu one „iste”). Uzmimo neki konkretni operator $D : V \to V$ iz jedne reprezentacije, koji djeluje na vektorskom prostoru V i općenito transformira vektore

$$D : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v} \tag{2.12}$$

Uzmimo neku bazu $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ prostora V i u njoj će vektor $\boldsymbol{u}$ imati komponente u_i, $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$. Linearni operator D je potpuno definiran svojim djelovanjem na vektore baze, a to daje i njegove komponente D_{ij} u toj bazi

$$D\boldsymbol{e}_j = (\text{linearna kombinacija od } \boldsymbol{e}_j) = D_{ij}\boldsymbol{e}_i \,. \tag{2.13}$$

Ovaj operator sad djeluje na proizvoljni vektor kao $D\boldsymbol{u} = D(u_j\boldsymbol{e}_j) = u_j D_{ij}\boldsymbol{e}_i$ i ako pišemo $D\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i$, onda je $v_i = D_{ij}u_j$, ili u matričnom obliku $v = Du$.

Uzmimo sad neku drugu bazu $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ istog vektorskog prostora V. Obzirom na tu bazu, operator D ima neke druge komponente, označimo ih D'_{ij} tako da je

$$D\boldsymbol{f}_j = D'_{ij}\boldsymbol{f}_i \,, \tag{2.14}$$

$$v'_i = D'_{ij}u'_j \,. \tag{2.15}$$

No, i vektori stare baze su vektori pa se mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora nove baze $\boldsymbol{e}_i = S_{ji}\boldsymbol{f}_j$. Tako je vektor $\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i = u_i S_{ji}\boldsymbol{f}_j$ tj. njegove komponente u novoj bazi su $u'_j = u_i S_{ji}$, a isto bi bilo i za vektor $\boldsymbol{v}$, $v'_j = v_i S_{ji}$. U matričnom obliku $v' = Sv$ ili $v = S^{-1}v'$. Tako je na kraju matrično

$$v' = Sv = SDu = SDS^{-1}u' \,, \tag{2.16}$$

odnosno $\Rightarrow$ $D' = SDS^{-1}$ i tako vidimo da operator S koji povezuje ekvivalentne reprezentacije nije ništa drugo nego operator koji povezuje dvije baze u kojima te reprezentacije izgledaju isto. $\square$

Zadatak će nam biti identificirati i klasificirati reprezentacije koji *nisu* ekvivalentne u ovom smislu. Drugim riječima, cijelu klasu ekvivalentnih reprezentacija smatrat ćemo jednom te istom reprezentacijom. Srećom, da bismo odredili jesu li dvije reprezentacije ekvivalentne nije nužno tražiti odgovarajuću transformaciju S. Postoje elegantnije metode poput upotrebe tzv. *karaktera* reprezentacija (vidi odjeljak 3.2).

Uočimo još da obzirom da su jednodimenzionalne reprezentacije zapravo brojevi koji automatski komutiraju slijedi da su takve reprezentacije ili identične ili neekvivalentne.

2.4 Zbroj i produkt reprezentacija

U potrazi za „elementarnim” reprezentacijama grupe nije dovoljno razmatrati samo klase neekvivalentnih reprezentacija. Usporedimo li na primjer trodimenzionalnu reprezentaciju grupe C_3 iz primjera 2.2.3 s dvodimenzionalnom reprezentacijom generiranom matricom

$$D(c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \,, \tag{2.17}$$

vidimo da premda te reprezentacije nisu ekvivalentne, razlika među njima je isto u nekom smislu trivijalna. Sve što 3D reprezentacija donosi, pored rotacija $x-y$ ravnine koje su prisutne i u 2D inačici, je trivijalno djelovanje na z-os tj. dodatnu trivijalnu 1D reprezentaciju. Definirat ćemo sada operacije zbrajanja i množenja reprezentacija koje će nam onda omogućiti definiranje „elementarnih” reprezentacija koje se neće moći prikazati kao kombinacija nižedimenzionalnih reprezentacija. Te „elementarne” reprezentacije (zvat ćemo ih *ireducibilne*) će onda zbrajanjem i množenjem moći generirati sve ostale reprezentacije, slično kao što prosti brojevi generiraju sve ostale.

Direktni zbroj reprezentacija

Kvadratnu matricu oblika

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & A_n \end{pmatrix}$$

gdje su A_i kvadratne matrice matrice zovemo *blok-dijagonalna* ili *blok* matrica. Produkt dviju matrica iste blok-strukture:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & B_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & & \\ & A_2B_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & A_nC_n \end{pmatrix}$$

ima istu blok strukturu kao i te matrice. Promotrimo sada dvije reprezentacije grupe G, reprezentaciju $\Gamma_1 = \{D^{(1)}(g)\}$ dimenzije d_1 i reprezentaciju $\Gamma_2 = \{D^{(2)}(g)\}$ dimenzije d_2. Tada je skup matrica

$$\Gamma = \{D(g)\} = \left\{ \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \right\} \tag{2.18}$$

također reprezentacija grupe G jer je

$$D(g)D(h) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}(h) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g)D^{(2)}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(1)}(gh) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(gh) \end{pmatrix} = D(gh)\,,$$

zahvaljujući gornjem svojstvu množenja blok matrica i činjenici da su Γ_1 i Γ_2 reprezentacije. Rezultirajuću reprezentaciju Γ zovemo *direktni zbroj* reprezentacija Γ_1 i Γ_2 i pišemo

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$$

Iz (2.18) se vidi da je dimenzija zbroja reprezentacija jednaka zbroju njihovih dimenzija, $d = d_1 + d_2$. Možemo zbrajati proizvoljan broj reprezentacija

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n ,$$

a vektorski prostor na koji djeluje zbroj reprezentacija je $V = V_1 \oplus V_2$, što je prostor razapet vektorima $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ gdje je $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ jedna baza od V_1, a $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ jedna baza od V_2.

Primjer 2.4.1 (Reprezentacija grupe C_3 na 3D euklidskom prostoru)
Ovaj slučaj smo diskutirali na početku ovog odjeljka. Sad vidimo da je 3D reprezentacija iz (2.5–2.7) koja djeluje na 3D euklidskom prostoru direktan zbroj 2D reprezentacije generirane s (2.17) koja djeluje na 2D euklidsku ravninu i trivijalne 1D reprezentacije $D(g) = 1$, $\forall g \in \mathrm{C}_3$ koja djeluje na 1D vektorskom prostoru koji odgovara pravcu z-osi.

Primjer 2.4.2 (Stanja sustava jednog elektrona i protona)
Stanja kvantnomehaničkog sustava jednog elektrona i jednog protona čine vektorski prostor koji je direktan zbroj vektorskog prostora stacionarnih *vezanih* stanja vodikovog atoma ψ_{nlm} (diskretne negativne energije) i vektorskog prostora dvočestičnog stanja *nevezanih* elektrona i protona (kontinuum pozitivnih energija). Kad bismo zanemarili interakciju, ovaj drugi prostor bi bio produkt dva ravna vala. U ovom trenutku još nemamo dovoljno znanja konstruirati općenitu reprezentaciju grupe C_3 na ovom prostoru ili diskutirati njenu reducibilnost na zbroj manjih reprezentacija, ali očito je riječ o beskonačnodimenzionalnoj reprezentaciji.

Direktni produkt reprezentacija

Kroneckerov ili *direktni produkt* kvadratnih matrica A i B je kvadratna matrica $C = A \otimes B$ čije su komponente

$$C_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl} .$$

Dakle retci matrice C su indeksirani svim parovima (ij) indeksa redaka matrica A i B i stupci analogno. Na primjer, neka su A i B dvodimenzionalne matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} .$$

Tada je njihov direktni produkt matrica

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} .$$

Vidljivo je da je dimenzija produkta jednaka produktu dimenzija. Za množenje dviju matrica iz produktne reprezentacije vrijedi $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ (za dokaz ovoga vidi npr. [Jones, 1998.]). Zahvaljujući tom identitetu, ako imamo dvije reprezentacije grupe G, reprezentaciju $\Gamma_1 = \{D^{(1)}(g)\}$ i reprezentaciju $\Gamma_2 = \{D^{(2)}(g)\}$, onda je i skup $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = \{D(g)\} = \{D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g)\}$ također reprezentacija od G. Naime, zadovoljen je uvjet homomorfizma jer je

$$\begin{aligned} D(g)D(h) &= (D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g))\,(D^{(1)}(h) \otimes D^{(2)}(h)) \\ &= (D^{(1)}(g)D^{(1)}(h)) \otimes (D^{(2)}(g)D^{(2)}(h)) \\ &= D^{(1)}(gh) \otimes D^{(2)}(gh) = D(gh)\,. \end{aligned}$$

Ako Γ_1 djeluje na vektorskom prostoru V_1 razapetom vektorima $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, a Γ_2 na vektorskom prostoru V_2 razapetom vektorima $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, onda $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ djeluje na vektorskom prostoru $V = V_1 \otimes V_2$ razapetom vektorima $\{e_i \otimes f_j, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$, dimenzije $d = mn$.

Primjer 2.4.3 (Dva vodikova atoma)
Uzmimo kvantnomehanički sustav dva vodikova atoma koja ne djeluju jedan na drugog (aproksimacija H_2 molekule). Njihove će valne funkcije biti vektori u dva Hilbertova prostora: $\psi_1(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_1$ i $\psi_2(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_2$. Združeni sustav ta dva atoma možemo promatrati kao jedan vektor $\psi_1(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gdje je baza od ovog direktnog produkta Hilbertovih prostora razapeta vektorima $\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})\psi_{n'l'm'}(\boldsymbol{x})$.

2.5 Reducibilnost reprezentacija

Ključno je pitanje za datu reprezentaciju, a pogotovo za reprezentaciju nastalu direktnim produktom, može li se ona prikazati kao direktan zbroj niže-dimenzionalnih reprezentacija.

Definicija 2.5.1 (Reducibilna reprezentacija)
Reprezentacija Γ grupe G koja djeluje na vektorskom prostoru V je *reducibilna* ukoliko postoji netrivijalni potprostor V_1 od V koji je *invarijantan* na Γ, što znači da vrijedi

$$D(g)V_1 \subset V_1 \quad \forall g \in G\,.$$

Ukoliko je reducibilna, onda u bazi $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+n}\}$, gdje prvih m vektora $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ čini bazu od V_1, reprezentacija poprima oblik

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & C(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

gdje su $D^{(1)}(g)$ $m \times m$, $D^{(2)}(g)$ $n \times n$, a $C(g)$ $m \times n$ matrice, te je dim $V = m + n$ i dim $V_1 = m$. Obratno, ako postoji baza u kojoj reprezentacija poprima gornji oblik (2.19), reprezentacija je reducibilna u što se lako uvjeriti množenjem proizvoljnog vektora iz V_1 matricom takvog oblika. Nadalje, $\Gamma_1 = \{D^{(1)}\}$ i $\Gamma_2 = \{D^{(2)}\}$ su u tom slučaju također reprezentacije grupe G.

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
D(g)D(h) &= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & C(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}(h) & C(h) \\ 0 & D^{(2)}(h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) & D^{(1)}(g)C(h) + C(g)D^{(2)}(h) \\ 0 & D^{(2)}(g)D^{(2)}(h) \end{pmatrix} \\
&= D(gh) \qquad \text{(jer je } \Gamma \text{ reprezentacija)} \\
&= \begin{pmatrix} D^{(1)}(gh) & C(gh) \\ 0 & D^{(2)}(gh) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Usporedbom drugog i četvrtog reda slijedi

$$
\begin{aligned}
D^{(1)}(gh) &= D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) \\
D^{(2)}(gh) &= D^{(2)}(g)D^{(2)}(h)
\end{aligned}
$$

tj. Γ_1 i Γ_2 su reprezentacije. □

Primjer 2.5.2 (Reprezentacija grupe C_3 na 3D euklidskom prostoru) Sve tri matrice ove reprezentacije (2.5)–(2.7) su oblika:

$$
D(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall g \in \mathrm{C}_3 \,.
$$

Dakle 2D prostor V_1 razapet vektorima $\hat{\boldsymbol{x}}$ i $\hat{\boldsymbol{y}}$ je invarijantan na djelovanje svih ovakvih matrica pa slijedi da je reprezentacija reducibilna.

Štoviše, $C(g) = 0$ u ovom gore primjeru, i matrice su blok-dijagonalne što znači da je vektorski prostor rastavljiv na direktnu sumu dva potprostora koja su oba invarijantna. To nas vodi na pojam *potpune* reducibilnosti.

Definicija 2.5.3 (Potpuno reducibilna reprezentacija)
Ako pored V_1 postoji i drugi invarijantni potprostor V_2 tako da je $V = V_1 \oplus V_2$ tada reprezentaciju Γ možemo rastaviti na direktni zbroj $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ i kažemo da je ona *potpuno reducibilna*.

Od velike je važnosti sljedeći Maschkeov teorem.

Teorem 2.5.4 (Maschke)
Sve reducibilne reprezentacije konačnih grupa su i potpuno reducibilne.

Dokaz. Dokaz teorema ćemo provesti u dva koraka u kojima ćemo pokazati da vrijede sljedeće dvije tvrdnje koje zajedno povlače teorem.

1) Svaka reprezentacija konačne grupe je ekvivalentna nekoj unitarnoj reprezentaciji

2) Svaka *unitarna* reducibilna reprezentacija je potpuno reducibilna

Tvrdnja iz prvog koraka je i sama po sebi zanimljiva obzirom na važnost unitarnih transformacija u kvantnoj mehanici.

Korak 1: Definirajmo tzv. „grupni" skalarni produkt dvaju vektora iz V na slijedeći način:

$$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \equiv \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \big(D(g)\boldsymbol{x}, D(g)\boldsymbol{y}\big) ,$$

gdje je n red grupe G, a (,) uobičajeni skalarni produkt na V. Sumacija ide preko svih elemenata grupe G. Grupni skalarni produkt { , } zadovoljava sve aksiome skalarnog produkta iz definicije 2.1.7. (Provjerite to!) Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\{D(h)\boldsymbol{x}, D(h)\boldsymbol{y}\} &\overset{\text{(def.)}}{=} \frac{1}{n} \sum_{g} \big(D(g)D(h)\boldsymbol{x}, D(g)D(h)\boldsymbol{y}\big) \\
&\overset{(D \text{ je rep.})}{=} \frac{1}{n} \sum_{g} \big(D(gh)\boldsymbol{x}, D(gh)\boldsymbol{y}\big) \\
&= gh \to k \; ; \quad \text{teorem o razmještaju} \; ; \quad \sum_g \to \sum_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k} \big(D(k)\boldsymbol{x}, D(k)\boldsymbol{y}\big) \\
&= \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \, .
\end{aligned}$$

Dakle, operatori $D(g)$ su unitarni obzirom na grupni skalarni produkt { , }. No nas nas zanima unitarnost obzirom na obični skalarni produkt (,). Da bismo to pokazali, uzmimo sada da je

$$\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{e}_i\} \quad \text{ortonormirana baza}^{*}\text{obzirom na} \quad (\ ,\ )\,, \\
&\{\boldsymbol{f}_i\} \quad \text{ortonormirana baza obzirom na} \quad \{\ ,\ \}\,,
\end{aligned}$$

i S operator koji povezuje baze: $S\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$. Tada je

$$\begin{aligned}\{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} &= \{Sx_i\boldsymbol{e}_i, Sy_j\boldsymbol{e}_j\} \\ &= x_i^* y_j \underbrace{\{\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\}}_{=\delta_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)} \\ &= (x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

tj. S povezuje grupni i obični skalarni produkt. Ako sada pomoću ovog operatora S definiramo ekvivalentnu reprezentaciju $U(g) \equiv S^{-1}D(g)S$ imamo

$$\begin{aligned}\big(U(g)\boldsymbol{x}, U(g)\boldsymbol{y}\big) &= \big(S^{-1}D(g)S\boldsymbol{x}, S^{-1}D(g)S\boldsymbol{y}\big) \\ &= \{D(g)S\boldsymbol{x}, D(g)S\boldsymbol{y}\} \qquad [S \text{ povezuje skalarne produkte}] \\ &= \{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} \quad [D(g) \text{ je unitaran obzirom na grupni produkt}] \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad [S \text{ povezuje skalarne produkte}]\end{aligned}$$

Dakle $U(g)$ je unitarna reprezentacija. (Preciznije, $\Gamma = \{U(g) \mid g \in G\}$ je unitarna reprezentacija.)

Korak 2: Treba pokazati da je reducibilna unitarna reprezentacija uvijek potpuno reducibilna. Ako je $U(g)$ reducibilna to znači da postoji potprostor V_1 takav da je $U(g)\boldsymbol{x} \in V_1$, $\forall \boldsymbol{x} \in V_1$ i $\forall g \in G$. Izaberimo sada ortonormiranu bazu $\{\boldsymbol{e}_i\}$ tako da $\{\boldsymbol{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$ razapinju V_1, a $\{\boldsymbol{e}_i, i = n+1, \ldots, n+m\}$ su preostali vektori koji kompletiraju bazu od V. Vektori $\{\boldsymbol{e}_i, i = n + 1, \ldots, n + m\}$ razapinju V_2 — ortogonalni komplement od V_1. Da bi se pokazala potpuna reducibilnost reprezentacije $U(g)$ treba pokazati da je i V_2 invarijantan na djelovanje reprezentacije tj. da $\forall \boldsymbol{y} \in V_2$ i $\forall g \in G$ vrijedi $U(g)\boldsymbol{y} \in V_2$.

Zbog unitarnosti $U(g)$ vrijedi $(U(g)\boldsymbol{y}, U(g)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, za sve $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ pa onda i posebno za $\boldsymbol{x} = U(g)^{-1}\boldsymbol{x}' \in V_1$ i $\boldsymbol{y} \in V_2$. Dakle, $(U(g)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{y}, U(g)^{-1}\boldsymbol{x}') = 0$ zbog ortogonalnosti $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$. No zbog invarijantnosti V_1 i $\boldsymbol{x}'$ je element od V_1. Dakle iz $(U(g)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}') = 0$ i usljed proizvoljnosti $\boldsymbol{y} \in V_2$ i $\boldsymbol{x}' \in V_1$ slijedi da je i V_2 invarijantan. □

U prvom dijelu dokaza, definicija grupnog skalarnog produkta i manipulacije koje smo radili funkcioniraju samo za konačne grupe. No teorem vrijedi i za kontinuirane (Liejeve) grupe (koje ćemo upoznati u 5. poglavlju), ako imaju neko od slijedećih svojstava

- unitarnost (u drugom koraku dokaza nismo koristili konačnost)

*Ortonormirana baza je baza za koju vrijedi $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ i moguće ju je odrediti npr. Gram-Schmidtovim postupkom ortonomalizacije.

- kompaktnost (vidi definiciju 5.4.3)
- povezanost (vidi definiciju 5.4.1), nekompaktnost i polujednostavnost (vidi [Cornwell, 1997.])

Srećom, većina kontinuiranih grupa od interesa za fiziku imaju neka od ovih svojstava.

Definicija 2.5.5 (Ireducibilna reprezentacija)
Reprezentacija Γ na vektorskom prostoru V je *ireducibilna* ako V nema invarijantnih potprostora izuzev $\{0\}$ i samog sebe.

Posljedično, ireducibilnu reprezentaciju nije moguće promjenom baze dovesti u blok-dijagonalnu formu s više od jednog bloka. Dva glavna zadatka teorije grupa, kojima će biti posvećeno sljedeće poglavlje, je identifikacija svih ireducibilnih reprezentacija date grupe te rastav njene proizvoljne reprezentacije na direktni zbroj ireducibilnih:

$$\Gamma = \sum_i \oplus \Gamma_i \ .$$

Zadaci

2.1. Konstruirajte tri različite jednodimenzionalne reprezentacije grupe C_3.

2.2. Pokažite da je $\Gamma^* = \{D(g)^*\}$ reprezentacija ako je $\Gamma = \{D(g)\}$ reprezentacija.

2.3. Zbrajajući dvije 1D reprezentacije od C_2:

$$\Gamma_1 = \{1, 1\} \qquad i \qquad \Gamma_2 = \{1, -1\} \tag{2.20}$$

konstruirajte 2D reprezentaciju od C_2.

2.4. Dvije 2D reprezentacije od od C_2 su

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Konstruirajte njihov direktni zbroj i produkt.

2.5. Pokažite da

$$D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

generira 2D reprezentaciju grupe C_3. Pokažite da je ova reprezentacija ireducibilna nad poljem realnih brojeva.

2.6. Uvjerite se da grupa $\mathbb{R}_+\backslash\{0\},\cdot)$ može biti vjerno reprezentirana na 2D vektorskom prostoru reducibilnom reprezentacijom

$$\Gamma = \{D(g)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pokažite da ova reprezentacija nije potpuno reducibilna.

2.7. Pet funkcija $f(x,y)$

$$\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$$

čine bazu peterodimenzionalnog vektorskog prostor V. Neka je $\Gamma = \{D(g)\}$ reprezentacija grupe D_3 na V definirana uobičajenim transformacijama dvodimenzionalnih vektora (x, y), kao u (2.6). To npr. znači:

$$\begin{aligned} D(c) : x^3y \mapsto & \left(x \cos\frac{2\pi}{3} - y \sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 \left(x \sin\frac{2\pi}{3} + y \cos\frac{2\pi}{3}\right) \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{16}\, x^4 - \frac{1}{2}\, x^3y - \frac{3\sqrt{3}}{8}\, x^2y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}\, y^4 \end{aligned}$$

itd.

a) Odredite matricu $D(b)$ u gornjoj bazi.

b) Odredite matricu $D(c)$ u gornjoj bazi..

c) Pokažite da je Γ reducibilna tako što ćete identificirati invarijantni potprostor od V.

2.8. Neka je P operator projekcije na potprostor $V_1 \subset V$ (dakle operator sa svojstvima $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{v} \in V_1$ i $P\boldsymbol{w} = 0$ za $\boldsymbol{w}$ iz ortogonalnog komplementa od V_1 u V. Očito je $P^2 = P$. Pokažite da je reprezentacija $\Gamma = \{D(g)\}$

- reducibilna ako i samo ako je $PD(g)P = D(g)P$, $\forall g \in G$, te
- potpuno reducibilna ako i samo ako je $PD(g) = D(g)P$, $\forall g \in G$.

Primijenite ovo na zadatak 2.6..

Poglavlje 3

Svojstva ireducibilnih reprezentacija

3.1 Schurove leme

Sva ključna svojstva ireducibilnih reprezentacija slijede iz dvije Schurove leme.

Teorem 3.1.1 (Prva Schurova lema)
Neka operator S povezuje dvije ireducibilne reprezentacije $\Gamma = \{D(g)\}$ i $\Gamma' = \{D'(g)\}$ u smislu da je

$$SD(g) = D'(g)S \quad \forall g \in G \, ,$$

kako je ilustrirano na slici 3.1. Tada je ili $S = 0$ ili je S invertibilan i imamo

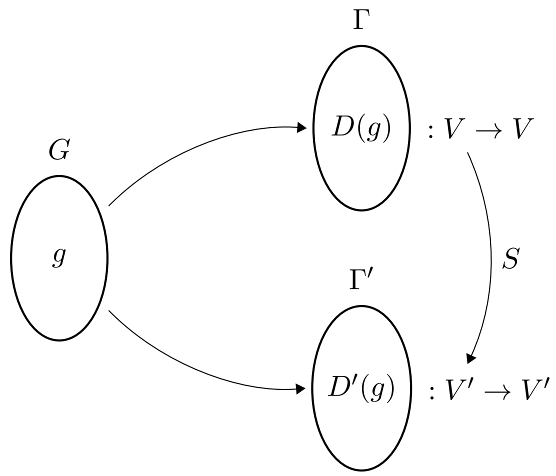
$$D(g) = S^{-1}D'(g)S$$

tj. dvije su reprezentacije ekvivalentne. (Mogućnost da je S singularan, ali ne i nul-operator je isključena.)

Dokaz. Neka su V i V' vektorski prostori na kojima djeluju Γ i Γ'. Slika $S(V)$ prostora V, $S(V) = \{S\boldsymbol{x} | x \in V\}$, je potprostor od V'. Sva potrebna svojstva $S(V)$ nasljeđuje od V', a zatvorenost i egzistencija inverza su posljedice linearnosti operatora S. Dodatno, $S(V)$ je *invarijantni* potprostor od V' jer

$$D'(g)S\boldsymbol{x} = SD(g)\boldsymbol{x} \in S(V) \, .$$

Kako je $\{D'(g)\}$ ireducibilna, iz definicije ireducibilnosti 2.5.5 slijedi da je ili $S(V) = \{\mathbf{0'}\}$ ili $S(V) = V'$.



Slika 3.1: Situacija prve Schurove leme: dvije reprezentacije grupe G čiji vektorski prostori su povezani operatorom S.

1) Ako je $S(V) = \{\mathbf{0'}\}$ tj. svi vektori domene operatora S preslikavaju se u nul-vektor, to znači da je S nul-operator, $S = 0$. To je prva od dvije mogućnosti iz prve Schurove leme.

2) Neka je $S(V) = V'$ tj. S je surjekcija. Promotrimo kernel Ker(S) koji je zahvaljujući linearnosti od S potprostor od V. Uzmimo proizvoljni vektor $\boldsymbol{k}$ iz Ker(S). Po pretpostavci leme je

$$SD(g)\boldsymbol{k} = D'(g)S\boldsymbol{k} = \mathbf{0'}$$

što znači da je i $D\boldsymbol{k}$ element kernela Ker(S), odnosno i kernel je *invarijantni* potprostor, baš kao i slika. Sad, kako je $\{D(g)\}$ ireducibilna slijedi da je ili Ker(S)=$\{\mathbf{0}\}$ ili Ker(S)=V. Ker(S)= V ne može biti jer onda ne bi bilo $S(V) = V'$ nego bi bilo $S(V) = \mathbf{0'}$. Zaključujemo da je Ker(S)= $\{\mathbf{0}\}$ pa je S i injekcija (vidi teorem 1.3.6 o izomorfizmu) te ima inverz i onda iz pretpostavke leme slijedi $D(g) = S^{-1}D'(g)S$, tj. dvije su reprezentacije ekvivalentne, što je druga mogućnost leme. □

Teorem 3.1.2 (Druga Schurova lema)
Operator koji komutira sa svim operatorima neke ireducibilne reprezentacije

$$D(g)S = SD(g) \quad \forall g \in G$$

je nužno proporcionalan jediničnom operatoru (identiteti), $S = \lambda \mathbb{1}$.

Dokaz. Iz fundamentalnog teorema algebre slijedi da S ima barem jedan svojstveni vektor tj. da postoji $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ takav da je $S\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. To možemo zapisati i u obliku $(S-\lambda\mathbb{1})\boldsymbol{x}=0$ što znači da je $(S-\lambda\mathbb{1})$ singularna matrica (neki vektor $\neq \mathbf{0}$ preslikava u $\mathbf{0'}$ pa nije injekcija). No, $[S-\lambda\mathbb{1}, D(g)]=0$ jer jedinični operator komutira trivijalno, a S komutira po pretpostavci leme. No onda je po prvoj Schurovoj lemi $S-\lambda\mathbb{1}$ nul-operator jer smo upravo vidjeli da nije regularan. Iz $S-\lambda\mathbb{1}=0$ onda odmah slijedi $S=\lambda\mathbb{1}$. □

3.2 Relacije ortogonalnosti i karakteri

Promotrimo dvije ireducibilne reprezentacije, Γ_α i Γ_β, koje djeluju na vektorskim prostorima $V^{(\alpha)}$ i $V^{(\beta)}$, dimenzija d_α i d_β. Ako je $\alpha \neq \beta$ podrazumijevat ćemo da su reprezentacije neekvivalentne. Promotrimo i proizvoljni operator A koji preslikava s $V^{(\beta)}$ na $V^{(\alpha)}$. Dakle imamo

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} &: V^{(\alpha)} \to V^{(\alpha)} \,, \\ D^{(\beta)} &: V^{(\beta)} \to V^{(\beta)} \,, \\ A &: V^{(\beta)} \to V^{(\alpha)} \,. \end{aligned}$$

Definirajmo sada matricu

$$B \equiv \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) \,.$$

Pokazat ćemo da B zadovoljava pretpostavke Schurovih lema. Uzimimo proizvoljni element $h \in G$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(h)B &= \sum_g D^{(\alpha)}(h) D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) \\ &= \sum_g D^{(\alpha)}(hg) A D^{(\beta)}(g^{-1}) \\ &= (\text{zamjenom } hg \equiv g' \,,\ g^{-1} = g'^{-1}h) \\ &= \sum_{g'} D^{(\alpha)}(g') A D^{(\beta)}(g'^{-1}h) \\ &= \sum_{g'} D^{(\alpha)}(g') A D^{(\beta)}(g'^{-1}) D^{(\beta)}(h) \\ &= B D^{(\beta)}(h) \end{aligned} \tag{3.1}$$

U slučaju $\alpha \neq \beta$ (Γ_α i Γ_β nisu ekvivalentne), iz prve Schurove leme slijedi da je $B=0$. Ako je pak $\alpha=\beta$, tj. $D^{(\alpha)}(h)=D^{(\beta)}(h)$ onda iz druge Schurove leme slijedi $B=\lambda\mathbb{1}$. Ove se dvije tvrdnje mogu kompaktno ujediniti u relaciju

$$B = \sum_g D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} \mathbb{1} \,, \tag{3.2}$$

odnosno, po komponentama,

$$\sum_g D_{ir}^{(\alpha)}(g) A_{rs} D_{sl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} \mathbb{1}_{il} \,. \tag{3.3}$$

A je ovdje bila proizvoljna matrica. Uzmimo sada konkretnije na mjesto A matricu $A^{(j,k)}$ koja je svugdje nula osim što joj je element $A_{jk}^{(j,k)} = 1$

$$A^{(j,k)} = \begin{array}{c c} & \cdots k \cdots \\ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{pmatrix} & \cdot & \\ & \cdot & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \end{pmatrix} \end{array} ,$$

$$A_{rs}^{(j,k)} = \delta_{rj} \delta_{sk} \,.$$

Upotrebom te matrice u gornjoj relaciji (3.3) dobivamo

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_{jk}^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} \mathbb{1}_{il} \,. \tag{3.4}$$

Sada treba odrediti λ_{jk}. Stavimo ovdje $\alpha = \beta$ i uzmimo trag po il indeksima množenjem s δ_{il},

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{ki}^{(\alpha)}(g^{-1}) = \lambda_{jk}^{(\alpha)} \delta^{\alpha\alpha} \dim(V^{(\alpha)}) \equiv \lambda_{jk}^{(\alpha)} d_\alpha \,.$$

S druge strane, to je također jednako

$$\sum_g D(g^{-1}g)_{kj} = \sum_g D(e)_{kj} = \sum_g \mathbb{1}_{kj} = \delta_{kj} \sum_g = \delta_{kj} n \,.$$

Ovdje je n red grupe G. Slijedi da je

$$\lambda_{jk}^{(\alpha)} = \frac{n}{d_\alpha} \delta_{kj} \,,$$

što daje *temeljni teorem o ortogonalnosti* matrica ireducibilnih reprezentacija:

Teorem 3.2.1 (Ortogonalnost matrica ireducibilnih reprezentacija)

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \frac{n}{d_\alpha} \delta^{\alpha\beta} \delta_{il} \delta_{kj} \,.$$

Nadalje, uvijek možemo uzeti da je $D^{(\beta)}(g)$ unitarna matrica i u tom slučaju je

$$\sum_g D^{(\alpha)}_{ij}(g) D^{(\beta)}_{lk}(g)^* = \frac{n}{d_\alpha}\delta^{\alpha\beta}\delta_{il}\delta_{kj}\ .$$

Stavimo ovdje $\alpha = \beta$ i promotrimo skup od d_α^2 vektora $\boldsymbol{x}_{ij}$ iz novog n-dimenzionalnog vektorskog prostora, čije su komponente dane komponentama svih matrica reprezentacije:

$$\boldsymbol{x}_{ij} \equiv (D^{(\alpha)}_{ij}(g_1), D^{(\alpha)}_{ij}(g_2), \ldots, D^{(\alpha)}_{ij}(g_n))\,.$$

(Ne miješati ovaj prostor s V^α koji je dimenzije d_α!) Zbog

$$\sum_g D^{(\alpha)}_{ij}(g) D^{(\alpha)}_{lk}(g)^* = (\boldsymbol{x}_{lk}, \boldsymbol{x}_{ij}) = \frac{n}{d_\alpha}\delta_{il}\delta_{kj}$$

vektori $\boldsymbol{x}_{ij}$ su međusobno ortogonalni. Za neku drugu ireducibilnu reprezentaciju $\Gamma_{(\alpha')}$ imamo novih $d_{\alpha'}^2$ vektora koji su ortogonalni međusobno, ali i obzirom na prvih d_α^2 vektora. Treća ireducibilna reprezentacija daje novih $d_{\alpha''}^2$ itd. No znamo da je općenito maksimalan broj ortogonalnih vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru upravo n. Tako slijedi

$$\sum_\alpha d_\alpha^2 \leq n\,, \tag{3.5}$$

pa kako je svaka ireducibilna reprezentacija barem jednodimenzionalna imamo $\sum_\alpha d_\alpha \leq n$ tj. broj ireducibilnih reprezentacija je manji ili jednak broju elemenata grupe. Štoviše, vrijedi (vidi npr. [Hamermesh, 1989.]) da je nejednakost (3.5) saturirana tj.

$$\sum_\alpha d_\alpha^2 = n\ .$$

Da bismo odredili broj članova u ovoj relaciji tj. broj (neekvivalentnih) ireducibilnih reprezentacija grupe, treba nam pojam *karaktera* reprezentacije.

Definicija 3.2.2 (Karakter reprezentacije)
Karakter χ reprezentacije $\Gamma = \{D(g)\}$ grupe G je skup $\chi = \{\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) \mid g \in G\}$.

Prvo važno svojstvo je da ekvivalentne reprezentacije imaju iste karaktere jer zbog cikličnosti traga imamo $\mathrm{Tr}\, SD(g)S^{-1} = \mathrm{Tr}\, D(g)$. Bez dokaza navedimo da vrijedi i obrat: jednakost karaktera implicira da su reprezentacije ekvivalentne. (Usput, taj obrat se *ne* poopćuje na beskonačne kontinuirane grupe, osim ukoliko nisu kompaktne, vidi [Cornwell, 1997.]) Zahvaljujući cikličnosti traga vidimo i da je $\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) = \mathrm{Tr}\, D(h)D(g)D^{-1}(h) = \mathrm{Tr}\, D(hgh^{-1})$ tj. konjugirani elementi imaju iste karaktere (Oprez: Treba razlikovati karakter reprezentacije χ od njegove komponente $\chi(g)$ koju isto često zovemo karakter — karakter elementa.)

Za unitarnu reprezentaciju vrijedi $\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, D(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, D^\dagger = \chi^*(g)$.

Uzmimo sada trag po obje matrice u teoremu o ortogonalnosti 3.2.1 množenjem s $\delta_{ij}\delta_{kl}$ pa dobijemo

$$\sum_g \chi^{(\alpha)}(g)\chi^{(\beta)}(g)^* = \frac{n}{d_\alpha}\delta^{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{ki} = \frac{n}{d_\alpha}\delta^{\alpha\beta}d_\alpha = n\delta^{\alpha\beta} .$$

Definiramo li skalarni produkt karaktera na sljedeći način

$$(\chi, \phi) \equiv \frac{1}{n}\sum_g \chi(g)\phi(g)^* = (\phi, \chi) ,$$

imamo

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = \delta^{\alpha\beta}$$

tj. karakteri neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija su ortonormirani obzirom na taj skalarni produkt.

Neka je sada k_i broj elemenata u i-toj klasi konjugacije grupe G. Tada, budući da su karakteri svih elemenata jedne klase konjugacije isti imamo

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)}\chi_i^{(\beta)*} = \delta^{\alpha\beta} .$$

što je iskaz ortogonalnosti vektora u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru, gdje je k broj klasa konjugacije grupe. Ortogonalni vektori su

$$\boldsymbol{\chi}^{(\alpha)} = (\chi_1^{(\alpha)}, \chi_2^{(\alpha)}, \ldots, \chi_k^{(\alpha)}) .$$

Svaka ireducibilna reprezentacija daje jedan takav k-dimenzionalni vektor. Istim logičkim slijedom kao i ranije ova ortogonalnost vodi na zaključak da je broj ireducibilnih reprezentacija manji ili jednak broju klasa konjugacije. Štoviše, vrijedi (vidi literaturu) ortogonalnost vektora:

$$\boldsymbol{\chi}_i = (\chi_i^{(\alpha)}, \chi_i^{(\beta)}, \ldots)$$

tj.

$$\frac{1}{n}\sum_\alpha k_i \chi_i^{(\alpha)}\chi_j^{(\alpha)*} = \delta_{ij} ,$$

što na isti način daje suprotnu nejednakost da je broj klasa konjugacije manji ili jednak broju ireducibilnih reprezentacija. Zaključujemo da je broj ireducibilnih reprezentacija grupe upravo jednak broju njenih klasa konjugacije!

3.3 Tablice karaktera

Tablica karaktera neke grupe je tablica karaktera svih njenih ireducibilnih reprezentacija.

	Klase konjugacije					
Γ_α	$\chi_1^{(\alpha)}$	$\chi_2^{(\alpha)}$	.	.	.	$\chi_k^{(\alpha)}$
Γ_β	$\chi_1^{(\beta)}$	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

Vidjet ćemo da tablica često daje dovoljno informacija za praktične primjene, a može se, pomoću slijedećih pravila, konstruirati i bez eksplicitnog poznavanja samih matrica reprezentacija i uzimanja njihovih tragova.

Pravila za konstrukciju tablice karaktera

1) Broj ireducibilnih reprezentacija jednak je broju klasa konjugacije grupe. Iz ovoga slijedi da tablica ima jednak broj redova i stupaca. Broj klasa pronalazimo „pješke," analizom grupe.

2) Kako su dimenzije vektorskih prostora prirodni brojevi, uvjet da je zbroj kvadrata dimenzija ireducibilnih reprezentacija jednak broju elemenata grupe, $\sum_\alpha d_\alpha^2 = n$, često ima jedinstveno rješenje koje određuje dimenzionalnosti d_α svih ireducibilnih reprezentacija.

3) Jedinični element grupe je klasa za sebe, a reprezentiran je uvijek jediničnom matricom $D^{(\alpha)}(e) = \mathbb{1}$ čiji je karakter $\chi^{(\alpha)}(e) = d_\alpha$. Ovo određuje jedan (konvencionalno prvi) stupac tablice.

4) Uvijek postoji trivijalna jednodimenzionalna ireducibilna reprezentacija $D(g) = \chi(g) = 1$, $\forall g \in G$. Dakle jedan red (konvencionalno prvi) se sastoji od samih jedinica.

5) Za jednodimenzionalne reprezentacije vrijedi $D(g) = \chi(g)$ pa sami karakteri reprezentiraju grupu i njihovo množenje mora biti homomorfno množenju odgovarajućih elemenata grupe.

6)
$$\sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_i^{(\beta)*} = n\delta^{\alpha\beta}$$

(*Redovi* tablice su ortogonalni i, kad se uzmu u obzir težinski faktori k_i, normirani su na n)

7)
$$\sum_{\alpha=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)*} = n\delta_{ij}$$

(*Stupci* tablice su ortogonalni i, kad se uzmu u obzir težinski faktori k_i, normirani su na n)

Pravila je najbolje primjenjivati po redu jer su ona s većim rednim brojem teža za primjenu i rjeđe nužna za kompletiranje tablice.

Primjer 3.3.1 (Tablica karaktera grupe D_3)
Grupa ima tri klase konjugacije (vidi primjer 1.2.12):

$$K_1 = \{e\}$$
$$K_2 = \{c, c^2\}$$
$$K_3 = \{b, bc, bc^2\}$$

Iz pravila 1) onda znamo da D_3 ima tri ireducibilne reprezentacije i tablica karaktera će biti 3×3

	K_1	$2K_2$	$3K_3$
Γ_1			
Γ_2			
Γ_3			

Ovdje smo prema običaju uz naziv klase stavili i broj njenih elemenata. To je korisno imati pri ruci jer su to težinski faktori potrebni za primjenu pravila 6) i 7). Pravilo 2) vodi na jednadžbu

$$\sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n = 6$$

koja, do na permutacije, ima samo jedno rješenje u skupu prirodnih brojeva

$$d_1 = d_2 = 1\,, \quad d_3 = 2\,.$$

Dakle, dvije su reprezentacije jednodimenzionalne. Običaj je organizirati tablicu tako da dimenzionalnost raste idući dolje po retcima. Po pravilu 3) prvi stupac su karakteri jediničnih matrica tj. dimenzionalnosti reprezentacija

	K_1	$2K_2$	$3K_3$
Γ_1	1		
Γ_2	1		
Γ_3	2		

a po pravilu 4) prvi red pripada trivijalnoj reprezentaciji čiji su svi karakteri jedinice:

	K_1	$2K_2$	$3K_3$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1		
Γ_3	2		

Drugi redak možemo kompletirati korištenjem pravila 5) obzirom da je Γ_2 jednodimenzionalna. Uporaba pravila nije sasvim algoritamska, ali od koristi je promatrati umnoške karaktera različitih klasa. Npr. $\chi^{(2)}(b)\chi^{(2)}(c) = \chi^{(2)}(bc)$ po svojstvu homomorfizma. Kako elementi b i bc pripadaju istoj klasi, $\chi^{(2)}(b) = \chi^{(2)}(bc)$ i možemo ih skratiti s obje strane (ne mogu biti nula jer je npr. $\chi^{(2)}(b)^2 = \chi^{(2)}(b^2) = \chi^{(2)}(e) = 1$) i slijedi da je $\chi^{(2)}(c) = 1$. Upravo smo pokazali i da je $\chi^{(2)}(b)^2 = 1$ tj. $\chi^{(2)}(b) = \pm 1$. Sad se oslanjamo na pravilo 6) da bi zaključili da kad bi bilo $\chi^{(2)}(b) = 1$ prva dva reda bi bila jednaka, a ne ortogonalna. Tako znamo da je $\chi^{(2)}(b) = -1$ i imamo

	K_1	$2K_2$	$3K_3$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1
Γ_3	2	a	b

Ovdje smo s a i b označili zadnja dva nepoznata elementa tablice koje ćemo odrediti pomoću pravila 6) tj. ortogonalnosti trećeg retka s prvim i drugim, gdje treba paziti na težinske faktore. Imamo

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \chi_i^{(3)} \chi_i^{(1)*} = 2 + 2a + 3b = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \chi_i^{(3)} \chi_i^{(2)*} = 2 + 2a - 3b = 0\,,$$

što su dvije jednadžbe s dvije nepoznanice i s rješenjem $a = -1, b = 0$. Tako smo odredili cijelu tablicu. Običaj je za označavanje ireducibilnih reprezentacija i klasa konjugacija koristiti kristalografske oznake. Mi ćemo koristiti tzv. Schönfliesove oznake iz priloga A pa konačna tablica izgleda ovako:

	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Uvjerite se da je i pravilo 7), ortogonalnost stupaca tablice, zadovoljeno.

Primjer 3.3.2 (Tablica karaktera grupe C_3)
Grupa C_3=$\{e, c, c^2\}$ je Abelova pa je svaki element klasa za sebe. Dakle imamo tri klase i tri ireducibilne reprezentacije, a iz pravila 2) slijedi $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n = 3$ i vidimo da su sve tri jednodimenzionalne. Pravila 3) i 4) nas vode na to da su prvi red i prvi stupac tablice same jedinice. Pravilo 5) se može upotrijebiti da se zaključi da je$\chi(c)^3 = \chi(c^3) = \chi(e) = 1$ iz čega slijedi da su $\chi(c)$ kubni korijeni jedinice $\chi(c) = \exp(2\pi ik/3), k = 0, 1, 2$, odnosno mogućnosti su $\chi(c) = 1, \omega \equiv e^{2\pi i/3}, \omega^2$. Uvjeti ortogonalnosti redaka i stupaca nas onda vode na strukturu:

	E	$c = C_3$	$c^2 = C_3^2$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	ω	ω^2
Γ_3	1	ω^2	ω

Kako je $\omega^2 = \omega^*$ vidimo da su Γ_2 i Γ_3 međusobno kompleksno konjugirane reprezentacije (vidi zadatak 2.2.). Kompleksna konjugacija je sama po sebi isto svojevrsna transformacija simetrije. Ukoliko proširimo razmatranje i na tu transformaciju Γ_2 i Γ_3 prestaju biti ireducibilne i zato se često te dvije reprezentacije zajedno smatraju jednom dvodimenzionalnom ireducibilnom reprezentacijom E.

Zgodno je uočiti da neabelovska grupa D_3 ima i dvodimenzionalnu, dakle matričnu, ireduciblinu reprezentaciju. To je logično jer neabelovsko svojstvo ne može biti vjerno reprezentirano jednodimenzionalnim reperezentacijama.

3.4 Dekompozicija reducibilnih reprezentacija

Konstrukcijom tablice karaktera smo istovremeno i identificirali sve ireducibilne reprezentacije grupe. Preostaje nam drugi zadatak obećan na kraju prošlog poglavlja, a to je naučiti kako proizvoljnu reprezentaciju reducirati na direktan zbroj ireducibilnih. Uzmimo neku, moguće reducibilnu, reprezentaciju Γ. Općenito

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots = \sum_\alpha \oplus a_\alpha \Gamma_\alpha$$

gdje su Γ_α ireducibilne reprezentacije i gdje je a_α *multiplicitet* (broj pojavljivanja) Γ_α u Γ. Uzmemo li sad trag nekog operatora iz Γ iz i-te klase konjugacije imajući u vidu blok-dijagonalnu formu direktnog zbroja vidimo da je

$$\chi_i = \sum_\alpha a_\alpha \chi_i^{(\alpha)} \quad \forall i\,. \tag{3.6}$$

Sada pomnožimo ovu realaciju s $k_i \chi_i^{(\beta)*}$, gdje je Γ_β neka konkretna ireducibilna reprezentacija, te prosumiramo po svim klasama i iskoristimo ortogonalnost karaktera ireducibilnih reprezentacija

$$\sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i \chi_i^{(\beta)*} = \sum_\alpha a_\alpha \sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_i^{(\beta)*} = \sum_\alpha a_\alpha n \delta^{\alpha\beta} = n a_\beta\,. \tag{3.7}$$

Tako dobivamo izraz za multiplicitet pojedine ireducibilne reprezentacije u rastavu proizvoljne reprezentacije

$$a_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i \chi_i^{(\alpha)*} \equiv (\chi^{(\alpha)}, \chi)\,, \tag{3.8}$$

gdje smo uveli skalarni produkt karaktera (,).

Primjer 3.4.1 (Reprezentacija Γ_V grupe D_3 na 3D euklidskom prostoru)
Promotrimo reprezentaciju grupe D_3 na standardnom trodimenzionalnom vektorskom prostoru. (Oznaka V implicira da mislimo na prave (polarne) vektore, za razliku od „nepravih”, aksijalnih ili pseudovektora koje obično označavamo s A, vidi odjeljak B.) Kako nam trebaju samo karakteri, dovoljno je promatrati po jednog reprezentanta svake od triju klasa (vidi primjer 1.2.12). Jedinični element je naravno reprezentiran jediničnom matricom $D^{(V)}(e) = \mathrm{diag}(1,1,1)$ s karakterom 3. Za reprezentanta klase $\{c, c^2\}$ možemo uzeti matricu rotacije za $2\pi/3$ oko z-osi

$$D^{(V)}(c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Za reprezentanta zadnje klase $\{b, bc, bc^2\}$ možemo uzeti matricu rotacije za kut π oko y-osi koja naprosto izvrće x i z komponente vektora

$$D^{(V)}(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.10}$$

Uzimajući tragove, vidimo da je cijeli karakter ove reprezentacije $\chi = (3, 0, -1)$. Kako smo u primjeru 3.3.1 upoznali sve ireducibilne reprezentacije, dvije jednodimenzionalne i jednu dodimenzionalnu, znamo da je Γ_V reducibilna. Njen rastav dobijemo izračunom multipliciteta svake pojedine od tri ireducibilne reprezentacije pomoću skalarnog produkta (3.8):

$$\begin{aligned}
a_{A_1} &= (\chi, \chi^{(A_1)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3} k_i \chi_i \chi_i^{(A_1)*} \\
&= \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) = 0 \\
a_{A_2} &= (\chi, \chi^{(A_2)}) \\
&= \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 1 \\
a_E &= (\chi, \chi^{(E)}) \\
&= \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 1
\end{aligned}$$

Tako konačno imamo

$$\Gamma_V = A_2 \oplus E . \tag{3.11}$$

Od interesa je odrediti i invarijantne potprostore na koje djeluju A_2 i E. $V^{(A_2)}$ je očito razapet vektorom $\hat{\boldsymbol{z}}$, a $\hat{\boldsymbol{x}}$ i $\hat{\boldsymbol{y}}$ razapinju 2D potprostor $V^{(E)}$. (Primijetite razliku prema C_3 kod koje je dodatno i svaki pojedini vektor $\boldsymbol{v} = a\hat{\boldsymbol{z}}$ invarijantan.)

Pokazali smo da su i direktni zbroj i direktni produkt reprezentacija isto reprezentacije grupe. Po definiciji, direktni zbroj ireducibilnih reprezentacija je reducibilan. Što je s direktnim produktom $\Gamma_\alpha \otimes \Gamma_\beta$? On je općenito reducibilan i njegov rastav na ireducibilne reprezentacija nazivamo *Clebsch-Gordanov razvoj*:

$$\Gamma_\alpha \otimes \Gamma_\beta = \sum \oplus\, a_\gamma \Gamma_\gamma .$$

Karakter direktnog produkta je produkt karaktera (lako se vidi iz matričnog zapisa direktnog produkta) pa odmah vidimo da je

$$a_\gamma = (\chi^{(\gamma)}, \chi^{(\alpha)} \chi^{(\beta)}) .$$

Primjer 3.4.2 (Clebsch-Gordanov razvoj $E \otimes E$ reprezentacije grupe D_3)
Iz tablice karaktera grupe D_3, vidi primjer 3.3.1, znamo da je karakter dvodimenzionalne reprezentacije $\chi(E) = (2, -1, 0)$, pa je onda karakter direktnog produkta $\chi(E \otimes E) = (4, 1, 0)$. Multipliciteti pojedinih ireducibilnih reprezentacija su

$$\begin{aligned}
a_{A_1} &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0) = 1 \\
a_{A_2} &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 1 \\
a_E &= \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0) = 1
\end{aligned}$$

što znači da je Clebsch-Gordanov razvoj

$$E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E\,. \tag{3.12}$$

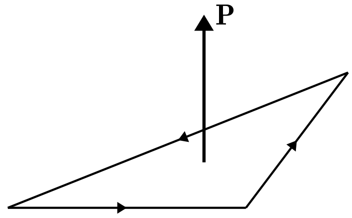
Dimenzionalnosti se slažu jer je dimenzija $E \otimes E$ jednaka $2 \cdot 2 = 4$, a dimenzionalnost $A_1 \oplus A_2 \oplus E$ također jednaka $1 + 1 + 2 = 4$.

Clebsch-Gordanov razvoj je od velike važnosti u primjenama teorije grupa na fizikalne sustave. On daje odgovor na pitanje kako se sve može transformirati združeni sustav, ukoliko znamo kako se transformiraju podsustavi. Sljedeći odjeljci daju neke druge fizikalne primjene rastavljanja reducibilnih reprezentacija koje nisu nastale direktnim produktom pa nije riječ o Clebsch-Gordanovom razvoju.

