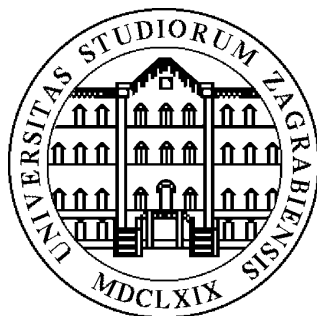


SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

Krešimir Kumerički

RIJETKI RASPADI K MEZONA

Disertacija



Zagreb, travanj 1998.

Predgovor

U ovom ćemo radu izložiti neke rezultate proučavanja u fizici visokih energija vezane uz rijetke raspade neutralnih K mezona. Posebna pažnja bit će posvećena procesu $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

U uvodnom će odjeljku biti navedeni motivi ovakvog istraživanja tj. bit će objašnjeno kako njegovi rezultati mogu poboljšati i upotpuniti standardnu teoriju fizike elementarnih čestica.

U prvom poglavlju je dan općenit prikaz procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ i pokazano je na koji način njegovu amplitudu prirodno rastavljamo na apsorpcijski (imaginarni) i disperzijski (realni) te na kratkodosežni i dugodosežni dio.

U drugom je poglavlju detaljno opisan račun kratkodosežne disperzijske amplitude za ovaj proces realizirane dijagramima s dvije petlje. Proveden je potpuni proračun unutar elektroslabe teorije te korekcije dominantnih amplituda zbog učinka kvantne kromodinamike. Dobiveni rezultat je na kraju upotrijebljen za bolje definiranje granica dosad teško odredive dugodosežne disperzivne amplitude. Ovi su rezultati objavljeni u (Eeg, Kumerički i Picek, 1996, 1998).

Dodaci, između ostalog, pokazuju na koji se način upotrebom računala i programskih paketa namijenjenih fizičarima elementarnih čestica bitno olakšavaju najteži koraci u spomenutim proračunima.

Najtoplije se zahvaljujem svom mentoru, prof. Ivici Piceku, na prijateljskoj podršci i vodstvu u istraživanjima.

Krešimir Kumerički

Zagreb, travanj 1998.

Sadržaj

<i>Predgovor</i>	1
Uvod – rijetki kaonski procesi	5
1 Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ — općenita razmatranja	9
1.1 Uvod	9
1.2 Apsorpcijska amplituda	12
1.3 Dugodosežna disperzijska amplituda	16
1.4 Kratkodosežna disperzijska amplituda generirana dijagramima s jednom petljom	17
2 Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ — disperzijska dvofotonska amplituda	19
2.1 Uvod	19
2.2 Elektroslabi račun	21
2.2.1 A -doprinosi	21
2.2.2 B -doprinosi	35
2.2.3 C -doprinosi	39
2.2.4 Numerički rezultati	41
2.3 QCD korekcije	44
2.4 Zaključak	47
A Diracova algebra na računalu	51
A.1 Programi 'FeynCalc' i 'check'	51
A.2 Primjer: Amplituda $A1$	53
B Integrali po impulsima u petljama	65
B.1 r -integrali	65
B.2 k -integrali	66
B.2.1 Dijagrami $A1, A1b, B1$	66
B.2.2 Dijagrami $A2, A2b$ i $A2c$	66
B.2.3 Dijagrami $A3, A3b, B3, B4$	66

B.2.4	Dijagrami $C1$ i $C2$	67
	<i>Bibliografija</i>	68
	<i>Sažetak/Summary</i>	73
	<i>Životopis/Popis radova</i>	75

Uvod – rijetki kaonski procesi

Teorija ujedinjenja elektromagnetskih i slabih međudjelovanja (Glashow-Weinberg-Salamov model) zajedno s teorijom jakih međudjelovanja (kvantnom kromodinamikom) predstavlja danas, pod nazivom *standardni model*, osnovnu teoriju fizike elementarnih čestica. Eksperimentalna potvrda njenih glavnih predviđanja (W i Z bozona) ustoličila je ovu teoriju kao krunu nastojanja fizičara da opišu mikroskopski svijet. I danas, skoro tri desetljeća nakon njene formulacije, još uvijek čekamo eksperiment koji bi ukazao na neki njen nedostatak.

Činjenica je, međutim, da se dosadašnji eksperimentalni pristup standardnom modelu teško može smatrati potpunim. Ispitivanja njegove strukture

- na visokim energijama,
- kroz doprinose viših redova računa smetnje i
- kroz potragu za zabranjenim procesima

su još uvijek u početnoj fazi. Što se testova na visokim energijama tiče, novi sudarivač čestica LHC (*Large Hadron Collider*) koji se upravo gradi u CERN-u trebao bi ponuditi neke odgovore. No, bez obzira na to, povećanje preciznosti mjerenja na nižim energijama nije ništa lošiji način testiranja standardnog modela. Štoviše, doprinosi viših redova računa smetnje koji se određuju ovim preciznim mjerenjima zapravo neizravno testiraju ponašanje modela na visokim energijama, budući da su najčešće učinci sa velikih energijskih skala dominantni na tim redovima. Ovi doprinosi se standardno manifestiraju kroz

- radijacijske korekcije “običnih” slabih procesa, npr. $\mu \rightarrow e \nu_\mu \bar{\nu}_e$ ili $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$,
- rijetke slabe procese, npr. $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ili $K^0 - \bar{K}^0$ miješanje.

