

Einsteinovi tenzori

Inicijalizacija

Inicijalizacija programa **GRTensorM** koji zna raditi s tenzorima opće teorije relativnosti, a može se besplatno downloadati s adrese <http://grtensor.phy.queensu.ca/>

Radni direktorij treba biti direktorij **iznad** direktorija u koji smo raspakirali GRTensorM:

```
In[1]:= SetDirectory["/home/kkumer/comp/mma/GR/"];
```

Mathematica 5 daje neke greške pri učitavanju paketa. One izgleda ne utječu na račune, pa ih isključujemo.

```
In[2]:= Off[Syntax::com]
Off[Syntax::stresc]
```

```
In[4]:= << grii/grt.m
```

```
GRTensorM Version 1.2 for Mathematica 3.x
July 20, 1998

Copyright 1996-98 by P. Musgrave, D. Pollney and K. Lake

Update by Mustapha Ishak B.

Use gload[] or grload[] to load a metric.

?grtensor for help.

Metric directory = "/group/local/math/Packages/grii/metrics/"
```

Treba postaviti MetricPath da pokazuje na direktorij s predefiniranim metrikama.

```
In[5]:= SetOptions[grii,
MetricPath -> "/home/kkumer/comp/mma/GR/grii/metrics/", Verbose -> False];
```

Funkcija **grmatrix** omogućuje prikaz GRTensorM objekata u matričnom obliku:

```
In[6]:= grmatrix[obj_] := Table[grcomponent[obj, {i, j}], {i, 1, 4}, {j, 1, 4}];
```

Funkcija **grsimplify** pojednostavljuje objekte rabeći trigonometrijske identitete:

```
In[7]:= grsimplify[obj_] := grmap[Together[#, Trig -> True] &, obj]
```

Einsteinov statički svemir

Prvo učitavamo metriku. Metrika *einst.g* ne dolazi s GRTensorM paketom, ali se može skinuti s <http://www.phy.hr/~kkumer/kozmiologija/kozmiologija.html>

```
In[8]:= qload[einst]
```

```
Default metric = einst
```

```
For the einst metric.
```

```
Coordinates
```

```
x1 = r, x2 = theta, x3 = phi, x4 = t
```

```
For the einst metric.
```

```
Line element
```

$$ds^2 = -dt^2 + d\theta^2 r^2 S^2 + \frac{dr^2 S^2}{1-r^2} + d\phi^2 r^2 S^2 \sin[\theta]^2$$

Upozorenje: GRTensorM koristi tzv. Landau–Lifshitz spacetime metriku što znači da je metrički tenzor ravnog prostora Minkovskog jednak $g = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ i $x_4 = t$. To između ostalog znači da je za upotrebu ovih rezultata u Einsteinovim gravitacijskim jednadžbama potrebno koristiti $G_{\mu\nu} = +8\pi G T_{\mu\nu}$.

```
In[9]:= grmatrix[g[dn, dn]] // MatrixForm
```

```
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{S^2}{1-r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 S^2 \sin[\theta]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sada izračunavamo Einsteinov tenzor za ovu metriku. GRTensorM sam prvo pronalazi Christoffelove simbole i onda određuje komponente Riemannovog, Riccijevog te na kraju Einsteinovog tenzora:

```
In[10]:= grcalc[G[dn, up]]
```

```
In[11]:= grsimplify[G[dn, up]]
```

```
In[12]:= grdisplay[G[dn, up]]
```

For the einst metric.

G[dn, up]

$$G_{r r} = -\frac{1}{S^2}$$

$$G_{\text{theta theta}} = -\frac{1}{S^2}$$

$$G_{\text{phi phi}} = -\frac{1}{S^2}$$

$$G_{t t} = -\frac{3}{S^2}$$

Ovo se slaže s literaturom. Vidi npr. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, p. 83–84.

Robertson–Walker metrika

```
In[13]:= qload[rw]
```

Default metric = rw

For the rw metric.

Coordinates

$$x^1 = r, \quad x^2 = \text{th}, \quad x^3 = \text{ph}, \quad x^4 = t$$

For the rw metric.

Line element

$$ds^2 = -dt^2 + d\text{th}^2 r^2 R[t]^2 + \frac{dr^2 R[t]^2}{1 - k r^2} + d\text{ph}^2 r^2 R[t]^2 \text{Sin}[\text{th}]^2$$

```
In[14]:= grmatrix[g[dn, dn]] // MatrixForm
```

```
Out[14]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{R[t]^2}{1 - k r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 R[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 R[t]^2 \text{Sin}[\text{th}]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R(t)$ je faktor ekspanzije ($S(t)$ iz predavanja), a $k=\{-1,0,1\}$ je predznak koji određuje zakrivljenost. Izračunajmo sada Einsteinov tenzor za ovaj prostor:

```
In[15]:= grcalc[G[dn, up]]
```

```
In[16]:= grsimplify[G[dn, up]]
```

```
In[17]:= grdisplay[G[dn, up]]
```

For the rw metric.

G[dn, up]

$$G_{rr} = \frac{-k - R'[t]^2 - 2R[t]R''[t]}{R[t]^2}$$

$$G_{th} = \frac{-k - R'[t]^2 - 2R[t]R''[t]}{R[t]^2}$$

$$G_{ph} = \frac{-k - R'[t]^2 - 2R[t]R''[t]}{R[t]^2}$$

$$G_{tt} = -\frac{3(k + R'[t]^2)}{R[t]^2}$$

Ovo se slaže s literaturom. Vidi npr. Narlikar, ibid. p. 106.