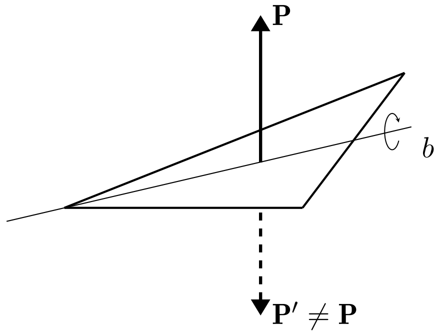
3.5 Primjena: *Dipolni momenti kristala*

Kristali su fizikalni sustavi koji su bogati simetrijama. Tu se ističu simetrije na translacije za cijeli broj jediničnih vektora osnovne kristalne čelije (kristal se za te potrebe zamišlja kao beskonačan), te tzv. *točkaste* grupe simetrija koje ostavljaju jednu točku kristala nepomičnom i izlistane su u odjeljku A. Postoje i složenije kombinacije ovih transformacija za što treba pogledati specijaliziranu literaturu. Usredotočimo se na neki kristal koji ima točkastu grupu simetrija G. Cikličke i dihedralne grupe koje smo dosad upoznali su mogući kandidati. Važno je pitanje fizike možemo li odrediti neka makroskopska svojstva kristala (poput toplinske vodljivosti, permanentne magnetičnosti itd.) poznavajući njegovu kristalnu strukturu. U načelu, odogovor možemo dobiti rješavanjem Schrödingerove jednadžbe, ali to je često preteško. Tu nam je od pomoći poznavanje simetrija kristala. Jer svaka fizikalna veličina koja opisuje kristal mora biti invarijantna na sve simetrije kristala i to često znatno ograničava mogućnosti.

Pogledajmo kako to funkcionira na primjeru permanentnog magnetskog ili električnog dipolnog momenta. Da bi kristal mogao imati neiščezavajući električni dipolni moment te veličina mora biti invarijantna na grupu simetrije kristala. Kako je električni dipolni moment *vektor* 3D euklidskog vektorskog prostora, slijedi da je nužno postojanje vektora invarijantnih na djelovanje grupe simetrija. Na primjer, za kristal s C_3 simetrijom vektor $\boldsymbol{P}$ usmjeren kao na sljedećoj slici je invarijantan i to može biti smjer dipolnog momenta takvog kristala. $\boldsymbol{P} \neq 0$ ne narušava C_3 simetriju.



S druge strane, veća D_3 simetrija ukida takvu mogućnost. b-rotacija mijenja $\boldsymbol{P} \to -\boldsymbol{P}$ pa bi $\boldsymbol{P} \neq 0$ narušilo simetriju.



Atomi simetričnog kristala ne mogu proizvesti nesimetrični dipolni moment.

Grupno-teorijski iskaz ovoga je da *reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru (potencijalnih) vektora dipolnog momenta mora biti trivijalna tj. identiteta*:

$$D(g) = 1 \quad \forall g \in G \; .$$

Dakle, da bi kristal mogao imati $\boldsymbol{P} \neq 0$, reprezentacija grupe G na 3D euklidskom vektorskom prostoru mora u svojoj dekompoziciji na ireducibilne reprezentacije sadržavati identitetu, a odgovarajući invarijantni potprostor je prostor mogućih vektora dipolnog momenta.

Vidjeli smo u prošlom odjeljku da se reprezentacija Γ_V grupe D_3 na 3D euklidskom vektorskom prostoru rastavlja na ireducibilne kao

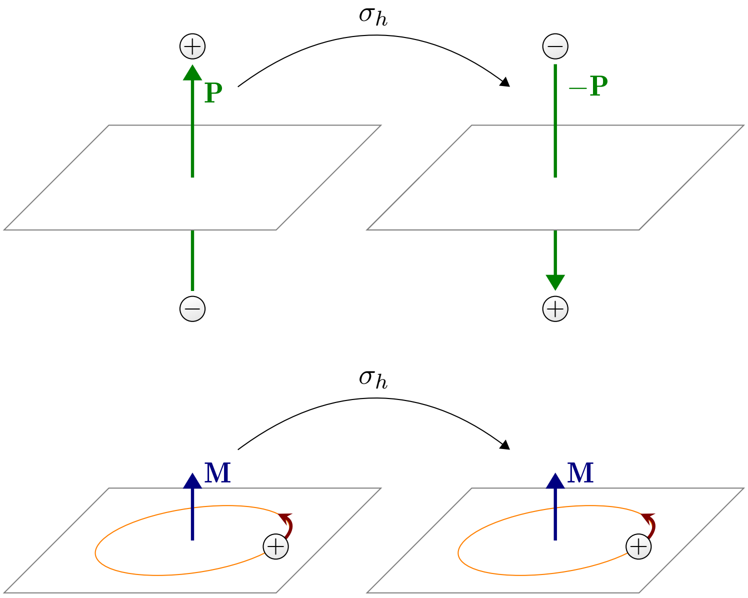
$$\Gamma_V = A_2 \oplus E \; ,$$

pa kako u tom rastavu nema trivijalne reprezentacije A_1, zaključujemo da kristal sa D_3 simetrijom ne može imati električni dipolni moment. S druge strane, uvjerite se da za C_3 vrijedi

$$\Gamma_V = A_1 \oplus E \ ,$$

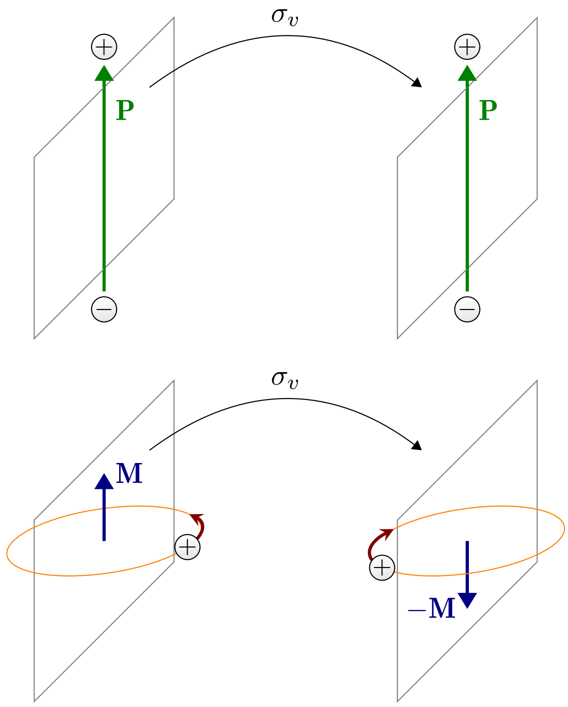
gdje je A_1 trivijalna reprezentacija pa u ovom slučaju postoji mogućnost električnog dipolnog momenta.

Kad grupa simetrija pored rotacija sadrži i refleksije (σ, S_n, i, vidi odjeljak A) treba uzeti u obzir činjenicu da je magnetski moment $\boldsymbol{M}$ *aksijalni* vektor (vidi Dodatak B) koji se pri takvim transformacijama ponaša obrnuto od običnog (polarnog) vektora električnog dipolnog momenta. Tako npr. refleksija preko horizontalne ravnine σ_h će promijeniti predznak vertikalno usmjerenog električnog, ali ne i magnetskog dipolnog dipolnog momenta:



Isto tako, refleksija preko vertikalne ravnine σ_v neće promijeniti predznak vertikalno usmjerenog električnog, ali hoće magnetskog dipolnog dipolnog momenta*.

*Usput, razmislite zašto ogledalo izvrće lijevo-desno, a ne i gore-dolje? Promatrajući operaciju refleksije preko vertikalnog ogledala koje leži u $x-z$ ravnini $\sigma_v : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ čini se da bi ta dva smjera trebala biti ekvivalentna.



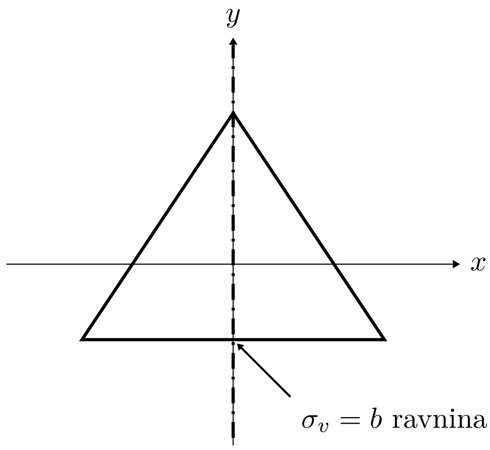
Uzmimo kao primjer kristal s C_{3v} simetrijom. Grupa C_{3v} je izomorfna grupi D_3, jedino što b nije rotacija za $\pi/2$ oko horizontalne osi već refleksija oko vertikalne ravnine koja sadrži C_3 os*.

Reprezentacija elemenata e, c i c^2 je kao u primjeru 2.2.2,

$$D(c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

s karakterima $\chi^{(V)}(e) = \dim\Gamma_V = 3$, $\chi^{(V)}(c) = 0$, a ako osi izberemo kao na slici

*Vidimo da ovdje grupe ne razmatramo sasvim apstraktno nego koristimo različite oznake za jednu te istu apstraktnu grupu imajući u vidu zapravo različite reprezentacije na euklidskom vektorskom prostoru.



onda je

$$D^{(V)}(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s karakterom $\chi^{(V)}(b) = 1$ (usporedite s (3.10)). Kako je grupa C_{3v} izomorfna grupi D_3 ima istu tablicu karaktera*. Dakle, imamo

	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0
Γ_V	3	0	1

iz čega slijedi

$$\Gamma_V = A_1 \oplus E\,.$$

Kako se u rastavu javlja trivijalna reprezentacija A_1 slijedi da je za ovaj kristal moguć permanentni *električni* dipolni moment.

Za aksijalne vektore, reprezentacije elemenata e, c i c^2 su iste kao i gore, jer rotacije ne razlikuju polarne i aksijalne vektore. Međutim refleksija $D^{(V)}(b)$ je reprezentirana suprotno† od $D^{(V)}(b)$

$$D^{(V)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*Obrat ne vrijedi, npr. Q i T_d imaju iste tablice karaktera, a nisu izomorfne.

†Oblik matrice se može naći i iz razmatranja djelovanja σ_v na aksijalni vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ gdje su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pravi vektori. Imamo $\sigma_v : (a_x, a_y, a_z) \mapsto (-a_x, a_y, a_z)$ i analogno $\sigma_v : (b_x, b_y, b_z) \mapsto (-b_x, b_y, b_z)$ pa je $\sigma_v : (c_x, c_y, c_z) \mapsto (c_x, -c_y, -c_z)$.

s karakterom $\chi^{(A)}(b) = -1$.

Dakle, ukupni karakter reprezentacije je $\chi^{(A)} = (3, 0, -1)$ odnosno

$$\Gamma_A = A_2 \oplus E \,.$$

Tu se ne pojavljuje trivijalna A_1 pa ne može biti ni permanentnog *magnetskog* dipolnog momenta.

3.6 Primjena: *Degeneracija i cijepanje energijskih nivoa*

U kvantnoj mehanici stanja sustava su reprezentirana vektorima $|\alpha\rangle$ u Hilbertovom vektorskom prostoru. Transformacije sustava realiziramo djelovanjem odgovarajućih operatora U na tom prostoru

$$|\alpha'\rangle = U|\alpha\rangle \,, \tag{3.13}$$

ili, ekvivalentno, transformacijom sličnosti drugih operatora A koji djeluju u tom prostoru:

$$A' = U^{-1}AU \,. \tag{3.14}$$

Malo opsežniju rekapitulaciju relevatnih osnova može se naći u dodatku C, gdje je i objašnjeno da su operatori transformacije U redovito unitarni. To sve vrijedi bez obzira na to je li transformacija simetrija ili nije.

Kvantnomehanički sustav, zadan hamiltonijanom H_0, je *simetričan* obzirom na skup transformacija $\{U(g_1), U(g_2), \ldots, U(g_n)\}$ ako transformacije ne mijenjaju hamiltonijan.

$$H_0' = U^{-1}(g)H_0U(g) = H_0 \quad \forall g \in \{g_1, \ldots, g_n\} \,. \tag{3.15}$$

Naime, možemo reći da putem Schrödingerove jednadžbe hamiltonijan definira sustav. Transformirani sustav će u slučaju da je transformacija simetrija imati isti skup rješenja Schrödingerove jednadžbe, s istim energijama. Ekvivalentno, iz (3.15) se vidi da tada operator simetrije $U(g)$ i hamiltonijan H_0 komutiraju

$$H_0U(g) = U(g)H_0 \quad \forall g \in \{g_1, \ldots, g_n\} \,. \tag{3.16}$$

Skup svih operatora s ovim svojstvom čini grupu (provjerite da su zadovoljeni svi aksiomi grupe!) tj. reprezentaciju grupe $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ na prostoru kvantnomehaničkih stanja.

Stanje sustava $|n\rangle$ s dobro definiranom energijom zove se *stacionarno stanje* i dano je kao rješenje vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe tj. kao svojstveno stanje hamiltonijana

$$H_0|n\rangle = E_n|n\rangle \ .$$

Energija transformiranih stanja $|n'\rangle = U(g)|n\rangle$ je odgovarajuća svojstvena vrijednost hamiltonijana pa zahvaljujući (3.16) imamo

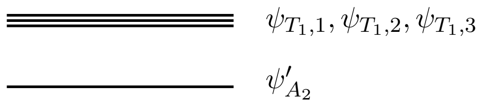
$$H_0|n'\rangle = H_0U(g)|n\rangle = U(g)H_0|n\rangle = U(g)E_n|n\rangle = E_n|n'\rangle \ .$$

Dakle sva stanja $|n'\rangle = U(g)|n\rangle$, za sve $g \in G$ imaju istu energiju E_n! Pojavu kad više stanja ima istu energiju nazivamo *degeneracija*.

Skup stanja $\{U(g)|n\rangle \,|\, g \in G\}$ dobivenih transformacijama datog stanja $|n\rangle$ razapinje potprostor vektorskog prostora svih stanja sustava. On je po konstrukciji invarijantan na djelovanje reprezentacije $\{U(g)\}$. Također, reprezentacija $\{U'(g)\}$ dobivena redukcijom reprezentacije $\{U(g)\}$ na ovaj potprostor je ireducibilna što isto slijedi iz načina na koji smo konstruirali potprostor[*]. Takav potprostor naziva se *multiplet*, a u literaturi se vrlo često izraz multiplet koristi i za samu bazu ovog potprostora.

Vidimo da poznavajući sve ireducibilne reprezentacije grupe simetrija nekog kvantnomehaničkog sustava možemo odrediti mogućnosti degeneracije njegovih stanja. One su upravo jednake dimenzionalnostima ireducibilnih reprezentacija. Obrnuto, ako u prirodi uočimo degeneraciju, od koristi je identificirati simetriju koja tu degeneraciju uzrokuje. Jednakost energija, dakle jednakost realnih brojeva, teško može biti slučajna. Kad tako odredimo simetrije, to nam može pomoći u određivanju strukture sustava i interakcija koje njime upravljaju jer sve to mora biti u skladu sa simetrijama.

Primjer 3.6.1 (Sustav s oktahedralnom grupom simetrija)
Ireducibilne reprezentacije oktahedralne grupe O pronađemo u dodatku sec:tablice gdje vidimo da ta grupa ima dvije jednodimenzionalne ireducibilne reprezentacije A_1 i A_2, jednu dvodimenzionalnu E i dvije trodimenzionalne T_1 i T_2. Očekujemo dakle da sustav ima jedno-, dvo- i trostruko degenerirane energijske nivoe. Recimo, energijski spektar i pripadajuće valne funkcije sustava mogle bi biti organizirane ovako:



*Čitaoc će jako profitirati ako pažljivo razmisli o ove dvije tvrdnje i detaljno se uvjeri u njih tako da se uvjeri da djelovanjem operatora $\{U(g)\}$ na vektore baze potprostora $\{U(g)|n\rangle\}$ nije moguće dobiti vektor izvan tog potprostora (invarijantnost) te također da je transformacijama bilo kojeg vektora baze moguće dobiti baš sve ostale (ireducibilnost)

$$\psi_{A_1}$$

$$\psi_{E,1}, \psi_{E,2}$$

$$\psi_{A_2}$$

Ovdje su ψ'_{A_2} i ψ_{A_2} linearno neovisne funkcije. Pronađemo li ipak mjerenjima neki nivo s prevelikom degeneracijom, npr.

$$\psi_{E,1}, \psi_{E,2}, \psi_{A_1}$$

to gotovo uvijek znači da nismo dobro identificirali grupu simetrija tj. da sustav ima veću simetriju nego što smo mislili. U ovom slučaju vjerojatno postoji transformacija čiji operator komutira s hamiltonijanom i koji povezuje degenerirana stanja, npr.

$$U(h)\psi_{E,1} = \psi_{A_1} \,,$$

gdje h nije element oktahedralne grupe O nego tek treba otkriti veću grupu kojoj on pripada i kojoj je O podgrupa.

Primjer 3.6.2 (Sferna simetrija i vodikov atom)
Ukoliko zanemarimo interakcije višeg reda (poput interakcije spina i orbite) i promatramo samo osnovni hamiltonijan vodikovog atoma po kojem se elektron nalazi u kulonskom električnom polju jezgre u ishodištu, vidimo da sustav ima sfernu simetriju — simetriju na sve rotacije 3D prostora oko ishodišta. Odgovarajuća grupa simetrija je beskonačnog reda i zove se SO(3). U 6. poglavlju ćemo naučiti da su multipleti te SO(3) simetrije $(2l+1)$-dimenzionalni. Stoga očekujemo $(2l{+}1)$-struko degenerirane nivoe za svaki l. Važno je razumjeti da je to općenita algebarska posljedica sferne simetrije. Svaki sferno-simetrični sustav, bez obzira na njegov konkretni sastav i hamiltonijan, imat će prirodno pridruženi kvantni broj l i odgovarajuće $(2l+1)$-struko degenerirane energijske nivoe u svojem spektru.

I zaista, rješavanjem Schrödingerove jednadžbe za vodikov atom dobivamo rješenja koja labeliramo s trima kvantnim brojevima $\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x} | nlm \rangle$. i stanja

$$\{\psi_{nl(-l)}, \psi_{nl(-l+1)}, \ldots, \psi_{nll}\} \,,$$

zaista jesu degenerirana. No dodatno cijela ljuska s konkretnom vrijednošću kvantnog broja n, a koja sadrži n^2 stanja s $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ima istu energiju

$$E_n \propto \frac{1}{n^2} \qquad \text{neovisno o } l$$

Dakle, degeneracija je veća od one koju bismo očekivali samo zbog sferne simetrije SO(3). U odjeljku 6.7 ćemo vidjeti da je relevantna simetrija zapravo SO(4)=SO(3)⊗SO(3) što će onda kompletno objasniti opaženu degeneraciju nivoa vodikovog atoma.

Tako teorija grupa omogućuje neke spoznaje o spektru sustava čak i ako ne znamo riješiti njegovu Schrödingerovu jednadžbu. No i onda kada znamo riješiti Schroödingerovu jednadžbu sustava, teorija grupa nam može biti od pomoći da bolje razumijemo rješenje ili da si uštedimo dio posla jer na primjer ako znamo da su neki nivoi degenerirani, dovoljno je izračunati energiju samo jednog od njih.

Cijepanje energijskih nivoa

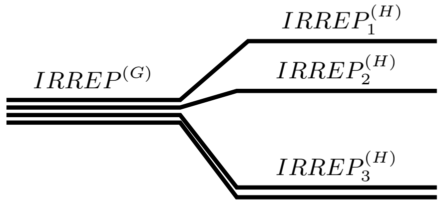
Vidjeli smo kako struktura grupe simetrija sustava diktira moguće ireducibilne reprezentacije, a one pak diktiraju mogućnost degeneracija u energijskom spektru sustava. Zanimljivo je promotriti što se događa sa spektrom ukoliko se simetrija sustava promijeni. Razlog promjeni može biti na primjer promjena kristalne strukture zbog promjene temperature ili promjena simetrije zbog uključivanja vanjskog električnog ili magnetskog polja. Konkretno, zamislimo da uvođenje vanjskog potencijala V promijeni hamiltonijan sustava

$$H_0 \to H = H_0 + V \ .$$

Ukoliko znamo riješiti sustav opisan osnovnim hamiltonijanom H_0, te ukoliko je smetnja V slaba ($V \ll H_0$), tehnikama računa smetnje moguće je odrediti promjene energijskih nivoa. No, ukoliko je takav pristup težak ili nemoguć, već i tehnike teorije grupa mogu dati neki uvid u promjene u spektru sustava.

Pretpostavimo da je originalni hamiltonijan H_0 invarijantan na grupu simetrija G. Uvođenje smetnje V će u najvećem broju slučajeva smanjiti simetriju tako da će ukupni hamiltonijan H biti sada invarijantan na manju grupu $H < G$. To je jasno jer hamiltonijan H_0 komutira sa svim operatorima koji reprezentiraju grupu simetrija G. Ako hamiltonijanu dodamo novi član V, neki operatori iz tog skupa $\{U(g)\,|\,g \in G\}$ tipično neće komutirati i s $H_0 + V$. Na primjer, električno polje u Starkovom efektu mijenja Hamiltonijan vodikovog atoma tako da mu doda član proprocionalan električnom polju i od originalne pune sferne simetrije na sve rotacije 3D prostora, preostaje samo aksijalna simetrija na rotacije oko smjera polja.

Ireducibilne reprezentacije grupe G nisu nužno i ireducibilne reprezentacije grupe H. Smanjenje broja transformacija $U(h)$, $h \in H$ može učiniti da neki potprostori postanu invarijantni iako nisu bili invarijantni na potpun skup transformacija $U(g)$, $g \in G$. Tako su neke ireducibilne reprezentacije od G reducibilne obzirom na H i nema razloga da energijski nivoi koji odgovaraju dotičnim reprezentacijama od G ostanu degenerirani nakon uvođenja smetnje.



Poznavajući dekompoziciju ireducibilne reprezentacije $IRREP^{(G)}$ grupe G na ireducibilne reprezentacije $IRREP^{(H)}$ grupe H

$$IRREP^{(G)} = (\text{reducibilna REP})^{(H)} = IRREP_1^{(H)} \oplus IRREP_2^{(H)} \oplus \cdots$$

možemo odrediti strukturu cijepanja. Za određivanje *iznosa* cijepanja trebat će tipično ipak koristiti metode kvantnomehaničkog računa smetnje.

Primjer 3.6.3 (Cijepanje T-nivoa tetrahedralne grupe T)
Ireducibilna reprezentacija T, tetrahedralne grupe T, je trodimenzionalna, pa će odgovarajući nivo biti trostruko degeneriran (tri različita kvantna stanja će imati istu energiju). Karakter T-nivoa tetrahedralne grupe je

	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3'$
T	3	-1	0	0

Zamislimo da sada kristal s tetrahedranom grupom simetrija doživi fazni prijelaz tako da se simetrija smanji a) T $\to$ D_2 ili b) T $\to$ C_{3v}. Pogledajmo što se događa s gornjim trostruko degeneriranim nivoom.

a) T $\to$ D_2. Uspoređujući strukture dvaju grupa, vidimo da transformacije iz klasa C_3 i C_3' više nisu simetrije jer u grupi D_2 uopće nema transformacija C_3 tipa koje su reda 3. Isto tako, tri transformacije iz klase C_2 su i dalje simetrije, ali više nisu u jednoj klasi konjugacije nego su sve tri u zasebnim klasama. Tako vidimo da karakteri T-nivoa odgovaraju karakterima grupe D_2 kako je prikazano na sljedećoj tablici

	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x
A_1	1	1	1	1
B_1	1	1	-1	-1
B_2	1	-1	1	-1
B_3	1	-1	-1	1
T	3	-1	-1	-1

Sada provodimo dekompoziciju reprezentacije T koja je u kontekstu grupe D_2 reduciblilna

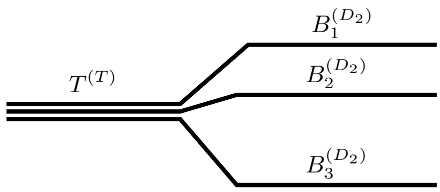
$$T = a_1 A_1 \oplus b_1 B_1 \oplus b_2 B_2 \oplus b_3 B_3$$

Mulitiplicitete određujemo skalarnim množenjem redaka gornje tablice:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{n} \sum_k \chi^{(A_1)}(k) \chi^{(T)^*}(k) \\ &= \frac{1}{4}\big(1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)\big) = 0 \\ b_1 &= b_2 = b_3 = 1 \end{aligned}$$

Dakle degeneracija je potpuno ukinuta

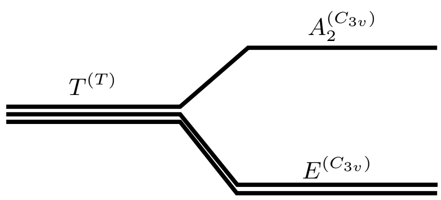
$$\Rightarrow \; T = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$$



b) $\mathrm{T} \to \mathrm{C}_{3v}$. Sličnim postupkom dobivamo

$$T = A_2 \oplus E \; ,$$

tj. degeneracija je samo djelomično ukinuta



Zadaci

3.1. Konstruirajte dvodimenzionalnu ireducibilnu reprezentaciju grupe D_3 koja djeluje na x-y ravnini i provjerite temeljni teorem o ortogonalnosti.

3.2. Pokažite da su sve ireducibilne reprezentacije Abelovih grupa jednodimenzionalne.

3.3. Pokažite da je nužan i dovoljan uvjet ireducibilnosti reprezentacije Γ s karakterima χ_i tzv. Frobeniusov kriterij

$$\sum_i k_i |\chi_i|^2 = n \ ,$$

gdje je k_i broj elemenata u klasi konjugacije i.

3.4. Konstruirajte tablicu karaktera za grupu D_4

3.5. Pokažite da je direktni produkt dvije jednodimenzionalne ireducbilne reprezentacije uvijek ireducibilna reprezentacija.

3.6. Izrazite reprezentaciju Γ grupe C_{4v} koja ima karaktere

$$\chi(E) = 5 \ , \ \chi(C_2) = 1 \ , \ \chi(C_4) = -1 \ , \ \chi(\sigma_v) = 1 \ , \ \chi(\sigma_d) = -3 \ ,$$

kao zbroj ireduciblnih reprezentacija.

Poglavlje 4

Simetrije u klasičnoj i kvantnoj mehanici

U prošlim poglavljima smo izložili teoriju *konačnih* grupa i njihovih reprezentacija. Teorija kontinuiranih *beskonačnih* grupa ima svojih posebnosti pa kako bismo olakšali izlaganje i razumijevanje veza s fizikom, prvo ćemo prodiskutirati neke općenitije aspekte realizacije simetrija u klasičnoj i kvantnoj mehanici. Očekuje se da čitaoc vlada osnovama kvantne mehanike, a kratki podsjetnik dan je u dodatku C.

4.1 Transformacije i tenzori

Vidjeli smo upravo u odjeljcima 3.5 i 3.6 kako simetrije imaju netrivijalne posljedice na moguća makroskopska svojstva kristala. U tim primjerima sam fizikalni objekt, kristal, je bio simetričan tj. isti prije i poslije djelovanja transformacije rotacije. To i jest uobičajeno laičko razumijevanje značenja riječi *simetrija*. Međutim, mnoge važne realizacije simetrija u prirodi nisu na razini pojedinih fizikalnih sustava, nego na razini zakona prirode. Na primjer, zakoni mehanike i gravitacije su simetrični na sve rotacije, ali Sunčev sustav to nije. Na rotacije su simetrični i zakoni kvantne mehanike, ali pojedini atomi općenito nisu. Svejedno, mnoga svojstva Sunčevog sustava i atoma su diktirana simetrijama zakona koji tim sustavima upravljaju. U kasnijim poglavljima ćemo na konkretnim primjerima vidjeti kako se simetrije prirode odražavaju u konkretnim općenito nesimetričnim sustavima, no sad ćemo najprije uspostaviti relevantnu terminologiju i pomoću nje još malo produbiti ovu generičku ideju.

Definicija 4.1.1 (invarijantnost i kovarijantnost)
Fizikalna veličina je *invarijantna* na neku transformaciju ako se pri toj transformaciji ne mijenja.

Jednadžba koja opisuje fizikalni sustav je *kovarijantna** na neku transformaciju ako se pri toj transformaciji njen *oblik* ne mijenja.

Tako su na primjer masa ili naboj primjeri veličina invarijantnih na rotacije. S druge strane, Newtonove jednadžbe za sustav dva tijela koja gravitiraju

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,, \tag{4.1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\,, \tag{4.2}$$

su kovarijantne pri rotacijama. Uvjerimo se u to tako da zarotiramo sustav za neki kut θ oko osi usmjerene u smjeru jediničnog vektora $\hat{\boldsymbol{n}}$. Pritom se koordinate položaja prvog tijela mijenjaju kao

$$(\boldsymbol{r}_1)_i \to (\boldsymbol{r}'_1)_i = \sum_j R_{ij}(\hat{\boldsymbol{n}},\theta)(\boldsymbol{r}_1)_j\,, \qquad \text{(zapis po komponentama)}$$

$$\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}'_1 = R(\hat{\boldsymbol{n}},\theta)\boldsymbol{r}_1\,, \qquad \text{(matrični zapis)}$$

i isto za položaj drugog tijela $\boldsymbol{r}_2$. Ovdje je $R(\hat{\boldsymbol{n}},\theta)$ standardna matrica rotacije u trodimenzionalnom prostoru. Na primjer, za rotaciju oko z-osi je

$$R(\hat{\boldsymbol{z}},\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{4.3}$$

Sada iz (4.1) slijedi da je nakon transformacije jednadžba gibanja za npr. $\boldsymbol{r}'_1$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}'_1 &= m_1 R\ddot{\boldsymbol{r}}_1 \\ &= G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(R\boldsymbol{r}_2-R\boldsymbol{r}_1) \\ &= G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1) \\ &= G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1|^3}(\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1)\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

i isto za $\boldsymbol{r}'_2$, gdje smo radi jednostavnosti prestali pisati argumente matrice rotacije $R = R(\boldsymbol{n},\theta)$ i gdje smo u zadnjem redu iskoristili svojstvo da se iznos vektora pri rotacijama ne mijenja. Dakle, jednadžbe zarotiranog sustava

*Pojmovi kovarijantnosti i kontravarijantnosti komponenata vektora i tenzora koje srećemo u teoriji relativnosti („gornji" i „donji" indeksi), a zapravo potječu iz diferencijalne geometrije nemaju veze s ovom kovarijantnosti. To su samo homonimi.

imaju isti oblik (kovarijantne su) premda su konkrentne vektorske veličine u njima različite tj. $\boldsymbol{r}'_{1,2} \neq \boldsymbol{r}_{1,2}$. Drugim riječima, zarotirani sustav poštuje iste zakone kao i originalni. Trećim riječima, nikakvim eksperimentima stanovnici drugog zarotiranog sustava ne mogu zaključiti da je sustav zarotiran. Četvrtim riječima, u prirodi su svi smjerovi ekvivalentni.

Ova i daljnja diskusija podrazumijevaju da govorimo o *aktivnim* transformacijama koje djeluju na sam fizikalni sustav (vidi sliku 2.1). U *pasivnom* pristupu u kojem transformiramo samo koordinatni sustav, ovako napisane jednadžbe su *invarijantne* jer ako $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{F}$ promatramo kao elemente vektorskog prostora, a ne kao trojke koordinata tih vektora u nekoj bazi, onda rotacija koordinatnog sustava ne mijenja same vektore i ono sto je onda *kovarijantno* je zapis tih jednadžbi po komponentama:

$$m\ddot{x}_i = F_i \, . \tag{4.5}$$

Kod konstrukcije fizikalnih teorija simetrije prirode će se odražavati u kovarijantnosti jednadžbi gibanja pa je važno razviti vještinu prepoznavanja jesu li neke jednadžbe kovarijantne obzirom na neke transformacije ili nisu. Pogledajmo na primjer Maxwellove jednadžbe klasične elektrodinamike

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, , \tag{4.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \, , \tag{4.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, , \tag{4.8}$$

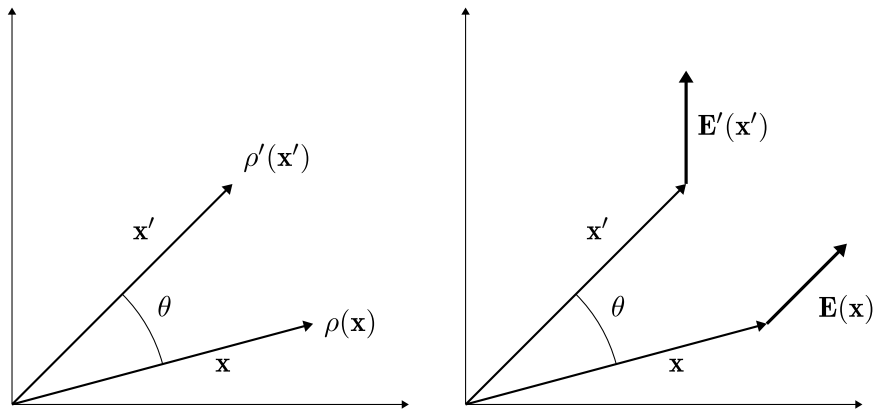
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \, . \tag{4.9}$$

Gledajući matematičku strukturu članova tih jednadžbi vidimo da je ona

$$\begin{aligned} \text{skalar} &= \text{skalar} \, , \\ \text{skalar} &= \text{skalar} \, , \\ \text{vektor} &= \text{vektor} \, , \\ \text{vektor} &= \text{vektor} + \text{vektor} \, . \end{aligned}$$

Zapravo je ovdje riječ o skalarnim i vektorskim *poljima*, dakle veličinama koje imaju neku skalarnu odnosno vektorsku vrijednost u svakoj točki prostora. To je pogodan primjer jer su kvantnomehaničke valne funkcije i kvantna polja, što će nam kasnije biti od velikog interesa, isto polja u tom smislu.

Vidimo da su svi članovi svake pojedine gornje jednadžbe istovrsni i sličnim razmatranjem kao kod Newtonovih jednadžbi (4.4) lako se uvjeriti da će jednadžbe zarotiranog sustava biti istog oblika. Dakle Maxwellove jednadžbe su kovarijantne na rotacije. Treba uočiti da za ovakvo razmatranje kovarijantnosti jednadžbi pri rotacijama određujuće svojstvo vektora nije to što je on opisan trojkom brojeva niti to što je on element nekog matematičkog vektorskog prostora već je ključno na koji se način on transformira pri rotacijama. Skalari se transformiraju trivijalno i zapravo su invarijantni, dok vektore moramo množiti matricom rotacije:



$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r}) &\to \rho'(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}) && \text{(skalar)}\,, \\ E_i(\boldsymbol{r}) &\to E'_i(\boldsymbol{r}') = \sum_j R_{ij} E_j(\boldsymbol{r}) && \text{(vektor)}\,, \end{aligned}$$

gdje je R_{ij} ista matrica (poput (4.3)) koja rotira vektor položaja $\boldsymbol{r}$. To da se svi vektori rotiraju pomoću identične matrice je ključno i u ovom kontekstu predstavlja svojevrsnu definiciju vektora:

vektor $\equiv$ objekt koji se pri rotacijama transformira množenjem matricom $R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)$.

Ovo se poopćuje na veličine sa složenijim transformacijskim svojstima, *tenzore.*

Definicija 4.1.2 (Tenzor)
Tenzor n-tog ranga (pri rotacijama) jest veličina $\mathbb{T}$ koja se transformira kao

$$\mathbb{T}_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\boldsymbol{r}) \to \mathbb{T}'_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\boldsymbol{r}') = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_n j_n} \mathbb{T}_{j_1 j_2 \ldots j_n}(\boldsymbol{r})\,. \tag{4.10}$$

Vidimo da su skalari tenzori nultog, a vektori tenzori prvog ranga. Komponente tenzora drugog ranga $\mathbb{T}_{ij}$ možemo po želji prikazati matricom.

Primjer 4.1.3 (Tenzor vodljivosti)
U neizotropnom sredstvu (npr. kristalu), smjer struje $\boldsymbol{j}$ ne mora biti isti kao i smjer narinutog električnog polja $\boldsymbol{E}$. U tom slučaju Ohmov zakon glasi

$$j_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$$

i uključuje tenzor drugog ranga σ_{ij} — tenzor električne vodljivosti.

Tenzorsko svojstvo je vezano uz tip transformacije. Tako postoje npr. *Lorentzovi tenzori* obzirom na Lorentzove tranformacije (vidi odjeljak 8.1), *izotenzori* obzirom na izospinske transformacije u subnuklearnoj fizici (vidi odjeljak 7.1) i drugi. Kad se tip transformacije ne specificira obično se misli se na rotacije.

Primjer 4.1.4 (Tenzor elektromagnetskog polja)
Maxwellove jednadžbe (4.6–4.9) su očito (nekad se kaže *manifestno*) kovarijantne pri rotacijama kako je upravo bilo diskutirano. Einsteinu je za razvoj specijalne teorije relativnosti bila centralna kovarijantnost tih jednadžbi i pri Lorentzovim transformacijama. I premda Maxwellove jednadžbe jesu kovarijantne i pri Lorentzovim transformacijama, ta kovarijantnost nije manifestna sve dok se sve veličine ne zapišu pomoću Lorentzovih tenzora. Tada se gustoća naboja ρ i struje $\boldsymbol{j}$ ujedinjuju u četverovektor (Lorentzov tenzor prvog ranga) j^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, dok se električno i magnetsko polje ujedinjuju u Lorentzov tenzor drugog ranga $F_{\mu\nu}$ kojeg nazivamo tenzor elektromagnetskog polja ili ponekad Faradayjev tenzor. Tada jednadžbe (4.6) i (4.9) možemo zapisati u manifestno kovarijantnom obliku

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \ , \tag{4.11}$$

što je eksplicitno pokazano u većini modernih udžbenika elektrodinamike poput [Zangwill, 2012.].

Primjer 4.1.5 (Riemannov tenzor)
Zakrivljenost n-dimenzionalnih ploha se standardno opisuje tzv. Riemannovim tenzorom R_{abcd} (tenzor četvrtog ranga), gdje je od posebne važnosti za fiziku Riemannov tenzor prostorvremena koji ima ključnu ulogu u Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti.

Da bi jednadžba bila kovarijantna svi njeni članovi se moraju transformirati na isti način. (Kažemo: moraju se transformirati kovarijantno.) To znači da moraju pripadati istoj reprezentaciji grupe transformacija. („Pripadati" u smislu da na svakog djeluje ista reprezentacija. Nisu oni sami reprezentacije!) Tenzori različitih rangova pripadaju različitim reprezentacijama. Zanimljivo je pitanje, kojim ćemo se baviti u 6. poglavlju, jesu li te reprezentacije reducibilne.

Kakve su posljedice kovarijantnosti jednadžbi gibanja na njihova rješenja? Pojedina rješenja sama za sebe naravno nisu invarijantna, ali kovarijantnost jednadžbi gibanja implicira da transformacijom rješenja dobijemo također dobro rješenje. Na primjer, sustav dva gravitirajuća tijela s reduciranom koordinatom $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ ima kao rješenje jednadžbi gibanja funkciju $\boldsymbol{r}(t)$ koja opisuje elipsu. Sama ta elipsa nije invarijantna na translacije ili rotacije, međutim, translatirana elipsa $\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{a}$ i zarotirana elipsa $R\boldsymbol{r}(t)$ su isto dobra rješenja za bilo koji $\boldsymbol{a}$ i R u što se lako uvjerimo uvrštavanjem u Newtonove jednadžbe. To da translacijom (rotacijom) rješenja također dobijemo rješenje je posljedica homogenosti (izotropije) prostora. Provedemo li unatrag ovaj logički sljed vidimo da homogenost (izotropija) prostora zahtjeva da jednadžbe gibanja budu kovarijantne obzirom na translacije (rotacije). Konstrukcija fizikalnih teorija se često svodi na to da identificiramo sve relevantne simetrije i nakon toga jednadžbe gibanja slažemo od članova kovarijantnih na sve te simetrije*.

> **Primjer 4.1.6** (Vremenska inverzija)
> Promotrimo transformaciju inverzije vremena $t \to -t$. S jedne strane gornje Newtonove jednadžbe su kovarijantne i obzirom na tu vremensku inverziju, zahvaljujući tome što je diferencijacija po vremenu koja se tamo javlja uvijek parnog (drugog) reda. I stvarno, vremenski invertirano rješenje dvaju gravitirajućih tijela u gibanju je također dobro rješenje tj. mogući slučaj u prirodi. No, kao protuprimjer, vremenska inverzija plina koji slobodno izlazi iz plinske boce nije moguć događaj što ukazuje na to da priroda nije općenito simetrična na vremensku inverziju i jednadžbe koje opisuju ekspanziju plina ne bi smjele biti kovarijantne na takvu inverziju. Neka se čitaoc eskplicitno uvjeri u nekovarijantnost drugog zakona termodinamike na vremensku inverziju i time će dobiti zadovoljavajuće razumijevanje ove situacije. Stvarno razumijevanje načina na koji je narušena ova simetrija u zakonima mehanike čestica plina (dakle ne termodinamike) predstavlja zloglasni problem strijele vremena [Zeh, 2007.].

Za potrebe ove knjige definicija 4.1.2 daje sve što je potrebno znati o pojmu tenzora. Dodatak D daje jedan drugačiji pogled koji može pomoći u razumijevanju tog svepristutnog pojma.

---

*U tom su smislu posebno moćne tzv. baždarne simetrije koje u određenom smislu vode na jednu jedinstvenu jednadžbu gibanja. To je omogućilo konstrukciju standardnog modela fizike elementarnih čestica u drugoj polovici XX. stoljeća koji je još uvijek važeća teorija svih temeljnih prirodnih sila izuzev gravitacije.

4.2 Simetrije i zakoni očuvanja

U prošlom smo odjeljku promatrali simetrije Newtonovih klasičnih jednadžbi gibanja. Ispostavlja se međutim da je Lagrange-Hamiltonova formulacija klasične mehanike znatno pogodnija od Newtonove za formalizaciju principa simetrije. Naime, centralni objekt te formulacije je integral lagranžijana tj. akcija

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \tag{4.12}$$

koja je invarijantni skalar obzirom na sve simetrije teorije. Razmatranje je li akcija invarijantna je znantno lakše od razmatranja jesu li jednadžbe gibanja kovarijantne. Osim toga, u relativističkoj kvantnoj fizici (kvantnoj teoriji polja), u skladu s načelima relativistike, vrijeme prestaje imati posebnu ulogu i jednadžbe gibanja u vremenu se rijetko koriste.

No, ostanimo još nakratko u svijetu klasične fizike i podsjetimo se da je jedna od važnih posljedica simetrija u prirodi postojanje očuvanih veličina. To je posebno lagano vidjeti u Lagrangeovoj formulaciji kako ćemo sada vidjeti na primjeru simetrija na prostorne translacije.

Prostorne translacije su transformacije oblika

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}\,, \tag{4.13}$$

koje čine grupu $(\mathbb{R}^3, +)$, no grupnoteorijska svojstva nam ovdje neće biti bitna, do na činjenicu da ona ima beskonačno elemenata parametriziranih s tri realna broja. Da bi akcija (4.12) bila invarijantna potrebno je da i sam lagranžijan L bude invarijantan*, odnosno da je promjena lagranžijana

$$\delta L = L(\boldsymbol{r}', \dot{\boldsymbol{r}}', t) - L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0\,. \tag{4.14}$$

U infinitezimalnom slučaju, ta je promjena

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i = 0\ , \tag{4.15}$$

iz čega slijedi da je

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{4.16}$$

jer *homogenost prostora* traži da promjena lagranžijana bude nula za proizvoljan pomak δr_i. Kao posljedica toga, lagranžijan $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = L(\dot{\boldsymbol{r}}, t)$ ne

*Strogo uzevši, akcija općenito može biti invarijantna i bez da je lagranžijan invarijantan, no to uključuje egzotične efekte na rubovima integracije kakvi se ne javljaju u sustavima koje ovdje razmatramo.

ovisi eksplicitno o koordinati $\boldsymbol{r}$. Sada Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja,

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0\,, \tag{4.17}$$

daju zakon očuvanja impulsa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{d}{dt} p_i = 0\,, \tag{4.18}$$

odnosno vektor impulsa $\boldsymbol{p}$ je konstanta gibanja.

Na sličan način, homogenost vremena znači invarijantnost lagranžijana na vremenske translacije (jednoparametarska grupa), što daje zakon očuvanja energije, a izotropija prostora povlači invarijantnost lagranžijana na prostorne rotacije (troparametarska grupa) što daje zakon očuvanja momenta impulsa. Sve ovo gore su samo posebni primjeri sljedećeg općeg teorema.

Teorem 4.2.1 (Noether)
Ako je sustav invarijantan na n-parametarsku grupu transformacija onda postoji n konstanti gibanja.

4.3 Transformacije kvantnih sustava

Premda su ideje iz odjeljaka 4.1 i 4.2 jako prisutne i u kvantnoj teoriji, prikazani formalizam nije sasvim izravno primjenjiv na kvantne sustave. Za razliku od klasičnih sustava čije stanje je opisano položajima i impulsima čestica (točkom u faznom prostoru), kvantni sustavi su reprezentirani kao vektor u odgovarajućem Hilbertovom vektorskom prostoru, a položaj i impuls su nekomutirajući operatori na tom prostoru. U dodatku C su rekapitulirane osnove nerelativističke kvantne mehanike, a nama je posebno važan Wignerov teorem, po kojem su transformacije simetrije redovito reprezentirane unitarnim i linearnim opearatorima na Hilbertovom prostoru stanja*. U ovom odjeljku ćemo upoznati neke operatore transformacija kvantnih sustava, što će nam poslužiti i kao motivacija za općenitije proučavanje reprezentacija beskonačnih grupa.

4.3.1 Kontinuirane prostorne translacije

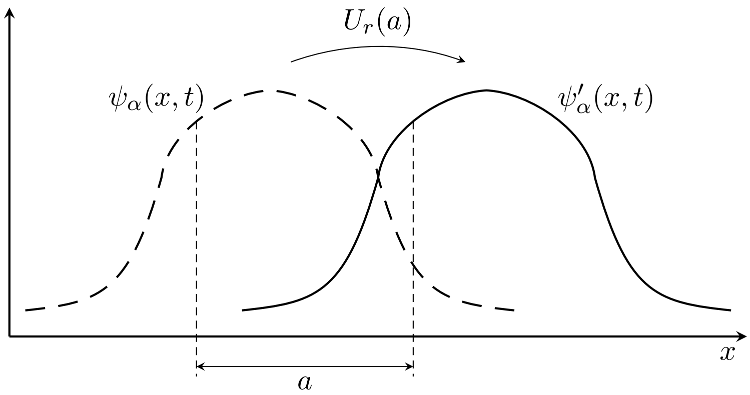
Poznato je, vidi odjeljak C, da je konkretno kvantno stanje $|\alpha\rangle$ moguće prikazati u koordinatnoj bazi kao Schrödingerovu valnu funkciju $\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) =$

*Druga mogućnost je da operatori budu antiunitarni i antilinearni, no odgovarajuće transformacije uvijek uključuju inverziju vremena čime se nećemo baviti u ovoj knjizi.

$\langle \boldsymbol{r}|\alpha\rangle$. Tako eksplicirana ovisnost o prostornoj koordinati $\boldsymbol{r}$ će nam olakšati razmatranje transformacije translacije u prostoru, a za početak ćemo uzeti da je prostor jednodimenzionalan, $\boldsymbol{r} \to x$. Zanima nas unitarni operator $U_r(a)$ koji djelujući na valnu funkciju sustava $\psi_\alpha(x,t)$ daje valnu funkciju

$$\psi'_\alpha(x,t) = U_r(a)\psi_\alpha(x,t)\ , \tag{4.19}$$

tog istog sustava, ali translatiranog za udaljenost a. (Kao i uvijek, smatramo da je transformacija aktivna tj. da djeluje na fizikalni, a ne koordinatni sustav.)



Promatrajući crtež, vidimo da vrijedi

$$\psi'_\alpha(x,t) = \psi_\alpha(x-a,t)\,, \tag{4.20}$$

odnosno

$$\psi_\alpha(x-a,t) = U_r(a)\psi_\alpha(x,t)\,. \tag{4.21}$$

Sada lijevu stranu jednadžbe (4.21) razvijemo u Taylorov red i zbrojimo:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x-a,t) &= \psi_\alpha(x,t) - a\frac{\partial\psi_\alpha(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2\psi_\alpha(x,t)}{\partial x^2} - \dots \\ &= \left(1 - a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \dots\right)\psi_\alpha(x,t) \\ &= e^{-a\partial/\partial x}\psi_\alpha(x,t)\end{aligned}$$

gdje je eksponencijacija diferencijalnog (ili bilo kakvog drugog) operatora definirana naznačenom beskonačnom sumom (vidi i dodatak F). Usporedbom vidimo da je operator translacije u 1D

$$U_r(a) = e^{-a\partial/\partial x}\,, \tag{4.22}$$

odnosno, u trodimenzionalnom prostoru ćemo imati

$$U_r(\boldsymbol{a}) = e^{-\boldsymbol{a}\cdot\nabla}\ . \tag{4.23}$$

Poznavajući kvantnomehaničku korespondenciju $-i\hbar\nabla \leftrightarrow \boldsymbol{p}$ imamo konačno općeniti (neovisan o bazi) operator translacije

$$U_r(\boldsymbol{a}) = e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}} \; . \tag{4.24}$$

Skup translacija čini grupu. Kako svaku translaciju možemo specificirati njenim vektorom $\boldsymbol{a}$, te kako je kompozicija translacija ekvivalentna zbrajanju odgovarajućih vektora, vidimo da je ta grupa izomorfna grupi $(\mathbb{R}^3, +)$.