Posebno su zanimljivi rijetki slabi procesi u kojima učestvuju K mezoni. Tako je činjenica da se raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ nije događao s istom širinom kao raspad $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ dovela do predviđanja c kvarka i otkrića GIM mehanizma (Glashow

et al., 1970) koji je jedan od temeljnih stupova standardnog modela. Kasnije je analiza potisnuća ovog procesa u odnosu na $K_L \rightarrow \gamma\gamma$:

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \mu^+\mu^-)}{\Gamma(K_L \rightarrow \gamma\gamma)} \simeq 1.2 \cdot 10^{-5}, \quad (1)$$

omogućila i predviđanje mase c kvarka (Gaillard i Lee, 1974). I danas su ovi rijetki kaonski procesi interesantni za proučavanje i to iz više razloga:

1. Rijetki kaonski raspadi ispituju dinamiku okusa u standardnom modelu tj. fiziku kvarkovskih masa i miješanja. Nadalje, ta je fizika usko povezana s mehanizmom loma elektroslike simetrije i predstavlja najslabije poznati dio modela, s najviše slobodnih parametara.
2. Osjetljivost rijetkih kaonskih procesa, kao što je na primjer $K^0 - \bar{K}^0$ miješanje, na veće energijske skale pokazala se, kako je spomenuto, kao pogodan izvor informacija o c kvarku i prije no što je ovaj bio otkriven. Na isti način ovi procesi mogu omogućiti proučavanje fizike t kvarka. Mnogi od ovih procesa su vrlo ovisni o vrijednostima V_{td} i V_{ts} elemenata Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrice pa pomoću njih možemo dobiti informacije o tim elementima koje bi bilo teško dobiti direktnim proučavanjem raspada t kvarka.
3. Jedan od najvažnijih tekućih problema u fizici visokih energija je slabo poznavanje narušenja CP simetrije. Svi dosad poznati eksperimentalni podaci o toj temeljnoj asimetriji, a njih je zaista malo, potiču iz nekoliko raspada K_L mezona ($K_L \rightarrow \pi\pi$, $K_L \rightarrow \pi l\nu$, $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$) i mogu se u principu objasniti upotrebom jednog kompleksnog parametra ϵ_K . Detaljnije istraživanje ove pojave bit će moguće putem mjerenja teorijski čistih raspada kaona, kao što je na primjer $K_L \rightarrow \pi^0\nu\bar{\nu}$.
4. Pored rijetkih kaonskih procesa koji su unutar standardnog modela snažno potisnuti korisnim se mogu pokazati i procesi koji su unutar te teorije strogo zabranjeni pa mogu ukazivati na signale nove fizike. Jedan obećavajući primjer ovakvog procesa je $K_L \rightarrow e\mu$ u kojem se narušava očuvanje lepton-skog broja za svaku pojedinu obitelj. U planu su eksperimenti koji će ispitivati ovaj raspad s osjetljivošću na omjere grananja reda veličine 10^{-12} . Ova preciznost će onda omogućiti ispitivanje nove fizike možda čak i do skala od nekoliko stotina TeV-a što je područje teško dostupno drugim metodama.
5. Neki rijetki i radijacijski načini raspada K mezona (kao na primjer $K^+ \rightarrow \pi^+l^+l^-$ ili $K_L \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$) su dominirani dugodosežnom hadronskom fizikom i kao takvi su manje pogodni za proučavanje kratkodosežne dinamike okusa.

Međutim, takvi su procesi često pogodni za izučavanje niskoenergijske strukture kvantne kromodinamike i odgovarajućih učinkovnih Lagrangeovih funkcija, kao npr. u kiralnoj perturbacijskoj teoriji.

Pogledajmo jedan primjer. U Wolfensteinovoj parametrizaciji Kobayashi-Maskawa matrica miješanja kvarkovskih obitelji do reda λ^3 je

$$V_{\text{KM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

gdje je današnje poznavanje parametara ove matrice sadržano u

$$\lambda = |V_{us}| \simeq 0.22 \quad (3)$$

$$A = 0.9 \pm 0.1 \quad (4)$$

$$\sqrt{\rho^2 + \eta^2} = \begin{cases} 0.4 \pm 0.2 \\ 0.59 \pm 0.18 \end{cases} \quad (5)$$

Ovdje su dvije zadnje vrijednosti rezultati dva različita eksperimenta. U svakom slučaju, da bismo odredili zasebne vrijednosti parametara ρ i η , potrebna nam je dodatna informacija. Na primjer, uz poznavanje mase t kvarka, mjerenja procesa $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ i $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ mogu omogućiti određivanje bilo ρ bilo η . Kada izmjerimo bilo koji od ova dva parametra potpuno ćemo poznavati V_{KM} matricu i dodatna mjerenja onog drugog parametra će omogućavati testiranje unitarnosti ove matrice odnosno strukture standardnog modela obzirom na broj kvarkovskih obitelji. Kao što ćemo vidjeti u odjeljku 1.4, neki vjeruju da bi i proces kojim ćemo se najviše baviti u ovom radu, $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, također mogao pomoći u određivanju parametra ρ .

Slična je priča s rijetkim radijacijskim raspadima K mezona. Naime, kvantna kromodinamika (QCD), koja je jedan od dva glavna dijela standardnog modela, je teorija koja ne dopušta upotrebu računa smetnje na energijskim skalama < 1 GeV. Ipak, kiralna $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ simetrija koju QCD poštuje omogućuje konstrukciju učinkovne niskoenergijske teorije — tzv. *kiralne perturbacijske teorije* (χPT). Testiranjem ove teorije testiramo neizravno i samu kvantnu kromodinamiku. I ovdje je česta primjena rijetkih kaonskih raspada.

Dakle, rijetki procesi s K mezonima su i dalje nepresušno vrelo informacija za fizičara visokih energija.