Na malo apstraktniji, ali i općenitiji način, do oblika operatora translacije možemo doći i razmatranjem koje se ne oslanja na koordinatnu bazu. Očekivane vrijednosti mjerenja neke veličine koja odgovara hermitskom operatoru A na sustavu u kvantnom stanju $|\alpha\rangle$ su dane kao $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ i pri unitarnoj transformaciji U se transformiraju kao

$$\langle\alpha|A|\alpha\rangle \to \langle U\alpha|A|U\alpha\rangle = \langle\alpha|U^\dagger AU|\alpha\rangle = \langle\alpha|U^{-1}AU|\alpha\rangle \; , \tag{4.25}$$

pa transformaciju možemo umjesto na vektorima stanja ekvivalentno promatrati i na samim operatorima

$$A \to U^{-1}AU \, . \tag{4.26}$$

Ukoliko nas kao gore zanimaju translacije, očekujemo da se operator položaja čestice $\boldsymbol{x}$ transformira tako da vrijedi

$$U_r(\boldsymbol{a})^{-1}\,\boldsymbol{x}\,U_r(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \, . \tag{4.27}$$

Uočite da je plus na desnoj strani ovog izraza konzistentan s definicijom translacije „udesno” prikazane na gornjoj skici. Promotrimo sada translaciju za infinitezimalnu udaljenost $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{\epsilon}$, $|\boldsymbol{\epsilon}| \ll 1$. Iz razloga kontinuiranosti, odgovarajući operator translacije mora biti samo infinitezimalno različit od jediničnog operatora pa ga možemo napisati u obliku

$$U_r(\boldsymbol{\epsilon}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + O(\epsilon^2) \; , \tag{4.28}$$

gdje je $\boldsymbol{p}$ operator *definiran* ovim relacijama. Uvrštavanjem (4.28) u (4.27) i uspoređivanjem članova linearnih u ϵ_i zaključujemo da mora vrijediti

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \; . \tag{4.29}$$

Također, kako translacije komutiraju, odgovarajući operatori moraju zadovoljavati $U_r(\boldsymbol{\epsilon_1})U_r(\boldsymbol{\epsilon_2}) = U_r(\boldsymbol{\epsilon_2})U_r(\boldsymbol{\epsilon_1})$, pa opet uvrštavanjem i usporedbom članova kvadratnih u ϵ_i dobivamo

$$[p_i, p_j] = 0 \; . \tag{4.30}$$

Ta komutativnost operatora nam sad omogućuje da formalno kompozicijom operatora N infinitezimalnih translacija za $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{a}/N$ formiramo operator konačne translacije za $\boldsymbol{a}$ kao*

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}}{N}\right)^N = e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}} \,, \tag{4.31}$$

što je upravo operator translacije $U_r(\boldsymbol{a})$ iz (4.24). Naglasimo još jednom da je ovdje operator $\boldsymbol{p}$ definiran svojom ulogom u operatoru translacije (kažemo da on *generira* translacije). Kasnije nam daljnja razmatranja trebaju pokazati da je on kvantnomehanički analogon klasičnom impulsu sustava.

4.3.2 Vremenske translacije

Potpuno analogno translaciji u jednodimenzionalnom prostoru možemo definirati operator translacije u vremenu $U_t(\tau)$ tako da je valna funkcija transformiranog sustava dana kao

$$\psi'_\alpha(x,t) = \psi_\alpha(x,t-\tau) = U_t(\tau)\psi_\alpha(x,t)\,. \tag{4.32}$$

I opet Taylorovim razvojem dobivamo

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x,t-\tau) &= \psi_\alpha(x,t) - \tau\frac{\partial\psi_\alpha(x,t)}{\partial t} + \ldots \\ &= e^{-\tau\partial/\partial t}\psi_\alpha(x,t)\;,\end{aligned} \tag{4.33}$$

te kvantnomehanička korespondencija $i\hbar\partial/\partial t \leftrightarrow H$ daje

$$U_t(\tau) = e^{(i/h)H\tau}\;. \tag{4.34}$$

Ovo vrijedi samo za H konstantan u vremenu, kakav on jest u većini nama zanimljivih slučajeva (za ostale slučajeve vidi diskusiju u [Sakurai i Napolitano, 2020.], odjeljak 2.1).

Vremenska *translacija* je transformacija koja daje stanje sustava koji ima isto ponašanje u vremenskom trenutku $t+\tau$ kao originalni sustav u trenutku t. Vremenska *evolucija* je pak transformacija koja daje stanje sustava u trenutku $t+\tau$ djelujući na stanje tog istog sustava u ranijem trenutku t. Operator vremenske evolucije se može dobiti iz upravo navedenog, ako primijetimo da je

$$\psi_\alpha(x,t-\tau) = e^{(i/h)H\tau}\psi_\alpha(x,t) \tag{4.35}$$

*Da se uvjerite u ovu operatorsku jednakost, uvjerite se da ona vrijedi kad lijeva i desna strana djeluju na svojstvene vektore operatora $\boldsymbol{p}$, a oni čine kompletnu bazu prostora što onda povlači i operatorsku jednakost.

pa zamjenom $\tau \equiv t - t'$ imamo

$$\psi_\alpha(x, t') = e^{-(i/h)H(t'-t)}\psi_\alpha(x, t) \tag{4.36}$$

Vrijedi dakle

$$U_{\text{evolucija}}(t' - t) = U^{-1}_{\text{translacija}}(t' - t) = U_{\text{translacija}}(t - t')\ . \tag{4.37}$$

Promotrimo sada operator A takav da je $[H, A] = 0$. Neka je $\psi(x, t)$ svojstveno stanje od A tj.

$$A\psi(x, t) = a\psi(x, t) \tag{4.38}$$

Tada to isto stanje nakon vremena $(t' - t)$ zadovoljava

$$A\psi(x, t') = Ae^{-(i/h)H(t'-t)}\psi(x, t) = e^{-(i/h)H(t'-t)}A\psi(x, t) = a\psi(x, t') \tag{4.39}$$

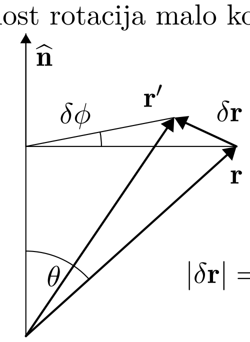
tj. A je očuvana veličina. Zaključujemo da su veličine čiji operatori komutiraju s Hamiltonijanom očuvane u vremenu. Npr. za slobodnu česticu $H = p^2/2m$ i zbog (4.30) imamo

$$[H, p] = \frac{1}{2m}[p^2, p] = 0 \tag{4.40}$$

pa je impuls očuvana veličina.

4.3.3 Rotacije

Rotacije u prostoru su transformacije čija nam je važnost enormna i zbog važnih primjena u fizici kojima je posvećeno 6. poglavlje i zbog toga što su one paradigmatski slučaj na kojem se može izložiti većina gradiva teorije kontinuiranih grupa, kao u 5. poglavlju. Konceptualno, unitarni operator $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ rotacije* za kut ϕ oko osi $\hat{\boldsymbol{n}}$ dobivamo istim postupkom kao i operatore translacije u prostoru i vremenu, jedino intrinsična trodimenzionalnost i nekomutativnost rotacija malo komplicira izvod.



$$|\delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}| \sin\theta\, \delta\phi = |\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}|\, \delta\phi$$

*Koristit ćemo tradicionalni simbol $\mathcal{D}$ koji dolazi od njemačke riječi *Drehung* = rotacija.

Stoga ćemo se odmah usredotočiti na infinitezimalnu rotaciju koja (vidi sliku) transformira vektor položaja kao

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\phi\,\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}\;. \tag{4.41}$$

To znači da valna funkcija zarotiranog sustava treba zadovoljavati

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(\boldsymbol{r},t) &= \psi_\alpha(R(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r},t) \\ &= \psi_\alpha(\boldsymbol{r} - \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r},t) \\ &= \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) - (\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r})\cdot\nabla\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \\ &= \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) - \frac{i}{\hbar}(\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{L}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Rotaciju za konačni kut dobijemo kompozicijom N rotacija za $\delta\phi = \phi/N$ gdje $N \to \infty$:

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{L}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right)^N = e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{L}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi} \tag{4.43}$$

I opet, ove relacije definiraju operatore L_i kao generatore rotacija, a kasnija razmatranja pokazuju da je riječ upravo o operatoru koji odgovara momentu impulsa sustava. Ukoliko vrijedi $[H, L_i] = 0$ (a vrijedit će ukoliko neki vanjski utjecaji ne naruše izotropiju prostora) moment impulsa će biti očuvan. Poznato je da operatori L_i, $i = x, y, z$ zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k\,, \tag{4.44}$$

gdje smo upotrijebili Levi-Civita ili totalno antisimetrični pseudotenzor* trećeg reda definiran svojim komponentama ϵ_{ijk} tako da je

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } (i,j,k) \text{ parna permutacija od } (1,2,3), \\ -1 & \text{ako je } (i,j,k) \text{ je neparna permutacija od } (1,2,3), \\ 0 & \text{inače, tj. ako su dva ili sva tri indeksa ista.} \end{cases}$$

Npr. $\epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$, $\epsilon_{221} = 0$, itd.

4.4 Spin

U odjeljku 4.1 vidjeli smo kako veličine u klasičnoj fizici možemo kategorizirati prema njihovim različitim transformacijskim svojstvima, recimo na

*Za razliku između običnih i pseudotenzora vidi dodatak B.

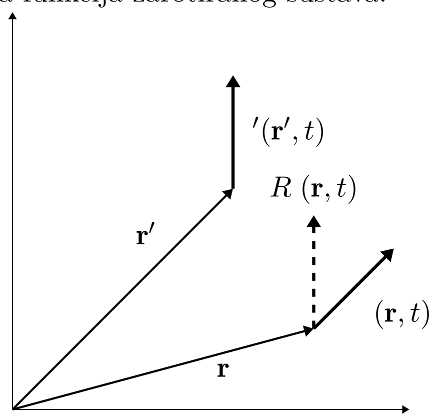
rotacije. Tu smo upoznali tenzore, gdje ovisno o rangu tenzora, trebamo ga množiti različitim brojem rotacijskih matrica da bismo zapisali tenzor zarotiranog sustava. Tako očekujemo da i u kvantnoj mehanici jedan te isti operator iz (4.43) ne može ostvariti rotaciju proizvoljnog kvantnog sustava. Uvjerimo se da je to zaista tako promatrajući rotaciju sustava opisanog vektorskom trojkom valnih funkcija

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \equiv (\psi_x(\boldsymbol{r},t), \psi_y(\boldsymbol{r},t), \psi_z(\boldsymbol{r},t)) \,. \tag{4.45}$$

Takav opis bit će potreban za opis kvantnog stanja čestice za koju nam nije važan samo njen položaj u prostoru nego i njena orijentacija. Kao i ranije, tražimo operator $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$, moguće različit od onog iz (4.43), s djelovanjem

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \ , \tag{4.46}$$

gdje je $\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r},t)$ valna funkcija zarotiranog sustava.



Ukoliko se trojka valnih funkcija iz (4.45) transformira pri rotacijama kao standardni vektor, dakle pomoću iste matrice $R(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ iz odjeljka 4.1, iz gornje slike vidimo da zbog promjene orijentacije čestice treba biti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r}',t) &= R\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\\ \boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r},t) &= R\boldsymbol{\Psi}(R^{-1}\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

pa imamo, sličnim postupkom kao i ranije

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) &= R\boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r},t)\\ &= \boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r},t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r},t)\\ &= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}-\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{r},t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) + O(\delta\phi^2)\\ &= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) - \frac{i}{\hbar}(\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) + O(\delta\phi^2)\end{aligned}$$

Vidimo da se obzirom na rotaciju jednokomponentne valne funkcije u prošlom odjeljku pojavio dodatni član $\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t)$ kojeg ćemo sada zapisati pomoću tripleta matrica S_j, definiranih pomoću Levi-Civita pseudotenzora (vidi zadatak 4.7.):

$$(S_j)_{ik} = i\hbar\epsilon_{ijk} \quad j = 1, 2, 3 \,. \tag{4.47}$$

Konkretno

$$S_1 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_1 \,, \tag{4.48}$$

$$S_2 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_2 \,, \tag{4.49}$$

$$S_3 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_3 \,. \tag{4.50}$$

Uz tako definirane matrice imamo

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\Psi}]_i &= \epsilon_{ijk}\hat{n}_j\Psi_k \\ &= -\frac{i}{\hbar}\hat{n}_j(S_j)_{ik}\Psi_k \\ &= -\frac{i}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S})_{ik}\Psi_k \,, \end{aligned} \tag{4.51}$$

što znači

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right)\Psi(\boldsymbol{r}, t) \,,$$

odnosno, operator konačne rotacije ovakvog kvantnog sustava jest

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = e^{-(i/\hbar)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi} \,. \tag{4.52}$$

Hermitske matrice S_i zadovoljavaju iste komutacijske relacije (4.44) kao i operatori L_i i predstavljaju operatore tzv. *intrinsičnog* momenta impulsa poznatog pod nazivom *spin*, za razliku od tzv. *orbitalnog* momenta impulsa kojem odgovaraju operatori $L_i = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_i$. Invarijantnost na rotacije, tj. komutiranje hamiltonijana s operatorom (4.52), će onda značiti da je očuvana veličina zapravo

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \,, \tag{4.53}$$

$[H, \boldsymbol{J}] = 0$, koju nazivamo *ukupni* moment impulsa, dok je sasvim moguće da pojedinačno $[H, \boldsymbol{L}] \neq 0$ i $[H, \boldsymbol{S}] \neq 0$, kao što se na primjer manifestira u pojavi tzv. vezanja spina i orbite u atomu. (Elektron usljed orbitiranja „vidi” magnetsko polje jezgre koje interagira s njegovim magnetskim momentom koji je posljedica intrinsične vrtnje tj. spina.)

No, ni netom definirani trodimenzionalni operator spina nije najopćenitiji mogući. U 6. poglavlju vidjet ćemo da ovaj primjer opisuje vrlo specifičnu situaciju, tzv. česticu spina 1 (točnije $\hbar$), dok za drugačije iznose intrinsične vrtnje čestica trebamo drugačije operatore, drugih dimenzionalnosti (npr. spin elektrona koji je iznosa 1/2 bit će opisan dvodimenzionalnim operatorom). Za te ćemo potrebe razviti općenitu teoriju reprezentacija grupe rotacija u kvantnoj mehanici.

4.5 Primjena: Blochov teorem

U ovom ćemo odjeljku pokazati kako primjena teorije grupa elegantno vodi na važna svojstva valnih funkcija elektrona u kristalu. *Kristal* je ovdje definiran kao beskonačni trodimenzionalni sustav atoma koji je invarijantan na translacije za bilo koji vektor oblika:

$$\boldsymbol{t_n} \equiv n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3 \qquad n_{1,2,3} \in \mathbb{Z} \,, \tag{4.54}$$

gdje su $\boldsymbol{a}_{1,2,3}$ tzv. *primitivni vektori* koji definiraju jediničnu ćeliju kristalne rešetke. Prilikom izračuna valne funkcije elektronskog oblaka u kristalu pogodno je zahtijevati da ona zadovoljava tzv. *Born-von Karmanove periodičke rubne uvjete*:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r} + N_1\boldsymbol{a}_1) = \psi(\boldsymbol{r} + N_2\boldsymbol{a}_2) = \psi(\boldsymbol{r} + N_3\boldsymbol{a}_3) \,, \tag{4.55}$$

gdje su $N_{1,2,3}$ neki fiksni vrlo veliki ($N_{1,2,3} \gg 1$) prirodni brojevi*.

To dalje znači da operatori translacije zadovoljavaju

$$U_r(N_j\boldsymbol{a}_j) = U_r(0) = 1 \,, \tag{4.56}$$

za svaki $j = 1, 2, 3$ ponaosob (ne sumira se po j u (4.56), i odgovarajuća translacijska grupa simetrija ima $N \equiv N_1N_2N_3$ elemenata. Kako translacije komutiraju ova grupa je Abelova što znači da ima N ireducibilnih reprezentacija koje su sve jednodimenzionalne (vidi npr. Zadatak 3.2.). Elementi grupe su generirani translacijom za primitivne vektore $U_r(\boldsymbol{a}_j)$ pa tako imamo

$$U_r(\boldsymbol{a}_1)^{N_1} = 1 \tag{4.57}$$

$$U_r(\boldsymbol{a}_1) = \exp\Big\{ -2\pi i\, \frac{p_1}{N_1} \Big\} \qquad p_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1\} \,, \tag{4.58}$$

*Ovakav zahtjev zamišlja topologiju kristala kao hiper-torusa, što je dovoljno realistično jer nas ionako topologija ili površinska svojstva kristala ovdje ne zanimaju, već samo svojstva “bulk” materijala poput specifičnog toplinskog kapaciteta ili električne vodljivosti. (*Specifični* toplinski kapacitet bakra je naravno isti bez obzira da li je riječ o ravnoj žici, ploči, beskonačnoj kocki ili pak torusu.)

tj. translacija za $\boldsymbol{a}_1$ može biti reprezentirana s N_1 različitih operatora. Općenita translacija za vektor $\boldsymbol{t_n}$ (4.54) može onda biti reprezentirana jednodimenzionalnim operatorima oblika

$$\begin{aligned} U_r(\boldsymbol{t_n}) &= U_r(n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3) & (4.59)\\ &= U_r(\boldsymbol{a}_1)^{n_1} U_r(\boldsymbol{a}_2)^{n_2} U_r(\boldsymbol{a}_3)^{n_3} & (4.60)\\ &= \exp\Big\{ -2\pi i\Big(\frac{n_1 p_1}{N_1} + \frac{n_2 p_2}{N_2} + \frac{n_3 p_3}{N_3}\Big)\Big\} \;, & (4.61)\end{aligned}$$

tj. s N različitih operatora kako i očekujemo za grupu s N IRREPsa. Svaka od tih IRREPsa se onda može označiti („labelirati") s trojkom brojeva (p_1, p_2, p_3) gdje svaki od brojeva p_j može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, N_j - 1\}$. Operator translacije $U_r(\boldsymbol{t_n})$ je u konkretnom IRREPsu (p_1, p_2, p_3) reprezentiran operatorom/brojem (4.61).

Umjesto trojke (p_1, p_2, p_3) za označavanje IRREPsa se obično upotrebljavaju vektori $\boldsymbol{k}$ definirani na slijedeći način. Prvo definiramo tzv. vektore *recipročne rešetke* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ putem zahtjeva:

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3\;. \tag{4.62}$$

Sada vektor $\boldsymbol{k}$ koji odgovara IRREPsu (p_1, p_2, p_3) definiramo kao

$$\boldsymbol{k} \equiv \frac{p_1}{N_1}\boldsymbol{b}_1 + \frac{p_2}{N_2}\boldsymbol{b}_2 + \frac{p_3}{N_3}\boldsymbol{b}_3\;. \tag{4.63}$$

Iz (4.63), (4.62) i (4.61) slijedi da je operator translacije za $\boldsymbol{t_n}$ u IRREPsu $\boldsymbol{k}$ dan s

$$U_r^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{t_n}) = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t_n}}\;, \tag{4.64}$$

i odsad N različitih $\boldsymbol{k}$-ova (4.63) labelira IRREPse. Vidimo da dimenzija $\boldsymbol{k}$ odgovara valnom broju, tj. impulsu podijeljenom s Planckovom konstantom.

Djelovanje ovih operatora translacije na valne funkcije u datom IRREPsu mora biti kao i kod svih operatora translacije (4.21)

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t_n}}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{t_n})\;. \tag{4.65}$$

Kako je riječ o običnim brojevima (a ne recimo o diferencijalnim operatorima) dobili smo razmjerno jednostavan uvjet koji valne funkcije u kristalu moraju zadovoljavati da bi bile svojstvene funkcije operatora translacije. Takve funkcije se nazivaju *Blochove funkcije*, a $\boldsymbol{k}$ je Blochov valni vektor. Zašto su one zanimljive?

Kao prvo, ako ih (bez gubitka općenitosti) zapišemo u obliku

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{4.66}$$

onda odmah iz (4.65) dobijemo uvjet

$$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{t_n}) \; , \tag{4.67}$$

dakle Blochove funkcije su oblika $e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$, gdje je $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ periodička funkcija na rešetci. S druge strane, operator translacije na rešetci komutira s Hamiltonijanom

$$[H, U_r^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{t_n})] = 0 \; , \tag{4.68}$$

kako i očekujemo od operatora simetrije. Komutiranje s kinetičkim dijelom je trivijalno jer su i kinetički dio hamiltonijana i operator translacije funkcije samo impulsa koji komutiraju međusobno. Komutiranje s potencijalom je manje trivijalno i posljedica je periodičnosti $V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t_n})$*. Posljedica komutiranja dvaju operatora je da oni imaju zajedničke svojstvene funkcije. To onda povlači

> **Teorem 4.5.1** (Bloch)
> Valne funkcije periodičke rešetke mogu se izabrati kao Blochove funkcije.

Ovo onda olakšava rješavanje Schrödingerove jednadžbe za rešetku jer je potrebno naći samo funkcije $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ za svaki $\boldsymbol{k}$, a njihova periodičnost umnogome pojednostavljuje taj zadatak, kako svjedoče brojni primjeri iz fizike čvrstog stanja. Blochov teorem se obično izvodi i u udžbenicima fizike čvrstog stanja, no ovdje smo dali naglasak na grupno-teorijski pristup tj. korespondenciju s reprezentacijama grupe translacija.

Zadaci

4.1. Kroneckerov simbol δ_{ij}, $i,j \in \{1,2,3\}$ je tenzor drugog ranga obzirom na rotacije. Tenzori su općenito definirani kao veličine *kovarijantne* pri datim transformacijama. Pokažite da je δ_{ij} također i *invarijantan*.

4.2. Pokažite da je operator translacije kvantnomehaničkog stanja, $U_r(\boldsymbol{a}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})$ unitaran. Razmotrite situaciju u koordinatnoj reprezentaciji gdje je $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$. Zašto ovaj i ne kvari unitarnost?

4.3. Neka $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu. Pokažite da će prostorno translatirana $\psi(\boldsymbol{r}, t)' = U_r(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{r}, t)$ također zadovoljavati Schrödingerovu jednadžbu ako i samo ako je $[H, \boldsymbol{p}] = 0$

*Po analogiji s (4.27) za svaki operator $A(\boldsymbol{r})$ vrijedi $U_r^{-1}(\boldsymbol{t_n})A(\boldsymbol{r})U_r(\boldsymbol{t_n}) = A(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t_n})$, pa onda to vrijedi i za $A = V$ pa iz toga i iz periodičnosti V odmah slijedi tražena komutativnost.

4.4. Koristeći fundamentalne kvantnomehaničke komutatore

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \ , \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \ , \tag{4.69}$$

te svojstva Levi-Civita tenzora, izračunajte komutacijske relacije angularnog momenta $[L_i, L_j]$.

4.5. Pokažite da operatori spina S_i također zadovoljavaju komutacijske relacije angularnog momenta.

4.6. Pokažite da je $[\boldsymbol{J}^2, J_i] = 0$.

4.7. Uvjerite se da se pomoću Levi-Civita tenzora mogu elegantno zapisati vektorski produkt i determinanta matrice: $\epsilon_{ijk} a_j b_k = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i$, $\epsilon_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} = \det A \ \epsilon_{lmn}$.

Poglavlje 5

Liejeve grupe

5.1 Kontinuirane grupe

U prva tri poglavlja smo upoznali *konačne grupe* kao skupove konačnog broja elemenata na kojima je definirana binarna operacija (tablica množenja) koja zadovoljava četiri aksioma (vidi definiciju 1.1.1). U fizici elemente grupe povezujemo s transformacijama simetrije i pripadajući skup operatora transformacija zovemo reprezentacija grupe. Pokazali smo da reprezentacije konačnih grupa zadovoljavaju neka netrivijalna svojstva koja se onda odražavaju i na netrivijalnim svojstvima fizikalnih objekata poput kristala. No cijelim putem, a posebice u prošlom poglavlju, vidjeli smo da neke od najvažnijih simetrija, poput rotacija i translacija prostora, nisu konačne. Za razliku od kristala, prazan prostor ili električno polje naboja u ishodištu su simetrični na rotaciju oko bilo koje osi (kroz ishodište), kojih ima beskonačno, i za bilo koji kut, kojih isto ima beskonačno. Dakle, odgovarajuća grupa će imati beskonačni broj elemenata. Tako za nju nećemo moći napisati grupnu tablicu množenja, a čini se problematično i to da smo se u dokazivanju najvažnijih teorema teorije reprezentacija oslanjali na konačnost grupe.

Srećom, uz tu komplikaciju svoje beskonačnosti, navedene grupe obično donose i iskupljujuće svojstvo *kontinuiranosti* koje nam onda dodatno stavlja na raspolaganje moćne matematičke teorije infinitezimalnog računa, tj. realne i kompleksne analize te diferencijalne geometrije i topologije. Zahvaljujući tome matematička teorija kontinuiranih grupa je u nekim aspektima čak i jednostavnija od teorije konačnih grupa[*].

[*]Najspektakularniji primjer je potpuna klasifikacija grupa koju je za kontinuirane grupe dovršio još E. Cartan i koja se često izlaže u jednom poglavlju čak i udžbenika za studente fizike, poput [Jones, 1998.], dok je klasifikacija konačnih grupa dovršena tek

U nedostatku mogućnosti da pojedinačno navedemo sve elemente beskonačnih grupa, za razmatranje istih uvodimo važan pojam *grupnog prostora* kojeg nazivamo i *grupna mnogostrukost.* Riječ je o prostoru čija je svaka točka pridružena jedinstvenom elementu grupe. Za konačne grupe *grupni prostor* je naprosto skup točaka koji nema neka dodatna svojstva povrh svojstava koji mu daju aksiomi grupe (dakle, ne smatramo da su te točke elementi nekog pravca, ravnine ili višedimenzionalnog prostora):

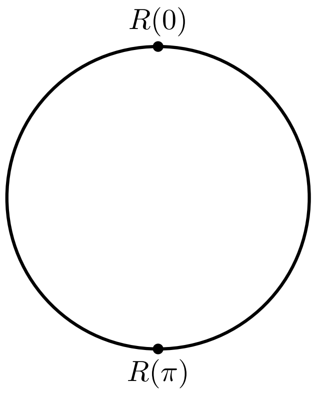
$$\begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & g_3 & & g_n \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

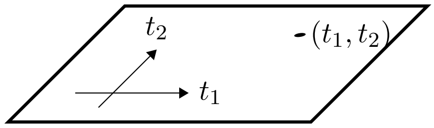
S druge strane za *kontinuirane beskonačne grupe* grupni prostor je kontinuum točaka koji *ima* dodatna matematička svojstva. Ovisno o razini općenitosti, prostori s takvim dodatnim svojstvima dolaze pod nazivima *topološki prostor* ili *diferencijabilna mnogostrukost*, za čije je matematički korektno specificiranje potrebno uvesti niz sofisticiranih matematičkih koncepata (vidi npr. [Smolić, 2024.]). Za naše potrebe dovoljno je reći da su grupni prostori lokalno slični prostoru $\mathbb{R}^n$, tj. da ih je lokalno moguće parametrizirati n-torkom realnih[*] brojeva. Najbolje je to razjasniti na primjerima.

Grupa $\{R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta) \,|\, \theta \in [0, 2\pi)\}$ svih rotacija oko zadane osi $\hat{\boldsymbol{n}}$ ima kao grupnu mnogostrukost kružnicu jer točke na kružnici možemo parametrizirati kao $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ i tako uspostaviti bijektivno preslikavanje između točaka kružnice i elemenata grupe. Ovdje je radijus r nebitan, svaka kružnica je ekvivalentna kao grupni prostor. Štoviše, ni oblik nije ključan pa bi i elipsa mogla poslužiti. No kako se u računima oslanjamo na parametrizaciju grupe pomoću kuta θ bit će računski najjednostavnije držati se kružnice. Sa stanovišta teorije grupa, jedina bitna svojstva su kontinuiranost krivulje koja odražava kontinuiranost grupe i *topologija* kružnice tj. činjenica da kontinuiranim povećavanjem kuta rotacije do 2π dolazimo natrag do jediničnog elementa, tj. rotacije za nula stupnjeva. Upravo ta parametrizacija jednim realnim brojem θ je ono na što se misli kad se kaže da je grupna mnogostrukost lokalno slična $\mathbb{R}^n$, gdje je u ovom slučaju $n = 1$.). No sličnost nije globalna zbog različite topologije kružnice i $\mathbb{R}^1$.

krajem 20. stoljeća i razbacana je na tisuće stranica specijalizirane matematičke literature.

[*]Matematičari poznaju i grupe čiji grupni prostor se parametrizira kompleksnim brojevima, no mi ovdje takve grupe nećemo sresti.





Kao drugi primjer promotrimo grupu svih translacija u ravnini $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$, dakle translacija za bilo koji vektor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$. Ovdje je elemente grupe prirodno parametrizirati dvama realnim brojevima $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ i očito je da je grupna mnogostrukost ravnina tj. $\mathbb{R}^2$. Ovdje naravno treba razlikovati ravninu koja je vektorski prostor čije vektore transformiraju elementi grupe (tj. strogo uzevši njene reprezentacije) i ravninu koja je grupni prostor za koji uopće nije nužno da ima svojstva vektorskog prostora.

Kako vidimo iz ova dva primjera, elemente kontinuiranih grupa identificiramo s točkama n-dimenzionalne grupne mnogostrukosti koju parametriziramo s n realnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, te onda govorimo o *n-parametarskoj* ili *n-dimenzionalnoj* grupi. Zahvaljujući toj identifikaciji elemente grupe ćemo označavati kao $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, odnosno skraćeno $g(a)$.

Promotrimo sada četiri aksioma grupe u svjetlu ove diskusije.

1) Zatvorenost: $g(c) = g(a)g(b) \in G$. Umjesto tablice množenja koja je definirala grupnu operaciju, sada nam treba funkcija, tzv. funkcija kompozicije

$$\phi : G \times G \to G \quad \text{tako da je} \quad c = \phi(a, b)$$

(Npr. za rotacije oko date osi imamo $R(\theta) = R(\theta_1)R(\theta_2)$ gdje je funkcija kompozicije $\theta = \phi(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi$.) U svjetlu identifikacije grupe i njenog grupnog prostora ovdje pišemo da je grupa G domena i kodomena funkcije ϕ premda je to strogo uzevši grupni prostor.

2) Asocijativnost: $g(a)\big[g(b)g(c)\big] = \big[g(a)g(b)\big]g(c)$ što znači da funkcija kompozicije mora zadovoljavati $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$.

3) Identiteta: postoji parametar a^0 takav da je $g(a^0)g(a)= g(a)g(a^0)= g(a)$ za sve parametre a. Običaj je grupnu mnogostrukost parametrizirati tako da bude $a^0 = (0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ tj. $g(0) = e$ što onda znači da za funkciju kompozicije vrijedi $\phi(0, a) = \phi(a, 0) = a$.

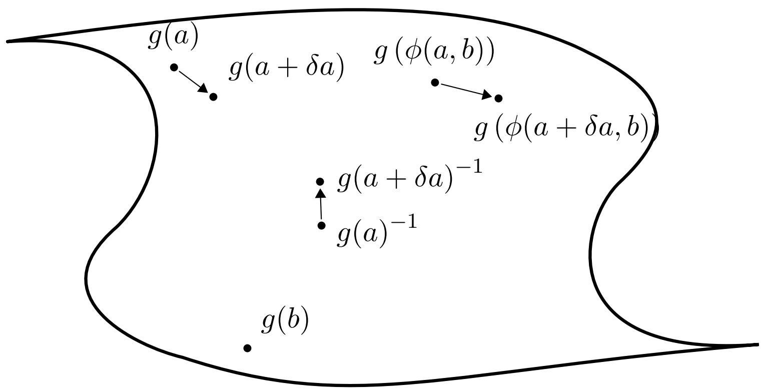
4) Inverz: $\forall a \quad \exists \bar{a} \,|\, g(a)g(\bar{a}) = g(\bar{a})g(a) = g(0) = e$ tj. $g(\bar{a}) = g(a)^{-1}$. To znači da postoji tzv. funkcija inverza

$$\psi : G \to G \quad \text{tako da je} \quad \bar{a} = \psi(a)\,.$$

Sami aksiomi grupe ne traže nikakvu povezanost između grupnih i topoloških svojstava grupe. To znači da bi točke grupne mnogostrukosti mogle u načelu biti pridružene elementima grupe na proizvoljan diskontinuirani pa čak i „ispremješani” način. Međutim za grupe od interesa preslikavanja između grupne mnogostrukosti i grupe su „glatka” i takve grupe onda zovemo Liejeve.

Definicija 5.1.1 (Liejeva grupa)
Liejeva grupa je grupa za koju su funkcije kompozicije (ϕ) i inverza (ψ) diferencijabilne*.

Zahtjev da su te funkcije diferencijabilne daje Liejevim grupama mnoštvo važnih svojstava, kako ćemo vidjeti u sljedećem odjeljku. Ova svojstva se ogledaju u činjenici da je za male promjene parametra δa element $g(a)$ „blizu” elementa $g(a + \delta a)$ te da da je $\phi(a + \delta a, b)$ „blizu” $\phi(a, b)$ tj. te su vrijednosti povezane Taylorovim redom.



Tako teorija Liejevih grupa spaja ideje iz algebre, analize i geometrije.

Analiza općenitih Liejevih grupa, koja se oslanja samo na ovu definiciju je matematički dosta zahtjevna. Srećom praktički sve Liejeve grupe koje se javljaju u fizici mogu se vjerno reprezentirati matricama i mi ćemo se baviti samo takvim tzv. matričnim Liejevim grupama. Smanjenje općenitosti je neznatno†, a rad s matricama je značajno lakši od rada s diferencijabil-

*Strogo uzevši, dovoljna je kontinuiranost funkcija jer ona u ovom slučaju povlači diferencijabilnost. Ta vrlo netrivijalna činjenica da algebarski aksiomi grupe osiguravaju da kontinuirane funkcije nužno budu i diferencijabilne je sadržaj rješenja 5. Hilbertovog problema.

†Za znatiželjne, primjeri ne-matričnih Liejevih grupa su uvijek egzotični poput tzv.

nim mnogostrukostima. Na primjer, matrice odmah dolaze parametrizirane brojčanim vrijednostima svojih elemenata. Tu je važno ne pomiješati dimezionalnost matrične grupe s dimenzionalnošću njenih matrica. Kako je rečeno gore, dimenzionalnost grupe je jednaka broju *nezavisnih realnih* parametara koji specificiraju element grupe tj. matricu. Tako je grupa rotacija u ravnini dana dvodimenzionalnim matricama

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \mid \phi \in [0, 2\pi) \right\} , \tag{5.1}$$

ali to je jednodimenzionalna grupa jer je svaka matrica potpuno određena jednim realnim parametrom ϕ. Matrične grupe imaju svoja klasična imena pa se tako grupa iz (5.1) zove SO(2), što dolazi od *specijalna* ($\det M = 1$) *ortogonalna* ($M^{\mathsf{T}} M = 1$) grupa 2×2 matrica.

5.2 Grupe SO(3) i SU(2)

Dva važna primjera Liejevih grupa na kojima ćemo ilustrirati većinu rezultata su grupa 3×3 ortogonalnih matrica determinante 1, dakle SO(3), i grupa 2×2 unitarnih matrica determinante 1, SU(2), pa ćemo se u ovom odjeljku detaljnije upoznati s ove dvije grupe i njihovom međusobnom vezom. No krenimo prvo s malo općenitijim razmatranjem transformacija prostora koje čuvaju udaljenosti između točaka. Takve transformacije nazivaju se *izometrije*. U vektorskim prostorima, udaljenost točaka se prirodno definira kao norma razlike vektora do tih točaka, pa će transformacije koje čuvaju skalarni produkt vektora $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, čuvati i udaljenosti jer je norma (iznos) vektora $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$. Zapišemo li to pomoću matrica vidimo da matrica izometrije R mora zadovoljavati

$$(R\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{y}) = \sum_{ijk} R_{ij} x_j \, R_{ik} y_k = \sum_{ijk} x_j (R^{\mathsf{T}})_{ji} \, R_{ik} y_k = (\boldsymbol{x}, R^{\mathsf{T}} R\boldsymbol{y}) \stackrel{!}{=} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,, \tag{5.2}$$

pa mora biti $R^{\mathsf{T}} R = 1$, a matrice koje to zadovoljavaju nazivamo *ortogonalne* jer iz tog svojstva slijedi da su retci i stupci tih matrica ortogonalni vektori, štoviše ortonormirani su. Grupa svih ortogonalnih 3×3 matrica se naziva O(3).

Kako je prema Binet-Cauchyjevom teoremu $\det R^{\mathsf{T}} R = \det R^{\mathsf{T}} \det R$, te kako transpozicija ne mijenja determinantu, vidimo da je $(\det R)^2 = 1$, pa determinanta ortogonalne matrice može biti samo 1 ili -1. Matrice s

metaplektičkih grupa ili kvocijentne grupe Heisenbergove grupe po jednoj svojoj specifičnoj normalnoj podgrupi.

determinantom -1, poput

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

daju transformacije koja su kombinacija rotacije i refleksije preko neke ravnine kroz ishodište (u ovom primjeru to je x-y ravnina). Refleksije također čuvaju udaljenosti, ali ne čuvaju orijentaciju (lijevi vijak se se pretvara u desni). Podskup od O(3) kojeg čine matrice determinante 1 čini normalnu podgrupu (uvjerite se u to!) koja se naziva *specijalna* ortogonalna grupa SO(3).

Elementi komplementa od SO(3) u O(3) tj. matrice koje imaju determinantu -1 nekad se nazivaju *neprave* rotacije. Neprave rotacije se mogu na jedinstven način prikazati kao umnožak običnih rotacija iz SO(3) i operatora prostorne inverzije*

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Naime, uzmemo li proizvoljnu nepravu rotaciju $\tilde{R}$ tada je

$$\det(P\tilde{R}) = \det(P)\det(\tilde{R}) = +1 \tag{5.5}$$

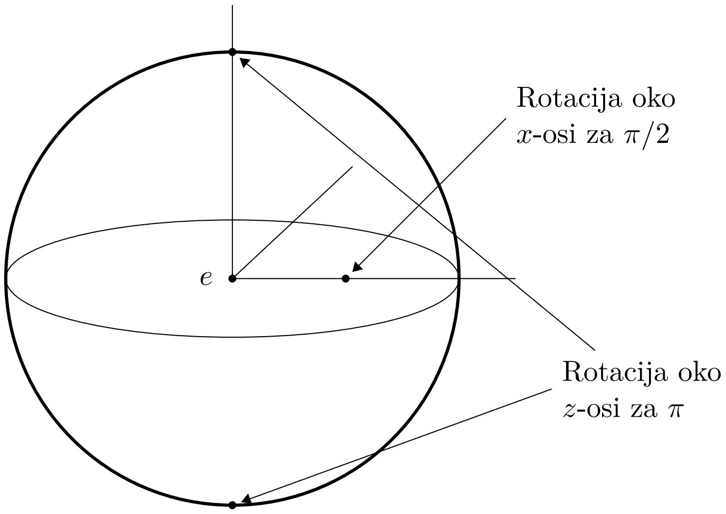
pa je $P\tilde{R}$ prava rotacija, $P\tilde{R} = R$, i onda je $\tilde{R} = PR$. Tako je cijeli taj skup kojeg čine neprave rotacije zapravo jednak umnošku PSO(3) i vidimo da se cijela ortogonalna grupa sastoji od točno dvije komponente

$$\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) + P\mathrm{SO}(3), \tag{5.6}$$

od kojih je samo SO(3) podgrupa. (PSO(3) ne može biti podgrupa jer ne sadrži jedinični element.)

Usredotočimo se sada na grupu SO(3) i promotrimo izgled njene grupne mnogostrukosti. Svaki element grupe SO(3) se može na jedinstven način definirati smjerom osi rotacije i iznosom kuta rotacije pa se grupna mnogostrukost može prikazati kao puna lopta promjera π s identificiranim nasuprotnim (antipodnim) točkama njene površine:

*Poznat i kao operator *pariteta* zbog važnog svojstva parnosti kvantnomehaničkih valnih funkcija na transformaciju prostorne inverzije.



Položaj točke u lopti dan je u sfernom koordinatnom sustavu kao (r, θ, ϕ). Kutovi θ i ϕ definiraju usmjerenje osi rotacije, a udaljenost $r \leq \pi$ točke od ishodišta definira kut rotacije. Sve te rotacije uzimamo u pozitivnom smjeru. Rotacije u negativnom smjeru, odnosno rotacije za kutove $(\pi, 2\pi)$ se dobiju rotacijom za kutove $[0, \pi]$ oko suprotno usmjerene osi. Identifikacija nasuprotnih točaka je posljedica činjenice da je su rotacije za π oko suprotno usmjerenih osi identične pa tek uz takvu identifikaciju imamo ispravnu bijekciju između lopte (grupnog prostora) i SO(3) grupe rotacija.

Kompozicija u grupi SO(3) je naravno dana umnoškom odgovarajućih matrica, ali promatranjem rezultantne matrice općenito nije lako vidjeti kakvoj rotaciji ona odgovara, za koji kut i oko koje osi. Odgovor na to pitanje, kojim se nećemo ovdje baviti, dali su Euler i Rodrigues, ali najelegantniji put do odgovora ide putem grupe SU(2) na koju ćemo se sada usredotočiti. Da bismo ustanovili parametrizaciju grupe SU(2), a pomoću toga i izgled njene grupne mnogostrukosti, promotrimo općenitu 2×2 kompleksnu matricu

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}\,. \tag{5.7}$$

Uvjet unitarnosti daje

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

dok uvjet specijalnosti daje

$$\det U = ad - bc = 1\,. \tag{5.9}$$

Elimirajući d iz jednadžbi $ca^* + db^* = 0$ i $ad - bc = 1$ dobijemo

$$-\frac{c}{b^*}(aa^* + bb^*) = 1\,, \tag{5.10}$$

pa kako je iz uvjeta unitarnosti $aa^* + bb^* = 1$ dobijemo da je $c = -b^*$. Onda odmah iz $ca^* + db^* = 0$ slijedi i da je $d = a^*$ pa vidimo da je

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ uz } |a|^2 + |b|^2 = 1\,; \quad a, b \in \mathbb{C} \right\} . \tag{5.11}$$

Ova dva kompleksna broja možemo izraziti preko realnih kao $a = x + iy$ i $b = r + is$ čime uvjet determinante postaje

$$x^2 + y^2 + r^2 + s^2 = 1\,, \tag{5.12}$$

i na kraju preostaju tri slobodna realna parametra. Dakle, grupa SU(2) je troparametarska ili trodimenzionalna Liejeva grupa. Parametre x, y, r i s možemo interpretirati kao koordinate točaka u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^4$ i kako je (5.12) jednadžba sfere u tom prostoru vidimo da je grupna mnogostrukost grupe SU(2) 3-sfera* S^3.

Diskutirajmo sada vezu između grupa SO(3) i SU(2). Za zagrijavanje, možemo promotriti sličnu vezu jednostavnijih Abelovih grupa SO(2) i U(1). Grupa SO(2) je dana u (5.1), a U(1) je grupa unitarnih 1×1 matrica, a to su naravno kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1, jer uvjet unitarnosti je $u^\dagger u = u^* u = |u| = 1$. Tako tu grupu možemo parametrizirati kao $u = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ i jasno je da je i grupna mnogostrukost od U(1) kružnica, kao i za SO(2). Štoviše ove dvije grupe su očito izomorfne. Taj izomorfizam omogućuje da se mnogi trigonometrijski identiteti ravninske geometrije, poput formula za sinus i kosinus dvostrukog kuta, mogu znatno lakše izvesti u grupi U(1) jer je s eksponencijalnom funkcijom lakše raditi nego s trigonometrijskima, a na kraju se lako „vratimo u SO(2)" pomoću Eulerove formule $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$.

Kod grupa SO(3) i SU(2) situacija je ipak nešto složenija. Već smo vidjeli da su grupne mnogostrukosti vrlo različite, a kako je pokazano u Dodatku E one nisu izomorfne, nego samo homomorfne. Konkretno, homomorfno preslikavanje je 2-na-1 tako da je svakim dvama elementima U i $-U$ iz SU(2) pridružen isti element R iz SO(3). Pomoću (5.11) i (5.12) vidimo da množenje matrice U s -1 odgovara promjeni parametara $(x, y, r, s) \to (-x, -y, -r, -s)$, što je inverzija u 4D prostoru, tako da elementima U i $-U$ odgovaraju antipodne točke na grupnoj mnogostrukosti S^3. No, za razliku od grupne mnogostrukosti SO(2) gdje su antipodne točke površine kugle identificirane i odgovaraju jednom elementu grupe, ovdje su antipodne točke različite i odgovaraju različitim elementima grupe. Zahvaljujući ovom homomorfizmu, rotacije u 3D prostoru mogu se reprezentirati i matricama iz

*Kružnica je 1-sfera S^1, Zemljina površina je približno 2-sfera S^2 itd. Interesantan vrlo netrivijalan rezultat teorije grupa je da od svih S^n samo S^1 i S^3 dopuštaju grupnu strukturu tj. mogu biti mnogostrukosti Liejeve grupe.

SU(2), a ova prividna redundancija dvaju matrica za istu rotaciju s pokazuje ključna u kvantnoj mehanici sustava s polucjelobrojnim spinom, kako ćemo vidjeti u 6. poglavlju.

Kernel ovog homomorfizma je znači $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$ što je grupa $\mathbb{Z}_2$ pa prema teoremu o izomorfizmu 1.3.6 imamo odnos $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 = \mathrm{SO}(3)$.

5.3 Liejeve algebre

Promotrimo sada skup matrica $M(a) \equiv M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ koje čine n-parametarsku Liejevu grupe. Za infinitezimalno male vrijednosti parametara $a_i \to \epsilon_i \ll 1$, zahvaljujući svojstvu diferencijabilnosti Liejeve grupe možemo razviti oko $a_i = 0$:

$$M(\epsilon) = M(0) + \sum_{i=i}^{n} \epsilon_i \frac{\partial M(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_i}\bigg|_{a_1=\ldots=a_n=0} + 0(\epsilon^2)\,, \tag{5.13}$$

gdje diferenciranje matrica provodimo prirodno diferencirajući svaki njen element ponaosob. Koeficijenti od ϵ_i u (5.13) su konstantne matrice (ne ovise o parametrima) koje se nazivaju generatori i skraćeno ćemo ih označiti s X_i

$$X_i = \frac{\partial M(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_i}\bigg|_{a_1=\ldots=a_n=0} = \mathrm{const}(a_1, \dots, a_n) \quad i = 1, \dots, n \tag{5.14}$$

Očito je da generatora ima koliko i parametara tj. njihov broj je jednak dimenzionalnosti grupe (grupne mnogostrukosti). $M(0)$ je jedinični element grupe tj. jedinična matrica pa za infinitezimalne transformacije imamo

$$M(\epsilon) = \mathbb{1} + \sum_{i=i}^{n} \epsilon_i X_i\,. \tag{5.15}$$

Centralna spoznaja teorije Liejevih grupa je da je struktura *čitave* grupe i njenih reprezentacija skoro sasvim određena određena generatorima grupe tj. infinitezimalnom okolinom jediničnog elementa. Ovo ćemo većim dijelom samo pokazati na primjeru grupe rotacija realnog trodimenzionalnog euklidskog prostora, a za općeniti dokaz čitaoc može konzultirati literaturu poput [Stillwell, 2008.].

U odjeljku 5.5 dokazat ćemo da je grupa SO(3) troparametarska, no to je i odmah jasno ako znamo da su rotacije potpuno specificirane pomoću iznosa kuta rotacije (jedan parametar) i usmjerenja jediničnog vektora osi rotacije (dva parametra) ili alternativno pomoću tri Eulerova kuta.

Promotrimo sada jednoparametarsku podgrupu grupe SO(3) koju čine rotacije oko treće tj. z-osi.

$$\left\{ R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \phi \in [0, 2\pi) \right\} = \mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SO}(3)\,,$$

gdje premda su same matrice $R_3(\phi)$ trodimenzionalne one su naravno izomorfne grupi SO(2) rotacija x-y ravnine. Generator te pogrupe je

$$X_3 = \left.\frac{\partial R_3(\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\begin{pmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{5.16}$$

i infintezimalna rotacija oko z-osi je $R_3(\epsilon) = 1 + \epsilon X_3$. Ideja je sada komponirati N ovih rotacija za infinitezimalni kut ϵ i uočiti da će u limesu $N \to \infty$ uz $N\epsilon \to \phi$ takva kompozicija rezultirati rotacijom za proizvoljni *konačni* kut ϕ

$$[R_3(\epsilon)]^N = (1 + \epsilon X_3)^N = \left(1 + \frac{(N\epsilon)X_3}{N}\right)^N \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ (N\epsilon)\to\phi}]{} e^{\phi X_3}\,,$$

gdje smo upotrijebili svojstvo eksponencijalne funkcije

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \exp(x)\,, \tag{5.17}$$

koje vrijedi za broj x, u nadi da će ono vrijediti i kad je x matrica. U dodatku F diskutiramo kako eksponenciranje matrica zaista funkcionira isto kao i eksponenciranje brojeva, uz još neka dodatna zanimljiva svojstva, te tamo usput eksplicitno pokazujemo da je

$$e^{\phi X_3} = \exp\left\{ \phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{5.18}$$

Tako vidimo da zaista svaki element ove jednoparametarske podgrupe od SO(3) možemo dobiti eksponencijacijom generatora. Nadalje, u skladu s Eulerovim teoremom iz mehanike* svaka SO(3) rotacija pripada nekoj jednoparametarskoj podgrupi (čine je sve rotacije oko te iste osi), što onda znači da se svi elementi grupe SO(3) mogu se dobiti eksponencijacijom generatora. Mogućih osi rotacije ima beskonačno pa tako i geratora ima beskonačno i pitanje je kako ih odrediti. Kako se vidi iz (5.14) konkretan oblik generatora ovisi o parametrizaciji grupnog prostora. Mogli bismo recimo pokušati

*Svaki pomak krutog tijela kod kojeg jedna točka ostaje nepomična je ekvivalentan *jednoj* rotaciji oko fiksne osi koja prolazi kroz tu točku.

konstruirati opću rotaciju kao kompoziciju tri Eulerove rotacije i onda deriviranjem po Eulerovim kutovima dobiti generatore. No, ima i lakši put koji će olakšati traženje generatora drugih Liejevih grupa koje se pojavljuju u fizici*.

Oslonit ćemo se na definiciju SO(3) kao grupe svih 3×3 matrica R sa svojstvom $RR^{\mathsf{T}} = 1$ i $\det R = 1$. Rotacije za infinitezimalni kut imat će oblik $R(\epsilon) = 1 + \epsilon X$, gdje je X jedan od generatora. Uvjet ortogonalnosti je sada

$$RR^{\mathsf{T}} = (1+\epsilon X)(1+\epsilon X^{\mathsf{T}}) = 1 + \epsilon(X + X^{\mathsf{T}}) + 0(\epsilon^2) = 1\,, \tag{5.19}$$

što znači da je $X^{\mathsf{T}} = -X$ odnosno X je antisimetrična 3×3 matrica. Obratno, ako je X antisimetrična, njena eksponencijacija $R = e^X$ daje ortogonalnu matricu jer je

$$RR^{\mathsf{T}} = e^X (e^X)^{\mathsf{T}} = e^X e^{X^{\mathsf{T}}} = e^X e^{-X} = e^{X-X} = 1\,, \tag{5.20}$$

gdje je jedini netrivijalni korak predzadnji. Naime, vidi dodatak F, $e^A e^B = e^{A+B}$ samo ukoliko matrice A i B komutiraju što je ovdje srećom trivijalno slučaj. Zahvaljujući općenitoj relaciji $\det e^X = e^{\mathrm{Tr} X}$, vidi dodatak F, te činjenici da antisimetrične matrice imaju nule na glavnoj dijagonali, uvjet specijalnosti determinante $\det R = 1$ je zadovoljen automatski. Tako smo pokazali da skup $\mathcal{A}$ svih antisimetričnih 3×3 matrica generira grupu SO(3)†.

Skup generatora $\mathcal{A}$ ima i dodatna svojstva. Kao prvo, on je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ jer za svaka dva vektora $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ i svaka dva broja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha X_1 + \beta X_2)$ je isto antisimetrična matrica, a time i element $\mathcal{A}$. Dimenzija od $\mathcal{A}$ je 3 jer je najopćenitiji oblik 3×3 antisimetrične matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,. \tag{5.21}$$

Jednakost dimenzija vektorskog prostora generatora $\mathcal{A}$ i grupe SO(3) koju oni generiraju naravno nije slučajna obzirom da eksponencijacijom generatora trebamo moći dobiti skoro sve elemente grupe, a u najmanju ruku barem sve elemente u nekoj okolini jedinice.

Trodimenzionalni vektorski prostor ima tročlanu bazu i u ovom slučaju je uobičajeno kao bazu izabrati generatore jednoparametarskih podgrupa rotacija oko x, y i z osi. Ovaj treći smo već odredili u (5.16), a kompletna

*Recimo usput i da bi pristup preko Eulerovih bio problematičan jer su one singularne oko jedinice.

†Pažljivi čitaoc će možda u ovom automatskom zadovoljenju uvjeta $\det R = 1$ vidjeti kontradikciju: Refleksije su isto ortogonalne matrice, pa bi i njihovi generatori trebali biti antisimetrični, no njihova determinanta je -1. Stvar je u tome da refleksije nije moguće generirati kompozicijom infinitezimalnih transformacija tj. one nemaju generatore. O tome će još biti govora kasnije.

baza je

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.22}$$

pa je $e^{\phi \boldsymbol{X}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}$ onda općeniti element grupe SO(3) koji predstavlja rotaciju oko osi $\hat{\boldsymbol{n}}$ za kut ϕ.

Vektorski prostor sa svojom dodatnom operacijom množenja skalarima iz polja $\mathbb{R}$ je općenito znatno bogatija struktura od grupe (koja ima samo svoju binarnu operaciju). To znači da o generatorima „znamo više" i lakše je proučavati njih i onda pomoću eksponencijacije vidjeti reperkusije tih spoznaja na samu grupu. To je dodatno pojačano još jednim njihovim važnim svojstvom. Neka su $X, Y \in \mathcal{A}$. Definirajmo njihov *komutator*

$$[X, Y] \equiv XY - YX \,. \tag{5.23}$$

Komutator je također 3×3 matrica koja je štoviše također antisimetrična jer

$$[X, Y]^\mathsf{T} = (XY - YX)^\mathsf{T} = Y^\mathsf{T} X^\mathsf{T} - X^\mathsf{T} Y^\mathsf{T} = YX - XY = -[X, Y] \,. \tag{5.24}$$

To znači da je i komutator $[X, Y] \in \mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je zatvoren ne samo obzirom na linearne kombinacije već i obzirom na komutatore svojih elemenata. Time je on još složenija matematička struktura od vektorskog prostora koja se naziva *Liejeva algebra.* Načinimo kratki odmak od proučavanja samo matričnih grupa i definirajmo Liejevu algebru nešto općenitije.

Definicija 5.3.1 (Liejeva algebra)
Liejeva algebra $\mathcal{A}$ je vektorski prostor na kojem je definiran Liejev produkt dvaju elemenata $[X, Y]$ (ne mora biti komutator) sa svojstvima

1) zatvorenost: $[X, Y] \in \mathcal{A} \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}$

2) distributivnost: $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) antisimetrija: $[X, Y] = -[Y, X]$

4) Jacobijev identitet: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Za vektorske prostore matrica, gdje je Liejev produkt definiran kao komutator (5.23), svojstva 2–4 su automatski ispunjena. Ovo poopćenje od matričnih grupa smo napravili samo zato da kao spomenemo da zapravo o nikakvom poopćenju nema govora. Naime, kako smo rekli u fusnoti na stranici 85, nematrične Liejeve grupe su egzotične, ali postoje. No, zahvaljujući sljedećem Adovom teoremu nematrične (konačno-dimenzionalne) Liejeve algebre ne postoje.

Teorem 5.3.2 (Ado)
Svaka konačno-dimenzionalna apstraktna Liejeva algebra je izomorfna nekoj Liejevoj algebri konačno-dimenzionalnih matrica s komutatorom kao Liejevim produktom. *(Bez dokaza.)*

Dakle, ograničavajući se na Liejeve grupe *matrica* ne gubimo mnogo na općenitosti jer sve Liejeve algebre koje ćemo sresti u ovoj knjizi su konačno-dimenzionalne*. Liejeve algebre se obično označavaju isto kao i pripadajuće Liejeve grupe, ali malim gotičkim slovima. Dakle, $\mathcal{A} = \mathfrak{so}(3)$.

Komutatori elemenata baze Liejeve algebre $X_i, i = 1, 2, \ldots, \dim(\mathcal{A})$ se kao i svi ostali elementi od $\mathcal{A}$ naravno mogu prikazati kao linearna kombinacija baze, dakle sebe samih:

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k \,, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \dim(\mathcal{A}) \,. \tag{5.25}$$

Realni brojevi C_{ij}^k koji se ovdje pojavljuju nazivaju se *strukturne konstante* grupe. Uočite da je (5.25) vrlo netrivijalna nelinearna relacija između generatora koju će morati zadovoljavati sve njihove reprezentacije. Naime, cijelo ovo izlaganje dosad koristilo je 3×3 matrice za definiciju grupe SO(3) i njene algebre $\mathfrak{so}(3)$. To je istovremeno i definicija te grupe i reprezentacija te grupe na 3D euklidskom prostoru. Međutim, slično kao i kod konačnih grupa, Liejeve grupe imaju i reprezentacije na vektorskim prostorima drugih dimenzionalnosti, što je od velike važnosti u primjeni teorije grupa na kvantnomehaničke sustave. I tu će opet biti od interesa identificirati sve ireducibilne reprezentacije neke grupe. Koliko ireducibilnih reprezentacija očekujemo? Ako bismo se oslonili na fundamentalni rezultat iz teorije konačnih grupa da ireducibilnih reprezentacija ima isto koliko i klasa konjugacije, vidi odjeljak 3.2, onda bismo zaključili da SO(3) ima beskonačno ireducibilnih reprezentacija (jer se uz malo geometrijskog razmišljanja lako uvjerite da pojedinu klasu konjugacije čine rotacije oko bilo koje osi za konkretni kut ϕ). I premda je takvo zaključivanje nekorektno jer navedena jednakost broja ireducibilnih reprezentacija i klasa konjugacije *ne vrijedi* za Liejeve grupe, zaključak jest točan — Liejeve grupe tipično imaju beskonačno ireducibilnih reprezentacija. Jedna od lako uočljivih razlika prema konačnim grupama je u tome da premda SO(3) ima neprebrojivo beskonačno klasa konjugacije, vidjet ćemo da ima samo prebrojivo beskonačno ireducibilnih reprezentacija. Bez obzira, očito je da nećemo moći eksplicitno konstruirati sve te repreprezentacije metodom nadopunjavanja tablice karaktera iz odjeljka 3.3, nego apstraktnijim zaključivanjem u kojem će relacija (5.25), koju fizičari često zovu „algebra grupe," imati centralnu ulogu, kako ćemo

*Istina, u fizici nekad nalazimo i primjenu beskonačno-dimenzionalnih algebri za koje teorem ne vrijedi. Jedan primjer je tzv. Virasorova algebra važna u teoriji superstruna.

vidjeti u sljedećim poglavljima. Kad smo već kod terminologije, recimo i to da je fizičarima često interes usredotočen samo na bazu Liejeve algebre, a ne i na ostatak vektorskog prostora, pa će u žargonu reći da tri matrice iz (5.22) „čine algebru” ove grupe.

Primjer 5.3.3 (strukturne konstante od SO(3))
Eksplicitnim računom lako se uvjerimo da je

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \text{za} \quad i = j\,, \tag{5.26}$$
$$[X_1, X_2] = X_3\,, \tag{5.27}$$
$$[X_2, X_3] = X_1\,, \tag{5.28}$$
$$[X_3, X_1] = X_2\,, \tag{5.29}$$

tj. da je

$$C_{ij}^k = 0 \quad \text{ako su bilo koja dva indeksa ista}\,, \tag{5.30}$$
$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1\,, \tag{5.31}$$
$$C_{21}^3 = C_{32}^1 = C_{13}^2 = -1\,, \tag{5.32}$$
$$\tag{5.33}$$

pa pomoću Levi-Civita tenzora komutacijske relacije algebre $\mathfrak{so}(3)$ možemo zapisati u obliku

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k\,, \tag{5.34}$$

odnosno strukturne konstante grupe SO(3) su $C_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$.

Liejeva algebra $\mathcal{A}'$ je *homomorfna* Liejevoj algebri $\mathcal{A}$ ako postoji matrica $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ takva da je

$$[S(X), S(Y)] = S([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}\,.$$

Ako je S još i bijekcija $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ su *izomorfne*. Dakle, važno je da preslikavanje bude konzistentno s operacijom komutatora.

Primjer 5.3.4 (Liejeva algebra grupe SU(2) tj. $\mathfrak{su}(2)$)
SU(2) je grupa svih unitarnih 2×2 matrica jedinične determinante. Identičnim zaključivanjem kao za SO(3), samo uz zamjenu traspozicije hermitskom konjugacijom $X^\mathsf{T} \to X^\dagger$ lako zaključujemo da algebru $\mathfrak{su}(2)$ čine sve antihermitske* $2{\times}2$ matrice s tragom nula (ovdje zadovoljavanje uvjeta jedinične determinante nije automatsko). Kao bazu ove algebre uzimamo

$$\{-i\frac{\sigma_1}{2}, -i\frac{\sigma_2}{2}, -i\frac{\sigma_3}{2}\}\,, \tag{5.35}$$

*A je antihermitska ako je $A^\dagger = -A$

gdje su $\sigma_{1,2,3}$ tri Paulijeve matrice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Ova tri generatora zadovoljavaju identične komutacijske relacije kao i matrice $\mathfrak{so}(3)$ algebre

$$\left[-i\frac{\sigma_1}{2}, -i\frac{\sigma_2}{2}\right] = -i\frac{\sigma_3}{2} \qquad \text{itd.}$$

pa je pridruživanje $X_i \to -i\sigma_i/2$ izomorfizam i $\mathfrak{so}(3)$=$\mathfrak{su}(2)$.

Važno je ovdje uočiti da premda su elementi matrica iz $\mathfrak{su}(2)$ općenito kompleksni, $\mathfrak{su}(2)$ je *realna* Liejeva algebra, dakle algebra nad poljem $\mathbb{R}$. (Linearna kombinacija $\sigma_1 + \sigma_2$ je antihermitska i time pripada $\mathfrak{su}(2)$, dok $\sigma_1 + i\sigma_2$ to nije!)

Zanimljivo je pitanje što izomorfizam algebri znači za odgovarajuće grupe tj. jesu li možda onda i SO(3) i SU(2) izomorfne. O tome će biti riječi u sljedećem odjeljku.

Pri analizi reprezentacija Liejevih grupa od koristi će biti tzv. Casimirovi operatori.

Definicija 5.3.5 (Casimirov operator)
Ako je skup $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ baza Liejeve algebre onda se polinom u X_i koji komutira sa svim elementima te algebre naziva *Casimirov operator*.

Posebno su zanimljivi kvadratični Casimirovi operatori.

Primjer 5.3.6 (Kvadratični Casimirov operator za $\mathfrak{so}(3)$ i $\mathfrak{su}(2)$)
Eksplicitnim računom se uvjerimo da je

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -2 \cdot \mathbb{1}\,, \tag{5.37}$$

za $\mathfrak{so}(3)$ i

$$\left(\frac{-i}{2}\right)^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) = -\frac{3}{4} \cdot \mathbb{1}\,, \tag{5.38}$$

za $\mathfrak{su}(2)$.

Schurova lema, koja vrijedi i za Liejeve grupe, traži da Casimirov operator bude proporcionalan jediničnom i ispostavlja se da je koeficijent proporcionalnosti zgodan za označavanje ireducibilnih reprezentacija kako ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju.

Primjer 5.3.7 (Algebra grupe SO(2))
Generator grupe SO(2) već smo identificirali kao X_3 iz 5.16 kad smo SO(2) razmatrali kao jednoparametarsku podgrupu grupe SO(3). No kakva je struktura njene algebre? Ona je generirana tim jednim generatorom koji naravno komutira sa samim sobom tj. $\mathfrak{so}(2) = \{aX_3\,; a \in \mathbb{R}\}$, što je zapravo prostor svih antisimetričnih 2×2 matrica, koji je izomorfan s $\mathbb{R}$. Općenito, za Liejeve algebre Abelovih grupa komutator iščezava (vidi zadatak 5.5.) i time je njihova struktura kompletno definirana strukturom vektorskog prostora.

5.4 Veza Liejevih grupa i Liejevih algebri

Vidjeli smo da u slučaju grupe SO(3) *svaki* element grupe možemo prikazati kao eksponencijal nekog elementa njene Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Pitanje je vrijedi li to lijepo svojstvo za sve Liejeve grupe. Kako smo već dali naslutiti na nekoliko mjesta upotrijebom riječi „skoro”, ne vrijedi sasvim. U ovom ćemo odjeljku, uglavnom bez dokaza, iskazati i pomoću primjera ilustrirati tvrdnje koje pobliže oslikavaju vezu između Liejevih grupa i njihovih algebri. Za većinu primjena u fizici i u ostatku knjige, uglavnom ćemo se fokusirati na algebre i reprezentacije algebri, tako da (razmjerno zahtjevno) gradivo ovog odjeljka nije nužno za razumijevanje sljedećih poglavlja.

Prvo je potrebno uvesti neke pojmove koji opisuju topološka svojstva grupe.

Definicija 5.4.1 (Povezanost)
Liejeva grupa je *povezana* ako njen grupni prostor ne možemo rastaviti na disjunktne komponente tj. ako se svake dvije točke mogu povezati linijom čije sve točke pripadaju grupnom prostoru. (Ovo je intuitivna „fizičarska” definicija. Prava definicija uključuje napredne matematičke ideje iz topologije.)

Podskup kojeg čine svi elementi grupe koji se kontinuiranom linijom u grupnoj mnogostrukosti mogu povezati s jediničnim elementom nazivamo *komponenta povezanosti jedinice*. Ukoliko je grupa povezana komponenta povezanosti jedinice je naravno jednaka cijeloj grupi. Ukoliko grupa nije povezana, komponenta povezanosti jedinice je prava podgrupa cijele grupe. *Dokaz*: Pretpostavimo suprotno tj. da komponenta povezanosti jedinice nije podgrupa. Kako je jedinični element po definiciji u toj komponenti te kako je asocijativnost naslijeđena od cijele grupe to bi značilo ili da postoje njena dva elementa čiji umnožak nije u komponenti povezanosti jedinice ili neki element čiji inverz nije u toj komponenti. Promotrimo sada dva elementa a i b koji jesu, a čiji umnožak ab nije u komponenti povezanosti jedinice, te promotrimo trajektoriju $g(t)$, $t \in [0,1]$, definiranu tako da je $g(0) = a$, a $g(1) = e$. Trajektorija dakle kontinuirano povezuje a s jediničnim elementom e. Pomičući se kontinuirano po toj trajektoriji prema jedinici umnožak $g(t)b$ će cijelo vrijeme ostati izvan komponente povezanosti jedinice zbog odvojenosti njegovog dijela grupnog prostora i kontinuiranosti funkcije kompozicije (umnožak $g(t)b$ ne može „preskočiti" sa svoje odvojene komponente na komponentu jedinice). No kad dođemo do jediničnog elementa umnožak je $g(1)b = eb = b$ što po pretpostavci jest element komponente jedinice i imamo kontradikciju. Na sličan način se do kontradikcije dođe u slučaju inverza. □

Eksponencijacijom generatora grupe SO(3) dolazimo do konačnih rotacija $\exp(\phi \boldsymbol{X} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})$ trajektorijom koja ide od jediničnog elementa $\phi = 0$ kontinuiranom putanjom kroz grupni prostor, kompozicijom rotacija za infinitezimalne kuteve. Kako je eksponencijalna funkcija kontinuirana funkcija svojih argumenata (čak i kad su argumenti matrice), te kako je determinanta također kontinuirana funkcija, u slučaju grupe O(3), za čije elemente smo vidjeli da imaju determinantu ili +1 ili -1, jasno je da eksponencijacijom algebre možemo dobiti (a u slučaju O(3) i dobivamo) samo elemente s determinantom +1, dakle prave rotacije. Neprave rotacije ISO(3) koje imaju determinantu -1 pripadaju drugoj komponenti povezanosti.

Iz gornje diskusije, odnosno imajući u vidu kontinuiranost funkcije eksponencijacije, jasno da najbolje čemu se možemo nadati u slučaju općenite Liejeve grupe je da eksponencijacijom njene algebre dobijemo komponentu povezanosti jedinice. No je li barem to uvijek moguće? Kako smo pokazali, svakoj Liejevoj grupi jednoznačno pripada neka Liejeva algebra konstrukcijom kao u (5.14). Možemo li, obratno, svakom elementu g komponente povezanosti jedinice pridružiti jedinstveni element X algebre takav da je $g = e^X$?

Prije nego damo odgovor na to pitanje, skrenimo pažnju na to da je povezivanje elemenata algebre i elemenata grupe exponencijacijom (odnosno u drugom smjeru inverznom funkcijom logaritma) samo dio posla. Potrebno je pokazati i da je binarna grupna operacija potpuno određena operacijama s odgovarajućim elementima algebre. Kako dakle izračunati $e^X e^Y$? Imajuči u vidu definiciju eksponencijacije to je

$$e^X e^Y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!} \right) , \tag{5.39}$$

i nije odmah jasno da se desna strana može dobiti eksponencijacijom nekog elementa algebre, osim u jednostavnom slučaju Abelove grupe kad je $[X, Y] = 0$ (vidi zadatak 5.5.) pa se članovi gornjih suma mogu isto kao kod eksponencijacije običnih brojeva iskombinirati u $\sum (X + Y)^n / n! =$

$\exp(X+Y)$. Za općenite nekomutirajuće grupe to nije slučaj, nego vrijedi sljedeći važan rezultat teorije Liejevih grupa

Teorem 5.4.2 (Baker-Campbell-Hausdorff)

$$e^X e^Y = e^Z\,,$$

gdje je

$$Z = X + Y + \text{red višestrukih komutatora } X \text{ i } Y.$$

Prvi članovi BCH formule su

$$\begin{aligned} Z = X + Y &+ \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] \\ &- \frac{1}{24}[X,[Y,[X,Y]]] + \frac{1}{720}[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]] + \cdots\,, \end{aligned} \tag{5.40}$$

i ključna netrivijalnost je da su *svi* članovi reda dati preko ovakvih višestrukih komutatora pa je jasno da je Z element Liejeve algebre. (Podsjetimo se da je u Liejevoj algebri definirano zbrajanje elemenata $X+Y$ i njihov komutator $[X,Y]$, ali ne i množenje* XY.) BCH red konvergira u nekoj okolini jediničnog elementa (ne nužno infinitezimalnoj) i u toj okolini je grupa potpuno i jedinstveno određena algebrom. Eksponencijacija povezuje elemente grupe i algebre, a BCH formula operacije u algebri (zbrajanje i komutator) s grupnom operacijom (množenje). Dokaz teorema 5.4.2 i razmatranje radijusa konvergencije BCH formule (5.40) obično zahtijeva napredne matematičke pojmove. Relativno pristupačan algebarski dokaz može se pronaći u [Stillwell, 2008.].

Za veliku kategoriju Liejevih grupa vrijedi da se svi elementi iz komponente povezanosti jedinice mogu prikazati u obliku e^X gdje je X element Liejeve algebre. Dovoljan uvjet je da grupa ima svojstvo *kompaktnosti*.

Definicija 5.4.3 (Kompaktnost)
Liejeva grupa je *kompaktna* ako njeni parametri variraju po zatvorenim intervalima. (Ovo je intuitivna „fizičarska” definicija. Prava definicija uključuje napredne matematičke ideje iz topologije.)

Mnoge grupe koje će nas interesirati, poput $\mathrm{SO}(n)$ i $\mathrm{SU}(n)$ su kompaktne, jer njihovi parametri tipično variraju po intervalima poput $\phi \in [0, 2\pi)$. Iznimka je grupa translacija, čiji parametri variraju po intervalu $(-\infty, \infty)$ i grupa

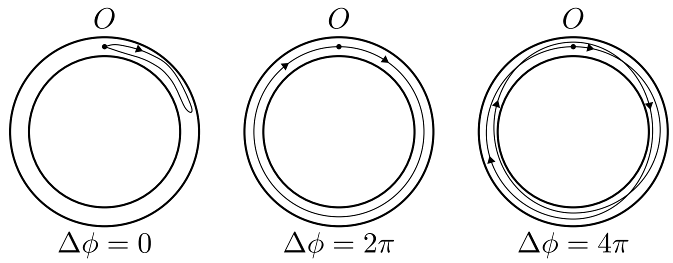
*Ako gledamo matrične Liejeve algebre množenje samih matrica jest definirano, ali algebra općenito nije zatvorena na to množenje. Npr. umnožak dvije antisimetrične matrice iz $\mathfrak{so}(3)$ općenito *nije* antisimetrična matrica.

Lorentzovih transformacija, čiji parametar potiska varira $v \in [0, c)$, gdje c nije uključen i stoga je interval otvoren i nekompaktan*.

Dakle, Liejeva algebra skoro potpuno određuje barem komponentu povezanosti jediničnog elementa Liejeve grupe koju generira eksponencijacijom. Međutim, primjer grupa SO(3) i SU(2) koje su obje povezane i koje imaju istu (izomorfnu) algebru, ali ipak nisu izomorfne, pokazuje da neka svojstva grupe nisu određena algebrom, tj. da „skoro” iz prošle rečenice ipak nije „potpuno.” Riječ je o globalnim topološkim svojstvima grupe i da bismo precizno opisali vezu između Liejevih grupa s istom algebrom, treba nam još jedan pojam iz topologije.

Definicija 5.4.4 (Jednostavna (jednostruka) povezanost)
Neka je G povezana grupa (ako nije, možemo promatrati samo komponentu povezanosti jedinice). Promotrimo skup svih zatvorenih krivulja u grupnoj mnogostrukosti. Podijelimo skup na klase ekvivalencije koje čine krivulje koje se mogu *kontinuirano* deformirati jedna u drugu. Broj takvih klasa zovemo *povezanost* grupe G. Ako postoji samo jedna klasa kažemo da je grupa *jednostavno* ili *jednostruko* povezana.

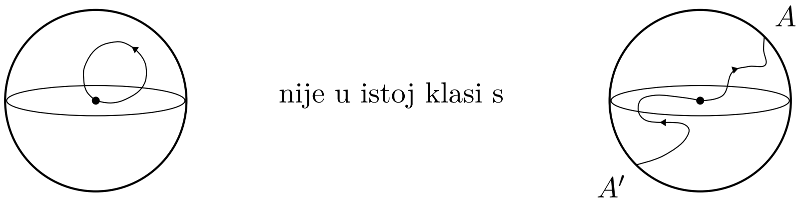
Primjer 5.4.5 (SO(2))
Vidjeli smo da je grupna mnogostrukost grupe SO(2) kružnica. Za zatvorene krivulje promjena kuta ϕ duž krivulje je $2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Krivulje s različitim n pripadaju različitim klasama povezanosti jer je nemoguće kontinuiranim deformacijama pretvoriti krivulju n puta „namotanu” oko kružnice u onu m puta namotanu, ako je $n \neq m$. Obzirom na beskonačni skup klasa povezanosti, kažemo da je SO(2) beskonačno povezana.

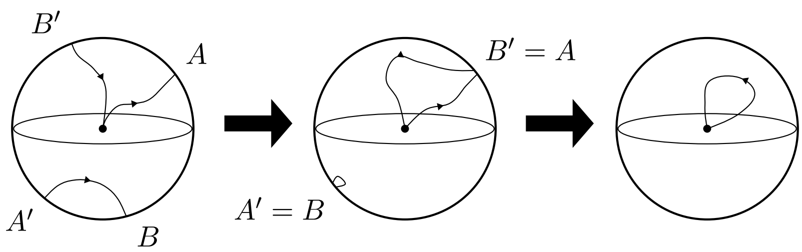


*Radi kompletnosti spomenimo da ako Liejeva grupa nije kompaktna, svejedno se elementi iz komponente povezanosti jedinice mogu prikazati kao konačan umnožak eksponencijala $e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n}$ [Stillwell, 2008.]. Treba razlikovati situaciju gdje se svaki element grupe (ili njenog podskupa) može dobiti eksponencijacijom (exp je surjektivna) i situaciju gdje se on može se dobiti na jedinstven način (exp je i injektivna). Injektivnost je zahtjevnije svojstvo. Treba uočiti da se algebra grupe SO(2) preslikava na grupu neinjektivno, pa nijedna grupa koja je sadrži kao podgrupu, kao SO(3), SU(2) etc., neće biti injektivno pokrivena exponencijacijom. Surjektivnost je lakše postići. Za to je dovoljna kompaktnost, a može i niže definirana jednostruka povezanost.

Na ovom skupu klasa krivulja može se prirodno definirati zbrajanje. Kao reprezentante klasa uzmimo krivulje koje počnu i završe u nekoj konkretnoj *baznoj* točki, recimo $\phi = 0$. Uzmemo li dvije zatvorene krivulje, njihov zbroj definiramo kao krivulju koja se dobije tako da prvo po jednoj krivulji idemo od bazne točke do bazne točke, pa onda „bez završavanja" nastavimo tako po drugoj i završimo u baznoj točki. Obzirom na takvo zbrajanje (klasa) krivulja, ovaj skup čini grupu poznatu pod imenom *fundamentalna grupa* ili *prva grupa homotopija* π_1. Ta grupa je temeljno topološko obilježje svake grupe. Prema gornjem primjeru vidimo da je $\pi_1\,(\mathrm{SO}(2)) = (\mathbb{Z}, +)$.

Primjer 5.4.6 (SO(3))
U prošlom odjeljku smo vidjeli da je grupna mnogostrukost od SO(3) lopta s identificiranim antipodnim točkama površine. Za promatranje klasa krivulja kao baznu točku možemo uzeti središte lopte. Sve krivulje koje ostaju u unutrašnjosti lopte se mogu kontinuirano deformirati jedna u drugu pa pripadaju istoj klasi. Da bi dobili novu klasu promotrimo krivulju koja dolazi do površine u točki A i onda se nastavlja u unutrašnjost od antipodne točke A'. Naglasimo da je krivulja neprekinuta zahvaljujući identičnosti $A' = A$. Kontinuirane deformacije ove krivulje će uvijek zadržati svojstvo prolaska površinskom točkom (kako se A miče, A' se miče tako da ostane antipodna) i krivulja se ne može deformirati u krivulje iz prve klase koje su cijele u unutrašnjosti lopte. Dakle, dobili smo drugu klasu. Ukoliko sad promotrimo krivulje koje prolaze dvama različitim površinskim točkama A i B, u nadi da ćemo možda dobiti novu klasu, vidimo da je takve krivulje moguće deformirati do situacije da se točke stope i krivulja potpuno ubaci u unutrašnjost lopte, kako je prikazano na slici.





Tako te krivulje ne čine novu nego pripadaju prvoj klasi. Krivulja kroz tri površinske točke će se istim postupkom moći deformirati u krivulju kroz jednu površinsku točku i tako dalje. Dakle, postoje točno dvije klase krivulja i kažemo da je SO(3) *dvostruko povezana.* Njena prva grupa homotopija je time $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2 = (\{+1, -1\}, \cdot)$.

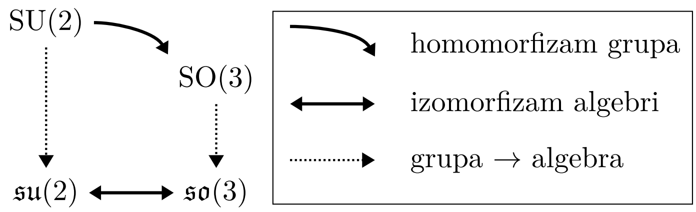
Primjer 5.4.7 (SU(2))
Vidjeli smo u prošlom odjeljku da je grupna mnogostrukost SU(2) 3-sfera tj. generalizacija uobičajene sfere (2-sfere) na četverodimenzionalni prostor. Može se pokazati da je svaka n-sfera s $n \geq 2$ jednostavno povezana. Pravi dokaz zahtijeva nešto znanja topologije, ali čitatelju će moguće ta činjenica biti vrlo intuitivna, a za 2-sferu i očita.

Ako postoji homomorfizam s povezane Liejeve grupe G na povezanu Liejevu grupu H s *diskretnom* jezgrom K onda kažemo da grupa G *pokriva* grupu H onoliko puta koliko elemenata ima K. (Prisjetite se teorema 1.3.6 o izomorfizmu.) Također, Liejeve algebre tih grupa su izomorfne.

Primjer 5.4.8 (SO(3) i SU(2))
SO(3) i SU(2) su homomorfne i kako je pokazano u Dodatku E jezgra je $\mathbb{Z}_2$. Dakle SU(2) pokriva SO(3) dva puta. Kako smo vidjeli u primjeru 5.3.4, algebre ovih dviju grupa su izomorfne.

Teorem 5.4.9 (Univerzalna grupa pokrivanja)
Među grupama koje pokrivaju povezanu Liejevu grupu G postoji jedinstvena grupa koja je jednostavno povezana — tzv. *univerzalna grupa pokrivanja.* Broj pokrivanja jednak je povezanosti od G.

Tako je SU(2) univerzalna grupa pokrivanja za SO(3).



Što se grupa SO(2) i U(1) tiče, one su obje izomorfne i beskonačno povezane. U primjeru 5.3.7 smo vidjeli da je njihova algebra $\mathbb{R}$. Njihovu univerzalnu grupu pokrivanja možemo identificirati tako da identificiramo jednostavno povezanu Liejevu grupu koju generira $\mathbb{R}$. Ako se oslonimo na eksponencijaciju vidimo da generiramo grupu pozitivnih realnih brojeva $\{e^x\,; x \in \mathbb{R}\}$ s množenjem kao grupnom operacijom. No primjetite da je ta grupa izomorfna grupi $(\mathbb{R}, +)$ gdje je preslikavanje izomorfizma upravo eksponencijalna funkcija. Tako možemo reći da je R sam sebi algebra i sam sebi univerzalna grupa pokrivanja, a on je i univerzalna grupa pokrivanja za SO(2) i U(1). Odgovarajući homomorfizam $\mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$ je $x \to e^{ix}$ i kernel je skup $2\pi\mathbb{Z} = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}$. Riječ je o beskonačnom skupu pa kažemo da $\mathbb{R}$ pokriva U(1) beskonačno puta, što je konzistentno s ranije utvrđenom činjenicom da je U(1) beskonačno povezan. Intuitivno je jasno da se pravac na kružnicu namata beskonačno puta.

Općenita situacija je

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{UCG} \arrow[dr, bend left, "K_1"] \arrow[drr, bend left, "K_2"] \arrow[drrr, bend left, "K_n"] \arrow[dd, dotted] & & & \\
& G_1 \arrow[d, dotted] & G_2 \arrow[d, dotted] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & G_n \arrow[d, dotted] \\
\mathfrak{ucg} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{g}_1 \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{g}_2 \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{g}_n
\end{tikzcd}
$$

gdje je $\mathrm{UCG}/K_i = G_i$. Tako pronalaženjem svih diskretnih normalnih podgrupa (kandidata za kernele homomorfizma) jednostavno povezane grupe možemo naći sve grupe koje s njom dijele istu Liejevu algebru*. U zaključku, Liejeve algebre u velikoj mjeri određuju Liejevu grupu i glavna informacija o grupi koju gubimo razmatrajući samo algebru je njena topologija. Algebra, koja je određena okolinom jediničnog elementa grupe „ne vidi" je li se grupa možda netrivijalno „preklapa" na samu sebe daleko od jedinice.

5.5 Klasične Liejeve grupe važne za fiziku

1) **Opća linearna grupa**

Opću linearnu grupu $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ čini skup svih $n \times n$ regularnih ($\det M \neq 0$) kompleksnih matrica Kako je svaka matrica zadana s n^2 nezavisnih kompleksnih brojeva, ova grupa ima $2n^2$ realnih parametara. Uvjet regularnosti nije ograničenje koje smanjuje broj parametara, jer je samo riječ o zahtjevu da determinanta, koja je izraz koji uključuje tih $2n^2$ parametara bude *različita* od nule.

$$\det M = f(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) \neq 0 \tag{5.41}$$

Podgrupa ove grupe je grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ koja očito ima samo n^2 parametara. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ima dvije komponente povezanosti, jednu čine matrice pozitivne, a

*To je znatno olakšano teoremom koji kaže da su diskretne normalne podgrupe nužno sadržane u centru grupe (vidi zadatak 1.7.) što znači da svi elementi kernela komutiraju sa cijelom grupom.

drugu matrice negativne komponente. Izuzeće determinante nula razdvaja te komponente, ali to nije slučaj za $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ koja je povezana (ali ne i jednostavno povezana).

2) **Specijalna linearna grupa**

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\} \tag{5.42}$$

Ovdje je na svaku matricu postavljen dodatni uvjet

$$\det M = f(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = 1 \,, \tag{5.43}$$

koji predstavlja jednu kompleksnu, tj. dvije realne jednadžbe koje se mogu iskoristiti za eliminaciju dvaju parametera. Tako ova grupa ima $2n^2 - 2$ parametara. Grupa je jednostavno povezana i za fiziku je posebno važna grupa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ koja je univerzalna grupa pokrivanja za Lorentzovu grupu na analogan način na koji je $\mathrm{SU}(2)$ univerzalna grupa pokrivanja za grupu rotacija $\mathrm{SO}(3)$.

Podgrupa ove grupe je grupa $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ koja ima $n^2 - 1$ parametar. (Jednadžba (5.43) je sad samo jedna realna jednadžba, a ne dvije.) Ona je povezana, ali ne i jednostavno povezana.

3) **Unitarna grupa**

$$\mathrm{U}(n) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid MM^\dagger = 1\} \tag{5.44}$$

Prebrojavanje nezavisnih parametara za ovu grupu može se izvesti na više načina. Uvjet $MM^\dagger = 1$ se može napisati izraženo preko komponenti matrica kao (u ovom odjeljku ćemo radi jasnoće suspregnuti Einsteinovu sumacijsku konvenciju i pisati sume eksplicitno)

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} M^*_{kj} = \delta_{ik} \,, \tag{5.45}$$

gdje je iskorišteno $M^\dagger_{jk} = M^*_{kj}$. Jednadžba (5.45) predstavlja n^2 kompleksnih jednadžbi ali sve one nisu nezavisne. Promotrimo prvo n jednadžbi određenih uvjetom $i = k$ (dakle gledamo dijagonalu te matrične jednadžbe):

$$\sum_{j} M_{ij} M^*_{ij} = \sum_{j} |M_{ij}|^2 = 1 \,. \tag{5.46}$$

To je n realnih jednadžbi koje se mogu upotrijebiti za eliminiranje n parametara. Dalje možemo gledati jednadžbe određene uvjetom $i < k$ (dakle gledamo trokut iznad dijagonale matrične jednadžbe). Te su jednadžbe kompleksne i ima ih $n(n-1)/2$ (broj elemenata u spomenutom trokutu). Sve ove jednadžbe su neovisne pa se mogu iskoristiti za eliminiranje $2 \cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$ parametara. Preostaju jednadžbe za $i > k$ (donji trokut matrice), ali kompleksnom konjugacijom odgovarajućih jednadžbi

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} M_{kj}^* = 0\,, \qquad i > k\,, \tag{5.47}$$

dobijemo

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^* M_{kj} = \sum_{j=1}^{n} = M_{kj} M_{ij}^* = 0\,, \qquad i > k\,, \tag{5.48}$$

pa uz preimenovanje indeksa $i \leftrightarrow k$

$$\sum_{j=1}^{n} = M_{ij} M_{kj}^* = 0\,, \qquad k > i\,, \tag{5.49}$$

vidimo da su ove jednadžbe ekvivalentne ovima iz gornjeg trokuta tj. nisu nezavisne. Znači sve skupa možemo eliminirati $n+n(n-1) = n^2$ parametara, pa ih ostane $2n^2 - n^2 = n^2$ što je broj parametara unitarne grupe. (Drugi način prebrojavanja je da se iskoristi da su retci matrice ortonormirani vektori. Uvjet normalizacije daje n realnih jednadžbi, a uvjet ortonogonalnosti $\binom{n}{2}$ kompleksnih, gdje se treba uvjeriti da odgovarajući zahtjevi na stupce nisu nezavisni od ovih na retke.) Unitarna grupa je kompaktna i povezana, ali ne i jednostavno. Za U(1) smo vidjeli, a i za ostale unitarne grupe vrijedi da im je prva grupa homotopije $\pi_1(\mathrm{U}(n)) = \mathbb{Z}$.

Važno svojstvo unitarnih matrica je da, ukoliko ih interpretiramo kao operatore nad kompleksnim vektorskim prostorima ($\boldsymbol{x} \to M\boldsymbol{x}$), one čuvaju skalarni produkt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i &\longrightarrow \sum_{ijk} M_{ij}^* x_j^* M_{ik} y_k \\ &= \text{uvrštavanjem (5.45)} = \sum_{kj} \delta_{kj} x_j^* y_k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{5.50}$$

Lako je pokazati da se ovo može uzeti kao alternativna definicija unitarne grupe tj. da se unitarne matrice mogu definirati kao one koje čuvaju ovaj skalarni produkt, a onda je svojstvo $M^\dagger M = 1$, koje smo ovdje uzeli kao definiciono, samo posljedica.

4) **Specijalna unitarna grupa**

$$\mathrm{SU}(n) = \{M \in U(n) \mid \det M = 1\} \tag{5.51}$$

Za prebrojavanje parametara treba prvo uočiti da je za sve unitarne matrice determinanta ograničena na apsolutnu vrijednost 1. To slijedi primjenom

Binet-Cauchyjevog teorema na definiciju $MM^\dagger = 1$ što daje $|\det M|^2 = 1$ odnostno $\det M = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Dodatni uvjet za specijalne unitarne matrice $\det M = 1$ je onda samo jedna realna jednadžba $\phi = 0$ pa specijalna unitarna grupa ima točno $n^2 - 1$ parametar. $\mathrm{SU}(n)$ su kompaktne i jednostavno povezane.

5) **Ortogonalna grupa**

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid MM^\mathrm{T} = 1\} \tag{5.52}$$

Kod prebrojavanja parametara, jedina razlika obzirom na unitarne matrice je da umjesto $(i = k)$ jednadžbi (5.46) koje odgovaraju dijagonali matrične jednadžbe sada imamo

$$\sum_j M_{ij} M_{ij} = \sum_j M_{ij}^2 = 1 \tag{5.53}$$

što su kompleksne jednadžbe pa možemo eliminirati sve skupa $2n + n(n-1)$ parametara i ostaje ih samo $n(n-1)$.

U fizici se najčešće susrećemo s grupom ortogonalnih *realnih* matrica

$$\mathrm{O}(n) \equiv \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid MM^\mathrm{T} = 1\} \tag{5.54}$$

koja ima $n(n-1)/2$ parametara. Ova grupa čuva kvadratnu formu $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_i x_i y_i$ tj. skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru, što se može upotrijebiti kao alternativna definicija grupe.

6) **Specijalna ortogonalna grupa**

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) = \{M \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\} , \tag{5.55}$$

i odgovarajuća realna grupa $\mathrm{SO}(n)$ imaju isti broj parametara kao $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, odnosno $\mathrm{O}(n)$. Naime, uvjet ortogonalnosti $MM^\mathrm{T} = 1$ vodi na $(\det M)^2 = 1$, odnosno na zaključak da ortogonalne matrice imaju determinantu $\det M = \pm 1$, pa ograničenje na $\det M = 1$ ne smanjuje dimenziju parametarskog prostora.

7) **Pseudo-unitarna grupa**

Čine je $n \times n$ matrice

$$\mathrm{U}(p, q) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid M^\dagger g M = g\} , \tag{5.56}$$

gdje je $p + q = n$ i gdje je g dijagonalna matrica oblika

$$g = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q\times}) . \tag{5.57}$$

Ova grupa ima isti broj parametara kao i $\mathrm{U}(n)$, te čuva kvadratnu formu oblika

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^* y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q=n} x_i^* y_i \tag{5.58}$$

koja nije pozitivno definitna pa nije skalarni produkt u smislu definicije 2.1.7.

8) **Pseudo-ortogonalna grupa**

$$\mathrm{O}(p,q) = \{M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid M^{\mathrm{T}} g M = g\} \ , \tag{5.59}$$

gdje je $p+q=n$ i gdje je g dijagonalna matrica iz (5.57). Ove matrice čuvaju kvadratnu formu oblika

$$\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q=n} x_i y_i \ . \tag{5.60}$$

Najpoznatija grupa ove vrste je grupa Lorentzovih transformacija $\mathrm{O}(1,3)$ (vidi odjeljak 8.1). Ove grupe su nekompaktne i imaju četiri komponente povezanosti što za konkretan primjer grupe $O(1,3)$ pokazujemo u odjeljku 8.1.

Specijalnu pseudo-unitarnu grupu $\mathrm{SU}(p,q)$ odnosno specijalnu pseudo-ortogonalnu grupu $\mathrm{SO}(p,q)$ dobivamo ako se u $\mathrm{U}(p,q)$ odnosno $\mathrm{O}(p,q)$ ograničimo na matrice s $\det M = 1$.

U preostalim poglavljima knjige bavit ćemo se sa samo nekoliko grupa koje su se pokazale od najveće važnosti za primjene u fizici, no recimo ipak nešto o kompletnom katalogu Liejevih grupa.

Kao prvo, mi smo ovdje, kao i mnogi autori, posebice fizičari, razlikovali Liejeve (kontinuirane) grupe i diskretne grupe. To je na ovom nivou pedagoški poželjno kako bi se istaknula specifična moć netrivijalnih Liejevih algebri tj. infinitezimalne okoline jedinice. No, strogo uzevši, i skup diskretnih točaka je (0-dimenzionalna) mnogostrukost, a i topološki prostor (s tzv. diskretnom topologijom, vidi [Smolić, 2024.]) tako da su i diskretne i konačne grupe zapravo strogo uzevši Liejeve, što nas onda spašava od nezgodnih situacija da formiranjem kvocijentnih skupova ne izlazimo iz domene Liejevih grupa.

Kad je to rečeno, recimo da su kontinuirane kompaktne Liejeve grupe lakše za potpunu klasifikaciju. Kao prvo, bitno je klasificirati jednostavne grupe, jer ukoliko grupa ima normalne podgrupe onda se može reducirati uzimanjem kvocijenta po toj podgrupi (jednostavne grupe su poput prostih brojeva teorije grupa). W. Killing i É. Cartan su pokazali da algebre tih grupa spadaju u jednu od četiri beskonačne porodice u matematici poznate kao

$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n$ i D_n, gdje već poznajemo A_n kao algebre od $\mathrm{SU}(n+1)$, B_n kao algebre od $\mathrm{SO}(2n+1)$, D_n kao algebre od $\mathrm{SO}(2n)$, a C_n su algebre tzv. simplektičkih grupa $\mathrm{Sp}(n)$ koje isto imaju neke primjene u fizici, ali mi ih ovdje nećemo više spominjati. Osim ove četiri porodice postoji još samo pet *iznimnih* grupa G_2, F_4, E_6, E_7, i E_8 koje nalaze svoju primjenu u nekim teorijama unifikacije sila u prirodi i teoriji superstruna.

Kod diskretnih jednostavnih grupa imamo kao prvo cikličke grupe C_p gdje je p prost broj i koje smo upoznali, zatim alternirajuće grupe $\mathrm{A}_{n\geq 5}$ parnih permutacija skupova od n elemenata (pomoću kojih je Galois pokazao nerješivost jednadžbi reda većeg od pet) i veliku porodicu diskretnih grupa tzv. Liejevog tipa koje su konstruirane kao standardne Liejeve grupe, ali ne nad poljem realnih brojeva nego nad konačnim poljima. Povrh toga postoji još samo 26 tzv. *sporadičnih* grupa* gdje je najveća od njih čuvena grupa *čudovište* (engl. *monster*) s

$$808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$$

odnosno približno 8×10^{53} elemenata. Njena primjena u fizici je samo u domeni spekulacija, no neke ideje iz fizike su iskorištene za određivanje svojstava te komplicirane grupe.

Zadaci za vježbe

5.1. Uvjerite se da je kvocijentna grupa $\mathrm{O}(3)/\mathrm{SO}(3) = \mathrm{C}_2$.

5.2. Pokažite da Levi-Civita tenzor ima slijedeća svojstva:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{a}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \tag{b}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{c}$$

$$\epsilon_{ijk}a_j b_k = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i \tag{d}$$

$$\frac{1}{3!}\epsilon_{lmn}\epsilon_{ijs}A_{li}A_{mj}A_{ns} = \det A \tag{e}$$

5.3. Uporabom svojstava Levi-Civita tenzora pokažite da je za vektore $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

*Četiri sporadične grupe je pronašao hrvatski matematičar Zvonimir Janko i po njemu se zovu $\mathrm{J}_{1,2,3,4}$.

5.4. Pokažite da Paulijeve matrice imaju slijedeća svojstva:

$$\sigma_i^2 = 1 \tag{a}$$
$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i \tag{b}$$
$$\det \sigma_i = -1 \tag{c}$$
$$\mathrm{Tr}\, \sigma_i = 0 \tag{d}$$
$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{e}$$
$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}1 \tag{f}$$
$$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij} \tag{g}$$
$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{h}$$
$$e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta} = \cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad \in \mathrm{SU}(2) \tag{i}$$

5.5. Za Abelovu grupu vrijedi $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = e$, gdje se $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ naziva *komutator* elemenata grupe. Ako je g_1 generiran elementom algebre $g_1 = e^{sX}$, a $g_2 = e^{tY}$, gdje su s i t realni parametri, pokažite da je

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\right|_{s=t=0} \big(\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)\exp(-tY)\big) = [X, Y]\,, \tag{5.61}$$

i time da je algebra $\mathcal{A}$ Abelove grupe trivijalna $[X, Y] = 0$, za svake $X, Y \in \mathcal{A}$.

5.6. Provjerite eksplicitno BCH formulu do kubičnog člana.

5.7. Pokažite da matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

djelujući na vektore (x, y) čuvaju formu x^2-y^2, te da je $\det M(\theta) = 1$, tako da $M(\theta)$ tvore grupu $\mathrm{SO}(1,1)$.

5.8. Grupni prostor kvocijentne grupe G/H Liejeve grupe G po diskretnoj normalnoj podgrupi H općenito odgovara grupnom prostoru od G u kojem su su sve točke svake susjedne klase po H identificirane. Tako je grupni prostor $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ 3-sfera s identificiranim antipodnim točakama $S^3/\mathbb{Z}_2$. No kako je $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 = \mathrm{SO}(3)$, a grupni prostor od $\mathrm{SO}(3)$ je puna 3D *lopta* s identificiranim nasuprotnim točkama, $B^3/\mathbb{Z}_2$, slijedi da su ta dva prostora topološki jednaka tj. jedan te isti prostor, $B^3/\mathbb{Z}_2 = S^3/\mathbb{Z}_2$. Uvjerite se da je to zaista tako, promatrajući preslikavanje s B^3 na $\mathbb{R}^4$ dano s

$$f(r, \theta, \phi) = \left(\cos\left(\frac{r}{2}\right), \sin\left(\frac{r}{2}\right)\cos\theta, \sin\left(\frac{r}{2}\right)\sin\theta\cos\phi, \sin\left(\frac{r}{2}\right)\sin\theta\sin\phi\right) . \tag{5.63}$$

Inače, navedeni prostor matematičari zovu *realni projektivni prostor* $\mathbb{RP}^3$.

Poglavlje 6

Rotacije i moment impulsa u kvantnoj mehanici

Teorija reprezentacija općenitih Liejevih grupa je zahtjevno gradivo u koje se nećemo ovdje upuštati. U preostalim poglavljima ove knjige posvetit ćemo se samo reprezentacijama nekoliko Liejevih grupa posebno važnih za fiziku. Prva od njih će biti grupa rotacija u trodimenzionalnom euklidskom prostoru SO(3), koju ćemo zvati jednostavno „grupa rotacija". Grupa rotacija je od ogromne važnosti za cijelu fiziku i radu s njenim reprezentacijama se tipično posvećuju središnja poglavlja udžbenika kvantne mehanike, obično pod naslovom „teorija momenta impulsa". Tako ovo prvo poglavlje ima određeni preklop s tim udžbenicima, ali izlaganje će naglasiti upravo grupnoteorijske aspekte.

Kasnije ćemo se na dobivene rezultate moći dosta osloniti i prilikom razmatranja složenijih grupa poput $\mathrm{SU}(N)$ i, posebice, Lorentzove grupe $\mathrm{SO}(1,3)$ kojoj je grupa rotacija podgrupa.

6.1 Ireducibilne reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(2)$

Promotrimo za zagrijavanje jednostavniji slučaj grupe $\mathrm{SO}(2)$ rotacija u ravnini. Kao i puna grupa rotacija, $\mathrm{SO}(2)$ je *kompaktna* (njen grupni prostor je kružnica). Teorija reprezentacija za kompaktne grupe je osjetno lakša od one za nekompaktne grupe. Ključna prednost kompaktnosti je činjenica da su kontinuirane funkcije na kompaktnom skupu integrabilne pa velik broj teorema o konačnim grupama vrijedi i za kompaktne Liejeve grupe, uz zamjenu u dokazima i iskazima:

$$\frac{1}{n}\sum_g \longrightarrow \int \mathrm{d}g \,, \tag{6.1}$$

gdje mjeru integrala valja izabrati tako da vrijedi

$$\int \mathrm{d}g f(g) = \int \mathrm{d}g f(hg) = \int \mathrm{d}g f(gh)\,, \tag{6.2}$$

$\forall h \in G$. Integraciju koja ima to svojstvo zovemo *invarijantna*. Invarijantna integracija nam omogućuje zamjenu varijabli kakva nam treba za dokaze teorema o reprezentacijama (vidi npr. (3.1)). Za grupe koje ćemo ovdje sretati uvijek je moguće je izabrati mjeru integracije tako da ona bude invarijantna.

Tako možemo „preuzeti" iz teorije reprezentacija konačnih grupa teorem da su sve reprezentacije ekvivalentne unitarnima. (To nam je važno jer je unitarnost željeno svojstvo transformacija kvantnomehaničkih stanja.) Specijalno, sve *ireducibilne* reprezentacije grupe SO(2) su ekvivalentne unitarnima pa se, kao što smo to radili i kod konačnih grupa, smijemo ograničiti na unitarne reprezentacije bez gubitka općenitosti.

Nadalje, kako je SO(2) Abelova, sve ireducibilne reprezentacije su jednodimenzionalne (kako smo ustanovili u zadatku 3.2.), što uz unitarnost ($uu^\dagger = uu^* = |u|^2 = 1$) znači da su operatori koji su elementi reprezentacija svakako oblika

$$D(\phi) = e^{-if(\phi)}\,, \qquad f(\phi) \in \mathbb{R}\,. \tag{6.3}$$

Kompozicija dvaju rotacija u ravnini za kuteve ϕ_1 i ϕ_2 je rotacija za kut $\phi_1 + \phi_2$ pa zahtjev da reprezentacija bude homomorfna grupi povlači

$$D(\phi_2)D(\phi_1) = D(\phi_1 + \phi_2) = e^{-if(\phi_1+\phi_2)}\,. \tag{6.4}$$

S druge strane svojstvo eksponencijalne funkcije daje

$$D(\phi_2)D(\phi_1) = e^{-if(\phi_2)}e^{-if(\phi_1)} = e^{-if(\phi_1)-if(\phi_2)}\,, \tag{6.5}$$

pa slijedi

$$f(\phi_1) + f(\phi_2) = f(\phi_1 + \phi_2)\,, \tag{6.6}$$

što znači da je $f(\phi) = m\phi$, $m \in \mathbb{R}$, odnosno reprezentacija je skup operatora

$$\Gamma^{(m)} = \{D^{(m)}(\phi) = e^{-im\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\}\,, \tag{6.7}$$

s fiksnim m. Na kraju, zahtjev periodičnosti rotacija daje

$$D^{(m)}(\phi) = D^{(m)}(\phi + 2\pi)\,, \tag{6.8}$$

iz čega odmah slijedi da m mora biti cijeli broj. Reprezentacije koje imaju različitu vrijednost m su očito neekvivalentne (transformacija sličnosti (2.11) u jednodimenzionalnom slučaju ne mijenja operator). Dakle, grupa SO(2) ima prebrojivo beskonačno ireducibilnih reprezentacija i pogodno je $m \in \mathbb{Z}$ koristiti kao oznaku (labelu) reprezentacije.