Glava 1

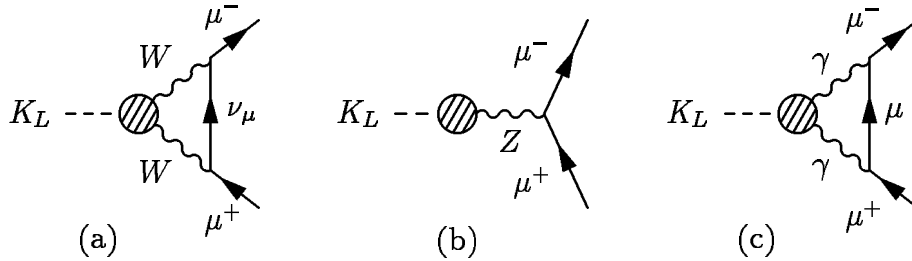
Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ — općenita razmatranja

1.1 Uvod

Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ je klasičan primjer procesa izazvanog neutralnim strujama koje mijenjaju okus (FCNC¹). I prije nego što je prvi put bio eksperimentalno uočen ovaj raspad se pokazao vrlo važnim za izučavanje slabih međudjelovanja. Činjenica da je njegova širina bila mnogo manja od širine raspada $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ predstavljala je velik problem za baždarne teorije slabih međudjelovanja zasnovane na grupi $SU(2)$ i tako je dovela do pronalaženja GIM mehanizma (Glashow et al., 1970) i c -kvarka koji onda omogućuje potrebno potisnuće amplitude.

Nadalje, račun amplitude za ovaj proces na razini Feynmanovih dijagrama s jednom petljom pokazuje u najnižem redu kraćenje između doprinosa dijagrama u kojima se izmjenjuju W -bozoni (slika 1.1a) i onih u kojima se izmjenjuje Z -bozon (slika 1.1b) (Gaillard et al., 1976) što onda potencijalno omogućuje istraživanje slabih međudjelovanja u višim redovima.

¹engl: flavour-changing neutral current



Slika 1.1: Mogući mehanizmi raspada $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Amplituda procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ima realan (disperzijski) i imaginarni (apsorpcijski) dio. Usporedbom s eksperimentom pokazuje se da apsorpcijska amplituda, kod koje se čestice u međustanju nalaze na ljusci mase, predstavlja dominantan doprinos. Očuvanje CP simetrije dozvoljava razne skupove čestica u međustanju ($\gamma\gamma$, $\pi\pi\gamma$, $\pi\pi\pi$), ali ustanovljuje se da je najbitniji doprinos od međustanja u kojem se nalaze dva fotona na ljusci mase (slika 1.1c). Amplituda za takav doprinos izračunata je originalno u (Sehgal, 1969), a ovdje je izračunavamo u odjeljku 1.2. Ono što se dobije je da je omjer apsorpcijske širine raspada $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ i ukupne širine raspada $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ dan s

$$\frac{\Gamma_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-}^{\text{abs}}}{\Gamma_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}} = \alpha^2 \frac{m_\mu^2}{M_K^2} \frac{1}{2\beta} \left(\ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2, \quad (1.1)$$

gdje je α konstanta fine strukture, a

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{M_K^2}}. \quad (1.2)$$

Ovo vodi na odnos omjera grananja

$$\frac{B_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-}^{\text{abs}}}{B_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}} = 1.2 \times 10^{-5}, \quad (1.3)$$

što, upotrijebivši eksperimentalno određenu vrijednost za $B_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}$, daje tzv. *granicu zbog unitarnosti*

$$B_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} \geq (7.1 \pm 0.2) \times 10^{-9}, \quad (1.4)$$

gdje pogreška potječe od pogreške u poznavanju širine raspada $K_L \rightarrow \gamma\gamma$. Normaliziramo li amplitude prema omjeru grananja

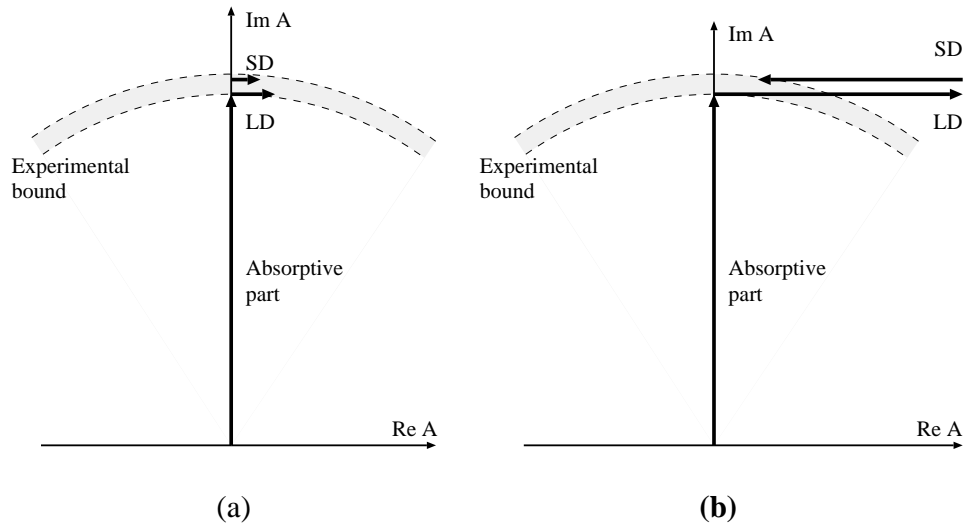
$$B_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} = |\text{Re}\mathcal{A}|^2 + |\text{Im}\mathcal{A}|^2, \quad (1.5)$$

onda ova granica zbog unitarnosti odgovara vrijednosti

$$\text{Im}\mathcal{A} = (8.4 \pm 0.1) \times 10^{-5}. \quad (1.6)$$

Eksperimentalna situacija s ovim procesom se nakon kontroverznih prvih rezultata iz sedamdesetih godina (koji su narušavali ovu granicu zbog unitarnosti) stabilizirala i sada postoje precizna mjerenja s dobrom statistikom (Inagaki et al., 1991; Heinson et al., 1995). Srednja vrijednost koju daje *Particle Data Group* (C. Caso et. al. (Particle Data Group), 1998) je

$$B_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} = (7.2 \pm 0.5) \times 10^{-9}, \quad (1.7)$$



Slika 1.2: Shematski Argandov dijagram koji ilustrira moguće međugre amplituda koje razmatramo.