Trag jednodimenzionalnog operatora je jednak njemu samome pa su karakteri

$$\chi^{(m)}(\phi) = D^{(m)}(\phi) = e^{-\mathrm{i}m\phi}\,, \tag{6.9}$$

i oni zadovoljavaju relaciju ortogonalnosti

$$(\chi^{(m)}, \chi^{(m')}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}m\phi} e^{-\mathrm{i}m'\phi} = \delta_{mm'}\,,$$

a čitaoc će se lako uvjeriti da je ovakva integracija invarijantna u gornjem smislu.

Kao i kod konačnih grupa možemo rastaviti direktni produkt dviju ireducibilnih reprezentacija na Clebsch-Gordanov direktni zbroj

$$\Gamma^{(m)} \otimes \Gamma^{(n)} = \sum \oplus\, a_k \Gamma^{(k)}\,,$$

gdje su koeficijenti dani skalarnim produktom odgovarajućih karaktera, koji je ovdje integral

$$\begin{aligned} a_k &= (\chi^{(k)}, \chi^{(m)}\chi^{(n)}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}k\phi} e^{-\mathrm{i}m\phi} e^{-\mathrm{i}n\phi} = \delta_{k,m+n}\,, \end{aligned}$$

odnosno

$$\Gamma^{(m)} \otimes \Gamma^{(n)} = \sum_k \oplus\, \delta_{k,m+n} \Gamma^{(k)} = \Gamma^{(m+n)}\,.$$

To da je direktan produkt jednodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija svakako ireducibilan smo ustanovili već ranije u zadatku 3.5., a sad vidimo i koja je to točno rezultirajuća reprezentacija. Fizikalno, poznato je da je generator rotacija operator momenta impulsa, tako da je m iznos momenta impulsa, u jedinicama $\hbar$, fizikalnog sustava koji se pri rotacijama transformira u skladu s reprezentacijom $\Gamma^{(m)}$. Direktan produkt $\Gamma^{(m)} \otimes \Gamma^{(n)}$ je reprezentacija grupe rotacija na sustavu dobivenom *združivanjem* dvaju sustava s momentima impulsa m i n. Jasno je da će združeni sustav imati moment impulsa $m + n$. No, kako znamo iz kvantne mehanike i kako ćemo vidjeti u sljedećem odjeljku, ova jednostavna matematika ne vrijedi za punu grupu rotacija u trodimenzionalnom prostoru.

Kako su sve ireducibilne reprezentacije jednodimenzionalne, dobro poznata dvodimenzionalna reprezentacija rotacija u ravnini

$$D_{2\mathrm{D}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

je svakako reducibilna. Kao i gore, redukciju provodimo poznavajući karaktere reprezentacije

$$\chi_{2\mathrm{D}} = 2\cos\phi\,. \tag{6.11}$$

Koeficijenti Clebsch-Gordanovog razvoja su

$$\begin{aligned} a_k &= (\chi^{(k)}, \chi_{2\mathrm{D}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}k\phi} 2\cos\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}k\phi}(e^{\mathrm{i}\phi} + e^{-\mathrm{i}\phi}) \\ &= \delta_{k,-1} + \delta_{k,1}\,. \end{aligned}$$

To znači da postoji S (pronađite ga!) takav da je

$$S D_{2\mathrm{D}}(\phi) S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Obični ravninski vektori (x, y) nisu svojstveni vektori rotacija, što je očito jer ih rotacije mijenjaju. No, „cirkularno polarizirane” funkcije u ravnini poput $x + \mathrm{i}y$ to mogu biti.

6.2 Ireducibilne reprezentacije algebre $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$

Puna grupa rotacija SO(3) nije Abelova i ireducibilne reprezentacije više nisu nužno jednodimenzionalne pa njihova konstrukcija nije više tako laka kao za SO(2). Oslonit ćemo se na spoznaje iz prošlog poglavlja i postupak će nam biti da prvo konstruiramo reprezentacije $\mathfrak{so}(3)$ *algebre* grupe rotacija, a onda ćemo eksponencijacijom dobiti odgovarajuće reprezentacije grupe. Kako smo vidjeli u primjeru 5.3.4, grupa SU(2) ima istu algebru $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, tako da ćemo zapravo konstruirati reprezentacije algebre $\mathfrak{su}(2)$. Kako odgovarajuće grupe SO(3) i SU(2) *nisu* izomorfne, morat ćemo pokloniti nešto pažnje pitanju koje točno reprezentacije dobivamo eksponencijacijom reprezentacija algebre, ali o tom potom.

Algebru čine tri generatora, X_1, X_2, X_3, s komutacijskim relacijama

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k\,, \tag{6.13}$$

ali mi ćemo odsad nadalje uglavnom raditi s malo drugačijom, „fizičarskom” bazom, definiranom kao

$$J_i \equiv \mathrm{i}\hbar X_i\,. \tag{6.14}$$

Naime, kako smo vidjeli u (5.19) X_i su antisimetrične matrice pa će ovako definirani J_i biti hermitski, $J_i^\dagger = -\mathrm{i}\hbar X^\mathsf{T} = J_i$, što znači da će u kvantnomehaničkom kontekstu odgovarati opservabli, momentu impulsa, i svojstvene vrijednosti će mu biti realne. Ovi generatori zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k\,, \tag{6.15}$$

a da bismo dobili operatore grupe, eksponencijacija će biti oblika

$$e^{\phi\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{X}} = e^{(-i/\hbar)\phi\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{J}}\,. \tag{6.16}$$

Kako je već diskutirano na kraju odjeljka 5.3, operator $\boldsymbol{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ je Casimirov tj. komutira sa svim elementima algebre

$$[\boldsymbol{J}^2, J_i^2] = 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{6.17}$$

pa iz druge Schurove leme slijedi da $\boldsymbol{J}^2$ mora biti proporcionalan jediničnom operatoru: $\boldsymbol{J}^2 \propto \mathbb{1}$. Tako je svojstvena vrijednost od $\boldsymbol{J}^2$ ista za sve vektore neke konkretne ireducibilne reprezentacije i koristit ćemo je za njeno označavanje. Za prvotno definiranje grupe rotacija koristili smo njenu standardnu reprezentaciju na trodimenzionalnom euklidskom prostoru, no sad nam je cilj pobrojati *sve* njene ireducibilne reprezentacije na konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima. Te će reprezentacije biti kandidati za moguće Hilbertove prostore kvantnomehaničkih stanja pa ćemo s tim u vidu vektore označavati Diracovom „ket” oznakom $|\alpha\rangle$, vidi Dodatak C. Da bismo izbjegli svaku mogućnost zabune i istovremeno definirali naše konvencije, usporedimo sad detaljno reprezentaciju grupe rotacija na običnom euklidskom prostoru i reprezentacije, koje tek treba pronači i proučiti, na konačno-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru kvantnomehaničkih stanja.

Liejeva *grupa* rotacija je parametrizirana s tri realna broja $(\boldsymbol{n}, \phi)$. Elementi grupe su na trodimenzionalnom euklidskom prostoru reprezentirani 3×3 matricama $D^{(\mathrm{3D})}$ čiji tipični elementi su $\cos(\phi)$ ili $\sin(\phi)$ i koje djeluju na općeniti vektor $\boldsymbol{r}$, izražen preko svojih kartezijevih komponenata r_i, matričnom operacijom

$$D_{ij}^{(3D)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)r_j\,,$$

a rezultat je novi vektor u tom prostoru koji je linearna kombinacija baznih vektora $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$. Ovdje je $3D$ iskorišteno kao oznaka ove specifične reprezentacije.

Mi smo u potrazi za svim ireducibilnim reprezentacijama iste te grupe rotacija. Djelovanje operatora reprezentacija na Hilbertovom prostoru je definirano djelovanjem na vektore baze

$$D^{(\beta)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)|\beta, m\rangle = e^{(-i/\hbar)\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi}|\beta, m\rangle\,, \tag{6.18}$$

gdje je sada β oznaka reprezentacije, koja bi u načelu trebala stajati i na generatoru $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(\beta)}$, ali je tamo obično samo implicitna. m je indeks koji poprima onoliko vrijednosti m_1, m_2, ..., kolika je dimenzionalnost Hilbertovog prostora. Tako je njegova baza $|\beta, m_1\rangle$, $|\beta, m_2\rangle$, ...i rezultat gornje rotacije će biti neka linearna kombinacija ovih vektora baze. Kako rekosmo, za oznaku reprezentacija β koristit ćemo svojstvenu vrijednost operatora $\boldsymbol{J}^2$, konkretno

$$\boldsymbol{J}^2|\beta, m\rangle = \beta\hbar^2|\beta, m\rangle \; . \tag{6.19}$$

Kao Casimirov operator $\boldsymbol{J}^2$ komutira sa sva tri J_i, ali oni *ne* komutiraju međusobno, pa je izborom baze moguće najviše jedan od njih dijagonalizirati i standardno se bira $J_z = J_3$. Tako izabrana baza će se sastojati od svojstvenih vektora $\boldsymbol{J}^2$ i J_z pa označimo njene vektore tako da vrijedi i

$$J_z|\beta, m\rangle = m\hbar|\beta, m\rangle \; . \tag{6.20}$$

Kako je iz (6.16) vidljivo da je dimenzija J_i jednaka dimenziji $\hbar$ (a time i dimenziji momenta impulsa), izbori (6.19) i (6.20) znače da su β i m bezdimenzionalni.

Sada ćemo eksplicitno konstruirati ireducibilne reprezentacije $\mathfrak{su}(2)$, koristeći isključivo komutacijske relacije (6.15). Prvo definiramo tzv. operatore *podizanja i spuštanja*

$$J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y \, , \tag{6.21}$$

koji naravno isto komutiraju s $\boldsymbol{J}^2$

$$[\boldsymbol{J}^2, J_\pm] = 0 \, , \tag{6.22}$$

dok su komutacijske relacije s J_z,

$$\begin{aligned} [J_z, J_\pm] &= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] = i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) \\ &= \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm \, . \end{aligned}$$

Slično (pokažite),

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \, .$$

Djelovanjem ovih operatora dizanja i spuštanja na vektore neke ireducibilne reprezentacije, ostajemo naravno u toj reprezentaciji

$$\boldsymbol{J}^2(J_\pm|\beta, m\rangle) = J_\pm\boldsymbol{J}^2|\beta, m\rangle = \beta\hbar^2(J_\pm|\beta, m\rangle) \; ,$$

ali svojstvena vrijednost od J_z se mijenja i to točno za ± 1

$$J_z(J_\pm|\beta, m\rangle) = ([J_z, J_\pm] + J_\pm J_z)|\beta, m\rangle = \hbar(m \pm 1)J_\pm|\beta, m\rangle \; , \tag{6.23}$$

tj.

$$J_\pm|\beta, m\rangle \propto |\beta, m \pm 1\rangle \; . \tag{6.24}$$

Do kuda može ići to dizanje i spuštanje tj. koliko različitih vrijednosti može poprimiti m? Pokazat ćemo da vrijedi $m^2 \leq \beta$. Uočimo prvo da je $J_\pm^\dagger = J_\mp$, jer $J_{x,y,z}^\dagger = J_{x,y,z}$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+) &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \\
&= \frac{1}{2}\left[(J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) + \text{h. c.}\right] \\
&= \frac{1}{2}\big[J_x^2 + iJ_yJ_x - iJ_xJ_y + J_y^2 + J_x^2 \\
&\qquad\qquad -iJ_yJ_x + iJ_xJ_y + J_x^2\big] \\
&= J_x^2 + J_y^2 = \boldsymbol{J}^2 - J_z^2
\end{aligned}$$

Matrični elementi operatora na lijevoj strani ove jednakosti su očito pozitivni jer je

$$\langle\beta, m|J_+^\dagger J_+|\beta, m\rangle = \langle J_+\beta, m|J_+\beta, m\rangle \geq 0\,,$$

i isto za $J_+J_+^\dagger$. Slijedi da je

$$\langle\beta, m|(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2)|\beta, m\rangle = \langle\beta, m|(\beta\hbar^2 - m^2\hbar^2)|\beta, m\rangle = (\beta - m^2)\hbar^2 \geq 0\,,$$

što je i trebalo pokazati.

Dakle, za svaki β postoji m_{max} tako da

$$J_+|\beta, m_{\text{max}}\rangle = 0\,,$$

jer to je jedini način da (6.23) ostane vrijediti. Odredimo sada vrijednost m_{max} za datu ireducibilnu reprezentaciju β. Vrijedi

$$\begin{aligned}
J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x - iJ_y) &= J_x^2 + J_y^2 + i(J_xJ_y - J_yJ_x) \\
&= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \\
&= \boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z\,.
\end{aligned}$$

No kako je

$$J_-J_+|\beta, m_{\text{max}}\rangle = 0\,,$$

onda je i

$$(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|\beta, m_{\text{max}}\rangle = (\beta\hbar^2 - m_{\text{max}}^2\hbar^2 - m_{\text{max}}\hbar^2)|\beta, m_{\text{max}}\rangle = 0\ ,$$

pa kako $|\beta, m_{\text{max}}\rangle$ nije nul-vektor slijedi da je

$$\beta = m_{\text{max}}(m_{\text{max}} + 1)\ .$$

Nadalje, iz maločas dokazane činjenice da je $m^2 \leq \beta$ slijedi također da ni spuštanje vrijednosti m operatorom spuštanja ne može ići unedogled već da mora postojati m_{min} sa svojstvom

$$J_-|\beta, m_{\text{min}}\rangle = 0\ ,$$

iz čega postupkom analognim ovom gore dolazimo do

$$\beta = m_{\text{min}}(m_{\text{min}} - 1) \ .$$

Izjednačivši ove dvije vrijednosti za β

$$m_{\text{max}}(m_{\text{max}} + 1) = m_{\text{min}}(m_{\text{min}} - 1)$$

dobijemo kvadratnu jednadžbu za m_{min} od čija dva rješenja $m_{\text{min}} = m_{\text{max}}+1$ i $m_{\text{min}} = -m_{\text{max}}$ ovo prvo ne dolazi u obzir jer je m_{max} po pretpostavci najveća moguća vrijednost za m. Tako imamo, uvodeći oznaku $j \equiv m_{\text{max}}$,

$$-j = m_{\text{min}} \leq m \leq m_{\text{max}} = j \ .$$

Nadalje, kako operatori $J_\pm$ dižu ili spuštaju m točno za 1, mora biti $m_{\text{max}} = m_{\text{min}} + n$, gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, tj. $j = -j + n$, odnosno $j = n/2$ pa zaključujemo da su jedine moguće vrijednosti za j

$$j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\} \ .$$

Kako imamo identitet $\beta = j(j+1)$ možemo umjesto β koristiti i vrijednost j za označavanje ireducibilnih reprezentacija i to ćemo odsad i činiti. U kontekstu teorije reprezentacija grupa, j se naziva *spin* i govorimo o *reprezentaciji spina* j čak i ukoliko razmatramo sustav za koji bi orbitalni moment impulsa bio fizikalno primjereniji pojam od spina. Dakle mijenjamo oznaku

$$|\beta, m\rangle \longrightarrow |j, m\rangle \ ,$$

gdje m poprima vrijednosti iz skupa

$$m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} \, ,$$

što je niz od $2j+1$ vrijednosti, pa zaključujemo da je reprezentacija spina j $2j+1$-dimenzionalna. Kako $J_\pm$ povezuju svih $2j+1$ vektora $|j, m\rangle$ reprezentacija je stvarno ireducibilna. Tako vidimo da grupa rotacija ima beskonačno ireducibilnih reprezentacija, po jednu za svaku vrijednost spina j.

Vektori baze IRREPa $|j, m\rangle$ zadovoljavaju

$$\boldsymbol{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle \quad \text{i} \tag{6.25}$$

$$J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle \ , \tag{6.26}$$

a sada možemo i kompletirati matrične elemente cijele algebre tako da točno ustanovimo djelovanje operatora $J_\pm$ na vektore baze tj. da odredimo konstante proporcionalnosti u(6.24):

$$J_+|j, m\rangle = c_{jm}|j, m+1\rangle \ . \tag{6.27}$$

Zahvaljujući ortonormiranosti baze imamo

$$
\begin{aligned}
|c_{jm}|^2 &= \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \\
&= \langle j,m|(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle \\
&= \langle j,m|(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m|j,m\rangle \\
&= \hbar^2[j(j+1) - m(m+1)] \\
&= \hbar^2(j-m)(j+m+1)\,.
\end{aligned}
$$

Sama faza od c_{jm} je općenito neodređena i prema tzv. Condon-Shortley konvenciji odabire se da je c_{jm} realan i pozitivan pa je

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j,m+1\rangle\ . \tag{6.28}$$

Slično se dobije

$$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j,m-1\rangle\ . \tag{6.29}$$

Relacije (6.26), (6.28) i (6.29) nam omogućuju da odredimo matrične elemente operatora momenta impulsa između proizvoljnih stanja i tako kompletno definiraju te operatore, a time i cijelu $2j+1$-dimenionalnu ireducibilnu reprezentaciju $\mathfrak{su}(2)$ algebre. Tako smo (korištenjem samo komutacijskih relacija!) eksplicitno konstruirali sve ireducibilne reprezentacije ove algebre. Eksplicitni matrični oblici za niže dimenzije mogu se naći u knjigama iz kvantne mehanike.

Baza vektorskog prostora

$$|j,m\rangle, m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}\,,$$

se obično naziva *multiplet*, a neki autori tako zovu i cijeli vektorski prostor kojeg ta baza razapinje. Tako imamo

- $j = 0$: *singlet*
- $j = \frac{1}{2}$: *dublet*
- $j = 1$: *triplet*
- i. t. d.

gdje ime odražava dimenzionalnost reprezentacije.

Važna je značajka svakog sustava u prirodi njegovo ponašanje pri rotacijama. Kvantni sustavi se redovito transformiraju prema nekoj konkretnoj ireducibilnoj reprezentaciji grupe rotacija*, i tada govorimo da je riječ o sustavu *spina* j.

*Izolirani ili elementarni sustavi praktički uvijek, no općenito su moguće i kvantne superpozicije stanja s različitim j.

6.3 Projektivne reprezentacije grupe SO(3)

Nakon što smo konstruirali sve ireducibilne reprezentacije *algebre* $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, promotrimo sada detaljnije u kojoj mjeri eksponencijacijom odgovarajućih operatora dobivamo reprezentacije *grupa* SO(3) i SU(2). Matrični elementi ekponenciranih operatora između standardnih $|j, m\rangle$ stanja

$$D^{(j)}_{m'm}(\hat{\boldsymbol{z}}, \phi) \equiv \langle j, m'|D^{(j)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)|j, m\rangle = \langle j, m'|e^{(-i/\hbar)\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi}|j, m\rangle \,. \tag{6.30}$$

se nazivaju *Wignerove D-funkcije* i formiraju tzv. *Wignerovu D-matricu*. Mogu se pronaći tabelirani u specijaliziranoj literaturi, a postoje i zatvoreni analitički izrazi. No razmotrimo u kojoj mjeri oni reprezentiraju grupe SO(3) i SU(2). Kako te grupe nisu izomorfne, reprezentacije koje čine $D^{(j)}$ sigurno ne mogu općenito biti vjerne.

Slučaj $j = 0$ je trivijalan, jer je odgovarajuća reprezentacija $D^{(0)} = \mathbb{1}$ trivijalna i objekte koji se tako transformiraju (zapravo, ne transformiraju) nazivamo *skalari*.

Slučajeve $j = 1/2$ i $j = 1$ smo već sreli. Naime, same grupe nismo definirali apstraktno već kao matrične grupe. Te matrice možemo interpretirati kao operatore na vektorskim prostorima i tako one istovremeno čine i reprezentaciju grupe. $j = 1$ je trodimenzionalna reprezentacija i eksplicitnom konstrukcijom operatora J_z, $J_\pm$ putem formula iz prošlog odjeljka, pa onda linearnim kombiniranjem da bi dobili i J_x i J_y (zadatak 6.1.), dobivamo upravo generatore iz (5.22), do na faktor $i\hbar$. Tako je $j = 1$ *definiciona* reprezentacija grupe SO(3) i njena najmanja vjerna reprezentacija. No, ona nije i vjerna reprezentacija grupe SU(2), što znamo jer znamo da se po dva elementa U i $-U$ iz SU(2) preslikavaju u isti element SO(3). To je samo još jedna manifestacija činjenice da su te dvije grupe iste lokalno (imaju istu algebru), ali ne i globalno.

Zanimljiviji je slučaj $j = 1/2$ reprezentacije. Ona je dvodimenzionalna i istim postupkom kao gore lako se uvjerimo da su J_i do na faktor dani Paulijevim matricama i eksponencijacijom dobivamo definicionu vjernu reprezentaciju grupe SU(2) (vidi zadatak 5.4.)

$$e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta} = \cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{6.31}$$

No, je li $j = 1/2$ također i reprezentacija grupe rotacija SO(3)? Da bismo odgovorili na to promotrimo rotaciju stanja spina $j = 1/2$ i pozitivne projekcije spina $m = 1/2$ za kut 2π oko z-osi

$$e^{(-i/\hbar)\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi}|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = e^{-i\frac{\sigma_3}{2}2\pi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = e^{-i\pi}|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = -|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle\,. \tag{6.32}$$

Vidimo da pri toj rotaciji vektor stanja mijenja predznak tj. ne vraća se u početno stanje. Tek je operator rotacije za 4π jednak identiteti. Čitatelj se lako može uvjeriti da će takvo ponašanje imati sve polucjelobrojne reprezentacije. No, po definiciji, reprezentacija grupe mora zadovoljavati općeniti uvjet homomorfizma s grupom, što znači da operatori reprezentacije grupe SO(3) moraju zadovoljavati

$$D(\pi)D(\pi) = D(2\pi) = \mathbb{1}\,, \tag{6.33}$$

no kako za operatore $j = 1/2$ reprezentacije vrijedi

$$D^{(1/2)}(\pi)D^{(1/2)}(\pi) = D^{(1/2)}(2\pi) = -\mathbb{1}\,, \tag{6.34}$$

zaključujemo da $D^{(1/2)}$ *ne* čine reprezentaciju grupe SO(3)! Drugi način gledanja na ovu situaciju je da preslikavanje s grupe SO(3) na skup operatora $D^{(1/2)}$ nije jednoznačno jer svakom elementu grupe pripadaju dva operatora $D^{(1/2)}(\phi)$ i $D^{(1/2)}(\phi + 2\pi) = -D^{(1/2)}(\phi)$.

Premda dakle strogo matematički gledano polucjelobrojne reprezentacije grupe SU(2) nisu reprezentacije grupe rotacija SO(3), u prirodi postoje važni sustavi koji se transformiraju prema polucjelobrojnim reprezentacijama (nazivamo ih fermionski*) i promjena faze vidljiva u (6.32) se lijepo može vidjeti u eksperimentima.

Tu formalno problematičnu situaciju možemo formalno razriješiti na dva načina. Prvi je da iskoristimo (fizikalnu, a ne matematičku!) činjenicu da u kvantnoj mehanici vektori Hilbertovog prostora koji se razlikuju za fazu i dalje opisuju isto fizikalno stanje. Tamo onda možemo dopustiti reprezentiranje grupe simetrija i tzv. *projektivnim reprezentacijama* kod kojih je standardni uvjet homomorfizma „olabavljen” dopuštanjem razlike u fazi

$$D(g_1)D(g_2) = e^{i\phi(g_1,g_2)}D(g_1g_2)\ .$$

Ovdje se nećemo upuštati u općenitu teoriju projektivnih reprezentacija (za diskusiju u kontekstu kvantne fizike vidi [Weinberg, 2005.]), nego ćemo samo izreći nekoliko nama relevantnih rezultata:

- O strukturi grupe ovisi hoće li ona imati i projektivnih reprezentacija†, a o fizikalnom sustavu hoće li se transformirati obzirom na projektivne reprezentacije ili ne.

*Jedan od centralnih rezultata kvantne teorije polja je tzv. *teorem veze spina i statistike* koji kaže da se sustavi cjelobrojnog spina ponašaju u skladu s Bose-Einsteinovom statistikom (i zovemo ih bozonski), a oni polucjelobrojnog spina u skladu s Fermi-Diracovom statistikom (i zovemo ih fermionski). Npr. foton je spina 1 i time bozon, a elektron je spina 1/2 i time fermion.

†Ovdje se misli na projektivne reprezentacije koje su netrivijalne u smislu da se faza u (6.3) ne može eleminirati jednostavnom redefinicijom operatora $D(g) \to e^{i\phi(g)}D(g)$.

- Jedan od načina da grupa ima i projektivne reprezentacije je da ne bude jednostavno povezana. Konkretna topologija grupnog prostora određuje mogućnosti za fazu $\phi(g_1, g_2)$.
- SO(3) je dvostruko povezana i dopušta dvije faze: ± 1. Fermionski sustavi se transformiraju projektivno. U literaturi se nekad kaže da se fermioni transformiraju u skladu s *dvovrijednom* (engl. *double-valued*) reprezentacijom grupe rotacija gdje se misli da se svaki pojedini element grupe rotacija preslikava u skup $\{U, -U\}$ dvaju operatora iz SU(2).

Grupa SU(2) je jednostavno povezana i sve njene reprezentacije su „obične”. To nam onda omogućuje drugi pristup ovom formalnom problemu, a to je da prihvatimo da je zapravo SU(2) „prava” grupa rotacija i prava simetrija prirode i onda ne moramo razmatrati projektivne reprezentacije. To može na prvi pogled biti protivno intuiciji, ali postoje i klasične situacije kod kojih rotacija za 360 stupnjeva nije identična rotaciji za nula stupnjeva, a ona za 720 stupnjeva jest (poznati trikovi s pojasom ili konobarevim pladnjem). Također, najjednostavniji odgovor na pitanje kako komponirati dvije prostorne rotacije tj. kako odrediti rezultantni kut i os rotacije, dobije se upravo korištenjem kvaterniona (koji su ekvivalentni grupi SU(2)) što isto sugerira svojvrsnu fundamentalnost grupe SU(2) i izvan kvantnomehaničkog konteksta.

6.4 Orbitalni moment impulsa

Među raznim operatorima u kvantnoj mehanici koji zadovoljavaju komutacijske relacije $\mathfrak{su}(2)$ algebre nailazimo i na važni operator *orbitalnog momenta impulsa* oblika

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \,, \tag{6.35}$$

gdje $\mathfrak{su}(2)$ komutacijske relacije

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}L_k \,, \tag{6.36}$$

slijede izravno iz temeljnih kvantnomehaničkih komutacijskih relacija

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1} \,. \tag{6.37}$$

Iz kvantne mehanike je poznato da orbitalni moment impulsa poprima samo cjelobrojne vrijednosti

$$\boldsymbol{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \,, \tag{6.38}$$

i odgovarajući momenti impulsa tj. ireducibilne reprezentacije se tradicionalno označavaju s l, a ne j. Iz povijesnih razloga vezanih uz atomsku fiziku, stanja koja pripadaju $l = 0, 1, 2, \ldots$ reprezentacijama se često nazivaju $S, P, D, \ldots$ stanja, a m se ponekad naziva *magnetski* kvantni broj (zbog svoje uloge u Zeemanovom efektu).

Zanimljivo je pitanje zašto za orbitalni moment impulsa otpadaju polucjelobrojne reprezentacije $l \neq 1/2, 3/2, \ldots$? Sama algebra, kako smo vidjeli u prošlom odjeljku, implicira postojanje i takvih reprezentacija, dakle stvar mora biti u konkretnom obliku operatora (6.35) odnosno svojstvima operatora položaja i impulsa koji dodatno zadovoljavaju i relacije (6.37).

Pozabavimo se prvo posebnim problemom dimenzionalnosti Hilbertovog prostora na kojem operator $\boldsymbol{L}$ iz (6.35) djeluje. Naime, taj je prostor beskonačnodimenzionalan. Već smo to u sličnoj situaciji sreli u primjeru 2.2.2 u kontekstu rotacije valnih funkcija vodikovog atoma. No beskonačna dimenzionalnost Hilbertovog prostora na koji djeluju operatori položaja i impulsa (pa time i $\boldsymbol{L}$) vrijedi sasvim općenito u kvantnoj mehanici, u što se možemo uvjeriti djelovanjem operacije traga na (6.37). Tu lijeva strana zbog cikličnosti traga iščezava, a desna ne, pa imamo nekonzistenciju za konačnodimenzionalne operatore. U beskonačno-dimenzionalnim prostorima trag operatora općenito nije definiran pa je samo tamo relacija (6.37) matematički konzistentna. Beskonačnodimenzionalni Hilbertovi prostori su u mnogome različiti od konačnodimenzionalnih i velika većina rezultata u ovoj knjizi tamo ne vrijedi onako kako su iskazani bez dodatnog posvećivanja velike pažnje domeni pojedinih operatora i drugim suptilnostima. Srećom, operator (6.35) na cijelom Hilbertovom prostoru je *reducibilan*. Iz osnova kvantne mehanike znamo da se valne funkcije faktoriziraju na radijalni i kutni dio $\psi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y_m^{(l)}(\theta, \phi)$. Radijalni dio je onaj koji je odgovoran za beskonačnu dimenzionalnost prostora, no za naše potrebe nam on nije važan jer na njega rotacije djeluju trivijalno. One djeluju netrivijalno na kutni dio $Y_m^{(l)}(\theta, \phi)$ i tu, analizom svojstvenih funkcija Laplaceove diferencijalne jednadžbe (kutnog dijela Schrödingerove jednadžbe), se u standardnim knjigama iz kvantne mehanike pokazuje da su rotacije ireduciblne na *konačno-dimenzionalnim* prostorima razapetim funkcijama $Y_m^{(l)}(\theta, \phi)$ za $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$. Dakle potpuno smo u okviru razmatranja i rezultata prošlog odjeljka i ostaje nam samo odgovoriti na pitanje što je s polucjelobrojnim reprezentacijama.

U literaturi se do rezultata da l ne može biti polucjelobrojan često dolazi nezadovoljavajuće. Autori se uglavnom oslanjaju na postavljanje rubnih uvjeta na rješenja Laplaceove jednadžbe; konkretno, zahtijevaju da valne funkcije moraju zadovoljavati $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$. No sve fizikalne posljedice su, kako smo baš diskutirali u prošlom odjeljku, neosjetljive na fazu valne funkcije i nema nikakvog fizikalnog razloga zahtijevati takve rubne uvjete, pogotovu kad smo svjesni da u prirodi postoje sustavi (fermioni) koji takve zahtjeve *ne* zadovoljavaju. Izložit ćemo sada argument koji objašnjava zašto l ne može biti polucjelobrojan, a koji se ne oslanja na rubne uvjete nego samo na temeljne komutacijske relacije [Ballentine, 1998.].

Radi jasnoće, umjesto standardnih operatora položaja $\boldsymbol{r}$ i impulsa $\boldsymbol{p}$, definirajmo njihove bezdimezionalne inačice

$$\boldsymbol{Q} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\boldsymbol{r}\,, \qquad \boldsymbol{P} \equiv \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\,\boldsymbol{p}\,, \tag{6.39}$$

gdje su m i ω neke konstante s dimenzijama mase i frekvencije koje nam neće biti od važnosti. Pomoću ovih operatora definiramo još četiri bezdimenzionalna operatora

$$q_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_x \pm P_y)\,, \tag{6.40}$$

$$p_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(P_x \mp Q_y)\,. \tag{6.41}$$

Ovi operatori zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[Q_i, P_j] = [r_i, p_j]/\hbar = i\delta_{ij}\,, \tag{6.42}$$

$$[q_\pm, p_\pm] = i\,, \tag{6.43}$$

$$[q_\pm, p_\mp] = 0\,, \tag{6.44}$$

i svi ostali komutatori isto iščezavaju. Uz ovako definirane operatore imamo sada za bezdimenzionalni operator momenta impulsa oko z-osi

$$\frac{1}{\hbar}L_z = Q_x P_y - Q_y P_x = \frac{1}{2}(p_+^2 + q_+^2) - \frac{1}{2}(p_-^2 + q_-^2)\,. \tag{6.45}$$

Ovdje treba uočiti prvo da iz (6.43) vidimo da $q_\pm$ i $p_\pm$ zadovoljavaju kvantne komutacijske relacije položaja i impulsa, a drugo da je $(p^2 + q^2)/2$, ako je p impuls, a q položaj, upravo bezdimenzionalna varijanta Hamiltonijana jednodimenzionalnog kvantnog harmoničkog oscilatora. Dakle, operator L_z je matematički ekvivalentan *razlici* Hamiltonijana dvaju *nezavisnih* harmoničkih oscilatora

$$\frac{1}{\hbar}L_z = H^{(+)} - H^{(-)}\,. \tag{6.46}$$

U svakoj knjizi iz kvantne mehanike je pokazano da su svojstvene vrijednosti ovakvih Hamiltonijana, dakle energije harmoničkog oscilatora, dane s

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\,, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}\,, \tag{6.47}$$

pa će odgovarajuće svojstvene vrijednosti bezdimenzionalnih Hamiltonijana iz (6.46) biti upravo $n_\pm + 1/2$ uz nenegativne cjelobrojne $n_\pm$. Tako slijedi da su moguće svojstvene vrijednosti L_z dane s

$$\frac{1}{\hbar}L_z = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) - \left(n_- + \frac{1}{2}\right) = n_+ - n_- \,, \tag{6.48}$$

tj. da su svakako cjelobrojne, što je i trebalo pokazati.

6.5 Zbrajanje momenata impulsa i Clebsch-Gordanovi koeficijenti

Kod konačnih grupa smo razmatrali pitanje direktnog produkta ireducibilnih reprezentacija i njegovog rastavljanja na tzv. Clebsch-Gordanov direktni zbroj. U kontekstu ireducibilnih reprezentacija grupe rotacija to je pitanje ekvivalentno poznatom problemu „zbrajanja momenata impulsa" u kvantnoj mehanici. Čitatelj koji poznaje to gradivo neće u ovom odjeljku naći ništa novo, no edukativno je razumjeti te rezultate izrečene jezikom teorije reprezentacija grupe rotacija.

Promotrimo fizikalni sustav izgrađen od dvaju podsustava poznatih spinova j_1 i j_2. Ako su stanja pojedinog podsustava opisana vektorima u prostorima V_1 i V_2

$$|j_1, m_1\rangle \in V_1 \tag{6.49}$$
$$|j_2, m_2\rangle \in V_2 \,, \tag{6.50}$$

onda će združeni sustav biti opisan vektorima

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \,, \tag{6.51}$$

koji su elementi produktnog vektorskog prostora $V_1 \otimes V_2$. Na V_1 i V_2 su definirani operatori momenta impulsa $\boldsymbol{J}_1$ i $\boldsymbol{J}_2$ sa svojstvima

$$\boldsymbol{J}_1^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \,, \tag{6.52}$$
$$\boldsymbol{J}_2^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \,, \tag{6.53}$$
$$J_{1z} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = m_1\hbar |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \,, \tag{6.54}$$
$$J_{2z} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = m_2\hbar |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \,. \tag{6.55}$$

Na vektorskom prostoru V_1 grupa rotacija reprezentirana* je operatorima $D^{(j_1)} = \exp(-i\boldsymbol{J}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\theta/\hbar)$ (i slično za V_2), a na $V_1 \otimes V_2$ operatorima $D^{(j_1)} \otimes$

*Odsad ćemo i projektivne reprezentacije grupe SO(3) zvati samo reprezentacije, ili ćemo SU(2) smatrati grupom rotacija, štogod je čitatelju draže, vidi odjeljak 6.3.

$D^{(j_2)}$. Međutim, $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ je općenito reducibilna reprezentacija odnosno združeni sustav nema nužno definirani spin. $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ nije nužno svojstveno stanje operatora ukupnog spina združenog sustava $\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2)^2$.

Da bismo ustanovili moguće spinove združenog sustava trebamo provesti Clebsch-Gordanov rastav $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ na direktni zbroj ireducibilnih reprezentacija

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_J \oplus\, a_J D^{(J)} \,,$$

gdje su koeficijenti kao i inače dani s

$$a_J = \left(\chi^{(J)}, \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}\right) \,.$$

Za općeniti račun skalarnih umnožaka karaktera trebali bismo znati invarijantno integrirati u grupnom prostoru grupe rotacija (vidi [Jones, 1998.], dodatak C ili [Hamermesh, 1989.], odjeljak 9-2), ali ovdje ćemo potrebni rezulatat dobiti i bez toga, uz par matematičkih trikova. Kako su karakteri konstante klasa konjugacije, za reprezentante klasa biramo rotacije oko z-osi za koje su odgovarajući operatori rotacije dijagonalni

$$\begin{aligned}
\chi^{(j)}(\phi) &= \mathrm{Tr}\, D^{(j)}(\phi) = \mathrm{Tr}\, e^{(-\mathrm{i}/\hbar)J_3\phi} \\
&= \mathrm{Tr\,diagonal}\left(e^{-\mathrm{i}j\phi}, e^{-\mathrm{i}(j-1)\phi}, \ldots, e^{-\mathrm{i}(-j)\phi}\right) \\
&= e^{-\mathrm{i}j\phi} + e^{-\mathrm{i}(j-1)\phi} + \cdots + e^{-\mathrm{i}(-j)\phi} \\
&= \text{geometrijski red s omjerom članova } e^{\mathrm{i}j\phi} \qquad (6.56) \\
&= e^{-\mathrm{i}j\phi}\frac{1-(e^{\mathrm{i}j\phi})^{2j+1}}{1-e^{\mathrm{i}\phi}} = \frac{e^{-\mathrm{i}(j+1/2)\phi} - e^{\mathrm{i}(j+1/2)\phi}}{e^{-\mathrm{i}\phi/2} - e^{\mathrm{i}\phi/2}} \\
&= \frac{\sin(j+1/2)\phi}{\sin\phi/2}
\end{aligned}$$

Odredimo sada koeficijente a_J Clebsch-Gordanovog razvoja. Pretpostavimo prvo da je $j_1 \geq j_2$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\chi^{(j_1)}(\phi)\chi^{(j_2)}(\phi) &= \frac{e^{+\mathrm{i}(j_1+1/2)\phi} - e^{-\mathrm{i}(j_1+1/2)\phi}}{2\mathrm{i}\sin\phi/2} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{\mathrm{i}m\phi} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\sin\phi/2} \sum_{m=-j_2}^{j_2} \left[e^{\mathrm{i}(j_1+m+1/2)\phi} - e^{-\mathrm{i}(j_1-m+1/2)\phi} \right] \\
&= (\text{zamjena } m \to -m \text{ u drugom članu}) \\
&= \sum_{m=-j_2}^{j_2} \frac{\sin(j_1+m+1/2)\phi}{\sin\phi/2} \\
&= \sum_{m=-j_2}^{j_2} \chi^{(j_1+m)}(\phi) \qquad (J \equiv j_1+m) \\
&= \sum_{J=j_1-j_2}^{J=j_1+j_2} \chi^{(J)}(\phi)\,.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Ovdje J mora biti pozitivan da bi bio labela neke ireducibilne reprezentacije. Zato smo se ograničili na $j_1 \geq j_2$. Za slučaj $j_2 \geq j_1$ imali bi sve isto kao gore, samo uz zamjenu $j_1 \leftrightarrow j_2$. Slijedi da općenito možemo pisati:

$$\chi^{(j_1)}(\phi)\chi^{(j_2)}(\phi) = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} \chi^{(J)}(\phi) \tag{6.58}$$

Dakle,

$$a_J = \left(\chi^{(J)}, \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}\right) = \sum_{J'=|j_1-j_2|}^{J'=j_1+j_2} \underbrace{\left(\chi^{(J)}, \chi^{(J')}\right)}_{\delta_{JJ'}} \tag{6.59}$$

odnosno,

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} \oplus D^{(J)}\,. \tag{6.60}$$

Kao primjer, vrijedi $D^{(1/2)} \otimes D^{(1)} = D^{(1/2)} \oplus D^{(3/2)}$. Treba primijetiti da se svaka ireducibilna reprezentacija pojavljuje najviše jednom u Clebsch-Gordanovom razvoju. To je veliko pojednostavljenje svojstveno grupi rotacija. Za čitaoca bi bilo dobro da se uvjeri da su dimenzionalnosti reprezentacija u (6.60) konzistentne tj. da je

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)\,.$$

Osim gore navedene baze prostora $V_1 \otimes V_2$ $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ koju čine svojstveni vektori operatora $\{\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ u kvantnomehaničkim računima je važna i baza $|j_1, j_2; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle$ tog istog prostora koju čine svojstveni vektori operatora $\{\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, \boldsymbol{J}^2, J_z\}$. Ove dvije baze su naravno povezane

$$|J, M\rangle = \underbrace{\sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1; j_2, m_2|}_{=1} \, |J, M\rangle \,, \tag{6.61}$$

i koeficijenti razvoja jedne baze po drugoj

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle \equiv C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \tag{6.62}$$

nazivaju se *Clebsch-Gordanovi koeficijenti* i mogu se naći tabelirani u literaturi. U Dodatku G mogu se naći neka svojstva ovih koeficijenata i metoda njihovog određivanja.

6.6 Tenzorski operatori i Wigner-Eckartov teorem

U prošla tri odjeljka smo naučili kako se kvantnomehanička *stanja* ponašaju pri rotacijama. No, da bismo potpuno razumjeli posljedice rotacijske simetrije u kvantnomehaničkim sustavima potrebno je znati i kako se pri rotacijama ponašaju kvantnomehanički *operatori*. Mnogi važni operatori su obzirom na rotacije *vektori*, što znači da se transformiraju analogno klasičnim vektorima tj. množenjem sa standardnom matricom rotacije $R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)$ iz odjeljka 4.1. Na primjer, transformacija operatora položaja je

$$r_i \longrightarrow U(R) r_i U(R)^{-1} = R_{ij} r_j \,. \tag{6.63}$$

Slično, tenzori višeg ranga, poput npr. $r_i p_j$ će se transformirati množenjem s brojem matrica R koji odgovara njihovom rangu, kao u (4.10). Problem je međutim da ti tenzori općenito nisu *ireducibilni* tj. mogu se rastaviti na zbroj tenzora koji se ne miješaju pri rotacijama i neki od kojih su nižeg ranga. Na primjer, općeniti tenzor drugog ranga T_{ij} ima devet komponenata, ali one se mogu organizirati u kombinacije koje se međusobno ne miješaju pri rotacijama. Kao prvo, trag tenzora $\mathrm{Tr}T = T_{ii}$ je invarijantan na rotacije jer imamo

$$\begin{aligned} T_{ii} = \delta_{ij} T_{ij} \longrightarrow \delta_{ij} R_{ii'} R_{jj'} T_{i'j'} &= (R_{ji'} R_{jj'}) T_{i'j'} = (R^{\mathsf{T}} R)_{i'j'} T_{i'j'} \\ &= \delta_{i'j'} T_{i'j'} = T_{i'i'} \,, \end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjem koraku upotrijebili svojstvo ortogonalnosti matrica rotacije. Dakle, trag $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$ je skalar tj. tenzor ranga 0. Nadalje,

T_{ij}, baš kao i svaku matricu, možemo rastaviti na antisimetrični i simetrični dio

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \ . \tag{6.64}$$

Lako je uočiti da rotacije ne miješaju ove dvije komponente: rotacija (anti)simetrične matrice daje (anti)simetričnu matricu, kako će čitatelj pokazati u zadatku 6.13.. Tako tri nezavisne antisimetrične kombinacije, $(T_{xy}-T_{yx})/2$, $(T_{yz}-T_{zy})/2$ i $(T_{zx}-T_{xz})/2$, čine tenzor prvog ranga tj. vektor. Ovaj tročlani skup nije dalje reducibilan jer rotacije međusobno miješaju sva tri elementa. Njegovu vektorsku prirodu možemo lako uočiti na primjeru $T_{ij} = 2r_i p_j$ gdje ove tri kombinacije upravo daju tri komponente momenta impulsa $L_k = \epsilon_{ijk} r_i p_k$. Simetrični dio ima šest komponenata, T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, $(T_{xy}+T_{yx})/2$, $(T_{yz}+T_{zy})/2$ i $(T_{zx}+T_{xz})/2$, ali treba uočiti da je zbroj prvih triju jednak tragu za kojeg smo upravo vidjeli da je sam za sebe ireducibilan pa ga treba eliminirati da bi se dobilo pet nezavisnih komponenata koje čine tenzor drugog ranga. Dakle, konačni rastav tenzora drugog ranga na ireducibilne tenzore ranga 0, 1 i 2 je

$$T_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \left[\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right] , \tag{6.65}$$

gdje faktor 1/3 osigurava da zadnji član bude traga nula.

Kao posljedica reducibilnosti djelovanje ovakvih tenzorskih operatora na stanja $|j,m\rangle$ ireducibilnih reprezentacija rezultirat će stanjima koja nemaju jednostavna transformacijska svojstva jer su superpozicija komponenata iz različitih ireducibilnih reprezentacija. To će otežavati i računanje s takvim stanjima i njihovu fizikalnu interpretaciju. Stoga uvodimo drugačije tenzorske operatore s transformacijskim svojstvima srodnima onima stanja $|j,m\rangle$. Iz (6.18) i (6.30) slijedi da se $|j,m\rangle$ stanja transformiraju množenjem (transponiranim) Wignerovim D-matricama

$$D(R)|j,m\rangle = \sum_{m'} |j,m'\rangle\langle j,m'|D(R)|j,m\rangle = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}|j,m'\rangle \ . \tag{6.66}$$

Definicija 6.6.1 (Ireducibilni sferični tenzorski operator)
Ireducibilni sferični tenzorski operator $T^{(k)}$ ranga k, sa $2k+1$ komponenata $T^{(k)}_q$, $q = -k, -k+1, \ldots, k$ je operator koji zadovoljava

$$D(R)T^{(k)}_q D(R)^{-1} = \sum_{q'=-k}^{k} D^{(k)}_{q'q}(R) T^{(k)}_{q'} \ . \tag{6.67}$$

Pogledajmo prvo infinitezimalnu verziju ove definicione relacije. Do prvog reda razvoja u malom kutu rotacije $\theta \ll 1$, (6.67) postaje

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta\right) T_q^{(k)} \left(1 + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta\right) = \sum_{q'=-k}^{k} \langle k, q'| \left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta\right) |k, q\rangle T_{q'}^{(k)} \;, \tag{6.68}$$

odnosno

$$[\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}, T_q^{(k)}] = \sum_{q'=-k}^{k} \langle k, q'|\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|k, q\rangle T_{q'}^{(k)} \;. \tag{6.69}$$

Sada izborom $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ i $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{x}} \pm \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}}$ te korištenjem (6.26), (6.28) i (6.29) dobijamo komutacijske relacije

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \;, \tag{6.70}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, T_{q\pm 1}^{(k)} \;, \tag{6.71}$$

koje se mogu smatrati ekvivalentnom definicijom ireducibilnih sferičnih tenzora. Obične (općenito reducibilne) tenzore s početka odjeljka nekad nazivamo *kartezijevi* jer su im komponente definirane pomoću kartezijeve baze $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$. Obični kartezijevi tenzori ranga 1, dakle vektori, zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[J_i, V_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}V_k \;. \tag{6.72}$$

Primjer 6.6.2 (Tenzori ranga 0)
Tenzori ranga nula tj. skalari imaju samo jednu komponentu i nema razlike između sferične varijante $T_0^{(0)}$ i kartezijeve varijante T. Ovakvi operatori komutiraju sa sve tri komponente operatora momenta impulsa

$$[J_i, T] = 0 \;, \tag{6.73}$$

i tako su invarijantni na rotacije, baš kao što su operatori koji komutiraju s Hamiltonijanom invarijantni na vremenske translacije.

Primjer 6.6.3 (Tenzori ranga 1)
Standardni vektorski operatori, poput $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{J}$, su kartezijevi operatori ranga 1. Za razliku od kartezijevih operatora ranga 2, oni *jesu* ireducibilni. Rotacije naravno miješaju sve tri kartezijeve komponente T_x, T_y, T_z vektorskog operatora $\boldsymbol{T}$. *Sferični* tenzor ranga $k = 1$ ima $2k + 1 = 3$ komponente i one su povezane s kartezijevim komponentama relacijama

$$T_0^{(1)} = T_z \;, \quad T_{\pm 1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(T_x \pm iT_y) \;, \tag{6.74}$$

koje čitatelj treba provjeriti. Tako na primjer J_z i $\mp(1/\sqrt{2})J_\pm$ formiraju sferični tenzor ranga 1*.

*Treba spomenuti da $D^{(j)}$ *nije* sferični tenzorski operator ranga j.

Primjer 6.6.4 (Tenzori ranga 2)
Kartezijev tenzor ranga 2 je reducibilan i u (6.65) je ekspliciran rastav na sferične tenzore ranga 0, 1 i 2, s ukupno 1+3+5=9 komponenata, gdje pojedine komponente $T_q^{(k)}$ nisu izravno vidljive u (6.65) nego ih se može odrediti računom.

Glavni razlog upotrebe sferičnih tenzorskih operatora je da njihovo djelovanje na $|j, m\rangle$ stanja rezultira stanjima s jednostavnim transformacijskim svojstvima. Rotacija stanja $T_q^{(k)}|j, m\rangle$ dana je s

$$U(R)\Big(T_q^{(k)}|j,m\rangle\Big) = U(R)T_q^{(k)}U(R)^{-1}U(R)|j,m\rangle \tag{6.75}$$

$$= \sum_{q'=-k}^{k}\sum_{m=-j}^{j} D_{q'q}^{(k)}(R)D_{m'm}^{(j)}(R)T_{q'}^{(k)}|j,m'\rangle \ , \tag{6.76}$$

a to je identično transformaciji kakvu bi imalo stanje

$$|k,q\rangle \otimes |j,m\rangle = |k,q;j,m\rangle \ . \tag{6.77}$$

Dakle djelovanje sferičnog operatora ranga k na sustav spina j je matematički ekvivalentno zbrajanju dvaju sustava spinova k i j. Stoga se često kaže da je k „spin” takvog operatora. Amplituda vjerojatnosti da stanje $|k, q; j, m\rangle$ ima neki konkretni spin J i projekciju spina M dana je s Clebsch-Gordanovim koeficijentom C_{jmkq}^{JM}, vidi (6.62). Po bliskoj analogiji s tim, za amplitudu vjerojatnosti pronalaženja stanja $T_q^{(k)}|j, m\rangle$ u stanju $|j', m'\rangle$ stanje imamo sljedeći teorem, koji je jedan od centralnih rezultata primjene simetrija u kvantnoj mehanici.

Teorem 6.6.5 (Wigner-Eckart)
Matrični elementi sferičnih tenzorskih operatora između svojstvenih stanja momenta impulsa zadovoljavaju relaciju

$$\langle j'm'|T_q^{(k)}|jm\rangle = C_{jmkq}^{j'm'}\frac{\langle j'||T^{(k)}||j\rangle}{\sqrt{2j+1}} \ , \tag{6.78}$$

gdje je $\langle j'||T^{(k)}||j\rangle$ tzv. *reducirani matrični element* koji ne ovisi o m, q i m'.