što onda znači, usporedimo li (1.7) i (1.4) da za disperzijski dio amplitude ostaje otprilike

$$\text{Re}\mathcal{A} \sim 2.7 \times 10^{-5} . \quad (1.8)$$

Dakle, ukupni realni dio amplitude, koji je zbroj kratkodosežnih² (SD) i dugodosežnih³ (LD) doprinosa

$$\text{Re}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{SD}} + \mathcal{A}_{\text{LD}} , \quad (1.9)$$

mora biti relativno malen u usporedbi s imaginarnim dijelom, kako je prikazano na slici 1.2. Takva mala ukupna disperzijska amplituda može se realizirati bilo tako što su i kratkodosežni i dugodosežni doprinosi mali (slika 1.2a) ili tako što su suprotnog predznaka i podjednaki pa se dobrim dijelom poništavaju (slika 1.2b). Očito je da je dobro poznavanje dugodosežnog dijela disperzivne amplitude esencijalno ukoliko želimo ovaj proces upotrijebiti za ispitivanje kratkodosežnih svojstava standardnog modela. Poznavanje veličine i predznaka ovog dijela onda omogućuje ekstrahiranje doprinosa kratkodosežne fizike iz eksperimentalnih brojača, a onda i eventualno određivanje parametara Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrice. Pristupi i problemi pri određivanju ove dugodosežne disperzijske amplitude su izloženi u odjeljku 1.3.

Što se kratkodosežnog disperzijskog doprinosa tiče, on se u literaturi često identificira s doprinosom dijagrama s izmjenom W bozona (slika 1.1a) i Z -bozona

²engl. short-distance

³engl. long-distance

(slika 1.1b). U tim dijagramima s jednom petljom

$$\mathcal{A}_{1L} = \mathcal{A}_{\text{Fig.1.1a}} + \mathcal{A}_{\text{Fig.1.1b}} \quad (1.10)$$

dominira doprinos t -kvarka u petlji (pomnožen s malim Kobayashi-Maskawa faktorom), tako da uključivanje korekcija zbog učinaka kvantne kromodinamike (Vainshtein et al., 1976) ne mijenja bitno amplitudu. No, u ovom radu, baš kao i u (Eeg, Kumerički i Picek, 1998), naglašavamo činjenicu da dijagram sa slike 1.1c ($\sim \alpha_{\text{em}}^2 G_F$) vodi na isti kratkodosežni operator kao i prijašnja dva dijagrama (proporcionalna s G_F^2). Kako je već primijećeno u (Voloshin i Shabalin, 1976) odgovarajući dijagram s dvije petlje i s dva virtualna fotona u međustanju također ima kratkodosežni dio \mathcal{A}_{2L} (za fotone velikih impulsa) sadržan u

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.1c}} = \mathcal{A}_{LD} + \mathcal{A}_{2L} . \quad (1.11)$$

Tako je ukupna SD amplituda

$$\mathcal{A}_{SD} = \mathcal{A}_{1L} + \mathcal{A}_{2L} . \quad (1.12)$$

Istraživanje doprinosa dijagrama sa slike 1.1c koji vodi na amplitudu \mathcal{A}_{2L} u poglavlju 2 omogućit će nam izoliranje modelski vrlo ovisnog dugodosežnog disperzivnog doprinosa amplitudi $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ i ograničavanje njegovih mogućih vrijednosti.

No prije toga, u slijedećim odjeljcima, opisat ćemo ostale doprinose ukupnoj amplitudi $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$: u odjeljku 1.2 imaginarni (apsorpcijski) dio $\text{Im}\mathcal{A}$, u odjeljku 1.3 realni (disperzijski) dugodosežni dio \mathcal{A}_{LD} i u odjeljku 1.4 disperzijski kratkodosežni dio generiran dijagramima s jednom petljom \mathcal{A}_{1L}

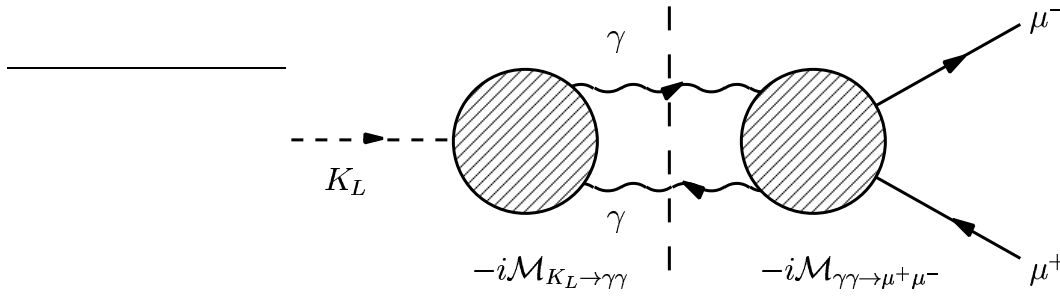
1.2 Apsorpcijska amplituda

Svojstvo unitarnosti S -matrice

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \quad (1.13)$$

omogućuje nam da izračunamo doprinos procesu $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ od strane dijagrama prikazanog na slici 1.3 gdje se fotoni u međustanju nalaze na masenoj ljusci. Izrazimo li elemente S -matrice $S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S | \alpha \rangle$ preko Feynmanove invarijantne amplitude $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - i(2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha} \prod_{i=\alpha,\beta} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} , \quad (1.14)$$



Slika 1.3: Raspad $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ preko dva realna fotona u međustanju. Crtkana okomita linija sugerira rez u prikazu amplitude u kompleksnoj ravnini čiji diskontinuitet izračunavamo primjenom Cutkoskyjevog pravila.

gdje su p_β i p_α četvero-impulsi konačnog i početnog stanja a produkt ide preko svih čestica (s energijama E_i) u procesu, onda (1.13) povlači relaciju

$$i\mathcal{M}_{\beta\alpha} - i\mathcal{M}_{\alpha\beta}^* = \sum_{\gamma} (2\pi)^4 \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) \mathcal{M}_{\gamma\beta}^* \mathcal{M}_{\gamma\alpha} \left(\prod_{i=\gamma} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_i}}} \right)^2, \quad (1.15)$$

gdje sumacija ide po svim mogućim međustanjima. Pretpostavimo li sada T -simetriju, imamo $\mathcal{M}_{\beta\alpha} = \mathcal{M}_{\alpha\beta}$ pa lijeva strana jedandžbe (1.15) postaje $-2 \operatorname{Im} \mathcal{M}_{\beta\alpha}$. Isto tako, ograničit ćemo se na međustanja s dva fotona s impulsima k i k' i polarizacijama ϵ i ϵ' ($|\gamma\rangle = |\gamma(k, \epsilon), \gamma(k', \epsilon')\rangle$) tako da je

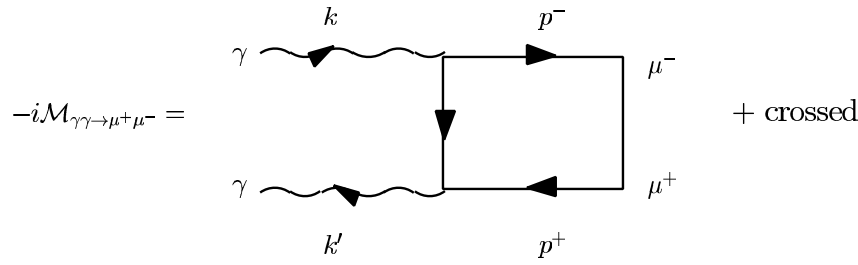
$$\sum_{\gamma} \longrightarrow \frac{1}{2} \int d^3k d^3k' \quad (1.16)$$

(faktor $1/2$ je posljedica činjenice da u međustanju imamo dva identična bozona), pa na kraju dobivamo apsorpcijski dio amplitude prijelaza $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ izražen preko ukupnih amplituda prijelaza $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ i $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$:

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{K_L \rightarrow \mu^+\mu^-} = -\frac{1}{4} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 2\omega 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - P_K) \mathcal{M}_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}^* \mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-}, \quad (1.17)$$

gdje je P_K četvero-impuls raspadajućeg kaona.

Ova formula se može dobiti i direktno, primjenjujući Cutkoskyjevo pravilo po kojem se diskontinuitet amplitude \mathcal{M} pri prelasku preko realne osi dobiva tako da se u Feynmanovim pravilima odgovarajući propagatori zamijene s $-2\pi i \delta^4(k^2 - m^2)$ gdje je k impuls, a m masa čestice koja se propagira i koja se time postavlja na ljusku mase (kod nas je $m=0$) (Peskin i Schroeder, 1995, odjeljak 7.3). Kako



Slika 1.4: Amplituda $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$ u najnižem redu računa smetnje.

je, s druge strane, taj diskontinuitet jednak $2i\text{Im}\mathcal{M}$ to, za dijagram sa slike 1.3 imamo

$$\begin{aligned} \text{Disc}\mathcal{M}_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} &= 2i\text{Im}\mathcal{M}_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} = \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\mathcal{M}_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}) (-2\pi i) \delta(k^2) (-2\pi i) \delta(k'^2) (-i\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-}^*) , \end{aligned} \quad (1.18)$$

što onda zamjenama

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - P_K) \quad (1.19)$$

i

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2) \longrightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} , \quad (1.20)$$

daje opet jednadžbu (1.17).

Izvrjednjavanje ovog imaginarnog dijela amplitude $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ počinjemo računom amplitude $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$ (slika 1.4). Račun je sličan standardnom računu Comptonovog raspršenja:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-} &= \bar{u}(p^-)(ie\not{\epsilon}) \frac{i}{\not{p}^- + \not{k}' - m} (ie\not{\epsilon}) v(p^+) \\ &\quad + \bar{u}(p^-)(ie\not{\epsilon}) \frac{i}{\not{p}^- - \not{k} - m} (ie\not{\epsilon}) v(p^+) = \\ &= -ie^2 \epsilon'_\mu \epsilon_\nu \bar{u}(p^-) \left[\frac{2p^- \cdot \gamma^\nu + \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu}{2p^- \cdot k'} - \frac{2p^- \cdot \gamma^\mu - \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu}{2p^- \cdot k} \right] v(p^+) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Sada se možemo odlučiti za baždarenje u kojem je

$$\epsilon^0 = \epsilon'^0 = 0 \quad (1.22)$$

i

$$\epsilon \cdot k = \epsilon' \cdot k' = 0, \quad (1.23)$$

pa će u sustavu mirovanja kaona gornja amplituda postati

$$\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-} = -e^2 \bar{u}(p^-) \left\{ \frac{\not{\epsilon}' \not{k}'}{2p^- \cdot k'} + \frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p^- \cdot k} \right\} v(p^+). \quad (1.24)$$

Uzmemo li sada u obzir činjenicu da korištenjem svojstava Diracovih γ -matrica možemo gornje umnoške polarizacijskih vektora raspisati na slijedeći način

$$\not{\epsilon} \not{k} = \epsilon' \cdot \epsilon - i\sigma_{\mu\nu} \epsilon'^\mu \epsilon^\nu, \quad (1.25)$$

gdje prvi član odgovara fotonima u $CP = +1$, a drugi fotonima u $CP = -1$ stanju i ako se, pretpostavljajući očuvanje CP simetrije, ograničimo samo na $CP = -1$ stanje $|\gamma\gamma(-)\rangle$, onda je tražena amplituda

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\gamma\gamma(-) \rightarrow \mu^+\mu^-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}_{\gamma_L\gamma_L \rightarrow \mu^+\mu^-} - \mathcal{M}_{\gamma_R\gamma_R \rightarrow \mu^+\mu^-}] \\ &= \frac{e^2}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \left\{ \frac{\sigma_3 \not{k}'}{p^- \cdot k'} - \frac{\sigma_3 \not{k}}{p^- \cdot k} \right\} v(p^+). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ovdje $\gamma_{L(R)}$ označava lijevo (desno) polarizirane fotone i izabrali smo da su impulsi fotona kolinearni sa z -osi: $k = \hat{z}|k|$. Eksplicitnim uvrštavanjem spinora u ovu jednadžbu dobije se konačno

$$\mathcal{M}_{\gamma\gamma(-) \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \frac{4}{M_K(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}, \quad (1.27)$$

gdje je

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{M_K^2}}, \quad (1.28)$$

i gdje je M_K masa kaona, a m_μ masa miona.