Posljedica ovog teorema je da izračunavanje jednog jedinog matričnog elementa (npr. za slučaj $m' = q = m = 0$) onda omogućuje trivijalno određivanje svih ostalih $(2j' + 1) \times (2k + 1) \times (2j + 1)$ matričnih elemenata pomoću tablica Clebsch-Gordanovih koeficijenata. Amplituda se faktorizira na reducirani matrični element koji je netrivijalni „dinamički” dio i Clebsch-Gordanove koeficijente koji sadrže obično manje važnu informaciju o prostornim orijentacijama stanja i operatora. Teorem omogućuje i određivanje tzv. *izbornih pravila* za prijelaze atomskih i nuklearnih kvantnih sustava pod vanjskim utjecajima.

Primjer 6.6.6 (Skalarni operator)

$$\langle j'm'||T_0^{(0)}|jm\rangle = C_{jm00}^{j'm'} \frac{\langle j'||T^{(0)}||j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

pa svojstva Clebsch-Gordanovih koeficijenata, vidi dodatak G, odmah daju da matrični element iščezava osim ako je $m = m'$ i $|j-0| \leq j' \leq j+0$ odnosno $j = j'$. To je naprosto odraz činjenice da skalarni operator nikako ne rotira stanje.

Primjer 6.6.7 (Izborna pravila za dipolno zračenje)
Interakcija atoma s elektromagnetskim poljem opisanim vektorskim potencijalom $\boldsymbol{A}$ dana je hamiltonijanom

$$\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = \frac{e}{mc}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} + \cdots = \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} = e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} + \cdots . \tag{6.79}$$

Električno polje $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\epsilon}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ se u dipolnoj aproksimaciji, gdje se uzima da je valna duljina zračenja puno veća od atoma, aproksimira samo polarizacijskim vektorom $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{\epsilon}(1 + \cdots)$ pa je amplituda prijelaza između dvaju nivoa atoma, specificiranih radijalnim kvantnim brojevima n i n', momentima impulsa l i l' i magnetnim kvantnim brojevima m i m' proporcionalna matričnom elementu operatora položaja

$$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle n'l'm'|\boldsymbol{r}|nlm\rangle \, . \tag{6.80}$$

Operator položaja $\boldsymbol{r}$ je kartezijev vektor (tenzor ranga 1), a istovremeno i sferični tenzor $r^{(1)}$ ranga 1, gdje je korespondencija komponenata navedena u (6.74). Wigner-Eckartov teorem kaže da su matrični elementi prijelaza proporcionalni Clebsch-Gordanovim koeficijentima za zbrajanje momenta impulsa l s momentom impulsa 1 (rang operatora položaja)

$$\langle n'l'm'|x_q^{(1)}|nlm\rangle = C_{lm1q}^{l'm'} \frac{\langle n'l'||x^{(1)}||nl\rangle}{\sqrt{2l+1}} \ ,$$

To odmah povlači da su prijelazi mogući samo ako je $|l-1| \leq l' \leq l+1$ odnosno da je moguća promjena momenta impulsa atoma u dipolnom zračenju $\Delta l = \pm 1, 0$*. Ovakvi uvjeti na prijelaze između kvantnih nivoa nazivaju se *izborna pravila*. Nadalje, kako Clebsch-Gordanovi koeficijenti iščezavaju ako nije zadovoljeno $m + q = m'$, ukoliko znamo

*Usput, dodatna simetrija koju ima ovaj sustav, simetrija na prostornu inverziju $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$, dodatno zabranjuje $\Delta l = 0$ prijelaze.

da je električno polje linearno polarizirano $\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\boldsymbol{z}}$ imamo i dodatno izborno pravilo da je $m' = m$ tj. $\Delta m = 0$. Za transverzalno ili cirkularno polarizirano polje u $x-y$ ravnini imat ćemo pak $m' = m \pm 1$ tj. $\Delta m = \pm 1$. Treba uočiti da ovakva izborna pravila vrijede i za kompleksnije atome za koje ne znamo izračunati radijalni dio valnih funkcija. Ona su naprosto posljedica sferne simetrije odnosno zakona očuvanja momenta impulsa: foton ima spin 1 i njegovom emisijom ili apsorpcijom moment impulsa atoma se može promijeniti najviše za 1.

6.7 Spektar vodikovog atoma i SO(4) simetrija

U udžbenicima kvantne mehanike se spektar vodikovog atoma obično dobiva rješavanjem Schrödingerove diferencijalne jednadžbe. No povijesno prvi izračun spektra dao je Pauli 1926. koristeći Heisenbergovu matričnu mehaniku uz ingenioznu upotrebom načela simetrije, što ćemo izložiti u ovom odjeljku.

Vidjeli smo u odjeljku 3.6 da postojanje operatora $\{U(g) \,|\, g \in G\}$ koji reprezentiraju grupu G, te koji komutiraju s hamiltonijanom $[U(g), H] = 0$, povlači degeneraciju energijskih nivoa koji odgovaraju skupu stanja $\{U(g)|\alpha\rangle | g \in G\}$. Tamo je to bilo ilustrirano na primjeru konačnih grupa. Zanimljiv primjer degeneracije kao posljedice kontinuirane sferne simetrije su nivoi u vodikovom atomu. Hamiltonijan (u CGS sustavu jedinica)

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \; . \tag{6.81}$$

je rotacijski simetričan i kao posljedica toga komutira s operatorom rotacija

$$[H, D(\boldsymbol{n}, \phi)] = 0 \; . \tag{6.82}$$

To povlači da svih $2l+1$ stanja date ireducibilne reprezentacije grupe rotacija s kvantnim brojem l

$$\big\{|nlm\rangle \mid m \in \{-l, -l+1, ..., l\}\big\} = \big\{D(g)|nlm\rangle \mid g \in \mathrm{SO}(3)\big\} \tag{6.83}$$

ima istu energiju, kako smo već spominjali u odjeljku 2.2. Sferna simetrija implicira da energija ne ovisi o kvantnom broju m tj. o prostornoj orijentaciji sustava. Međutim, poznato je da energije stanja vodikovog atoma ne ovise ni o kvantnom broju l i da n^2 stanja

$$\big\{|nlm\rangle \mid l = \{0, 1, \ldots, n-1\}; m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}\big\} \tag{6.84}$$

imaju istu energiju*

$$E_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 n^2} \,. \tag{6.85}$$

Dakle, umjesto $2l+1$-struke degeneracije koju očekujemo kao posljedicu rotacijske simetrije imamo veću, n^2-struku degeneraciju. Ovakva situacija obično znači da sustav ima veću simetriju nego što smo originalno očekivali. Koju to simetriju, pored rotacijske, ima sustav opisan hamiltonijanom (6.81)? Da bismo istražili to pitanje vratit ćemo se u područje klasične fizike gdje se javlja slična situacija u problemu dva tijela čiji je hamiltonijan

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e_M^2}{r} \quad ; \quad e_M^2 \equiv GMm \,. \tag{6.86}$$

matematički ekvivalentan onom vodikovog atoma. Kod problema dva tijela rotacijska simetrija i njoj odgovarajući zakon očuvanja momenta impulsa ($\boldsymbol{L}$=const.) manifestiraju se kroz činjenicu da putanja sustava (elipsa) ostaje cijelo vrijeme u istoj ravnini. Međutim, ovdje se javlja i zanimljiva dodatna simetrija — putanja je zatvorena elipsa i smjer perihela elipse je također konstantan†. Odgovarajući očuvani vektor je tzv. *Laplace-Runge-Lenzov* vektor

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L} - \frac{e_M^2}{r}\boldsymbol{r} \,. \tag{6.87}$$

Njegovo očuvanje ($\boldsymbol{M}$=const.) slijedi iz drugog Newtonovog zakona uz malo elementarne vektorske algebre. Prije svega primijetimo da je

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{r\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r}}{r^2} \,,$$

gdje smo iskoristili $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})/2\mathrm{d}t = rdr/dt$. Sad deriviramo (6.87) po vremenu pa uz korištenje

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}/m = -(e_M^2\boldsymbol{r})/(mr^3)$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}}_{=0} - e_M^2 \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{e_M^2}{mr^3} \underbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L}}_{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}} - \frac{e_M^2}{mr^3}\left[r^2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\right] \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

*Ovdje radimo s pojednostavljenim modelom vodikovog atoma opisanim hamiltonijanom (6.81). U realnom vodikovom atomu postoje i dodatni članovi u hamiltonijanu, poput člana interakcije spina i orbite, koji razbijaju ovu degeneraciju i čine da energije nivoa ovise i o orbitalnom kvantnom broju l — tzv. *fina struktura* vodikovog spektra.

†Ovo vrijedi u klasičnoj Newtonovoj teoriji gravitacije. Poznato je da Einsteinova teorija gravitacije korigira ovaj rezultat i da smjer perihela elipse nije konstantan već vrlo polako precesira.

Dobro je uočiti kako je za ovaj izvod ključno da je $\boldsymbol{F} \propto 1/r^2$. Također, uočite da su $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{L}$ okomiti jer je očito da je $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{L} = 0$. Sad nakon što smo identificirali ovaj dodatni očuvani vektor (6.87) možemo lako riješiti problem dvaju tijela. Vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M} &= \underbrace{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L})}_{\boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v})} - \frac{e_M^2}{r} r^2 = \frac{L^2}{m} - e_M^2 r \\ &= r M \cos\theta \end{aligned} \tag{6.88}$$

gdje je θ kut kojeg zatvara $\boldsymbol{r}$ prema konstantnom vektoru $\boldsymbol{M}$. Ovu jednadžbu možemo prepisati u obliku

$$\frac{1}{r} = \frac{e_M^2 m}{L^2} \left(1 + \frac{M}{e_M^2} \cos\theta \right) , \tag{6.89}$$

što prepoznajemo kao polarnu jednadžbu elipse ekscentriciteta $e = M/e_M^2$ (vidi npr. [Goldstein, 1980.], jednadžba (3-51)). Dakle riješili smo problem i dobili trajektoriju sustava bez ikakvog rješavanja diferencijalne jednadžbe gibanja!

Možemo li sad ova saznanja primjeniti u kvantnoj mehanici na naš početni problem dodatne degeneracije nivoa vodikovog atoma? Postoji li kvantnomehanički operator koji bi bio analogon Laplace-Runge-Lenzovog vektora (6.87)? Naivni pokušaj s operatorom

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \times \boldsymbol{L} - e^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r} , \tag{6.90}$$

ne prolazi jer ovaj operator, zbog

$$(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})^\dagger = -\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} ,$$

nije hermitski. Stoga je potrebno definirati kvantni Laplace-Runge-Lenzov vektor ovako:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p}) - e^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r} . \tag{6.91}$$

Uz podosta računa (vidi npr. [Greiner i Muller, 1985.], zadaci 14.4–14.8) pokazuje se da vrijede sljedeći identiteti

$$[\boldsymbol{M}, H] = 0 , \tag{A}$$

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{M} = 0 , \tag{B}$$

$$\boldsymbol{M}^2 = \frac{2H}{m} (\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2) + e^4 , \tag{C}$$

$$[L_i, M_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} M_k , \tag{D}$$

$$[M_i, M_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \left(-\frac{2H}{m} \right) L_k . \tag{E}$$

(A) kaže da je $\boldsymbol{M}$ očuvan i u kvantnomehaničkom slučaju, a (D) da je M kartezijev vektor u smislu odjeljka 6.6. (Klasični analogon jednadžbe (C) je $\boldsymbol{M}^2 = 2E\boldsymbol{L}^2/m + e_M^4$.) Definirajmo sada operator

$$\boldsymbol{M'} \equiv \left(-\frac{2H}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{M} \ . \tag{6.92}$$

Uočite da je izraz u zagradi pozitivno definitan jer je cijeli spektar operatora H negativan budući da radimo s vezanim stanjima vodikovog atoma. Ovakav reskalirani operator $\boldsymbol{M'}$ zadovoljava sada komutacijske relacije

$$[M'_i, M'_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \ , \tag{E'}$$

i pomoću njega možemo definirati dva nova operatora

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M'}) \ , \tag{6.93}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{M'}) \ . \tag{6.94}$$

(Odnosno $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{M'} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}$.) Uporabom relacija (D) i (E') te standardnih komutacijskih relacija za moment impulsa $\boldsymbol{L}$ lako se vidi da ova dva operatora zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[I_i, I_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}I_k \ , \tag{6.95}$$

$$[K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \ , \tag{6.96}$$

$$[I_i, K_j] = 0 \ , \tag{6.97}$$

što znači da i I_i i K_i generiraju dvije nezavisne algebre grupe SO(3) tj. da je ukupna grupa simetrija vodikovog atoma SO(3)×SO(3)*.

Sad možemo upotrijebiti naše poznavanje svojstava reprezentacija grupe SO(3). Činjenica da I_i i K_i zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao i moment impulsa povlači da su svojstvene vrijednosti od $\boldsymbol{I}^2$ dane kao $i(i+1)\hbar^2$, a od $\boldsymbol{K}^2$ kao $k(k+1)\hbar^2$, uz $i, k \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \ldots\}$. Dodatni uvjet na ove svojstvene vrijednosti je relacija (B) koja daje:

$$0 = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M'} = (\boldsymbol{I})^2 - (\boldsymbol{K})^2 = i(i+1)\hbar^2 - k(k+1)\hbar^2 \ , \tag{6.98}$$

odnosno $i = k \equiv j$. (Alternativno rješenje jednadžbe (6.98) $i = -(k+1)$ nije moguće jer daje negativne vrijednosti za i ili k.) Prepišimo sada jednadžbu (C) pomoću novih operatora. Množenjem (C) s $(-2H/m)^{-1}$ dobije se

$$\boldsymbol{M'}^2 = -(\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2) - \frac{me^4}{2H} \ , \tag{6.99}$$

*Vrijedi grupni identitet SO(3)×SO(3) = SO(4) pa otud naslov ovog odjeljka. SO(4) je grupa generirana s 6 generatora $L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; $[x_\mu, p_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}$. Definiramo li $L_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L_{jk}$ i $M'_i = L_{4i}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, dobijemo gornje komutacijske relacije.

ili

$$-\frac{me^4}{2}H^{-1} = \boldsymbol{M'}^2 + \boldsymbol{L}^2 + \hbar^2 \tag{6.100}$$

$$= \big[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\big]^2 + \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}\big]^2 + \hbar^2 \tag{6.101}$$

$$= 2\big[\boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{K}^2\big]^2 + \hbar^2 \ . \tag{6.102}$$

To znači da za svojstvena stanja energije i momenta impulsa vrijedi

$$-\frac{me^4}{2}E^{-1} = 2\big[i(i+1)\hbar^2 + k(k+1)\hbar^2\big]^2 + \hbar^2 = \hbar^2\big[4j(j+1)+1\big] = \hbar^2(2j+1)^2 \tag{6.103}$$

što daje spektar

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2(2j+1)^2} \ . \tag{6.104}$$

Uvedemo li kvantni broj $n \equiv 2j + 1$, onda iz $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ slijedi $n = 1, 2, 3, \ldots$ i ovo prepoznajemo kao ispravni izraz za spektar vodikovog atoma. Kako je „pravi” angularni moment $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}$ njegove svojstvene vrijednosti dane su pravilima za zbrajanje momenata impulsa tj.

$$|j - j| \leq l \leq j + j \ , \tag{6.105}$$

tj. $l \leq 2j \leq n - 1$, što je poznati rezultat. Također, l automatski ispada cjelobrojan. Dakle odredili smo kvantnomehanički spektar vodikovog atoma bez rješavanja Schrödingerove jednadžbe!

Da se još jednom uvjerimo da je degeneracija svakog nivoa n^2-struka možemo prebrojati stanja u bazi koja dijagonalizira operatore H, $\boldsymbol{L}^2$ i L_z, što je uobičanjena $|nlm\rangle$ baza. Tu za dati n imamo sve skupa

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = \frac{n}{2}\big(1 + 2(n-1) + 1\big) = n^2 \tag{6.106}$$

degeneriranih stanja. Alternativna baza je ona koja dijagoalizira operatore $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{K}^2$, I_z i K_z čije vektore možemo označiti kao $|j, m_i, m_k\rangle$ i koja daje degeneraciju

$$\sum_{m_i=-j}^{j}\ \sum_{m_k=-j}^{j} 1 = (2j+1)^2 = n^2 \ , \tag{6.107}$$

u skladu s prvim računom.

Zadaci

6.1. Odredite $\langle j, m'|J_i|j, m\rangle \equiv (J_i)_{m'm}$ za $j = 1/2$ i $j = 1$

6.2. Pokažite da vrijedi:

$$\langle j, m'|D^{(j)}(\phi, \theta, \psi)|j, m\rangle = e^{-im'\phi - im\psi}\langle j, m'|e^{-iJ_y\theta/\hbar}|j, m\rangle \ , \tag{6.108}$$

gdje su ϕ, θ i ψ tri Eulerova kuta, te odredite eksplicitno ove matrične elemente za $j = 1/2$.

6.3. Izrazite stanje $|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$ definirano svojstvom

$$\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle = \frac{\hbar}{2}|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$$

preko stanja baze $|j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$.

6.4. Koja je vjerojatnost da mjerenje projekcije spina na z-os za stanje iz prošlog zadatka da rezultat $\hbar/2$?

6.5. Neka je $|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle$ svojstveno stanje operatora usmjerenja u 3D prostoru. Uočite da je

$$\langle n|lm\rangle = Y_l^m(\hat{\boldsymbol{n}}) = Y_l^m(\theta, \phi) \ .$$

Promatrajući operator $D(\phi, \theta, 0)$ koji rotira $|\hat{\boldsymbol{z}}\rangle$ u $|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle$ pokažite da vrijedi

$$D^l_{m0}(\phi, \theta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{m^*}(\theta, \phi) \ .$$

6.6. Promotrite stanje $|\mathrm{rot}_y(\beta)\rangle$, dobiveno rotacijom stanja $|l = 2, m = 0\rangle$ za kut β oko y-osi. Pronađite vjerojatnosti da mjerenje projekcije momenta impulsa na z-os da vrijednosti $m' = 0, \pm 1, \pm 2$.

6.7. Čestica spina 1/2 je u D stanju orbitalnog momenta impulsa ($l = 2$). Koja su moguća stanja ukupnog momenta impulsa? Koje su energije tih stanja ako je hamiltonijan

$$H = A + B\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} + C\boldsymbol{L}^2$$

gdje su A, B i C poznate konstante?

6.8. Izrazite komponente sferičnog vektora $r^{(1)} = (r^{(1)}_{-1}, r^{(1)}_0, r^{(1)}_1)$ preko kartezijevih komponenata r_x, r_y, r_z tj. izvedite relaciju (6.74).

6.9. Neka je poznato da za sferični vektorski operator σ vrijedi

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\sigma_0|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 1 \ .$$

Izračunajte sve ostale matrične elemente ovog operatora između stanja s $j = 1/2$.

6.10. Pronađite izborna pravila za zračenje u kristalu s C_{3v} simetrijom za zračenje polarizirano (a) duž z-osi i (b) duž x ili y osi.

6.11. Tri matrice, M_x, M_y, i M_z, svaka 256×256, zadovoljavaju komutacijske relacije $[M_i, M_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} M_k$. Svojstvene vrijednosti od M_z i broj njihovih pojavljivanja (multiplicitet) su:

sv. vrijednost	2	-2	3/2	-3/2	1	-1	1/2	-1/2	0
multiplicitet	1	1	8	8	28	28	56	56	70

Navedite svojstvene vrijednosti matrice $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ i broj njihovih pojavljivanja.

6.12. Pokažite da se sve komponente tenzorskog operatora $T_M^{(J)}$ mogu dobiti iz $T_J^{(J)}$ uzastopnom primjenom operatora J_-:

$$T_M^{(J)} = C(J, M)[J_-, [J_-, \ldots [J_-, T_J^{(J)}]...]] \; .$$

Koliki je $C(J, M)$?

6.13. Pokažite da se simetrični i antisimetrični dijelovi tenzora drugog ranga ne miješaju pri rotacijama.

6.14. Komutator kvantnomehaničkih generatora rotacija oko različitih osi je proporconalan $\hbar$. Na primjer, $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$. To bi sugeriralo da u klasičnom limitu, gdje $\hbar \to 0$, rotacije oko različitih osi komutiraju. No znamo da to nije točno. U čemu je stvar?

Poglavlje 7

SU(N) interne simetrije elementarnih čestica

Svi primjeri simetrija razmatranih u prošla tri poglavlja, bavili su se *prostorno-vremenskim* transformacijama fizikalnih sustava, poput translacija ili rotacija. U zadnjem poglavlju knjige bavit ćemo se Lorentzovim, Poincaréovim i konformnim transformacijama, koje također spadaju u kategoriju prostorno-vremenskih simetrija. Međutim u fizici, a posebice u fizici elementarnih čestica, od velikog su značaja i tzv. *interne* simetrije, koje transformiraju značajke čestica poput njihove vrste ili raznih „naboja" vezanih uz slabe i jake sile. Povijesno su istraživači nailazili na mnoge teškoće u formuliranju ispravnih teorija tih sila koje vladaju subnuklearnim svijetom, a i dan danas npr. ne znamo riješiti jednadžbe jake sile. Tu su se onda svojstva internih simetrija opaženih u procesima pokazala kao izuzetno korisna[*]. Najveći trijumf fizike visokih energija druge polovice XX. i početka XXI. stoljeća je finalizacija tzv. *standardnog modela* fizike elementarnih čestica čija je struktura praktički potpuno određena njegovom tzv. baždarnom simetrijom i odgovarajućom grupom $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$. Baždarne simetrije u fizici nisu tema ove knjige, ali u ovom ćemo poglavlju izložiti neke ideje i upotrebu nekih internih simetrija, a također i konstrukciju ireducibilnih reprezentacija općenitih $\mathrm{SU}(N)$ grupa, što je od velikog značaja pri izgradnji trenutnih i budućih teorija fizike visokih energija.

[*] Riječ „interna" je povijesni zaostatak iz tog vremena kad je glavni motiv razmatranja tih simetrija bio razumijevanje interne strukture složenih čestica. No, te simetrije jednako uspješno primjenjujemo i na *elementarne* čestice bez unutarnje strukture. Tako riječ „interna" treba razumjeti naprosto kao ne-prostorno-vremenska ili ne-geometrijska simetrija.

Tablica 7.1: Energije, u MeV, tri stanja zrcalnih jezgara ${}^{11}_{6}$C i ${}^{11}_{5}$B. Vidljivo je da su razlike između ove dvije jezgre vrlo male.

${}^{11}_{6}$C	2.00	4.31	4.79
${}^{11}_{5}$B	2.12	4.44	5.02

7.1 Izospin i grupa SU(2)

Prva simetrija kojom ćemo se baviti je povezana s opažanjem da se proton (p) i neutron (n) obzirom na jake nuklearne sile ponašaju vrlo slično. To je dobro vidljivo npr. u energijama pobuđenih stanja zrcalnih jezgara ${}^{11}_{6}$C i ${}^{11}_{5}$B (*Zrcalne jezgre* su jezgre koje se razlikuju samo na zamjenu $p \leftrightarrow n$.) prikazanim u Tablici 7.1. To je navelo Heisenberga da pretpostavi postojanje apstraktne transformacije, nazvane *izospinska* rotacija ili izo-rotacija, koja povezuje stanja p i n na isti način na koji standardne prostorne rotacije povezuju stanja $|m = +\frac{1}{2}\rangle$ i $|m = -\frac{1}{2}\rangle$ elektrona ili bilo kojeg drugog sustava spina 1/2. Tako bi $|p\rangle$ i $|n\rangle$ bili samo dva stanja jedne te iste čestice — *nukleona* $|N\rangle$. Hipoteza je bila da je teorija jake nuklearne sile, još nepoznata u vrijeme uvođenja ideje izospina, simetrična obzirom na izospinske rotacije što objašnjava sličnost zrcalnih jezgara. Razlike u energijama njihovih nivoa, vidljive u Tablici 7.1, su posljedica elektromagnetskih sila koje ne poštuju izospinsku simetriju, ali su znantno slabije od nuklearnih.

Grupno-teorijski, spin i izospin su identični tj. u oba slučaja skup svih transformacija simetrije čini grupu SU(2). Generatori izospina I_i, $i = 1, 2, 3$ imaju stoga iste komutacijske relacije kao i operatori momenta impulsa (generatori rotacija):

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \ , \tag{7.1}$$

što onda ima za posljedicu relacije svojstvenih vrijednosti:

$$\boldsymbol{I}^2|N\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|N\rangle \tag{7.2}$$

$$I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle \tag{7.3}$$

$$I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle \ . \tag{7.4}$$

Treba imati na umu da ove tri koordinate $i = 1, 2, 3$, za razliku od slučaja rotacijske simetrije, nemaju nikakve veze sa prostornim x, y i z osima, već je riječ o posebnom izospinskom vektorskom prostoru. Isto tako, to što proton ima pozitivnu, a neutron negativnu vrijednost treće komponente izospina

M_I

$$|p\rangle \;=\; |I=\frac{1}{2}, M_I=\frac{1}{2}\rangle\,, \tag{7.5}$$

$$|n\rangle \;=\; |I=\frac{1}{2}, M_I=-\frac{1}{2}\rangle\,, \tag{7.6}$$

je stvar konvencije. Isto kao i kod spina, možemo definirati operatore dizanja i spuštanja I_+ i I_- koji „pretvaraju" neutron u proton ili obratno. Važna konceptualna razlika između spina i izospina je u tome da nije teško proizvesti stanje spina koje je svojstveno stanje operatora J_y, dakle usmjereno duž y-osi. To je jednostavna linearna superpozicija stanja $|m=\frac{1}{2}\rangle$ i $|m=-\frac{1}{2}\rangle$ koja se može lako realizirati odgovarajuće usmjerenim magnetom. S druge strane u prirodi se ne opažaju stanja koja su superpozicija protona i neutrona*. No i bez obzira na to hipoteza očuvanja izospina nalaže da teorija jakih sila bude simetrična na cijelu izospinsku grupu, uključujući i rotacije koje bi mogle proizvesti takva nepostojeća stanja. Iz toga slijedi zahtjev da hamiltonijan jake nuklearne sile H_{strong} bude izo-simetričan tj. da komutira s generatorima izospina:

$$[H_{\mathrm{strong}}, I_i] = 0\;. \tag{7.7}$$

Kako je dotični hamiltonijan vrlo složen, svaka ovakva informacija o njegovim svojstvima simetrije je od velike pomoći, kako ćemo vidjeti kroz sljedeće primjere čiji je matematički formalizam u potpunosti ekvivalentan matematičkom formalizmu rotacijske simetrije iz 6. poglavlja.

Primjer 7.1.1 (deuteron)
Deuteron (jezgra deuterija) je vezano stanje jednog protona i jednog neutrona. Pogledajmo prvo općenitu situaciju stanja dva *nukleona*. Ukupni izospin dobivamo direktnim *množenjem* dvaju $I=1/2$ izospinskih stanja i Clebsch-Gordanovim razvojem na direktni *zbroj*

$$\big(I=\frac{1}{2}\big)\otimes\big(I=\frac{1}{2}\big) = \big(I=0\big)\oplus\big(I=1\big)\;. \tag{7.8}$$

To znači da dva nukleona mogu postojati u četiri izospinska stanja: tri s $I=1$ (tzv. izotriplet)

$$|p\rangle|p\rangle \qquad M_I=1 \tag{7.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|p\rangle|n\rangle+|p\rangle|n\rangle\big) \qquad M_I=0 \tag{7.10}$$

$$|n\rangle|n\rangle \qquad M_I=-1\;, \tag{7.11}$$

i jedno s $I=0$ (tzv. izosinglet):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|p\rangle|n\rangle-|p\rangle|n\rangle\big) \qquad M_I=0\;. \tag{7.12}$$

*To je posljedica tzv. superselekcijskih pravila.

Situacija je u potpunosti analogna zbrajanju momenata impulsa dvaju stanja sa *spinom* 1/2, u odjeljku G.

Nadalje, eksperimentalno je poznato da u prirodi nema vezanih stanja od samo dva protona ($|p\rangle|p\rangle$) ili dva neutrona ($|n\rangle|n\rangle$). Izospinska simetrija onda nalaže da se ne pojavljuje ni treće stanje $|I = 1, M_I = 0\rangle$ pa zaključujemo da je primjećeno deuteronsko stanje $|I = 0, M_I = 0\rangle$. Tu informaciju sad možemo iskoristiti na sljedeći način. Općenito stanje (valnu funkciju položaja, spina i izospina) dva nukleona možemo zapisati u obliku

$$\Psi_{N-N} = \phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\Sigma(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)\zeta(\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2) \ , \tag{7.13}$$

odnosno u sustavu samog deuterona i u bazi relativnih koordinata, te standardnim bazama ukupnog spina i izospina

$$\Psi_{N-N} = R(r)Y_L^{M_L}|S, M_S\rangle|I, M_I\rangle \ . \tag{7.14}$$

Za deuteron u osnovnom stanju poznato je da mu je orbitalni moment impulsa $L = 0$*, a upravo smo zaključili da mu je i izospin $I = 0$. To znači da stanje deuterona mora biti oblika

$$\Psi_{\text{deuteron}} = R(r)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}|S, M_S\rangle|I = 0, M_I = 0\rangle \ . \tag{7.15}$$

Nadalje, iz kvantne mehanike je poznato da valne funkcije moraju biti antisimetrične na zamjenu dva identična fermiona. Izospinska simetrija onda ovdje nalaže da Ψ_{deuteron} bude antisimetrično na zamjenu $p \leftrightarrow n$. Definiramo li onda operator zamjene P_{pn} imamo

$$P_{pn}\Psi_{\text{deuteron}} = -\Psi_{\text{deuteron}} \ , \tag{7.16}$$

dok se s druge strane vidi da je

$$P_{pn}R(r) = R(r) \tag{7.17}$$

$$P_{pn}|I = 0, M_I = 0\rangle = -|I = 0, M_I = 0\rangle \ . \tag{7.18}$$

(Prvo je trivijalno, a drugo slijedi iz (7.12).) To onda povlači da mora biti

$$P_{pn}|S, M_S\rangle = +|S, M_S\rangle \ , \tag{7.19}$$

a kako su moguća stanja ukupnog spina protona i neutrona (svaki ima spin $S = 1/2$) $S = 0$ (singlet, antisimetričan na P_{pn}) i $S = 1$ (triplet, simetričan na P_{pn}), vidimo da ukupni spin protona i neutrona u deutronu mora biti $S = 1$. Kako je $L = 0$ odmah znamo i ukupni spin deuterona: $J = 1$. To se onda odražava i na magnetski moment deuterona, odnosno njegov spektar nuklearne magnetske rezonancije (NMR) koji pokazuje tri vrha koja odgovaraju vrijednostima $M_J = -1, 0, 1$.

*U stvarnosti, deuteron ima i malu primjesu stanja s $L = 2$ koju ovdje zanemarujemo.

Primjer 7.1.2 (Pion-nukleon raspršenje)
I ostale subnuklearne čestice se grupiraju u izospinske multiplete. Tako tri piona, π^+, π^0 i π^- tvore izotriplet $I = 1$

	masa (MeV)	M_I
π^+	139.59	1
π^0	135.00	0
π^-	139.59	-1

Razmotrimo sada raspršenje piona na nukleonu. U takvom raspršenju može doći do promjena vrste čestica pa su tako moguće raspršenja $\pi^0 p \to \pi^0 p$, ali i $\pi^0 p \to \pi^+ n$. Amplitude, a time i udarni presjeci ovakvih raspršenja su određeni matričnim elementima tzv. operatora raspršenja S, poput $\langle \pi^+ n | S | \pi^0 p \rangle$. Detalji operatora S ovdje nas neće zanimati, do na činjenicu da je on prvenstveno funkcija hamiltonijana pa je zahvaljujući (7.7) i S izoskalar ($I = 0$). Oznaka S dolazi od engl. *scattering* i operator S ne treba miješati s operatorom spina koji se isto često označava s S. Cilj nam je pokazati da izospinska simetrija onda nalaže povezanost raznih amplituda $\pi - N$ raspršenja, tako što ćemo pokazati da je

$$\langle \pi^+ n | S | \pi^0 p \rangle = \sqrt{2} \Big[\langle \pi^0 p | S | \pi^0 p \rangle - \langle \pi^+ n | S | \pi^+ n \rangle \Big] \,. \tag{7.20}$$

Koliki je ukupni izospin $|\pi N\rangle$ stanja? Ponovno trebamo standardni Clebsch-Gordanov razvoj

$$\big(I = 1\big) \otimes \big(I = \frac{1}{2}\big) = \big(I = \frac{1}{2}\big) \oplus \big(I = \frac{3}{2}\big) \,. \tag{7.21}$$

Stanja $|\pi N\rangle$ možemo izraziti u bazi ukupnog izospina koristeći Clebsch-Gordanove koeficijente iz tablica

$$|\pi^0 p\rangle = |10; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.22}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.23}$$

$$|\pi^+ n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{2}{3}\frac{1}{2}\rangle \,. \tag{7.24}$$

Tako amplituda raspršenja $\pi^0 p \to \pi^+ n$ ima oblik

$$\langle \pi^+ n | S | \pi^0 p \rangle = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} \langle \frac{3}{2}\frac{1}{2} | + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2}\frac{1}{2} | \Big) S \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle \Big) \tag{7.25}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \big(S_{3/2} - S_{1/2} \big) \,, \tag{7.26}$$

gdje smo uveli oznaku S_I na očit način. Slično se dobije

$$\langle \pi^0 p|S|\pi^0 p\rangle = \frac{2}{3}S_{3/2} + \frac{1}{3}S_{1/2}\,, \tag{7.27}$$

$$\langle \pi^+ n|S|\pi^+ n\rangle = \frac{1}{3}S_{3/2} + \frac{2}{3}S_{1/2}\,, \tag{7.28}$$

a onda lako i gore tražena formula. Treba primijetiti da ova analiza pokazuje da su sva moguća $\pi - N$ raspršenja opisana sa samo dva broja $S_{1/2}$ i $S_{3/2}$! Ovakva analiza je principijelno ekvivalentna analizi pomoću Wigner-Eckartovog teorema kakvu smo radili u kontekstu rotacijske simetrije i čitaoc će profitirati ako pokaže kako (7.20) slijedi iz tog teorema. Vrijedno je također razmisliti gdje smo točno u gornjoj analizi upotrijebili činjenicu da je operator S izoskalar?

Primjer 7.1.3 (Omjer udarnih presjeka raspršenja)
Udarni presjeci raspršenja su općenito proporcionalni kvadratu apsolutne vrijednosti matričnih elemenata operatora raspršenja S. Tako je onda omjer udarnih presjeka raspršenja $p+d \to \pi^{+\,3}$H i $p+d \to \pi^{0\,3}$He dan s

$$R = \frac{\sigma(p+d \to \pi^+\,{}^3\mathrm{H})}{\sigma(p+d \to \pi^0\,{}^3\mathrm{He})} = \frac{|\langle \pi^+\,{}^3\mathrm{H}|S|pd\rangle|^2}{|\langle \pi^0\,{}^3\mathrm{He}|S|pd\rangle|^2}\,. \tag{7.29}$$

Jezgre ^{3}He i ^{3}H tvore izodublet

$$\begin{pmatrix} {}^3\mathrm{He} \\ {}^3\mathrm{H} \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \frac{1}{2}\,, \tag{7.30}$$

a d je deuteron. Postupamo kao u prošlom primjeru i prikazujemo početno i konačna stanja u bazi ukupnog izospina:

$$|pd\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2};00\rangle = |I = \frac{1}{2}, M_I = \frac{1}{2}\rangle \tag{7.31}$$

$$|\pi^+\,{}^3\mathrm{H}\rangle = |11;\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{11\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{11\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.32}$$

$$|\pi^0\,{}^3\mathrm{He}\rangle = |10;\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\,. \tag{7.33}$$

Prilikom kreiranja matričnog elementa $\langle|S|\rangle$ stanja s izospinom $3/2$ u konačnom stanju ne sudjeluju zbog očuvanja izospina u jakim interakcijama i dobijamo

$$R = \frac{|\sqrt{2/3}S_{1/2}|^2}{|-\sqrt{1/3}S_{1/2}|^2} = 2\,, \tag{7.34}$$

što je u sasvim pristojnom slaganju s eksperimentalnim brojkama koje su prema jednom eksperimentu $R = 1.91$, a prema drugom $R = 2.26$.

7.2 Grupa SU(3) i kvarkovi

Velik broj novih čestica otkrivenih s napretkom akceleratora i detektora nakon II. svjetskog rata motivirao je istraživače da ih pokušaju organizirati koristeći interne simetrije slične izospinu. Na primjer, osim protona i neutrona, još šest čestica istog spina $\frac{1}{2}$ pokazivali su slična svojstva i mase. M. Gell-Mann i Y. Ne'eman su ovu osmorku i druge grupe sličnih čestica interpretirali pomoću klasifikacijskog sistema nazvanog „osmerostruki put" (engl. *Eightfold way*). Taj je sistem bio posljedica pretpostavljene SU(3) simetrije, čije su ireducibilne reprezentacije (multipleti) dobro odgovarali opaženim grupiranjima čestica.

Grupa SU(N) ima $N^2 - 1$ generatora, što znači da ih SU(3) ima osam i općeniti element grupe će stoga biti oblika

$$e^{i\sum_{A=1}^{8}\alpha_A T_A} \in \mathrm{SU}(3)\,, \tag{7.35}$$

gdje su α_A realni parametri, a T_A generatori. Algebra grupe je definirana komutacijskim relacijama

$$[T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C\,, \tag{7.36}$$

gdje su f_{ABC} strukturne konstante grupe. Kao i kod SU(2), ove strukturne konstante su potpuno antisimetrične u sva tri indeksa (vidi zadatak 7.7.2.). Kao i kod SU(2) gdje su generatori u definicionoj (najnižoj netrivijalnoj) reprezentaciji bili dani 2×2 Paulijevim matricama, tako su generatori definicione trodimenzionalne reprezentacije grupe SU(3) dani kao $T_A = \lambda_A/2$, gdje su λ_A tzv. Gell-Mannove 3×3 matrice

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{7.37}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

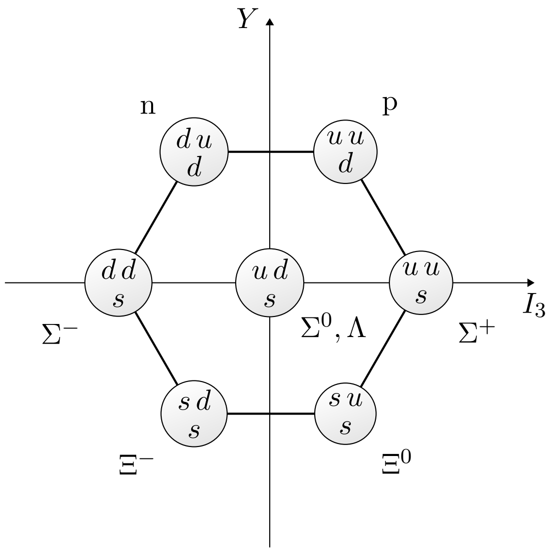
Predfaktori su odabrani tako da univerzalno vrijedi relacija normalizacije

$$\mathrm{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2}\delta_{AB}\,, \tag{7.38}$$

koja vrijedi i za grupu SU(2). Vidljivo je da su prve tri Gell-Mannove matrice zapravo Paulijeve matrice proširene na tri dimenzije iz čega se vidi da one generiraju SU(2) podgrupu od SU(3). Strukturne konstante grupe SU(3) su:

$$\begin{gathered} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; . \end{gathered} \tag{7.39}$$

Kako je $f_{38A} = 0$, T_3 i T_8 komutiraju što povlači da ih je moguće istovremeno dijagonalizirati što je i napravljeno gornjim izborom Gell-Mannovih matrica. Općenito, maksimalan broj istovremeno dijagonalizabilnih generatora naziva se *rang* algebre. Algebra $\mathfrak{su}(3)$ je dakle ranga 2, dok je $\mathfrak{su}(2)$ ranga 1 (jedino je σ_3 dijagonalna). Ono što je razlikovalo stanja unutar istog SU(2) multipleta su bile upravo svojstvene vrijednosti dijagonalnog operatora $J_3 = \sigma_3/2$, dok će stanja u SU(3) multipletima biti analogno specificirana vrijednostima operatora T_3 i T_8. U praksi se umjesto T_8 obično koristi operator tzv. *hipernaboja* $Y = T_8/\sqrt{3}$ ili operator tzv. *stranosti* $S = Y - B$ gdje je B tzv. barionski broj. Obzirom na rang 2, SU(3) multiplete je pogodno prikazivati u ravnini čije su osi T_3 i T_8 (ili Y ili S) pa je tako na slici 7.1 prikazan osnovni oktet bariona ($B = 1$). Kod grupe SU(2),



Slika 7.1: Barionski oktet.

bilo spina, bilo izospina, definiciona reprezentacija (izo)spina $\frac{1}{2}$ se obilato nalazi u prirodi. S druge strane, u vrijeme nastanka „osmerostrukog puta,” nije bila poznata nijedna grupa čestica koja bi odgovarala definicionoj reprezentaciji grupe SU(3) — tripletu. Da bi si pomogli u računima, Gell-Mann i G. Zweig su postulirali tri hipotetske čestice koje je Gell-Mann nazvao *kvarkovi*, s današnjim imenima u (*up*, gornji), d (*down*, donji) i s (*strange*, strani, čudni) od kojih je bilo moguće izgraditi sve druge tada poznate čestice. Na slici 7.1 je vidljiv i kvarkovski sastav čestica barionskog okteta. Originalno se mislilo da su kvarkovi samo pomagalo prilikom računa, no s vremenom su i sami kvarkovi opaženi u eksperimentima, a kasnije su otkrivena još i tri dodatna kvarka, c, b i t. Ovi dodatni kvarkovi u načelu omogućuju i daljnje proširenje simetrije na SU(4) itd., ali zbog velikih razlika u masama ovih dodatnih kvarkova te su simetrije jako narušene i nisu od takve koristi kao izospin i SU(3). Svaki od šest vrsta kvarkova (poznatih i kao šest „okusa") dolazi u tri varijante (poznate kao tri „boje"), tako da kvarkova zapravo ima 18. Od velike je važnosti simetrija koja međusobno transformira tri bojna stanja kvarka i koja također ima grupno-teorijska svojstva grupe SU(3). Treba dobro razlikovati simetriju SU(3) okusa, koja je samo približna simetrija prirode narušena različitim nabojima i masama kvarkova i egzaktnu simetriju SU(3) boje. Kad postoji opasnost zabune, koriste se oznake $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ i $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$.

7.3 SU(3) tenzori

Za grupu SU(2) smo identificirali sve njene ireducibilne reprezentacije razmatrajući isključivo same generatore grupe i njihove komutacijske relacije. Slična procedura je u načelu moguća i za SU(3), ali mi ćemo se ovdje osloniti na intuitivniji pristup koji se fokusira na same objekte na koje operatori reprezentacije djeluju. Ti su objekti SU(3) tenzori raznih rangova (prisjetite se definicije 4.1.2 i diskusije iza primjera 4.1.3) i ta metoda razmatranja reprezentacija se onda naziva „tenzorska." Postupke i rezultate ćemo prikazati na razini recepta, bez detaljnog dokazivanja.

Pogledajmo prvo tenzorski pristup reprezentacijama grupe SU(2). Sve ireducibilne reprezentacije te grupe mogu se dobiti višestrukim direktnim množenjem fundamentalne dvodimenzionalne reprezentacije (dubleta) sa samom sobom*. (Fizikalno govoreći, kombinirajući dovoljan broj sustava spina 1/2 možemo dobiti sustav bilo kojeg spina.). Npr. ukoliko fundamentalni dublet označimo kao ψ^a, $a = 1, 2$, gdje je

$$\psi^1 \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \;, \quad \psi^2 \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \;,$$

*Podsjećamo da se u žargonu izraz „reprezentacija" koristi i za skup operatora homomorfan grupi i za vektorski prostor na kojem ti operatori djeluju. U ovom odjeljku ćemo obično misliti na ovo drugo.

onda direktan produkt tog dubleta sa samim sobom daje četiri stanja:

$$\psi^{11} \equiv \psi^1 \otimes \psi^1 \,, \quad \psi^{12} \,, \quad \psi^{21} \quad \text{i} \quad \psi^{22} \,.$$

No znamo da su ireducibilne reprezentacije od SU(2) zapravo *antisimetrični* singlet

$$\psi^{12} - \psi^{21}$$

i *simetrični* triplet

$$\psi^{11}, \psi^{12} + \psi^{21}, \psi^{22} \,.$$

Ova potreba da se ireducibilne reprezentacije formiraju simetrizacijom i antisimetrizacijom je djelomično rasvijetljena u odjeljku 6.6 i zadatku 6.13. gdje je diskutirano kako se simetrične i antisimetrične komponente tenzora ne miješaju pri transformacijama. Na isti način, direktnim množenjem i (anti)simetriziranjem fundamentalnih trodimenzionalnih reprezentacija grupe SU(3) moguće je konstruirati sve njene ireducibilne reprezentacije. Kao prvo, potrebno je uočiti da SU(3) ima *dvije* neekvivalentne trodimenzionalne reprezentacije, čiji operatori su povezani kompleksnom konjugacijom: $U(g)$ i $U(g)^*$. (Za SU(2) grupu su odgovarajuće dvodimenzionalne reprezentacije ekvivalentne pa je dovoljno raditi samo s jednim fundamentalnim dubletom, vidi zadatak 7.7.3..) Da bismo razlikovali te dvije reprezentacije, odgovarajuće vektore ćemo označavati s gornjim ili donjim indeksom:

$$3: \qquad \psi^a \to \psi'^a = U^a{}_b \, \psi^b \,, \tag{7.40}$$

$$3^*: \qquad \psi_a \to \psi'_a = U^*{}_a{}^b \, \psi_b \,. \tag{7.41}$$

Reprezentaciju 3 obično zovemo *triplet*, a reprezentaciju 3^* *antitriplet*. Direktnim množenjem ovih dviju reprezentacija dobivamo tenzore višeg ranga, $\psi^{ab\cdots}_{r\cdots}$, koji se transformiraju kao:

$$\psi^{ab\cdots}_{r\cdots} \to U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} \cdots U^*{}_r{}^{r'} \cdots \psi^{a'b'\cdots}_{r'\cdots} \,. \tag{7.42}$$

Promotrimo sada direktni produkt 3 i 3^* reprezentacija tj. tenzor $\psi^a \psi_b \equiv \psi^a_b$. Kao prvo, trag tog tenzora $\psi^a \psi_a$ je invarijantan na SU(3) transformacije

$$\psi^a \psi_a \to U^a{}_b U^*{}_a{}^c \psi^b \psi_c = (U^\dagger U)^c{}_b \psi^b \psi_c = \delta^c{}_b \psi^b \psi_c = \psi^b \psi_b \,, \tag{7.43}$$

(koristili smo $U^*{}_a{}^c = U^{\dagger c}{}_a$) što znači da je taj trag tenzor ranga 0. To nam sugerira da tenzor $\psi^a \psi_b$ rastavimo dio s tragom nula i sam trag

$$\psi^a \psi_b = \left(\psi^a \psi_b - \frac{1}{3} \delta^a{}_b \psi^c \psi_c \right) + \frac{1}{3} \delta^a{}_b \psi^c \psi_c \,. \tag{7.44}$$

Daljnje rastavljanje prvog člana odvajanjem simetričnog i antisimetričnog dijela tenzora nije moguće jer gornji i donji indeks nisu ekvivalentni. Kako smo ustanovili da je trag ranga 0, dakle singlet, imamo konačno:

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \,. \tag{7.45}$$

To da je trag invarijantan je očito i iz toga što nema „slobodnog" indeksa na koji bi djelovao operator transformacije $U^a{}_b$. Postoje međutim i važni tenzori viših rangova koji su također invarijantni. Prvi je Kroneckerov simbol $\delta^a{}_b$ koji je SU(3) tenzor ranga 2 (usporedi u (7.44)) koji je invarijantan jer

$$\delta^a{}_b \to U^a{}_c U^*{}_b{}^d \delta^c{}_d = U^a{}_c U^*{}_b{}^c = \delta^a{}_b \,.$$

Na sličan način se je moguće uvjeriti da su Levi-Civita tenzori ϵ^{abc} i ϵ_{abc} također invarijantni. Na primjer,

$$\epsilon^{abc} \to U^a{}_d U^b{}_e U^c{}_f \epsilon^{def} = \det U \epsilon^{abc} = \epsilon^{abc} \,, \tag{7.46}$$

gdje smo upotrijebili svojstvo iz zadatka 4.7.. Značaj Levi-Civita tenzora je da se pomoću njih mogu "spuštati i dizati indeksi" drugih tenzora. Npr. promotrimo antisimetričnu komponentu tenzora ψ^{ab}, koju dobijemo kao $\psi^{[ab]} \equiv (\psi^{ab} - \psi^{ba})/2$. Ona očito ima samo tri nezavisna elementa (slično kao antisimetrična 3×3 matrica). Kontrakcijom s Levi-Civita tenzorom možemo tu činjenicu učiniti eksplicitnom i pokazati da je $\psi^{[ab]}$ ekvivalentan antitripletu ψ_a:

$$\psi_a = \epsilon_{abc} \psi^{bc} \tag{7.47}$$

Usput, Levi-Civita tenzor invarijantan na djelovanje SU(2) grupe ima samo dva indeksa ϵ_{ij}, pa podižući i spuštajući indekse ne mijenja rang tenzora, te se i tako vidi da su u SU(2) dublet ψ^i i antidublet $\psi_i = \epsilon_{ij}\psi^j$ ekvivalentni i da u SU(2) općenito ne moramo razlikovati položaje indeksa.

Primjer 7.3.1 ($3 \otimes 3$)
Kako triplet i antitriplet nisu ekvivalentni, $3 \otimes 3 \neq 3 \otimes 3^*$. Kako su u $3 \otimes 3 = \psi^a \psi^b$ oba indeksa istog tipa, možemo razdvojiti simetrični i antisimetrični dio ovog tenzora koji su svaki za sebe ireducibilni,

$$\psi^a \psi^b = \frac{1}{2}(\psi^a \psi^b + \psi^b \psi^a) + \frac{1}{2}(\psi^a \psi^b - \psi^b \psi^a) \tag{7.48}$$

$$\equiv \psi^{(ab)} + \psi^{[ab]} \tag{7.49}$$

Prvi, potpuno simetrični član, ima šest nezavisnih komponenata (broj nezavisnih elemenata simetrične 3×3 matrice) i predstavlja sekstuplet (6) reprezentaciju, dok smo gore vidjeli da je $\psi^{[ab]}$ ekvivalentan antitripletu ψ_c.

Podsjetimo se da smo u odjeljku 6.6, simetrične 6-dim operatore dodatno reducirali na jednodimenzionalni trag i 5-dim simetrični dio s tragom nula. Ovdje to ne možemo učiniti jer na raspolaganju imamo samo $\delta^a{}_b$ i $\delta_a{}^b$ kao SU(3) invarijante, ali ne i δ^{ab}! (U odjeljku 6.6 to nije bio problem jer u SU(2) ne moramo paziti na razliku između gornjih i donjih indeksa.) Stoga je sekstuplet $\psi^{(ab)}$ ireducibilan.