Što se pak amplitude $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ tiče, nju parametriziramo pomoću funkcije $f_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}$ na slijedeći način, koristeći Lorentzovu i CP simetriju:

$$\mathcal{M}_{K_L \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{2}{M_K^2} f_{K_L \rightarrow \gamma\gamma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^\mu \epsilon'^\nu k^\rho k'^\sigma, \quad (1.29)$$

tako da je ukupna širina raspada $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ jednaka

$$\Gamma_{K_L \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{|f_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}|^2}{16\pi M_K}. \quad (1.30)$$

U našem baždarenju, danom jednadžbama (1.22) i (1.23), i u sustavu mirovanja kaona amplituda (1.29) je

$$\mathcal{M}_{K_L \rightarrow \gamma\gamma} = \sqrt{2} f_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}, \quad (1.31)$$

tako da jednadžba (1.17) postaje

$$\text{Im} \mathcal{M}_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-} = -i \frac{1}{64\pi} \sqrt{2} f_{K_L \rightarrow \gamma\gamma} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{e^2}{\sqrt{2}} \frac{4}{M_K(1 - \beta^2 \cos^2\theta)}, \quad (1.32)$$

što nakon integracije i korištenja (1.30) daje izraz za omjer apsorpcijske širine raspada $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ i ukupne širine raspada $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ (Sehgal, 1969)

$$\frac{\Gamma_{K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-}^{\text{abs}}}{\Gamma_{K_L \rightarrow \gamma\gamma}} = \alpha^2 \frac{m_\mu^2}{M_K^2} \frac{1}{2\beta} \left(\ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2, \quad (1.33)$$

gdje je α konstanta fine strukture.

1.3 Dugodosežna disperzijska amplituda

Dugodosežna disperzijska amplituda procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ je najvećim dijelom, baš kao i apsorpcijska amplituda, posljedica prijelaza kod kojeg se u međustanju nalaze dva fotona, koja su u ovom slučaju virtualna:

$$K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-. \quad (1.34)$$

Budući da je proces $K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ teorijski vrlo slabo istražen, ovaj dio amplitude predstavlja najveću zapreku pri pokušajima preciznog teorijskog proračuna ukupne širine raspada $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Najčešći pristup ovom problemu je korištenje ideje o tzv. *dominaciji vektorskih mezona* koja se i inače pokazala dosta korisnom u proučavanju niza hadronskih procesa, uključujući i $K_L \rightarrow \gamma\gamma$. Jedan pristup računu amplitude $K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ je upotreba eksperimentalnih rezultata za proces $K_L \rightarrow e^+ e^- \gamma$ iz kojih se može izvući informacija o vrhu $K_L \rightarrow \gamma^* \gamma$ gdje je samo jedan od fotona izvan masene ljuske. (Bergstrom et al., 1990) pokušavaju onda proširiti te rezultate na slučaj $K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ tako da promatraju dvije alternative: prvu u kojoj je jedan foton zasićen vektorskim mezonima i drugu u kojoj su to oba fotona. Oni onda tvrde da se pravi rezultat mora nalaziti između ta dva ekstrema i dobijaju da je dugodosežna disperzivna amplituda malena i da je njen doprinos svega nekoliko postotatka apsorptivne amplitude.

Druga analiza, ona iz rada (Ko, 1992), dolazi do skoro sasvim suprotnih zaključaka. Ko koristi kiralni lagranžijan u tzv. *shemi skrivene simetrije* (Bando et al., 1988) što je pristup u osnovi nalik na pristup preko dominacije vektorskih

mezona. U ovom pristupu kiralni lagranžijan fiksira relativne doprinose pojedinih dijagrama s vektorskim mezonima u međustanju, ali postoje drugi slobodni parametri koje je potrebno nekako odrediti. Krajnji zaključak ove analize je da je dugodosežna disperzivna amplituda značajna, po iznosu skoro pola apsorptivne amplitude, i suprotnog predznaka od kratkodosežne disperzivne amplitude \mathcal{A}_{1L} (računate na nivou dijagrama s jednom petljom). Ako je ovaj rezultat točan onda je i pogodnost procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ za analizu kratkodosežne fizike bitno manja.

Očito je da je iz ovih protuslovnih rezultata teško izvući neke zaključke. Novi eksperimentalni rezultati bi u mnogome mogli pomoći. Na primjer, mjerenje procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$ bi moglo dodatno pojasniti strukturu vrha $K_L \gamma^* \gamma$. Isto tako, u Fermilabu eksperiment E799 već daje prve rezultate za raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ koji će omogućiti analizu vrha $K_L \gamma^* \gamma^*$.

S druge strane, u ovom radu, baš kao i u radu Eeg et al. (1998), pokušat ćemo suziti taj široki prostor mogućnosti određujući posljednji važni sastojak amplitude procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ — kratkodosežni disperzivni doprinos realiziran putem Feynmanovih dijagrama s dvije petlje.