Dakle, konačni rezultat je

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^* \tag{7.50}$$

Primjer 7.3.2 $(3 \otimes 3 \otimes 3)$
Koristimo prvo rezultat iz zadnjeg primjera:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus 3^*) = (3 \otimes 6) \oplus (3 \otimes 3^*) \; . \tag{7.51}$$

Drugi član već znamo iz (7.45), a prvi je direktan umnožak seksteta $\psi^{(ab)}$ i tripleta ψ^c. Iz tog umnoška možemo izdvojiti potpuno simetričnu komponentu:

$$\psi^{(ab)}\psi^c = \psi^{(abc)} + \text{ostatak} \; . \tag{7.52}$$

Tenzor $\psi^{(abc)}$ je totalno simetrični tenzor ranga 3. Broj njegovih nezavisnih komponenata može se odrediti i izravnim brojanjem. Prvo, postoji samo jedna nezavisna komponenta sa sva tri različita indeksa, npr. ψ^{123}, i sve ostale su joj jednake: $\psi^{123} = \psi^{213} = \psi^{312} = \ldots$. Nezavisnih komponenata s dva ista indeksa i trećim različitim ima šest, npr. $\psi^{112}, \psi^{113}, \psi^{221}, \psi^{223}, \psi^{331}$ i ψ^{332}. Imamo još i tri nezavisne komponente sa sva tri indeksa ista (na „hiperdijagonali" tenzora), ψ^{111}, ψ^{222} i ψ^{333}, što sve skupa čini ukupno 10 nezavisnih komponenata. Dakle, $\psi^{(abc)}$ je dekuplet (10). Preostali dio u rastavu $3 \otimes 6$ ima dimenziju $3 \times 6 - 10 = 8$ i odgovara oktetu (8). (Tu zadnju ekvivalenciju nije lako pokazati ovom tenzorskom metodom. Pokazat ćemo to u zadatku 7.7.4. metodom iz sljedećeg odjeljka.) Dakle, konačni rezultat je

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{7.53}$$

Ovaj primjer je od velikog fizikalnog značaja jer odgovara mogućim kombinacijama triju lakih kvarkova koji čine fundamentalni SU(3) triplet

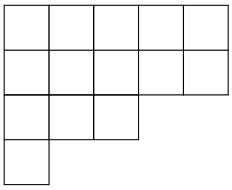
$$\psi^1 = u \; , \quad \psi^2 = d \; , \quad \psi^3 = s \; , \tag{7.54}$$

Jedan od okteta, prikazan na slici 7.1, sadrži proton i neutron.

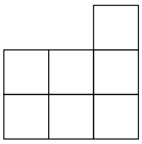
Tenzorske metode analize SU(3) ireducibilnih reprezentacija, prikazane u ovom odjeljku, su pogodne jer istovremeno pokazuju strukturu samih SU(3) objekata što je često od interesa u primjenama, gdje ti objekti odgovaraju kvantnomehaničkim stanjima. Međutim, kako dimenzije reprezentacija rastu, i s njima broj indeksa tenzora, metoda postaje komplicirana. Jednostavnija za primjenu i općenitija je metoda Youngovih dijagrama, koju predstavljamo u sljedećem odjeljku. Klasične reference za napredniji studij ovih tenzorskih metoda i njihovih primjena na fiziku čestica su [Coleman, 1985.] i [Georgi, 1999.].

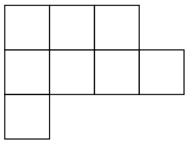
7.4 SU(N) tenzori i Youngovi dijagrami

Youngov dijagram je dijagram poput ovog



gdje je važno svojstvo konveksnosti prema dolje desno tj. da je lijeva strana poravnata i da se broj polja u retcima *ne smanjuje* kako idemo odozgo prema dolje. Dakle, sljedeći dijagrami *nisu* ispravni Youngovi dijagrami.





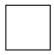
Youngov dijagram s k polja je ekvivalentan SU(N) tenzoru s k indeksa kojem su prvo indeksi koji odgovaraju pojedinim retcima dijagrama simetrizirani, a zatim indeksi koji odgovaraju pojedinim stupcima antisimetrizirani.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^{[ad][be]c} \,. \tag{7.55}$$

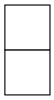
Uočite da antisimetrizacija po stupcima pokvari simetriju po retcima. Ukoliko je u ovom primjeru riječ o SU(3) tenzoru, znamo da je par antisimetriziranih gornjih indeksa ekvivalentan jednom donjem indeksu nakon spuštanja pomoću Levi-Civita tenzora:

$$\mathrm{SU}(3): \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^{[ad][be]c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^{c}_{fg} \,. \tag{7.56}$$

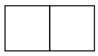
Na sličan način možemo svaki tenzor (dakle svaku ireducibilnu reprezentaciju) prikazati posebnim Youngovim dijagramom. Npr. u SU(3):



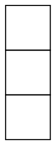
$$\psi^a \qquad 3 \tag{7.57}$$



$$\psi^{[ab]} \Leftrightarrow \psi_c \qquad 3^* \tag{7.58}$$



$$\psi^{(ab)} \qquad 6 \tag{7.59}$$



$$\psi^{[abc]} \propto \epsilon^{abc} \qquad 1 \tag{7.60}$$

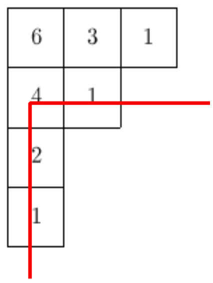
U zadnjem redu smo iskoristili činjenicu da je potpuno antisimetrični tenzor s tri indeksa nužno proporcionalan Levi-Civiti, što znači da je invarijantan i da ga trebamo tretirati kao singlet tj. jedinični element u algebri reprezentacija. Ekvivalentno, stupac s N polja Youngovog dijagrama SU(N) grupe možemo brisati. Dijagram s više od N polja je naprosto nula jer npr. nije moguće napraviti potpuno antisimetrični tenzor s četiri indeksa u SU(3) gdje indeksi poprimaju samo vrijednosti 1, 2 i 3 pa dva od ta četiri indeksa nužno moraju biti jednaka.

Pokažimo sada kako se određuje dimenzija SU(N) reprezentacije reprezentirane nekim Youngovim dijagramom. Youngov dijagram obrojčimo na dva sljedeća načina:

Prvi način: U lijevi gornji kut upišemo N (za SU(N)), i ostatak reda obrojčimo s sukcesivno rastučim brojevima. Slijedeći red isto, ali počnemo s $N-1$. I tako dalje.

N	$N+1$	$N+2$
$N-1$	N	
$N-2$		
$N-3$		

Drugi način: svako polje dijagrama dobije broj određen “pravilom kuke”. Kuka je linija koja od tog polja ide desno u beskonačnost i od tog istog polja dolje u beskonačnost. Broj polja preko kojih kuka prolazi upišemo u dato polje. Postupak ponavljamo za sva polja.



Sada pomnožimo posebno sve brojeve u dijagramu obrojčenom na prvi način i posebno sve brojeve u dijagramu obrojčenom na drugi način. Dimenzija ireducibilne reprezentacije je omjer ta dva broja. Evo tri primjera iz SU(3):

$$\mathrm{SU}(3):\quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}}=\frac{24}{3}=8\qquad \frac{\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}}=\frac{3}{1}=3\qquad \frac{\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}}=\frac{6}{2}=3^*$$

U zadnjem od gornja tri primjera smo se oslonili na informacije ranije dobivene tenzorskim metodama da bi odredili da je zadnja reprezentacija zapravo antitriplet, a ne triplet. Navedimo još neke primjere:

$$\mathrm{SU}(3):\quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline\end{array}}=\frac{12}{2}=6\qquad \frac{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&4&5\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline\end{array}}=\frac{60}{6}=10$$

$$\mathrm{SU}(3):\quad \frac{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&4&5\\\hline 2&3&4\\\hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&3&2\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array}}=10\qquad \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&4&5&6\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5&4&2&1\\\hline 2&1\\\cline{1-2}\end{array}}=27$$

$$\mathrm{SU}(5):\quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 5&6\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}}=40$$

Rastav direktnog produkta dvije SU(N) ireducibilne reprezentacije na direktan zbroj (Clebsch-Gordanov razvoj) izvodi se množenjem odgovarajućih Youngovih dijagrama, T_1 i T_2, na sljedeći način. Polja u desnom dijagramu označimo slovima: polja prvog retka s a, polja drugog retka s b i tako dalje:

$$
\underset{T_1}{\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array}}
\qquad \otimes \qquad
\underset{T_2}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a & a \\ \hline b & b \\ \cline{1-2} c \\ \cline{1-1}\end{array}}
$$

Sada prebacujemo polja s T_2 na T_1, jedno po jedno, redak po redak, odozgo prema dolje, na sve moguće načine, tako da budu zadovoljena sljedeća pravila.

1) T_1 je u svakom trenutku ispravni Youngov dijagram.

2) Polja s istim slovom ne smiju biti u istom stupcu. (Posljedica činjenice da su stupci antisimetrizirani.)

3) Za svako polje nastajućeg tenzora je definiran n_a kao broj polja s indeksom a iznad i desno od njega. Isto tako n_b itd. Mora biti: $n_a \geq n_b \geq n_c$.

Na kraju

- Maknemo stupce s N polja. (Jer je totalno antisimetrični tenzor s N indeksa proporcionalan s $\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_N}$ i time SU(N) invarijanta.)

- Dva dijagrama istog oblika odgovaraju posebnim ireducibilnim reprezentacijama samo ako se razlikuju po razmještaju slova $a, b, \ldots$. U suprotnom jednog maknemo.

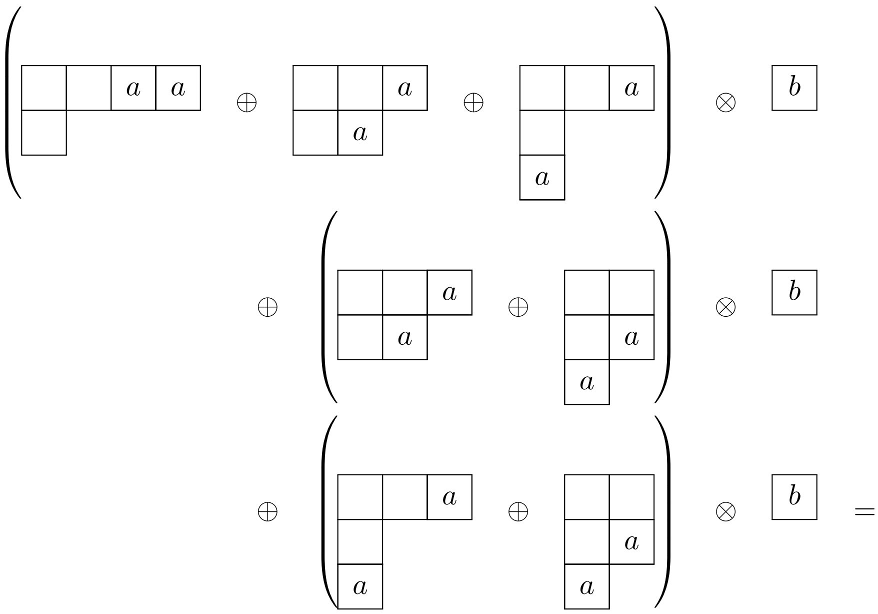
Primjer 7.4.1 ($8 \otimes 8$ u SU(3))

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}
\otimes
\begin{array}{|c|c|}\hline a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}
=
$$

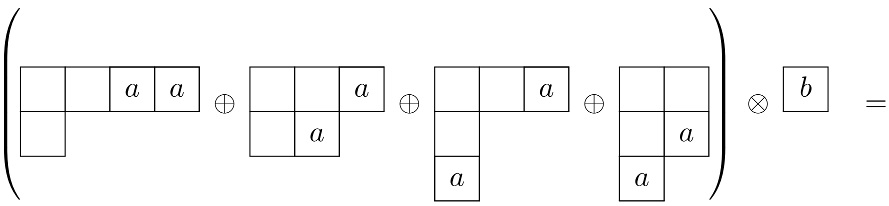
Jedno $\boxed{a}$ se može premjestiti na T_1 na tri različita načina

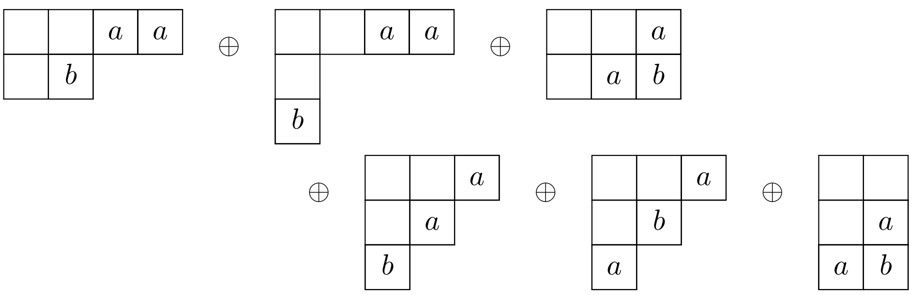
$$
\left(
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & a \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}
\oplus
\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & a \\ \hline\end{array}
\oplus
\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} a \\ \cline{1-1}\end{array}
\right)
\otimes
\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline\end{array}
=
$$

Sad premještamo drugo $\boxed{a}$:

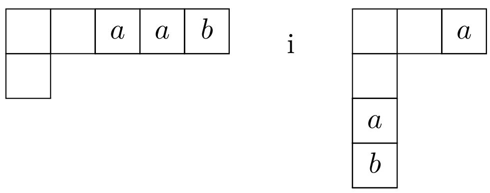


Tu iznad imamo tri dijagrama u duplikatu pa po jedan maknemo:

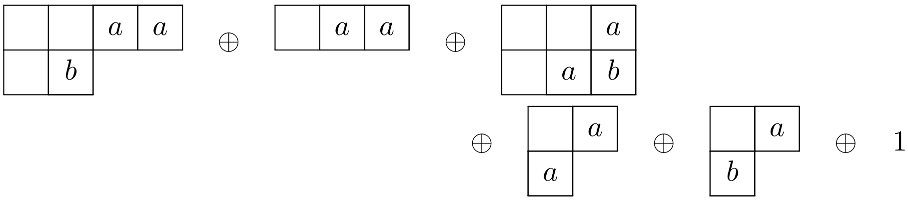




Primijetite da ovdje nismo kreirali sljedeće dijagrame koji bi narušavali gornja pravila:



Sada maknemo sve stupce s tri polja (SU(3) invarijante) i dobijemo konačno:



Dimenzije ireducibilnih reprezentacija za sve ove dijagrame smo već odredili pa očitavamo konačni rezultat

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{7.61}$$

(Zgodno je uočiti da je postupak jednostavniji ako pri množenju kao desni uzmemo Youngov dijagram s manje polja.)

Zadaci

7.1. Ako pretpostavimo očuvanje izospina, koja su moguća izospinska stanja (ukupni izospin i treća komponenta ukupnog izospina) pri raspršenju protona na

a) π^+

b) π^0

c) π^-.

7.2. Pokažite da su, zahvaljujući komutacijskim relacijama i relaciji (7.38), strukturne konstante f_{ABC}, grupe SO(3) potpuno antisimetrične u svim indeksima.

7.3. Pokažite da je za SU(2) $2^* = 2$ tj. da su fundamentalni dublet i antidublet ekvivalentni, tako da pokažete da je operator C

$$C = U(R(\hat{y}, \theta = \pi)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} J_2 \pi\right)$$

operator koji povezuje 2 i 2^*:

$$C\sigma_i C^{-1} = -\sigma_i^*$$
$$CU(g)C^{-1} = U(g)^*$$

7.4. Izračunajte Clebsch-Gordanov razvoj u SU(3) grupi za

- $3^* \otimes 3$

- $3 \otimes 3$
- $3 \otimes 3 \otimes 3$

7.5. Izračunajte Clebsch-Gordanov razvoj u SU(6) grupi za

- $6 \otimes 6^*$
- $6 \otimes 6 \otimes 6$

Poglavlje 8

Lorentzova i Poincaréova simetrija

Iz dosadašnjih poglavlja trebalo bi biti jasno da je moć neke simetrije to veća što je odgovarajuća grupa veća, što će za kontinuirane (Liejeve) grupe obično značiti da je broj generatora grupe veći. Stanja fizikalnih sustava i jednadžbe ili lagranžijani koji tim sustavima upravljaju će u tom slučaju biti više ograničeni zahtjevima kovarijantnosti na transformacije simetrije i predviđanja koja su posljedica primjene teorije grupa će biti netrivijalnija i općenitija. Dodatnu moć simetrije dobivaju od netrivijalnih komutacijskih relacija između generatora simetrija. Tako već i razmjerno jednostavana simetrija na rotacije ima izuzetno netrivijalne posljedice, kako smo vidjeli u 6. poglavlju. Prirodno je onda postaviti pitanje koja je maksimalna simetrija koju teorije prirode moraju poštivati. Osim rotacija, maksimalna grupa simetrija svakako treba sadržavati i translacije u prostoru i vremenu, koje smo sreli u odjeljcima 4.3.1 i 4.3.2. Već i kombiniranje ovih transformacija u istu grupu simetrija nije trivijalno jer translacije i rotacije ne komutiraju. To je vidljivo i iz običnih razmatranja geometrije u prostoru, a i iz neiščezavajućih komutacijskih relacija odgovarajućih kvantnomehaničkih operatora impulsa $\boldsymbol{p}$ i momenta impulsa $\boldsymbol{J}$.

$$[J_i, p_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}p_k \ . \tag{8.1}$$

Pokazuje se da osim upravo navedenih transformacija, maksimalna grupa simetrija koja upravlja najuniverzalnijim poznatim zakonima prirode, onima kvantne teorije polja, od kontinuiranih prostornovremenskih transformacija sadrži još samo Lorentzove transformacije među inercijalnim sustavima, poznate kao Lorentzovi *potisci* (engl. *boost*). Ta maksimalna grupa se obično naziva Poincaréova*. Prije nego se pozabavimo Poincaréovom grupom i njenim reprezentacijama, pogledat ćemo prvo u sljedeća dva odjeljka grupnoteorijska svojstva samih Lorentzovih potisaka koji, kako ćemo vidjeti, ne tvore grupu samostalno nego tek u kombinaciji s rotacijama.

8.1 Lorentzova grupa

Einsteinova specijalna teorija relativnosti počiva na tzv. principu relativnosti. Prema njemu, postoji skup ekvivalentnih koordinatnih sustava (zvanih *inercijalni sustavi*) u međusobnom jednolikom pravocrtnom gibanju, a u kojima fizikalni zakoni i pojave izgledaju isto. Promatrač ne može eksperimentalno detektirati da se giba, ako se giba jednoliko. Mirovanje nije apsolutno, čega su na ovaj ili onaj način bili svjesni već Kopernik, Galilei i Newton, ali je tek Einstein uočio druge radikalne posljedice ovog načela, poput toga da ni simultanost događaja nije apsolutna. Princip relativnosti je princip simetrije na troparametarski skup transformacija koje preslikavaju inercijalne sustave jedan u drugi. Da bismo vidjeli o kojoj se grupi simetrija radi (i da li se uopće radi o grupi), moramo ustanoviti kako se kombiniraju transformacije među inercijalnim sustavima.

Kako je poznato, iz principa relativnosti slijedi da transformacije iz sustava $S = \{t, x, y, x\}$ u sustav $S' = \{t', x', y', x'\}$, tzv. *Lorentzovi potisci*, imaju oblik†

$$t' = \gamma\big(t - \frac{\beta}{c} z\big) \,, \tag{8.2}$$

$$x' = x \,, \tag{8.3}$$

$$y' = y \,, \tag{8.4}$$

$$z' = \gamma\big(z - \beta ct\big) \,, \tag{8.5}$$

gdje je c brzina svjetlosti i gdje je radi jednostavnosti uzeto da se je brzina $\boldsymbol{v}$ relativnog gibanja dvaju sustava duž z-osi, $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$, te su uvedene standardne pokrate

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \,, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \,.$$

*Priroda poštuje i općenitije trasformacije prostorvremena poznate kao difeomorfizmi. Odgovarajuće simetrije poštuje klasična Einsteinova teorija gravitacije, ali još ih nismo uspjeli ugraditi u univerzalne kvantne teorije ostalih sila i tim simetrijama se ne bavimo u ovoj knjizi. Ne bavimo se ni *konformnom* grupom simetrija koja Poincaréovim transformacijama dodaje i dilatacije $x^\mu \to \lambda x^\mu$ što je simetrija koja prema trenutnim spoznajama nije egzaktna simetrija prirode, ali je svejedno od velikog teorijskog interesa.

†U standardnoj literaturi se pri izvodu Lorentzovih potisaka osim principa relativnosti obično koristi i postulat o konstantnosti brzine svjetlosti u svim sustavima. No, ovaj drugi postulat je zapravo suvišan, vidi Mermin, Am. J. Phys. **52**(2) (1984) 119 ili J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed.(!), zadaci 11.1 i 11.2.

Ove transformacije djeluju na četverodimenzionalnom vektorskom prostoru koji se zove *prostor Minkowskog* i kojeg sačinjavaju tzv. *Lorentzovi vektori* x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, čije su komponente $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y$ i $x^3 = z$. U prostoru Minkowskog je vektorski produkt dvaju vektora definiran kao

$$(x, y) \equiv x \cdot y \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \,, \tag{8.6}$$

pa je pogodno definirati i tzv. *kovarijantne* komponente istog vektora s donjim indeksima $x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z$, tako da je skalarni produkt jednostavno

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu \,. \tag{8.7}$$

Metrički tenzor

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{8.8}$$

omogućuje pretvorbu donjih kovarijantnih u gornje (*kontravarijantne*) indekse tako da je

$$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}) \tag{8.9}$$

$$x_\mu = (ct, -\boldsymbol{x}) = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{8.10}$$

te skalarni produkt zapisujemo i kao*

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \,. \tag{8.11}$$

Izraženo preko ovih Lorentzovih vektora (zvanih i *četverovektori*), Lorentzovi potisci poprimaju oblik

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^3) \tag{8.12}$$

$$x'^1 = x^1 \,, \tag{8.13}$$

$$x'^2 = x^2 \,, \tag{8.14}$$

$$x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0) \,, \tag{8.15}$$

ili u kompaktnom obliku

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \,, \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \tag{8.16}$$

*Specifično razlikovanje „gornjih” i „donjih” indeksa vektora u specijalnoj teoriji relativnosti služi samo jednostavnom zapisu skalarnog produkta u prostoru Minkowskog. U *općoj* teoriji relativnosti to razlikovanje dviju vrsta koordinata prelazi u razlikovanje dviju vrsta vektora (*kovarijantni* i *kontravarijantni* vektori), odnosno, još preciznije, jezikom diferencijalne geometrije razlikujemo *vektore* i *1-forme*, ali ovdje nam te finese ne igraju nikakvu ulogu.

Očekujemo da će se jednadžbe relativističke fizike izgrađivati od vektora koji se transformiraju kao i x^μ, te odgovarajućih skalara i tenzora, koji se transformiraju množenjem s brojem Λ matrica koji odgovara njihovom rangu, baš kao što se u nerelativističkoj fizici jednadžbe izgrađuju od tenzora s dobrim transformacijskim svojstvima pri prostornim rotacijama, definiranim u (4.10).

Matrice Λ ovise o parametrima Lorentzovog potiska kojeg je prirodno parametrizirati vektorom brzine $\boldsymbol{v}$ pojedinog inercijalnog sustava u odnosu na neki referentni sustav. Vidimo da Lorentzovi potisci $\Lambda(\boldsymbol{v})$ čine 3-parametarski skup. Da li je on grupa? Kako ćemo eksplicitno pokazati u slijedećem odjeljku odgovor je *ne*. Kompozicija dva Lorentzova potiska, ako isti nisu kolinearni, nije samo Lorentzov potisak već kompozicija Lorentzovog potiska i prostorne rotacije

$$\Lambda(\boldsymbol{v}_2) \circ \Lambda(\boldsymbol{v}_1) = R(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) \circ \Lambda(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) \,, \tag{8.17}$$

čija je poznata posljedica pojava tzv. *Thomasove precesije*. Tek skup svih Lorentzovih potisaka i prostornih rotacija čini grupu, za čiju je identifikaciju najlakše osloniti se na definiciju grupe kao skupa transformacija koji ostavljaju skalarni produkt invarijantan, kako smo radili u odjeljku 5.5, gdje smo definirali pseudo-ortogonalnu grupu $\mathrm{O}(1,3)$ upravo kao grupu transformacija koja ostavlja invarijantnim kvadratnu formu koja odgovara skalarnom produktu (8.6). Stoga se $\mathrm{O}(1,3)$ često naziva *opća Lorentzova grupa*. Grupa prostornih rotacija $\mathrm{SO}(3)$ je podgrupa ove grupe koja čuva produkt (8.6) tako da čuva njen prostorni dio, a ne dira vremenski dio. Skup Lorentzovih potisaka $\{\Lambda(\boldsymbol{v})\}$ je podskup ove grupe, ali ne i podgrupa.

Za transformirani 4-vektor $x' = \Lambda x$ vrijedi

$$\begin{aligned}
x'^2 &= g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \qquad &(8.18)\\
&= (x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} \qquad &(8.19)\\
&= x'^\top g x' = x^\top \Lambda^\top g \Lambda x \qquad &(8.20)\\
&= x^2 = x^\top g x \qquad &(8.21)
\end{aligned}$$

pa usporedbom dobivamo definiciju opće Lorentzove grupe $\mathrm{O}(1,3)$ kao grupe svih matrica Λ sa svojstvom

$$\Lambda^\top g \Lambda = g \tag{8.22}$$

što je definicija koju smo upoznali već u (5.59). Uzimanjem determinante ove matrične jednadžbe, uz svojstva da je za svaku matricu $\det A^\top = \det A$

te da je za metrički tenzor $\det g = -1$ dobijemo

$$(\det \Lambda)^2 = 1\,, \tag{8.23}$$

iz čega slijedi da je

$$\det \Lambda = \pm 1\,. \tag{8.24}$$

Ova situacija je analogna situaciji u grupi O(3) čiji elementi također imaju determinantu ± 1 pa (vidi argumentaciju na stranici 97) elementi koji imaju determinantu $+1$ i tako čine podgrupu $\mathrm{SO}(1,3)$ nisu topološki u grupnoj mnogostrukosti povezani sa elementima koji imaju determinantu -1. Za razliku od O(3), koja ima točno te dvije komponente povezanosti (vidi (5.6)), vidjet ćemo da ih $\mathrm{O}(1,3)$ ima četiri. Naime, raspišimo matričnu jednadžbu (8.16) po komponentama

$$\underbrace{(\Lambda^\top)_\mu{}^\nu}_{\Lambda^\nu{}_\mu} g_{\nu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\mu\sigma} \tag{8.25}$$

i pogledajmo komponentu $\mu = \sigma = 0$. Kako je $g_{00} = 1$ imamo

$$1 = g_{\nu\rho} \Lambda^\nu{}_0 \Lambda^\rho{}_0 \tag{8.26}$$

$$= (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2\,. \tag{8.27}$$

Slijedi da je

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2\,, \tag{8.28}$$

odnosno da je $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ što daje dvije mogućnosti:

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \qquad \text{ili} \qquad \Lambda^0{}_0 \leq -1\,. \tag{8.29}$$

Zajedno s dvije mogućnosti za $\det \Lambda$ imamo dakle četiri mogućnosti koje vode na četiri odvojene komponente povezanosti od O(1,3)

$\det \Lambda$	$\Lambda^0{}_0$	oznaka
1	≥ 1	$\mathrm{SO}^+(1,3)$
-1	≥ 1	$P\,\mathrm{SO}^+(1,3)$
1	≤ -1	$\mathrm{SO}^-(1,3) = PT\,\mathrm{SO}^+(1,3)$
-1	≤ -1	$T\,\mathrm{SO}^+(1,3)$

gdje smo izdvojili specijalne elemente grupe $\mathrm{O}(1,3)$ prostornu inverziju (*paritet*) P i vremensku inverziju T, definirane kao

$$P = g : (t \to t, \boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x})\,, \tag{8.30}$$

$$T = -g : (t \to -t, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x})\,. \tag{8.31}$$

Komponenta povezanosti jedinice $SO^+(1,3)$ je od najvećeg interesa i nekad se naziva *prava ortokrona Lorentzova grupa*, a neki autori koriste i samo za nju termin Lorentzova grupa, što ćemo i mi dalje običavati. Iz tablice vidimo da se svi elementi pune Lorentzove grupe $O(1,3)$ mogu prikazati kao produkt jedne od transformacija iz skupa $\{1, P, T, PT\}$ i elemenata $SO^+(1,3)$.

8.2 Generatori i reprezentacije Lorentzove grupe

Kao i kod rotacija, objekte koji se pojavljuju u našim teorijama treba klasificirati prema njihovim transformacijskim svojstvima pri Lorentzovim transformacijama tj. prema pripadnosti reprezentacijama Lorentzove grupe. Kao i kod rotacija, poželjno je usredotočiti se na Lievu algebru grupe koju čine generatori L:

$$\Lambda \in SO^+(1,3)\,, \qquad \Lambda = e^L\,. \tag{8.32}$$

Iz definicionog svojstva (8.22) dobijemo $L^\top g = -gL$, što uz činjenicu da je $g^\top = g$ daje $(gL)^\top = -gL$ odnosno vidimo da je gL antisimetrična matrica. To znači da ako L parametriziramo na slijedeći način

$$gL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & L_{33} \end{pmatrix} \tag{8.33}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ -L_{10} & -L_{11} & -L_{12} & \dots \\ -L_{20} & -L_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -L_{33} \end{pmatrix}, \tag{8.34}$$

svojstvo antisimetrije gL traži

$$L_{0i} = L_{i0}\,, \tag{8.35}$$

$$L_{ij} = -L_{ji}\,. \tag{8.36}$$

tj.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.37}$$

gdje tri parametra L_{01}, L_{02} i L_{03} opisuju Lorentzove potiske, a tri parametra L_{12}, L_{13} i L_{23} prostorne rotacije. Umjesto ovih šest parametara pogodno je koristiti parametre θ_i i ζ_i, definirane na slijedeći način:

$$L = -i(\theta_i J_i + \zeta_i K_i) \qquad i = 1,2,3\,, \tag{8.38}$$

gdje su J_i već dobro poznati generatori rotacija, samo prošireni na četverodimenzionalni prostor Minkowskog

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.39}$$

dok su K_i generatori Lorentzovih potisaka

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.40}$$

Treba primijetiti kako operatori K_i nisu hermitski tako da odgovarajuće transformacije $\exp(-i\zeta_i K_i)$ neće biti unitarne. To je posljedica nekompaktnosti Lorentzove grupe — parametri potiska poprimaju vrijednosti iz nekompaktnog intervala $[0, c)$. Kao posljedica toga integrali po grupnom prostoru ne konvergiraju i ta se beskonačnost za unitarne reprezentacije mora odražavati u beskonačnosti vektorskih prostora na kojima one djeluju. Konačnodimenzionalne reprezentacije nekompaktnih grupa su obavezno neunitarne, gdje jedino trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija čini iznimku. Kao primjer toga, matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ definicione četverodimenzionalne reprezentacija Lorenztove grupe u (8.16) su očito neunitarne. Stoga se stanja kvantnih sustava za koja je unitarnost obavezna prema Wignerovom teoremu (vidi dodatak C) ne mogu transformirati prema konačnodimenzionalnim reprezentacijama. U sljedećem odjeljku ćemo vidjeti kako se ona transformiraju prema beskonačnodimenzionalnim reprezentacijama Poincaréove grupe (koja sadrži Lorenztovu), dok su konačnodimenzionalne neunitarne reprezentacije koje diskutiramo u ostatku ovog odjeljka relevantne za objekte za koje unitarnost nije nužna poput četverovektora položaja ili impulsa te, važno, klasičnih i kvantnih polja.

Pogledajmo prvo komutacijske relacije Lorentzove Lieve algebre $\mathfrak{so}(1,3)$. Eksplicitnim množenjem vidimo da vrijedi

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \,, \tag{8.41}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \,, \tag{8.42}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \,. \tag{8.43}$$

Prva relacija je dobro poznata algebra $\mathfrak{so}(3)$=$\mathfrak{su}(2)$ grupe prostornih rotacija koja je dakle podgrupa Lorentzove grupe. Druga relacija govori da podskup Lorentzovih potisaka nije zatvoren i ne čini grupu, kako smo najavili u prošlom odjeljku. Treća relacija govori da tri generatora potisaka K_i čine kartezijev vektor obzirom na rotacije, vidi (6.72). Ove tri komutacijske relacije su vrlo slične onima iz odjeljka 6.7 gdje smo rastavili grupu SO(4) na direktan produkt SU(2)⊗SU(2) identificirajući kombinacije generatora koji zatvaraju dvije neovisne podgrupe. Slično ćemo postupiti i ovdje te definirati

$$\boldsymbol{J}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{J} \pm i\boldsymbol{K}\big) \,, \tag{8.44}$$

odnosno $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(+)} + \boldsymbol{J}^{(-)}$, $\boldsymbol{K} = -i(\boldsymbol{J}^{(+)} - \boldsymbol{J}^{(-)})$. Primijetite dodatni "$i$" obzirom na situaciju u odjeljku 6.7 koji je potreban zbog minus predznaka u (8.42). Uz ovakve definicije vidimo da su (8.41)–(8.43) ekvivalentne dvjema odvojenim $\mathfrak{su}(2)$ algebrama

$$[J_i^{(+)}, J_j^{(+)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(+)} \,, \tag{8.45}$$

$$[J_i^{(-)}, J_j^{(-)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(-)} \,, \tag{8.46}$$

$$[J_i^{(+)}, J_j^{(-)}] = 0 \,. \tag{8.47}$$

Ovo ipak ne znači da O(1,3) ima istu algebru kao i SU(2)⊗SU(2), jer gore u (8.44) nismo radili *realne* linearne kombinacije generatora, a podsjećamo da su sve Liejeve algebre u ovoj knjizi nad $\mathbb{R}$. Svejedno ispostavlja se* da za klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija Lorentzove grupe možemo kao i u odjeljku 6.7 koristiti parove

$$(j^{(+)}, j^{(-)}) \qquad j^{(+)}, j^{(-)} = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \,. \tag{8.48}$$

Tako imamo trivijalnu 1D (0,0) reprezentaciju i objekte koji se transformiraju prema njoj zovemo Lorentzovi skalari. Slijedeće dvije su 2D tzv. *Weylove* reprezentacije ($\frac{1}{2}$, 0) i (0, $\frac{1}{2}$) prema kojima bi se transformirala bezmasena fermionska polja, kad bi takva postojala, što u ovom trenutku nije poznato. Obični četverovektori poput x^μ pripadaju ireducibilnoj 4D reprezentaciji $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Uočite da ukoliko napravimo restrikciju Lorentzove simetrije $\mathrm{SO}^+(1,3)$ na samo rotacijsku SO(3), ireducibilna reprezentacija $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ postaje reducibilna, pa kako je $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(+)} + \boldsymbol{J}^{(-)}$ standardni Clebsch-Gordanov razvoj („zbrajanje" momenata impulsa) nam kaže da je

$$(j^{(+)} = \frac{1}{2}, j^{(-)} = \frac{1}{2})_{\mathrm{SO}^+(1,3)} \quad = \quad (j=1)_{\mathrm{SO}(3)} \oplus (j=0)_{\mathrm{SO}(3)} \,, \tag{8.49}$$

gdje naravno trodimenzionalni $j = 1$ potprostor odgovara prostornim vektorima, a jednodimenzionalni $j = 0$ potprostor vremenskoj komponenti koja je invarijantna na rotacije.

Za Diracovu jednadžbu koja opisuje *masivna* fermionska polja poput elektronskog, poznato je da udružuje lijeve i desne komponente pa je $\mathrm{SO}^+(1,3)$

*nakon vrlo netrivijalnog postupka *kompleksifikacije* Lieve algebre pravu ortokronu Lorentzovu grupu potrebno proširiti operacijom pariteta P i onda identificirati ireducibilne reprezentacije obzirom na ovu veću grupu. Operator pariteta (8.30) matrično izgleda kao

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{8.50}$$

i eksplicitnim djelovanjem na (8.39) i (8.40) je vidljivo da se pri prostornoj inverziji generatori rotacije transformiraju kao aksijalni vektori (vidi dodatak B),

$$P^{-1}\boldsymbol{J}P = \boldsymbol{J} , \tag{8.51}$$

a generatori Lorentzovih potisaka kao pravi polarni vektori,

$$P^{-1}\boldsymbol{K}P = -\boldsymbol{K} . \tag{8.52}$$

Slijedi da je

$$P^{-1}\boldsymbol{J}^{(\pm)}P = \boldsymbol{J}^{(\mp)} . \tag{8.53}$$

Posljedično, proširivanjem $\mathrm{SO}^+(1,3)$ grupe paritetom, reprezentacije $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2},0)$ više nisu ireducibilne svaka zasebno, već ireducibilna postaje 4D reprezentacija $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, poznata kao Diracova reprezentacija.

Slično, tenzor elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu}$ pripada 6-dimenzionalnoj reducibilnoj reprezentaciji $(1,0)\oplus(0,1)$.

Kao što smo u 6. poglavlju i od samih operatora tražili dobro definirana tenzorska svojstva obzirom na rotacije (npr. tri generatora J_i čine vektor obzirom na rotacije), tako je i u kontekstu Lorentzove simetrije moguće generatore i same elemente grupe definirati na način koji manifestno pokazuje kovarijantnost obzirom na Lorentzove transformacije. Dakle, želimo relacije poput (8.38) i (8.41)–(8.43) zapisati u 4-komponentnoj notaciji, putem Lorentzovih tenzora. To postižemo definiranjem antisimetričnih generatora grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ $J^{\mu\nu}$ kao

$$J^{mn} = \epsilon^{mni} J^i , \tag{8.54}$$

$$J^{i0} = K^i . \tag{8.55}$$

(Podsjetimo se da grčki indeksi idu $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, a latinski $i, m = 1, 2, 3$.) Sada je element grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ dan kao

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right) , \tag{8.56}$$

a komutacijske relacije (8.41)–(8.43) se ujedinjuju u

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} - g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} . \tag{8.57}$$

Također, matrični elementi generatora Lorentzove grupe u 4D definicionoj $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ reprezentaciji dani su kao

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = i\big(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\beta}g^{\nu\alpha}\big) \ . \tag{8.58}$$

S druge strane matrični elementi generatora Lorentzove grupe u 4D Diracovoj reprezentaciji $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ dani su kao

$$J^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \ , \tag{8.59}$$

gdje su γ^{μ} tzv. Diracove gama matrice definirane antikomutacijskim relacijama

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \equiv \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \ . \tag{8.60}$$

Jedan mogući izbor za ove matrice je

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \tag{8.61}$$

gdje su σ^i Paulijeve matrice (5.36).

8.3 Poincaréova grupa

Poincaréova (poznata i kao nehomogena Lorentzova) grupa je proširenje Lorentzove grupe translacijama u prostoru i vremenu. Element (Λ, a) te grupe djeluje na vektore u prostorvremenu Minkowskog kao

$$x^{\mu} \longrightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} \ , \tag{8.62}$$

gdje je $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ matrica Lorentzove transformacije, dok su $a^{\mu} \in \mathbb{R}^{1,3}$ četiri parametra translacija u prostor-vremenu. Kompozicija elemenata Poincaréove grupe, za koju se iz (8.62) lako vidi da je oblika

$$(\Lambda, a) \circ (\bar{\Lambda}, \bar{a}) = (\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a) \ , \tag{8.63}$$

ne zadovoljava definiciju 1.3.7 direktnog produkta grupa. To je posljedica činjenice da za razliku od grupe translacija, Lorentzova grupa nije normalna podgrupa Poincaréove grupe. U takvom slučaju govorimo o *semi-direktnom* produktu grupa i pišemo da je Poincaréova grupa $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{O}(1,3)$, te je označavamo i kao $\mathrm{I\,O}(1,3)$ („I" dolazi od engl. *inhomogenous*).

Riječ je očito o deset-parametarskoj grupi gdje povrh generatora Lorentzove grupe (J^i i K^i) imamo i impuls P^i kao generator translacija u prostoru i

Hamiltonijan H kao generator translacija u vremenu. Algebra ove grupe je algebra Lorentzove grupe $\mathrm{SO}(1,3)$ (8.57) i dodatno

$$[H,H] = [H,P^i] = [P^i,P^j] = 0 \tag{8.64}$$
$$[H,J_i] = 0 \tag{8.65}$$
$$[K^i,H] = iP^i \tag{8.66}$$
$$[J^i,P^j] = i\epsilon^{ijk}P^k \tag{8.67}$$
$$[K^i,P^j] = iH\delta^{ij} \ , \tag{8.68}$$

što je moguće ujedinjeno napisati u 4-dim notaciji kao

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\sigma}P^\rho - g^{\mu\rho}P^\sigma \ . \tag{8.69}$$

Npr.

$$[H,K^i] = [P^0,J^{i0}] = -i(g^{00}P^i - g^{0i}P^0) = -iP^i \ .$$

Relacije (8.64) i (8.65) govore da su impuls i moment impulsa očuvani pri translacijama u vremenu. Zanimljivo je da relacija (8.66) govori kako generatori Lorentzovih potisaka K^i ne komutiraju s Hamiltonijanom što sugerira da ne odgovaraju očuvanim veličinama. To može biti zbunjujuće jer Noetherin teorem nam govori kako bi simetrija obzirom na 10-parametarsku Poincaréovu grupu trebala rezultirati s deset očuvanih veličina, a ovako ih imamo samo 7 — energiju, tri komponente impulsa i tri komponente momenta impulsa. Razrješenje je u tome da Noetherini očuvani naboji (pokušajte ih eksplicitno odrediti) koji odgovaraju Lorentzovim potiscima jesu formalno očuvani (vremenska derivacija iščezava), ali eksplicitno ovise o vremenskoj koordinati* pa nisu od praktične koristi.

U sljedećem odjeljku ćemo se baviti konstrukcijom unitarnih ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe koje djeluju na kvantnomehanička stanja. U tom kontekstu će biti relevantno svojstvo Poincaréove grupe da dopušta i projektivne reprezentacije, vidi odjeljak 6.3, jer njena komponenta povezanosti jedinice nije jednostavno povezana. To znači da je kompozicija transformacija definirana do na fazu. To je isključivo posljedica činjenice da je njena podgrupa Lorentzova grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$, dvostruko povezana. Situacija je potpuno analogna situaciji iz odjeljka 6.3, gdje je grupa rotacija $\mathrm{SO}(3)$ dopuštala projektivne reprezentacije†. Tamo smo identificirali jednostavno povezanu grupu pokrivanja $\mathrm{SU}(2)$ koja ima istu algebru kao i $\mathrm{SO}(3)$, no čije su sve reprezentacije obične, ne-projektivne. Za Lorentzovu grupu također postoji grupa pokrivanja. Riječ je o grupi $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ svih regularnih kompleksnih 2×2 matrica, koja dva puta pokriva Lorentzovu grupu,

*Slično kao što $J_z = xP_y - yP_z$ eksplicitno ovisi o prostornim x i y koordinatama.

†Dvostruku povezanost Lorentzova grupe direktno nasljeđuje od njene podgrupe — grupe rotacija.

što za posljedicu ima da je i ovdje kompozicija transformacija na kvantnim stanjima „dvo-vrijedna" i može uključivati dodatni minus. U skladu s komentarima na kraju odjeljka 6.3 mogli bismo reći da je „istinska" Poincaréova grupa $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. No mi ćemo se svejedno držati standardne Poincaréove grupe, s komponentnom povezanosti jedinice $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SO}^+(1,3)$ jer nam je djelovanje elemenata te grupe na prostoru Minkowskog dobro poznato. S druge strane, pojednostavit ćemo analizu razmatrajući samo prave reprezentacije grupe, znajući da postoji mogućnost i projektivnih, što će se na kraju svesti samo na to spinovi mogu biti i polucjelobrojni, što nije nikakva novost.

8.4 Unitarne reprezentacije Poincaréove grupe

Želja nam je klasificirati i opisati unitarne ireducibilne reprezentacije $U(\Lambda, a)$ Poincaréove grupe na Hilbertovom prostoru jednočestičnih stanja $\mathcal{H}$. Vektori koji razapinju potprostore od $\mathcal{H}$ koji pripadaju tim reprezentacijama su labelirani svojstvenim vrijednostima maksimalnog skupa međusobno komutirajućih generatora grupe (kako je za grupu rotacija bio samo J_3). Poincaréova grupa nije ni kompaktna ni polujednostavna i na nju se ne može primijeniti metoda slična onoj koju smo koristili za grupu rotacija gdje smo identificirali stanje s maksimalnom vrijednošću J_3 i onda razapeli cijeli prostor djelvanjem $J_\pm$. Za Poincaréovu grupu je E. Wigner 1939. godine razvio posebnu metodu — tzv. metodu *induciranih reprezentacija* koju ćemo sada izložiti.

Promatrajući komutacijske relacije Poincaréove grupe (8.41)–(8.43) i (8.64)–(8.68) prirodno je za označavanje stanja koristiti četveroimpuls p^μ, obzirom da pripadajuća četiri operatora P^μ međusobno komutiraju. Komponenta p^0 je redundantna pa ćemo stanja označavati samo s $\boldsymbol{p}$

$$P^\mu |\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = p^\mu |\boldsymbol{p}, \sigma\rangle \,, \tag{8.70}$$

gdje σ označava sve ostale labele potrebne za potpunu specifikaciju stanja unutar dane ireducibilne reprezentacije, a koje tek treba odrediti*. Sva stanja $|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$ s istim p^μ, a različitim σ razapinju potprostor $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}$ kojeg nazivamo *mali* Hilbertov prostor. Zahvaljujući (8.70) djelovanje čistih translacija je jednostavno, podsjetimo se odjeljka 4.3

$$U(1, a)|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = e^{\mathrm{i}p\cdot a}|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle \,. \tag{8.71}$$

Pozabavimo se sada djelovanjem Lorentzovih transformacija $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$.

*Dakle, σ obrojčava ostale dimenzije vektorskog prostora, ortogonalne na kontinuum dimenzija koje obrojčava p^μ.

Skup vektora $\{\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu | \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)\}$ koje dobijemo djelovanjem svih Lorentzovih transformacija na neki vektor p, nazivamo *orbita* tog vektora. Oblik orbite ovisi o karakteristikama vektora i mogućnosti su prikazane na slici 8.1 i bit će diskutirane kasnije. Izaberimo neki konkretni element orbite p^* kojeg ćemo zvati *reprezentant* orbite i označiti zvjezdicom (nema veze s kompleksnom konjugacijom). Konstruirajmo sada skup transformacija $\{L(p) \mid p \in \mathrm{orbita}(p^*)\} \subset \mathrm{SO}^+(1,3)$ koje na *jedinstven* način transformiraju $p^{*\mu}$ u svaki vektor njegove orbite

$$p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu p^{*\nu} \,. \tag{8.72}$$

Označavat ćemo skraćeno $L_p \equiv L(p)$. Elementi $U(L)$ iz unitarne reprezentacije Poincareóve grupe preslikavaju vektore iz $\mathcal{H}_{p^*}$ u $\mathcal{H}_p$ i kako je inverz $U(L_p)^{-1} = U(L_p^{-1})$ definiran jer su U elementi reprezentacije grupe, preslikavanje je injekcija i svi mali Hilbertovi prostori $\mathcal{H}_p$ na orbiti su izomorfni. Tako izbor reprezentanta p^* ne smanjuje općenitost i možemo izabrati bilo koji pogodni reprezentant orbite za daljnju analizu. Nadalje, kad jednom definiramo bazu $\mathcal{H}_{p^*}$ (obrojčenu vrijednostima labele σ), baze ostalih $\mathcal{H}_p$ *definiramo* preslikavanjem

$$|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle \equiv U(L_p)|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle \quad \forall\sigma \,. \tag{8.73}$$

Treba uočiti da će konkretne baze ovisiti o skupu $\{L_p\}$, a sastav tog skupa ovisi ne samo o izboru reprezentanta p^* nego i o izboru elemenata L_p koji na jedinstven način transformiraju p^* u p. Orbitu sačinjavaju vektori različitih iznosa i smjerova troimpulsa $\boldsymbol{p}$, pa će L_p tipično biti kombinacija potiska i rotacije, ali postoji sloboda hoćemo li prvo zarotirati $\boldsymbol{p}^*$ u smjer $\boldsymbol{p}$ pa napraviti odgovarajući potisak ili obrnuto ili pak neka kompliciranija kombinacija.

Za općenitu Lorentzovu transformaciju $\Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)$, između dva proizvoljna vektora p i Λp na orbiti očekujemo da odgovarajući operator $U(\Lambda)$ miješa vektore baze odgovarajućih malih Hilbertovih prostora $\mathcal{H}_p$ i $\mathcal{H}_{\Lambda p}$ tj. da je

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'=1}^{\dim(\mathcal{H}_{\Lambda p})} C_{\sigma\sigma'} |\Lambda\boldsymbol{p}, \sigma'\rangle \,. \tag{8.74}$$

Objekti $C_{\sigma\sigma'}$ (matrice ako je $\dim(\mathcal{H}_p) = \dim(\mathcal{H}_{\Lambda p})$ konačan) nakon transformacije u blok-dijagonalnu formu (ako je potrebno) definiraju tražene unitarne ireducibilne reprezentacije Lorentzove grupe. Ti objekti na kompleksan način ovise o Λ i p eksplicitno te o L_p i p^* implicitno, no sad ćemo vidjeti da su ipak razmjerno jednostavni.

Ograničimo se privremeno na $m > 0$ masivnu situaciju i promotrimo kao reprezentanta $p^{*\mu} = (m, 0, 0, 0)$. Pripadajući mali Hilbertov prostor $\mathcal{H}_{p^*}$ je razapet vektorima $|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle$. Djelovanje $U(\Lambda)$ na proizvoljno stanje na orbiti je

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle &= U(\Lambda)U(L_p)|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle & (8.75)\\ &= U(\Lambda L_p)|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle & (8.76)\\ &= U(L_{\Lambda p})U(L_{\Lambda p}^{-1})\, U(\Lambda L_p)|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle & (8.77)\\ &= U(L_{\Lambda p})\, U(L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p)|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle. & (8.78) \end{aligned}$$

gdje smo u prvom redu iskoristili (8.73) i gdje smo obilato koristili svojstvo da je $U(\Lambda)$ reprezentacija*. Sada treba uočiti da je Lorentzova transformacija koja u (8.78) djeluje na $|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle$ redom

1. transformacija iz sustava mirovanja (p^*) u sustav impulsa p,

2. transformacija u sustav impulsa Λp, te

3. inverzna transformacija koja nas vraća u sustav mirovanja.

Dakle ukupna Lorentzova transformacija je obična rotacija! Tu rotaciju

$$R_{\mathrm{W}} \equiv L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p \,, \tag{8.79}$$

nazivamo *Wignerova rotacija* i nije ju općenito lako eksplicitno odrediti, no nama je ovdje bitno samo to da je to obična prostorna rotacija jer djelovanje rotacija na kvantna stanja dobro znamo. Ono je dano Wignerovim D-matricama, vidi (6.30), pa je odgovarajuća transformacija u $\mathcal{H}_{p^*}$

$$U(R_{\mathrm{W}})|\boldsymbol{p}^*, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R_{\mathrm{W}})|\boldsymbol{p}^*, \sigma'\rangle \,, \tag{8.80}$$

i vidimo da σ nije ništa drugo nego projekcija spina, često označavana s m. Uvrštavanjem u (8.78) dobivamo reprezentaciju Lorentzove grupe

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R_{\mathrm{W}})|\Lambda\boldsymbol{p}, \sigma'\rangle \,, \tag{8.81}$$

te na kraju i reprezentaciju Poincaréove grupe

$$U(\Lambda, a)|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = e^{\mathrm{i}p\cdot a} \sum_{\sigma'=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R_{\mathrm{W}})|\Lambda\boldsymbol{p}, \sigma'\rangle \,. \tag{8.82}$$

*I gdje smo po potrebi radili u „istinskoj" Lorentzovoj grupi $SL(2, \mathbb{C})$ umjesto u $SO^+(1,3)$ da izbjegnemo faze projektivnih reprezentacija, vidi diskusiju na kraju prošlog odjeljka.

Centralni je rezultat ovog razmatranja da je, pored mase m, standardni spin j jedino drugo svojstvo sustava potrebno za specifikaciju njegovog ponašanja pri Poincaréovim transformacijama. Masa je svojstvena vrijednost Casimirovog operatora P^2, a spin je svojstvena vrijednost Casimirovog operatora $\boldsymbol{J}^2$, koji se može pogodno generalizirati na kovarijantni operator W^2 gdje je W^μ *operator Paulija i Ljubanskog*

$$W_\mu \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma \,, \tag{8.83}$$

gdje je $J^{\nu\rho}$ definiran u (8.54)–(8.55). Čitatelj će se lako uvjeriti da u sustavu mirovanja vrijedi

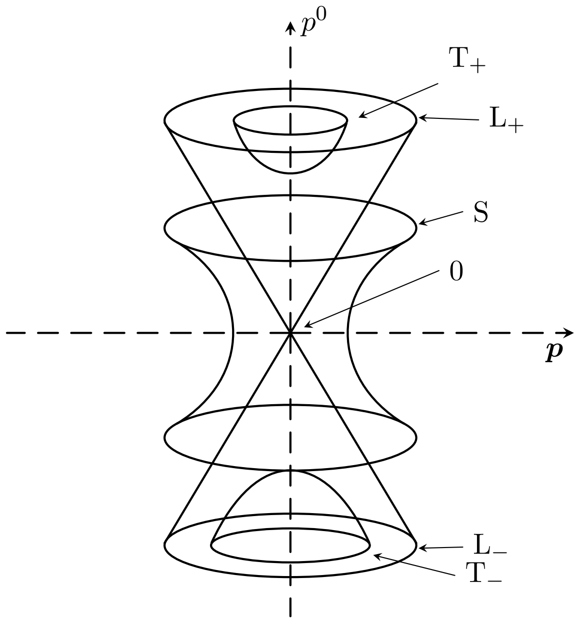
$$W^2 = -m^2\boldsymbol{J}^2 = -m^2 j(j+1) \,. \tag{8.84}$$

Par (m, j) potpuno specificira ponašanje sustava pri kompletnom skupu prostornovremenskih simetrija danih Poincaréovom grupom, i često se govori da je *definicija* „čestice” to da je to sustav koji predstavlja ireducibilnu reprezentaciju Poincaréove grupe ili, alternativno, da je to sustav definirane mase i spina. Treba reći da se ovdje ne ograničavamo samo na tzv. elementarne čestice. I ne-elementarni sustavi, ako ih promatramo u situacijama koje ne razlučuju njihovu unutarnju građu (npr. proton na energijama na kojima se ne pobuđuju kvarkovi ili vodikov atom u osnovnom stanju na energijama manjim od 1 eV), predstavljaju *jednočestična stanja* i ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe.

Spomenimo još da se gore diskutirana sloboda u izboru baza malih Hilbertovih prostora na orbiti u praksi koristi tako da se, umjesto standardne *spinske* baze gdje je σ svojstveno stanje J_z, koristi *helicitetna* baza gdje je σ svojstveno stanje operatora heliciteta $\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$, tj. operatora momenta impulsa projeciranog na smjer impulsa čestice. To ima nekoliko prednosti

- Helicitet $\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ komutira s impulsom $\boldsymbol{P}$ (vidi zadatak 8.5.) pa je onda stanje $|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$ specificirano pomoću svojstvenih vrijednosti komutirajućih operatora koje su istovremeno mjerljive.
- U ultrarelativističkom limesu elektromagnetske i jake nuklearne sile čuvaju vrijednost heliciteta.
- U često korištenom sustavu dvije čestice u kojem njihov ukupni troimpuls iščezava, njihov orbitalni moment impulsa je okomit na smjer njihovog relativnog gibanja. Tada je ukupni spin duž tog smjera (što je važna očuvana veličina) dan jednostavnim zbrajanjem heliciteta bez potrebe dodavanja doprinosa orbitalnog momenta impulsa kojeg često ne znamo.

Ovo smo razmatranje proveli specijalizirano za sustav s $m > 0$. Pogledajmo sada općenitu situaciju. U gornjem izvodu ključno je bilo identificirati grupu simetrija koja ostavlja invarijantnim reprezentirajući vektor p^*. Ta se grupa naziva *mala grupa* ili *stabilizator* i u gornjem slučaju to je bila grupa rotacija SO(3). Pokazali smo da se puna reprezentacija $U(\Lambda, a)$ inducira iz te male grupe pa je to bio primjer metode induciranih reprezentacija. Metoda općenito uključuje identificiranje klasa elemenata vektorskog prostora (ovdje $p \in \mathbb{R}^{1,3}$) koji su kao skupovi invarijantni na djelovanje pune grupe (ovdje orbite Poincaréove grupe), identificiranje pogodnih reprezentanata tih klasa p^* i određivanje njihovih malih grupa. Sve kategorije orbita prikazane su na slici 8.1 a pogodni reprezentanti i pripadajuće male grupe su



Slika 8.1: Kategorije mogućih orbita vektora u prostoru Minkowskog.

	orbita	reprezentant p^*	mala grupa
T_+	$p^2 = m^2 > 0,\ p^0 > 0$	$(m, 0, 0, 0)$	SO(3)
T_-	$p^2 = m^2 > 0,\ p^0 < 0$	$(-m, 0, 0, 0)$	SO(3)
L_+	$p^2 = 0, p^0 > 0$	$(\omega, 0, 0, \omega)$	ISO(2)
L_-	$p^2 = 0, p^0 < 0$	$(-\omega, 0, 0, \omega)$	ISO(2)
S	$p^2 = -\kappa^2 < 0$	$(0, 0, 0, \kappa)$	SO(1, 2)
0	$p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	Poincaré

Za ovu kategorizaciju je prvenstveno iskorištena činjenica da je kvadrat četverovektora p^2 invarijanta, što općenito dijeli četverovektore na one vremenskog tipa (T), $p^2 > 0$, svjetlosnog tipa (L), $p^2 = 0$ i prostornog tipa (S),

$p^2 < 0$. Nadalje, za $p^2 \geq 0$ i predznak od p^0 je invarijantan (uvjerite se u to), što cijepa kategorije T i L na dvije podkategorije. Stanja iz kategorija T_-, L_- i S nisu dosad identificirana u prirodi pa ih nećemo razmatrati*. Kategorija 0 predstavlja vakuum koji je invarijantan na cijelu Poincaréovu grupu pa je odgovarajuća reprezentacija trivijalna i ne trebamo je dalje razmatrati. Kategoriju T_+ smo upravo razmotrili gore. Tako nam preostaje razmotriti kategoriju L_+ bezmasenih stanja pozitivne energije kojoj pripadaju npr. fotoni.

Fotoni nemaju sustav mirovanja pa je najjednostavniji reprezentant oblika $k^{*\mu} = (\omega, 0, 0, \omega)$. Očito je da ovaj put mala grupa *nije* grupa rotacija. Jedino rotacije oko z-osi $\{R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ ostavljaju $k^{*\mu}$ invarijantan. Malu grupu kompletiraju dvoparametarske translacije u $t-z$ „ravnini" dane matricom

$$T(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1+\boldsymbol{u}^2/2 & u_1 & u_2 & -\boldsymbol{u}^2/2 \\ u_1 & 1 & 0 & -u_1 \\ u_2 & 0 & 1 & -u_2 \\ \boldsymbol{u}/2 & u_1 & u_2 & 1-\boldsymbol{u}^2/2 \end{pmatrix}, \tag{8.85}$$

parametriziranom vektorom $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Čitatelj će se lako eksplicitnim množenjem uvjeriti da vrijedi

$$T(\boldsymbol{u})^\mu{}_\nu k^{*\nu} = k^{*\mu}, \tag{8.86}$$

a također i

$$T(\boldsymbol{u})T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), \tag{8.87}$$

$$R(\theta)T(\boldsymbol{u})R(\theta)^{-1} = T(R(\theta)\boldsymbol{u}), \tag{8.88}$$

uz $R(\theta)\boldsymbol{u} = (u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta, -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta)$, što potvrđuje interpretaciju T kao translacije i pokazuje da je mala grupa od k^* troparametarska grupa translacija i rotacija 2D prostora poznata kao *euklidska* grupa $\mathrm{I\,SO}(2)$, kako je i naznačeno u gornjoj tablici. Baza odgovarajućeg malog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_{k^*}$ bit će razapeta vektorima

$$|\boldsymbol{k}^*, \sigma\rangle = |\boldsymbol{k}^*, t_1, t_2, \lambda\rangle, \tag{8.89}$$

gdje je λ svojstvena vrijednost od J_z koju ćemo po analogiji s masivnim slučajem zvati helicitet, a $t_{1,2} \in \mathbb{R}$, su svojstvene vrijednosti infinitezimalnih generatora translacija T (odredite ih, vidi zadatak 8.6.). Jedino izolirano jednočestično bezmaseno stanje koje smo dosad opazili u prirodi je foton koji u eksperimentima ne pokazuje nikakve značajke koje bi ukazivale na posjedovanje dodatnog kontinuiranog kvantnog broja t_i pa smo prisiljeni zaključiti da je za foton $t_1 = t_2 = 0$, te da priroda nije iskoristila mogućnost

*Neka razmatranja tih kategorija mogu se naći u [Başkal, Kim i Noz, 2024.]

$t_i \neq 0$. Stavimo onda $t_1 = t_2 = 0$ i promotrimo mali Hilbertov prostor razapet s $|\boldsymbol{k}^*, \lambda\rangle \equiv |\boldsymbol{k}^*, 0, 0, \lambda\rangle$. Kako mala grupa ne sadrži operatore dizanja i spuštanja $J_\pm$, njenim djelovanjem λ se ne mijenja* i posljedično je mali Hilbertov prostor *jednodimenzionalan* i ponašanje bezmasenih stanja pri transformacijama iz Poincaréove grupe $(\Lambda, a) \in \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SO}^+(1,3)$ je jednostavno

$$U(\Lambda, a)|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = e^{\mathrm{i}k\cdot a} e^{-\mathrm{i}\lambda\theta(\Lambda,k)} |\Lambda\boldsymbol{k}, \lambda\rangle \,, \tag{8.90}$$

gdje je kut $\theta(\Lambda, k)$ potrebno odrediti netrivijalnim postupkom slično kao i Wignerovu rotaciju u masivnom slučaju. Uočite da stanja sa suprotnim helicitetima λ i $-\lambda$ pripadaju različitim reprezentacijama i s tog stanovišta su lijevi i desni foton dvije različite čestice. No ako proširimo grupu i s operatorom prostorne inverzije $P \in \mathrm{O}(1,3)$, slično kao za Diracovu reprezentaciju u odjeljku 8.2, ustanovili bi da on mijenja predznak od λ pa je u kontekstu teorija koje imaju simetriju na prostornu inverziju, a takav je elektromagnetizam, ipak prirodno desni ($\lambda = 1$) i lijevi ($\lambda = -1$) foton smatrati dvama stanjima iste čestice.

Zadnja finesa je da ništa dosad rečeno ne ograničava helicitet λ da ne bude bilo koji realni broj. Sjetimo se naime da je kvantizacija spina u 6. poglavlju bila posljedica $\mathfrak{so}(3)$ algebre koju ovdje nemamo. Međutim, ovisnost o λ u (8.90) je samo kroz fazu, a kako je Poincaréova grupa dvostruko povezana (naslijeđeno od njene SO(3) podgrupe rotacija), rotacije za $\theta = 2\pi$ smiju rezultirati samo fazom ± 1 i slijedi da je ipak $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \ldots\}$. Razlog da je spin bezmasenih čestica polucjelobrojan nije posljedica algebre (okoline jediničnog elementa) nego topologije (globalne strukture) grupe simetrija.

Zadaci

8.1. Uvjerite se eksplicitno da (8.57) sadrži npr. (8.43).

8.2. Uvjerite se eksplicitno da (8.58) daje npr. (8.40).

8.3. Uvjerite se da generatori $J^{\mu\nu}$ definirani putem (8.59) i (8.60) zadovoljavaju komutacijske relacije Lorentzove grupe (8.57).

8.4. Uočite da je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru pod djelovanjem grupe rotacija SO(3) orbita vektora $\hat{\boldsymbol{z}} = (0, 0, 1)$ sfera S^2, a da je odgovarajuća mala grupa SO(2). Zatim konstruirajte bijekciju između te sfere i kvocijentnog skupa SO(3)/SO(2). Općenito postojanje takve bijekcije tj. činjenica da je kvocijentni skup

*Operatori translacije isto ne mijenjaju λ za stanja s $t_1 = t_2 = 0$ u što se lako možete uvjeriti nakon što ste odredili komutacijske relacije u zadatku 8.6.. Ispostavlja se da je ta translacijska simetrija povezana s tzv. baždarnom simetrijom kvantne elektrodinamike, vidi [Weinberg, 2005.].

po maloj grupi (stabilizatoru) jednak orbiti poznato je kao *teorem orbite i stabilizatora*.

8.5. Pokažite da operator heliciteta $\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}$ komutira s operatorom impulsa $\boldsymbol{P}$.

8.6. Odredite inifinitezimalne generatore dvodimenzionalne euklidske grupe $\mathrm{I\,SO}(2)$ i njihove komutacijske relacije.

Dodaci

Dodatak A

Kristalografske oznake i grupe

Ireducibilne reprezentacije $\Gamma^{(\alpha)}$ se obično označavaju velikim slovima i to tako da se 1D reprezentacije označavaju slovima A i B, 2D reprezentacije slovom E, 3D reprezentacije slovom T itd. Par kompleksno konjugiranih 1D reprezentacija se smatra jednom 2D reprezentacijom (jer ih povezuje vremenska inverzija) tako da se one udružuju vitičastom zagradom i označavaju s E.

Klase konjugacije se obično označavaju simbolom mC_n gdje je m broj elemenata klase, a C_n tipični predstavnik klase označen Schönfliesovim simbolom:

E	$=$	identiteta
C_n	$=$	rotacija za $2\pi/n$
σ	$=$	refleksija preko ravnine
σ_h	$=$	refleksija preko "horizontalne" ravnine tj. ravnine okomite na os najveće rotacijske simetrije
σ_v	$=$	refleksija preko "vertikalne" ravnine tj. ravnine koja sadrži os najveće rotacijske simetrije
σ_d	$=$	refleksija preko "dijagonalne" ravnine tj. ravnine koja sadrži os najveće rotacijske simetrije i raspolavlja kut između dvije C_2 osi okomite na tu os. (Specijalni slučaj σ_v.)
S_n	$=$	rotacija za $2\pi/n$ kombinirana s refleksijom preko ravnine okomite na os te rotacije (Ove dvije operacije komutiraju.)
i	$=$	S_2 $=$ inverzija $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$

Ako ima više istovrsnih klasa, označavamo ih po redu npr. C_2, C_2', C_2'', itd.

Točkaste grupe kristala se označavaju slijedećim Schönfliesovim oznakama:

C_n	=	grupe s jednom C_n osi simetrije
C_{nv}	=	grupe s jednom C_n osi i n σ_v refleksijskih ravnina
C_{nh}	=	C_n os, σ_h refleksija + dodaci
S_n	=	S_n os
D_n	=	C_n os i n C_2 osi okomitih na nju
D_{nd}	=	elementi od D_n i σ_d ravnine refleksije
D_{nh}	=	elementi od D_n i σ_h ravnina refleksije
T	=	tetrahedralna grupa
O	=	oktahedralna grupa

Tablice karaktera nekih grupa koje se pojavljuju u ovoj knjizi

Ciklička grupa C_3:

	E	C_3	C_3^2
A	1	1	1
E	1	ω	ω^2
	1	ω^2	ω

gdje je $\omega = e^{2\pi i/3}$ kubni korijen jedinice i gdje su zadnje dvije ireducibilne reprezentacija međusobno kompleksno konjugirane pa se često smatraju jednom dvodimenzionalnom reprezentacijom E.

Ciklička grupa C_4:

	E	C_4	C_2	C_4^3
A	1	1	1	1
B	1	-1	1	-1
E	1	i	-1	$-i$
	1	$-i$	-1	i

Kleinova četvorna grupa D_2

	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$
A_1	1	1	1	1
B_1	1	1	-1	-1
B_2	1	-1	1	-1
B_3	1	-1	-1	1

Dihedralna grupa D_3

	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Dihedralna grupa D_4

	E	$2C_4$	C_2	$2C_2'$	$2C_2''$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

Ova je grupa izomorfna grupi C_{4v}, samo što su u tom slučaju neke rotacije za π zapravo refleksije: $C_2' \to \sigma_v$ i $C_2'' \to \sigma_h$.

Tetrahedralna grupa T:

	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
A	1	1	1	1
E	1	1	ω	ω^2
	1	1	ω^2	ω
T	3	-1	0	0

gdje je $\omega = e^{2\pi i/3}$ kubni korijen jedinice.

Dodatak B

Aksijalni vektori

Aksijalni ili *pseudovektori* su objekti koji se pri rotacijama transformiraju isto kao i obični (tzv. *polarni*) vektori, ali pri refleksijama i inverzijama imaju još i dodatnu promjenu predznaka.

Inverzija običnim vektorima u 3D euklidskom prostoru mijenja predznak

$$i : \boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$$

i može se reprezentirati dijagonalnom matricom

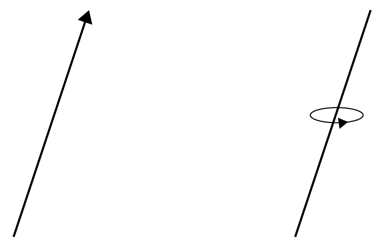
$$i = -\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; .$$

No, vektorski produkt dvaju polarnih vektora, npr. vektora položaja $\boldsymbol{r}$ i impulsa $\boldsymbol{p}$ posljedično *ne mijenja* predznak:

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \; \xrightarrow{i} \; (-\boldsymbol{r}) \times (-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{L} \; ,$$

što znači da je $\boldsymbol{L}$ (moment impulsa) aksijalni vektor. (U fizici su veličine vezane uz vrtnju, poput momenta impulsa ili momenta sile, često reprezentirane aksijalnim vektorima. Isto vrijedi za veličine vezane uz magnetizam koji je obično rezultat kruženja (mikro ili makro) struja.)

Da bi se naglasila njihova različitost, ponegdje u literaturi se aksijalne vektore ne crta kao usmjerene crte (strelice), već kao crte s "aksijalnim strelicama" (vidi [Bronštejn i dr., 2004.] p. 186)



Slično definiramo *pseudoskalarne* veličine kao one koje su skalari obzirom na rotacije, ali mijenjaju predznak pri refleksijama i inverzijama. Npr. miješani produkt polarnih vektora je pseudoskalar:

$$P = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r}_2 \xrightarrow{i} -(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r}_2 = -P$$

Magnetski moment, definiran kao $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} dV$ za gustoću struje J, odnosno kao $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2} q\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ za točkasti naboj q, je dakle aksijalni vektor.

Ovaj koncept se generalizira i na tenzore odnosno pseudotenzore višeg ranga. Važan je primjer Levi-Civita pseudotenzor trećeg ranga koji je invarijantan pri rotacijama, ali mijenja predznak pri refleksijama, u što se možemo uvjeriti korištenjem njegovog svojstva iz zadatka 4.7. i svojstva determinanti elemenata O(3) grupe sa stranice 85.

Za još o pseudovektorima i drugim pseudo-veličinama vidi npr. [Arfken i Weber, 1995.].

Dodatak C

Kvantna mehanika u Diracovoj notaciji

Fizikalno stanje kvantnomehaničkog sustava je reprezentirano vektorom u Hilbertovom prostoru za koji se koristi Diracova oznaka $|\alpha\rangle$ — tzv. „ket". (Strogo uzevši, kvantnom stanju odgovara čitava „zraka" $c|\alpha\rangle, c \in \mathbb{C}$.)

Simbol α ovdje stoji za sve kvantne brojeve koji su potrebni za potpuno određenje stanja. Npr, za vodikov atom $|\alpha\rangle = |n, l, m\rangle$. Svakom vektoru odgovara dualni „bra" vektor $\langle\alpha|$, tako da skalarni produkt zapisujemo kao „bra-ket"A $\langle\alpha|\beta\rangle$. Kako je riječ o vektorskom prostoru nad kompleksnim poljem, vrijedi $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$.

Opservabla (veličina koja se eksperimentalno određuje i ima analogon u klasičnoj fizici) je reprezentirana hermitskim operatorom na Hilbertovom prostoru prostoru stanja: $A = A^\dagger$.

Ako su $|a\rangle$ svojstveni vektori od A sa svojstvenim vrijednostima a, tj.

$$A|a\rangle = a|a\rangle \ ,$$

onda mjerenje klasične veličine koja odgovara operatoru A, na sustavu opisanom vektorom $|\alpha\rangle$, s vjerojatnošću $|\langle a|\alpha\rangle|^2$ ima ishod a, nakon čega sustav „skače" u stanje $|a\rangle$.

Očekivana vrijednost mjerenja veličine koja odgovara operatoru A, na sustavu opisanom vektorom stanja $|\alpha\rangle$ je $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$.

Svi svojstveni vektori nekog hermitskog operatora čine jednu bazu Hilbertovog prostora:

$$\sum_a |a\rangle\langle a| = 1 \, .$$

Npr. svi vektori $|\boldsymbol{r}\rangle$ čine jednu tzv. koordinatnu bazu. Schrödingerova valna funkcija $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ su zapravo komponente vektora stanja $|\alpha\rangle$ prikazane u koordinatnoj bazi:

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{r}|\alpha\rangle$$

Operatori transformacije fizikalnog sustava (tj. odgovarajućeg vektora stanja) moraju biti unitarni i linearni (ili antiunitarni i antilinearni)

$$\begin{aligned} \text{unitarnost}: &\ \langle U\alpha|U\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \\ \text{linearnost}: &\ U\big(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\big) = c_1 U|\alpha\rangle + c_2 U|\beta\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{antiunitarnost}: &\ \langle U\alpha|U\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \\ \text{antilinearnost}: &\ U\big(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\big) = c_1^* U|\alpha\rangle + c_2^* U|\beta\rangle \end{aligned}$$

Ovo je sadržaj tzv. Wignerovog teorema, a u osnovi je posljedica zahtjeva za očuvanjem vjerojatnosti i načela superpozicije u kvantnoj mehanici.

Za korektan matematički opis kvantne mehanike, stanja u Hilbertovom prostoru nisu dovoljna. Na primjer, svojstvena stanja važnih operatora impulsa, e^{ipx}, i položaja, $\delta(x - x_0)$, *nisu* elementi Hilbertovog prostora. Prvi jer mu je norma beskonačna, a drugi jer mu norma nije ni definirana (norma je $\int \mathrm{d}x \psi^*(x)\psi(x)$, a kvadrat Diracove delta funkcije nije definiran). Stoga se Hilbertov prostor stanja treba upotpuniti tzv. generaliziranim funkcijama poznatim i kao *distribucije*. Distribucije nisu nužno definirane svojom vrijednosti u pojedinim točkama nego samo kao funkcionali tj. preslikavanja s prostora funkcija na polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Klasičan primjer distribucije je Diracova delta funkcija δ_{x_0} koja je definirana kao preslikavanje koje nekoj pitomoj (tzv. *testnoj*) funkciji $f(x)$ pridružuje broj $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$. Sve „obične" funkcije $g(x)$ su isto i distribucije ako ih promatramo kao funkcional čije je preslikavanje standardni integral $\int \mathrm{d}x g^*(x) f(x)$, pa se često takvim integralom formalno zapisuje i djelovanje distribucije $\int \mathrm{d}x \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$, ali to je samo formalni zapis koji ne odgovara matematičkoj integraciji u smislu Riemanna ili Lebesguea. Prostor Φ testnih funkcija na koje distribucije mogu smisleno djelovati je manji od Hilbertovog (tipično se uzima prostor tzv. Schwartzovih funkcija koje su glatke i imaju svojstvo da one same i sve njihove derivacije padaju u beskonačnosti brže od svake potencije), dok je prostor distribucija $\Phi^\times$ kako smo vidjeli veći od Hilbertovog. Cijela ta trojka

$$\Phi \subseteq \mathcal{H} \subseteq \Phi^\times \ , \tag{C.1}$$

naziva se *opremljeni* (*rigged*) Hilbertov prostor ili *Gel'fandov triplet* [Ballentine, 1998.]. Tako, sasvim strogo uzevši, Diracovi „ket" simboli predstavljaju elemente ovog najvećeg prostora $\Phi^\times$. Srećom, ove matematičke finese često nisu ključne i manipulacije vektorima kao u konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima i distribucijama kao običnim funkcijama u velikom broju slučajeva relevantnih za fiziku vode na ispravne rezultate.

Dodatak D

Tenzori kao matematički strojevi

Tenzore možemo promatrati kao neku vrstu *matematičkih strojeva* [Misner, Thorne i Wheeler, 2017.] čiji „input” su jedan ili više vektora, a „output” vektor ili skalar.

Praktično, problemi kojima se bavimo se gotovo uvijek daju formulirati u obliku „*Znamo te i te vektore koji opisuju sustav. Koliki je s ili $\boldsymbol{v}$ tog sustava?*”, gdje su s i $\boldsymbol{v}$ neki zanimljivi skalari ili vektori (energija, impuls, položaj, ...).

Označimo tip tenzora $\mathbb{T}$ s uređenim parom $(0, n)$ ukoliko $\mathbb{T}$ predstavlja stroj čiji input je n vektora, a output skalar, a s $(1, n)$ ukoliko je output vektor. Takav stroj možemo skicirati kao

$$\mathbb{T}(\underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \ldots}_{n\times}) \,, \tag{D.1}$$

gdje su “$\_\_$” mjesta gdje treba staviti konkretne vektore koje će onda stroj “preraditi” u rezultirajući skalar ili vektor

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots) = s \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{v} \,. \tag{D.2}$$

Na primjer, vektor *sile* možemo interpretirati kao $(0, 1)$ tenzor $\mathbb{SILA}(\_\_)$ sa svojstvom da kad mu u njegov slot stavimo vektor brzine dobijemo skalar snage:

$$\mathbb{SILA}(\boldsymbol{v}) = P \tag{D.3}$$

gdje je unutranji “mehanizam” stroja dan jednadžbom $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$.

Primjer $(0,2)$ tenzora je metrički tenzor $\mathbb{G}(\_\_,\_\_)$, čiji je mehanizam takav da kad u njegove slotove stavimo dva vektora dobijemo njihov skalarni produkt:

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\ . \tag{D.4}$$

Ono što se često naziva tenzorom drugog ranga (matrica brojeva) su samo komponente tenzora u nekoj bazi, koje se dobiju kad se pravom apstraktnom tenzoru u njegove input slotove stave jedinični bazni vektori, npr,

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = g_{ij}\ . \tag{D.5}$$

Tenzor gustoće vodljivosti iz prošlog odjeljka je dakle tipa $(1,1)$, odnosno $\sigma(\_\_)$, jer imamo $\sigma(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{j}$, dakle jedan vektor kao input i drugi kao output.

Totalno antisimetrični tenzor (Levi-Civita) u tri dimenzije je tenzor oblika $(1,2)$, u svom obliku u kojem nam daje vektorski produkt dvaju vektora

$$\mathbb{LEVICIVITA}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ , \tag{D.6}$$

ali on može biti u obliku $(0,3)$ kad daje mješani produkt triju vektora

$$\mathbb{LEVICIVITA}'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\ , \tag{D.7}$$

gdje ta dva oblika nisu identična.

U elektrodinamici (koja je teorija koja poštuje specijalnu teoriju relativnosti), javlja se $(1,1)$ tenzor $\mathbb{FARADAY}$, ali koji nije tenzor obzirom na rotacije već obzirom na relativističke transformacije u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog. Taj tenzor daje četverovektor Lorentzove sile kad mu se kao input stavi četverovektor brzine $\mathbb{FARADAY}(\boldsymbol{u}) = F_{\mathrm{Lorentz}}$, odnosno u uobičajenom zapisu po komponentama $\mu,\nu = 0,1,2,3$, $F^{\mu}_{\mathrm{Lorentz}} = dp^{\mu}/d\tau = eF^{\mu}_{\ \nu}u^{\nu}$.

Apstraktna indeksna notacija

Indeksi na tenzorima najčešće označavaju kompenente tog tenzora u nekoj bazi, vidi (D.5). Međutim, moguće ih je upotrebljavati i samo kao zamjenu za ove slotove koji su nespretni za zapisivanje.

Tako npr. za $(0,n)$ tenzor imamo korespondenciju

$$\mathbb{T}(\_\_,\_\_,\_\_,\dots) \longrightarrow T_{abc\dots}\ , \tag{D.8}$$

gdje se vektori onda zapisuju kao V^a i npr. $T_{ab}V^aV^b$ je broj (skalar) dobiven "kontrakcijom" tenzora drugog ranga sa dva vektora, uz konvenciju da se kontrakcija uvijek radi s jednim gornjim i jednim donjim indeksom. Tenzor $(1,n)$ tipa bi onda bio $T^a_{bcd\ldots}$, a vektor V^a je tenzor $(1,0)$ tipa (input je ništa ili broj, a output je vektor).

Promotrimo sada objekt $\mathbb{G}(\boldsymbol{V},\_\_)$, tj, metrički tenzor s popunjenim jednim slotom, tj. $g_{ab}V^a$. Očito je da taj objekt, ako ga kontrahiramo s još jednim vektorom W^b, daje skalar. Dakle riječ je o tenzoru tipa $(0,1)$, kojeg stoga možemo skraćeno zapisati kao V_a.

Dakle tek taj objekt V_a, koji nije isto što i V^a, se može skalarno množiti s vektorima da bi se dobio skalar. To što u praksi u trodimenzionalnom vektorskom prostoru množimo skalarno vektore međusobno je samo zato što je u tom prostoru metrički tenzor jednak jediničnom

$$g = \mathrm{diag}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je *po komponentama* V^a jednak V_a.

U četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ pa V^a i V_a više nisu ista stvar, ali to ne moramo jako naglašavati; dovoljno je pri skalarnom množenju paziti na predznake: $g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

No, u općenitom zakrivljenom prostoru s općenitim metričkim tenzorom moramo strogo razlikovati vektor V^a i objekt V_a (za kojeg postoji i specijalno ime: *1-forma*). Npr. u Hilbertovom prostoru Diracov "ket" $|\alpha\rangle$ je vektor, a "bra" $\langle\alpha|$ je 1-forma. Više o ovome vidi u knjigama iz diferencijalne geometrije.

Dodatak E

Homomorfizam grupa SU(2) i SO(3)

Kompletan dokaz 2-na-1 homomorfnosti SU(2) i SO(3) provest ćemo u četiri koraka:

1) Konstruirat ćemo preslikavanje iz SU(2) u grupu svih invertibilnih realnih 3×3 matrica $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ i pokazati da je to preslikavanje homomorfizam.

2) Pokazat ćemo da je slika preslikavanja sadržana u $\mathrm{SO}(3) \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

3) Pokazat ćemo da je preslikavanje surjekcija.

4) Pokazat ćemo da se matrice U i -U iz SU(2), obje i samo one, preslikavaju u istu matricu iz SO(3).

Preliminarno, uočimo da se svaka 2×2 matrica M može zapisati kao linearna kombinacija,

$$M = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_i \sigma_i, \quad \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{C} \,, \tag{E.1}$$

jedinične $\mathbb{I}$ i Paulijevih matrica

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{E.2}$$

jer je riječ o četiri linearno nezavisne matrice, koliko ima i elemenata M. Ukoliko je $\mathrm{Tr} M = 0$, onda je $\alpha_0 = 0$, a ukoliko je M hermitska α_i su realni (uvjerite se u ovo!).

1. korak. Promotrimo matrice

$$S_i = U \sigma_i U^\dagger \,, \tag{E.3}$$

gdje je U data matrica iz SU(2), a σ_i su Paulijeve. Zahvaljujući cikličnosti traga i unitarnosti $U^\dagger U = 1$ odmah vidimo da je $\mathrm{Tr}\, S_i = 0$. Isto tako, zahvaljujući hermitičnosti Paulijevih matrica imamo

$$S_i^\dagger = (U\sigma_i U^\dagger)^\dagger = U\sigma_i^\dagger U^\dagger = S_i\,, \tag{E.4}$$

dakle S_i je i hermitična pa se može prikazati kao linearna kombinacija Paulijevih matrica s realnim koeficijentima, $S_i = R_{ji}(U)\sigma_j$, gdje smo naznačili da koeficijenti ovise o U. Tako imamo

$$U\sigma_i U^\dagger = R_{ji}(U)\sigma_j\,, \tag{E.5}$$

što smatramo implicitnom definicijom 3×3 realne matrice R i time smo konstruirali preslikavanje sa SU(2) na GL($3,\mathbb{R}$). (Strogo uzevši, trebalo bi još pokazati da je R regularna tj. $\det R \neq 0$, a to ćemo malo niže u drugom koraku dokaza.) Množenjem ove jednadžbe sa σ_k s desne strane, uzimanjem traga i korištenjem $\mathrm{Tr}\,\sigma_j\sigma_k = 2\delta_{jk}$ (vidi zadatak 5.4.) dobivamo eksplicitnu definiciju matrice R:

$$R_{ij}(U) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_i U\sigma_j U^\dagger\right). \tag{E.6}$$

Sada treba pokazati da je ovakvo preslikavanje homomorfizam. Za bilo koje $U, V \in SU(2)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{ij}(UV) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_i (UV)\sigma_j (UV)^\dagger\right) && \text{(E.7)}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_i U\left(V\sigma_j V^\dagger\right)U^\dagger\right) && \text{(E.8)}\\
&= R_{kj}(V)\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_i U\sigma_k U^\dagger\right) && \text{(E.9)}\\
&= R_{kj}(V)R_{ik}(U) && \text{(E.10)}\\
&= \big(R(U)R(V)\big)_{ij}\,, && \text{(E.11)}
\end{aligned}$$

gdje smo između ostalog koristili linearnost traga. Time smo pokazali da je preslikavanje homomorfno.

2. korak. Razmotrimo produkt $U\sigma_i\sigma_j U^\dagger$. S jedne strane prvo možemo raspisati produkt Paulijevih matrica pa onda primijeniti (E.5)

$$\begin{aligned}
U\sigma_i\sigma_j U^\dagger &= U\left(\delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\right)U^\dagger && \text{(E.12)}\\
&= \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}R_{nk}\sigma_n\,. && \text{(E.13)}
\end{aligned}$$

S druge strane, možemo prvo ubaciti $U^\dagger U = 1$ između dvije Paulijeve matrice i dvaput primijeniti (E.5) pa tek onda rastaviti produkt Paulijevih matrica

$$
\begin{aligned}
U\sigma_i\sigma_j U^\dagger &= U\sigma_i U^\dagger U\sigma_j U^\dagger &\text{(E.14)}\\
&= R_{li}\sigma_l R_{mj}\sigma_m &\text{(E.15)}\\
&= R_{li}R_{mj}\left(\delta_{lm}\mathbb{I} + i\epsilon_{lmn}\sigma_n\right) &\text{(E.16)}\\
&= (R^{\mathsf{T}}R)_{ij}\mathbb{I} + iR_{li}R_{mj}\epsilon_{lmn}\sigma_n\,. &\text{(E.17)}
\end{aligned}
$$

Usporedbom koeficijenata ispred jediničnih matrica vidimo da je $(R^{\mathsf{T}}R)_{ij} = \delta_{ij}$ čime smo pokazali da je R ortogonalna. Treba još pokazati da je njena determinanta 1. Izjednačavanjem koeficijenata u (E.17) i (E.13) uz Paulijeve matrice i množenjem s R_{ns} imamo

$$
R_{li}R_{mj}R_{ns}\epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk}\underbrace{R_{nk}R_{ns}}_{=\delta_{ks}} = \epsilon_{ijs} \tag{E.18}
$$

S druge strane, koristeći svojstva Levi-Civita tenzora (vidi zadatak 5.2.) imamo

$$
\begin{aligned}
\det R &= \frac{1}{3!}R_{li}R_{mj}R_{ns}\epsilon_{lmn}\epsilon_{ijs} &\text{(E.19)}\\
&= \frac{1}{3!}\epsilon_{ijs}\epsilon_{ijs} = 1\,. &\text{(E.20)}
\end{aligned}
$$

Ovo je dobra vježba iz manipulacija Levi-Civita tenzorom, ali postoji i jednostavniji način da se vidi da je $\det R = 1$. Po svojstvu homomorfizma, jedinični element iz SU(2) se preslikava u jedinični element iz SO(3), koji ima determinantu 1. Nadalje, grupna mnogostrukost od SU(2) je takva da se svaki element može doseći od jediničnog kontinuiranim gibanjem po grupnoj mnogostrukosti (kažemo da je ona *povezana*, vidi kasnije definiciju 5.4.1). No i preslikavanje (E.6) je kontinuirano i tim kontinuiranim gibanjem po SU(2) se $\det R$ ne može diskontinuirano promijeniti s +1 na -1, što znači da je slika preslikavanja upravo SO(3).

3. korak. Pokazat ćemo da se svaka rotacija može prikazati kao (E.5) tako da eksplicitno konstruiramo odgovarajuću matricu $U \in \mathrm{SU}(2)$. Kao prvo, podsjetimo se činjenice da se proizvoljna rotacija može prikazati kao kompozicija rotacija oko z-osi, y-osi, pa opet z-osi za tri, tzv. Eulerova kuta (vidi npr. [Sakurai i Napolitano, 2020.])

$$
R = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_3(\alpha)\,. \tag{E.21}
$$

Rotaciji $R_3(\alpha)$ oko z-osi

$$
R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{E.22}
$$

odgovara element

$$U_3(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sigma_3 \sin\frac{\alpha}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)\ . \tag{E.23}$$

Provjeriti da je to tako možemo eksplicitnim raspisivanjem definicione jednadžbe (E.5)

$$U_3(\alpha)\sigma_i U_3(\alpha)^\dagger = R_3(\alpha)_{ji}\sigma_j = \big(R_3(\alpha)\big)^{\mathsf{T}}_{ij}\sigma_j\ . \tag{E.24}$$

Po komponentama to je

$$U_3(\alpha)\sigma_1 U_3(\alpha)^\dagger = \sigma_1\cos\alpha - \sigma_2\sin\alpha \tag{E.25}$$
$$U_3(\alpha)\sigma_2 U_3(\alpha)^\dagger = \sigma_1\sin\alpha + \sigma_2\cos\alpha \tag{E.26}$$
$$U_3(\alpha)\sigma_3 U_3(\alpha)^\dagger = \sigma_3. \tag{E.27}$$

Prvu od tih jednadžbi provjerimo raspisivanjem lijeve strane

$$U_3(\alpha)\sigma_1 U_3(\alpha)^\dagger = \big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\alpha}{2}\big)\sigma_1\big(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\alpha}{2}\big) \tag{E.28}$$
$$= \big(\sigma_1\cos\frac{\alpha}{2} - \sigma_2\sin\frac{\alpha}{2})\big)\big(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\alpha}{2}\big) \tag{E.29}$$
$$= \sigma_1\big(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\big) - 2\sigma_2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{E.30}$$
$$= \sigma_1\cos\alpha - \sigma_2\sin\alpha\ . \tag{E.31}$$

Ostale dvije jednadžbe provjerimo na isti način, a istim postupkom možemo vidjeti da se

$$U_2(\beta) = \cos\frac{\beta}{2} + i\sigma_2\sin\frac{\beta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \sin\beta/2 \\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)\ , \tag{E.32}$$

preslikava u $R_2(\beta)$ rotaciju oko y-osi. Tako za proizvoljnu rotaciju imamo

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \sin\beta/2 \\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \tag{E.33}$$

koji se u tu rotaciju preslikava, čime smo dokazali surjekciju. Valja uočiti da su kutovi u SU(2) polovice odgovarajućih kutova rotacija iz SO(3), što znači da period od U nije 2π nego 4π što se, kako je diskutirano u 6. poglavlju, reflektira u ponašanju kvantnomehaničkih sustava polucjelobrojnog spina pri rotacijama.

4. korak. Iz definicije (E.6) je očito da se i U i $-U$ iz SU(2) preslikavaju u isti $R(U) \in \mathrm{SO}(3)$. Pokažimo da se samo te dvije matrice preslikavaju u R. Neka se V i U preslikavaju u isti R. Tada iz (E.5) slijedi

$$U\sigma_i U^\dagger = V\sigma_i V^\dagger\ . \tag{E.34}$$

Pomnožimo li ovo s lijeva s $V^\dagger$ i s desna s U dobijemo

$$V^\dagger U \sigma_i = \sigma_i V^\dagger U \,, \tag{E.35}$$

tj. $(V^\dagger U)$ komutira s Paulijevim matricama. No kako trivijalno komutira i s jediničnom matricom, znači da komutira sa svim 2×2 matricama. Jedine matrice koje imaju to svojstvo su proporcionalne jediničnoj matrici, pa imamo $V^\dagger U = \alpha \mathbb{I}$. Uzimanjem determinante ove jednadžbe dobijemo $1 = \alpha^2$, što znači $\alpha = \pm 1$ tj. $U = \pm V$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Recimo još da se slično kao pomoću SU(2) rotacije mogu elegantno interpretirati pomoću tzv. *kvaterniona*. Kvaternioni su poopćenje skupa kompleksnih brojeva, gdje umjesto jedne imaginarne jedinice $\boldsymbol{i}$, imamo tri objekta $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$ koji zadovoljavaju $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$. Ispostavlja se da jedinični kvaternioni čine grupu koja je izomorfna grupi SU(2), uz identifikaciju

$$\boldsymbol{i} \to -i\sigma_1 \,, \quad \boldsymbol{j} \to -i\sigma_2 \,, \quad \boldsymbol{k} \to -i\sigma_3 \,. \tag{E.36}$$

Kvaternioni u kontekstu teorije grupa su detaljno diskutirani u [Stillwell, 2008.].

Dodatak F

Eksponencijacija matrice

Obična eksponencijalna funkcija na domeni običnih brojeva može se definirati i putem reda potencija

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \,, \tag{F.1}$$

koji konvergira za svaki realni ili kompleksni x. Eksponencijacija matrice A se definira putem istog takvog reda

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \,. \tag{F.2}$$

Može se pokazati (npr. [Stillwell, 2008.]) da i ovaj red također konvergira za svaku matricu A. Pokažimo kako se praktično izvodi sumacija ovog reda na primjeru važne matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{F.3}$$

koja je generator rotacija oko z-osi $A = X_3$ iz (5.16). U računu

$$e^{\theta A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k A^k}{k!} \,, \tag{F.4}$$

gdje je θ obični broj, potrebno je izračunati sve potencije A^k. Za $k = 2$ i $k = 3$ imamo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{F.5}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A \,, \tag{F.6}$$

iz čega zaključujemo da je

$$A^k = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{za } k = 0 \\ (-1)^{k/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{za parni } k \geq 2 \\ (-1)^{(k-1)/2} A, & \text{za neparni } k \end{cases} \tag{F.7}$$

odnosno

$$e^{\theta A} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=2,4,\ldots} (-1)^{k/2} \frac{\theta^k A^k}{k!}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=1,3,\ldots} (-1)^{(k-1)/2} \frac{\theta^k A^k}{k!} \,. \tag{F.8}$$

Rastavom jedinične matrice možemo dopuniti prvu sumaciju s $k = 0$ članom i onda zamjenom $k \to 2k$ to prepoznajemo kao razvoj u red funkcije $\cos\theta$, dok drugu sumaciju nakon zamjene $k \to 2k + 1$ prepoznajemo kao $\sin\theta$, te na kraju dobijamo matricu konačnih rotacija oko z osi

$$e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,. \tag{F.9}$$

Za eksponencijalnu funkciju proizvoljne matrice A vrijedi

$$\left(e^A\right)^* = e^{A^*} \,, \tag{F.10}$$

$$\left(e^A\right)^\mathsf{T} = e^{A^\mathsf{T}} \,, \tag{F.11}$$

$$\left(e^A\right)^\dagger = e^{A^\dagger} \,, \tag{F.12}$$

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} \,, \tag{F.13}$$

$$e^{SAS^{-1}} = S e^A S^{-1} \qquad \text{za nesingularnu } S \,, \tag{F.14}$$

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\, A} \,. \tag{F.15}$$

Na kraju, ako su λ_1, λ_2, ..., λ_n svojstvene vrijednosti od A, onda su e^{λ_1}, e^{λ_2}, ...e^{λ_n} svojstvene vrijednosti od e^A.

Dodatak G

Clebsch-Gordanovi koeficijenti

Kako je opisano u odjeljku 6.5, vektorski prostor $V_1 \otimes V_2$ na kojem djeluje direktan produkt dviju reprezentacija grupe rotacija (preciznije, grupe SU(2)) spinova j_1 i j_2, ima dvije baze. Jednu razapetu svojstvenim vektorima operatora J_{1z} i J_{2z} i drugu razapetu svojstvenim vektorima ukupnog momenta impulsa $\boldsymbol{J}^2$ i njegove z-komponente J_z. Koeficijenti koji povezuju te baze zovu se Clebsch-Gordanovi koeficijenti, definirani su u (6.62) i u ovom dodatku ćemo pobrojati neka njihova važnija svojstva te dati primjer njihovog određivanja.

- $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = 0$ ako nije $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$.
  Dokaz: očito iz rastava $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$.

- $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = 0$ ako nije $M = m_1 + m_2$.
  Dokaz:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 \;\Rightarrow\; J_z - J_{1z} - J_{2z} = 0 \tag{G.1}$$

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | J, M\rangle = 0 \tag{G.2}$$

$$(M - m_1 - m_2)\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle = 0 \tag{G.3}$$

- CG-koeficijenti imaju neodređenu fazu. Standardni izbor je da se uzme $C^{JJ}_{j_1 j_1 j_2 (J-j_1)}$ realan i pozitivan. Kao (netrivijalna) posljedica toga, svi CG-koeficijenti ispadaju realni.

- $$\sum_{JM} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1 m_1' j_2 m_2'} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

- $$\sum_{m_1,m_2} C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} C^{J'M'}_{j_1m_1j_2m_2} = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}$$

- $$|J,M\rangle = \sum_{m_1,m_2} C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} |j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$$

  (Isti koeficijenti pretvaraju baze u oba smjera.). Za dokaz, pomnožiti s $\sum_{J,M} C^{JM}_{j_1m_1'j_2m_2'}$ i koristiti svojstva ortogonalnosti.

- $$C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} = (-1)^{J-j_1-j_2} C^{JM}_{j_2m_2j_1m_1}$$

Izračunavanje Clebsch-Gordanovih koeficijenata

Primjer: $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$.

Prva baza: $|1/2, m_1; 1/2, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$. $m_{1,2} = \pm 1/2 \;\Rightarrow\;$ 4 stanja

Druga baza: $|J, M\rangle$. $M = -1, 0, 1$ za $J = 1$ i $M = 0$ za $J = 0$. $\Rightarrow$ $3+1 = 4$ stanja.

$$\begin{aligned}
|1,1\rangle &= \sum_{m_1,m_2} C^{11}_{\frac{1}{2}m_1\frac{1}{2}m_2} |m_1, m_2\rangle \\
&\quad (M = m_1 + m_2 = 1 \;\Rightarrow\; m_1 = m_2 = \frac{1}{2}) \\
&= C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

To što su oba stanja normirana povlači da je $|C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}| = 1$. Već smo odabrali da je $C \in \mathbb{R}$, a sada još biramo i da je pozitivan: $C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1$.

$$|1,1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

Sada, da bismo dobili ostale CG-koeficijente, djelujemo s $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ na obje strane ove jednadžbe:

$$J_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle$$
$$J_{1-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$
$$J_{2-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

Slijedi

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)$$

tj.

$$C^{10}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = C^{10}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nadalje,

$$|1,-1\rangle = |-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \;\Rightarrow\; C^{1-1}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1$$

Na kraju, napišimo, imajući u vidu da $M = m_1 + m_2$

$$|0,0\rangle = \alpha|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \beta|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\ ,$$

gdje su α i β koeficijenti koje treba odrediti. Djelovanjem s J_- na obje strane imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \beta|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + 0 + 0 \\ &= (\alpha+\beta)|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \;\Rightarrow\; \beta = -\alpha \end{aligned} \tag{G.4}$$

$\Rightarrow$

$$|0,0\rangle = \alpha\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)$$

Normalizacija i izbor faze daju $\alpha = 1/\sqrt{2}$ tj.

$$C^{00}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -C^{00}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Svi ostali koeficijenti su nula.

Clebsch-Gordanovi koeficijenti mogu se pronaći tabelirani u literaturi, a postoje i računalni programi za njihovo izračunavanje. Za generalnu formulu vidi [Hamermesh, 1989.] 9-8.

Bibliografija

Arfken, G. B. i H. J. Weber (1995.). *Mathematical Methods for Physicists.* 4th ed. Academic Press.

Ballentine, L. E. (1998.). *Quantum Mechanics — A Modern Development.* World Scientific.

Başkal, S., Y. S. Kim i M. E. Noz (2024.). *Theory and Applications of the Poincaré Group.* 2nd ed. Springer.

Bronštejn, I. N. i dr. (2004.). *Matematički priručnik.* Tehnička knjiga.

Coleman, S. (1985.). *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures.* Cambridge University Press.

Cornwell, J. F. (1997.). *Group theory in physics: An introduction.* Academic Press.

Crease, R. P. i C. C. Mann (1996.). *The second creation. Makers of the revolution in twentieth-century physics.* Rutgers university press.

Georgi, H. (1999.). *Lie Algebras in Particle Physics.* Westview Press.

Goldstein, H. (1980.). *Classical mechanics.* Addison-Wesley.

Greiner, W. i B. Muller (1985.). *Quantum Mechanics — Symmetries.* Springer Verlag.

Hamermesh, M.B. (1989.). *Group Theory and its Application to Physical Problems.* Dover.

Jones, H. F. (1998.). *Groups, representations and physics.* 2nd ed. Taylor & Francis.

Misner, C.W., K.S. Thorne i J.A. Wheeler (2017.). *Gravitation.* Princeton University Press.

Sakurai, J. J. i J. Napolitano (2020.). *Modern Quantum Mechanics.* Cambridge University Press.

Smolić, I. (2024.). *Diferencijalna geometrija u fizici.* Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet.

Stillwell, J. (2008.). *Naive Lie Theory.* Springer.

Weinberg, S. (2005.). *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations.* Cambridge University Press.

Zangwill, A. (2012.). *Modern Electrodynamics.* Cambridge University Press.

Zeh, H.D. (2007.). *The Physical Basis of The Direction of Time*. 5th ed. Springer.