1.4 Kratkodosežna disperzijska amplituda generirana dijagramima s jednom petljom

Nakon što smo prodiskutirali dugodosežni dio disperzivne amplitude, osvrnimo se i na kratkodosežni dio i to na onaj kratkodosežni dio dan dijagramima s jednom petljom. Dugo vremena je osnovna motivacija za proučavanje ovog dijela bila potencijalna osjetljivost ove amplitude na masu t kvarka. Kako je u međuvremenu masa t kvarka određena direktnim mjerenjima to je ova amplituda, a s njom i čitav proces $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, ostala zanimljiva još samo kao izvor informacija o elementima Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrice ili o eventualnoj novoj fizici izvan standardnog modela (Buchalla et al., 1996).

Amplituda je posljedica izmjene dva W ili jednog Z bozona kako je prikazano na dijagramima (a) i (b) sa slike 1.1 i može se napisati u obliku (Inami i Lim, 1981)

$$B(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{SD} = \frac{\alpha}{4\pi^2 \sin^4 \theta_W} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{m_K^2}}}{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2} \times \\ \times \frac{\left| \text{Re} \sum_{i=c,t} \eta_i V_{is}^* V_{id} C_\mu(x_i) \right|^2}{|V_{us}|} B(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \frac{\tau(K_L)}{\tau(K^+)}, \quad (1.35)$$

gdje su η_i faktori korekcije zbog učinaka kvantne kromodinamike, $\tau(K_L)$ i $\tau(K^+)$

su vremena života čestica K_L i K^+ , V_{ij} su elementi Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrice,

$$x_i = \frac{m_i^2}{m_W^2}, \quad (1.36)$$

i

$$C_\mu(x_i) = \frac{4x_i - x_i^2}{4(1 - x_i)} + \frac{3x_1 \ln x_i}{4(1 - x_i)^2}. \quad (1.37)$$

U gornjoj sumi t kvark dominira pa onda možemo uzeti $\eta_t \simeq 1$ i imamo otprilike

$$B(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{SD}} = 4.06 \times 10^{-10} A^4 |C_\mu|^2 (1 - \rho)^2, \quad (1.38)$$

gdje su A i ρ element Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrice u Wolfensteinovoj parametrizaciji. Vidimo, dakle, da poznavanje $B(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{SD}}$, uz x_t i A koji su relativno dobro poznati, omogućuje određivanje nepoznatog parametra ρ .

Glava 2

Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ — disperzijska dvofotonska amplituda

2.1 Uvod

Sada prelazimo na središnji dio ovog rada u kojem ćemo prikazati račun kratkodosežnog disperzijskog dijela amplitude raspada $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ (Eeg, Kumerički i Picek, 1998). Naime, mijenjanje impulsa fotona u petlji u dijagramu 1.1c omogućuje nam kontrolirano razlikovanje kratkodosežnih i dugodosežnih doprinosa tog dijagrama. Naš cilj u ovom poglavlju je određivanje kratkodosežnog dijela amplitude definiranog fotonima s impulsom iznad neke, hadronskom fizikom definirane, skale Λ . Naravno, rezultati imaju smisla samo ukoliko nisu previše osjetljivi na precizan izbor te skale što će se kasnije pokazati kroz konkretne brojke.

Ono što računamo je kvarkovski proces

$$s\bar{d} \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^- , \quad (2.1)$$

realiziran Feynmanovim dijagramima s dvije petlje koji daje amplitudu proporcionalnu lijevoj kvarkovskoj struji $s \rightarrow d$ prijelaza. Račun, prikazan u slijedećem odjeljku, uključuje izvrijednjavanje 44 elektroslaba dijagrama u 't Hooft-Feynmanovom baždarenju. Kako ćemo vidjeti, zgodno je razlikovati tri skupa dijagrama, ovisno o jednočestično ireducibilnoj subpetlji koju uključuju. Tako imamo A -dijagrame prikazane na slici 2.1 sa jednočestično ireducibilnim prijelazima $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prikazanim na slici 2.3, B -dijagrame prikazane na slici 2.11 sa jednočestično ireducibilnim prijelazima $s \rightarrow d\gamma$ prikazanim na slici 2.13 i C -dijagrame s nediagonalnim $s \rightarrow d$ prijelazima sa slike 2.16.

Elektroslabi $s \rightarrow d\gamma\gamma$ subdijagrami su ultraljubičasto konačni, dok su $s \rightarrow d\gamma$ i $s \rightarrow d$ subdijagrami divergentni i zahtijevaju odgovarajuću regularizaciju. Mi smo konkretno koristili subtrakciju na ljusci mase u granici iščezavajućih impulsa

vanjskih laganih kvarkova. Struktura C -dijagrama odgovara $s \rightarrow d$ amplitudi regulariziranoj tako da iščezava kad su s i d kvarkovi na ljusci mase (Shabalin, 1980) u granici $m_{s,d} \rightarrow 0$ u kojoj radimo.

Nakon regularizacije učinkovni $s \rightarrow d\gamma\gamma$ (A -prijelaz), $s \rightarrow d\gamma$ (B -prijelaz) i $s \rightarrow d$ (C -prijelaz) vrhovi imaju strukture

$$\begin{aligned} A &: \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} k_\sigma \bar{d} \gamma_\rho L s, \\ B &: (g^{\mu\rho} k^2 - k^\mu k^\rho) \bar{d} \gamma_\rho L s, \\ C &: \bar{d}(\gamma \cdot k)^3 L s, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdje je k impuls fotona (koji je za B i C -dijagrame jednak impulsu s ili d kvarka u petlji). Nakon regularizacije, sva tri tipa dijagrama su baždarno invarijantni kad dodamo dijagrame s križanim fotonima. Osim onih danih u (2.2) pri izvrijednjavanju A i B -dijagrama pojavljuju se i neke druge strukture, ali, kad dodamo dijagrame s križanim fotonima, one ne doprinose konačnim procesima s dvije petlje.

Rezultirajuća amplituda, kad zbrojimo dijagrame s A , B i C subpetljama ima oblik

$$\mathcal{M}_{2\gamma}^q = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \lambda_q \{A_q + B_q + C_q\} (\bar{d} \gamma^\beta L s) (\bar{u} \gamma_\beta \gamma_5 v), \quad (2.3)$$

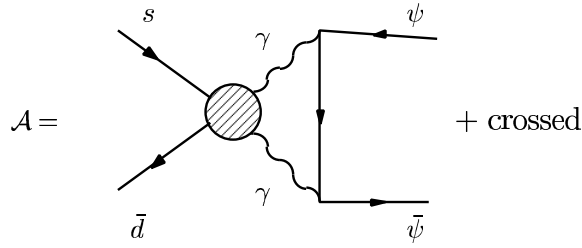
koja je proporcionalna operatoru koji se pojavljuje u računima dijagrama s jednom petljom (Vainshtein et al., 1976). Kad zbrojimo doprinose svih triju gornjih kvarkova ($q = u, c, t$) koji se propagiraju petljom dobijemo amplitudu

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s\bar{d} \rightarrow \mu\bar{\mu}) &= \sum_q \lambda_q \mathcal{M}^q \\ &= \lambda_u (\mathcal{M}^u - \mathcal{M}^c) + \lambda_t (\mathcal{M}^t - \mathcal{M}^c) \\ &= -\lambda_u \mathcal{M}^{(c,u)} + \lambda_t \mathcal{M}^{(t,c)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

napisanu tako da se eksplicitno vidi djelovanje Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) mehanizma (λ_q su odgovarajući Kobayashi-Maskawa faktori). Nakon što inkorporiramo $s\bar{d}$ ($d\bar{s}$) u mezon \bar{K}^0 (K^0) fizikalna amplituda koja čuva CP simetriju poprima oblik

$$\mathcal{A}(K_L \rightarrow \mu\bar{\mu})^{\text{CP-cons}} = -\lambda_u \mathcal{A}^{(c,u)} + \text{Re} \lambda_t \mathcal{A}^{(t,c)}. \quad (2.5)$$

Vidjet ćemo da za lagane kvarkove ($q = c, u$) u petlji dijagrami $A1$ sa slike 2.3 i $B1$ sa slike 2.13 potpuno dominiraju amplitudom, a ostali su dijagrami potisnuti za faktor m_c^2/M_W^2 nakon djelovanja GIM mehanizma. S druge strane, kad se u petlji propagira teški t kvark takvog potisnuća naravno nema i *a priori* moramo uzeti u obzir doprinose svih dijagrama. Pokazuje se da je u tom slučaju među A -dijagramima dominantan $A3$, a među B -dijagramima ponovo $B1$. Nadalje,



Slika 2.1: A -doprinosi amplitudi $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, tj. doprinosi subdijagrama s jednočestično ireducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazom.

u oba slučaja imamo još i doprinosi nedijagonalne $s \rightarrow d$ vlastite energije (C -dijagrami). Ovaj je doprinos u čistom elektroslabom slučaju zanemariv, međutim, kad se u razmatranje uključe i korekcije perturbativne kvantne kromodinamike, on potencijalno postaje nepotisnut.

2.2 Elektroslabi račun

U ovom odjeljku ćemo detaljno prikazati račun procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ u čistoj elektroslaboj teoriji. Kako je već spomenuto, podijelit ćemo doprinose ovoj amplitudi ovisno o tome da li su jednočestično ireducibilni subdijagrami za prijelaz s kvarka u d kvark tipa $s \rightarrow d\gamma\gamma$ (A -doprinosi), $s \rightarrow d\gamma$ (B -doprinosi) ili $s \rightarrow d$ (C -doprinosi).

2.2.1 A -doprinosi

Označimo li s $M_{\mu\nu}$ amplitudu za prijelaz $s \rightarrow d\gamma\gamma$ izgrađenu od jednočestično ireducibilnih dijagrama (slika 2.2), tada je A -doprinosi dan izrazom (slika 2.1)

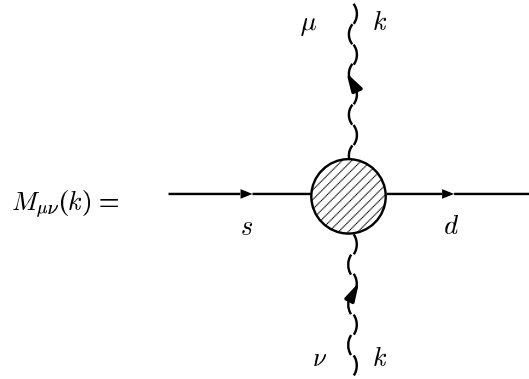
$$\mathcal{A} = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^6} [\bar{\psi} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \psi M_{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \psi M_{\mu\nu}] , \quad (2.6)$$

gdje je ψ mionski spinor i gdje smo zanemarili masu miona što je prihvatljiva pretpostavka za račun na elektroslaboj skali. Ovo sada možemo pojednostaviti upotrebom tzv. Chisholmovog identiteta

$$-i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_5 = \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + S^{(\nu\sigma)\rho} , \quad (2.7)$$

gdje je $S^{(\nu\sigma)\rho}$ struktura simetrična na zamjenu prva dva indeksa

$$S^{(\nu\sigma)\rho} = g^{\nu\sigma} \gamma^\rho - g^{\nu\rho} \gamma^\sigma - g^{\nu\rho} \gamma^\sigma , \quad (2.8)$$



Slika 2.2: Jednočestično ireducibilna amplituda $M_{\mu\nu}$ prijelaza $s \rightarrow d\gamma\gamma$.

koja se pokraci u zbroju dva člana u (2.6) dajući

$$\mathcal{A} = -e^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^6} 2\epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma M_{\mu\nu}(k). \quad (2.9)$$

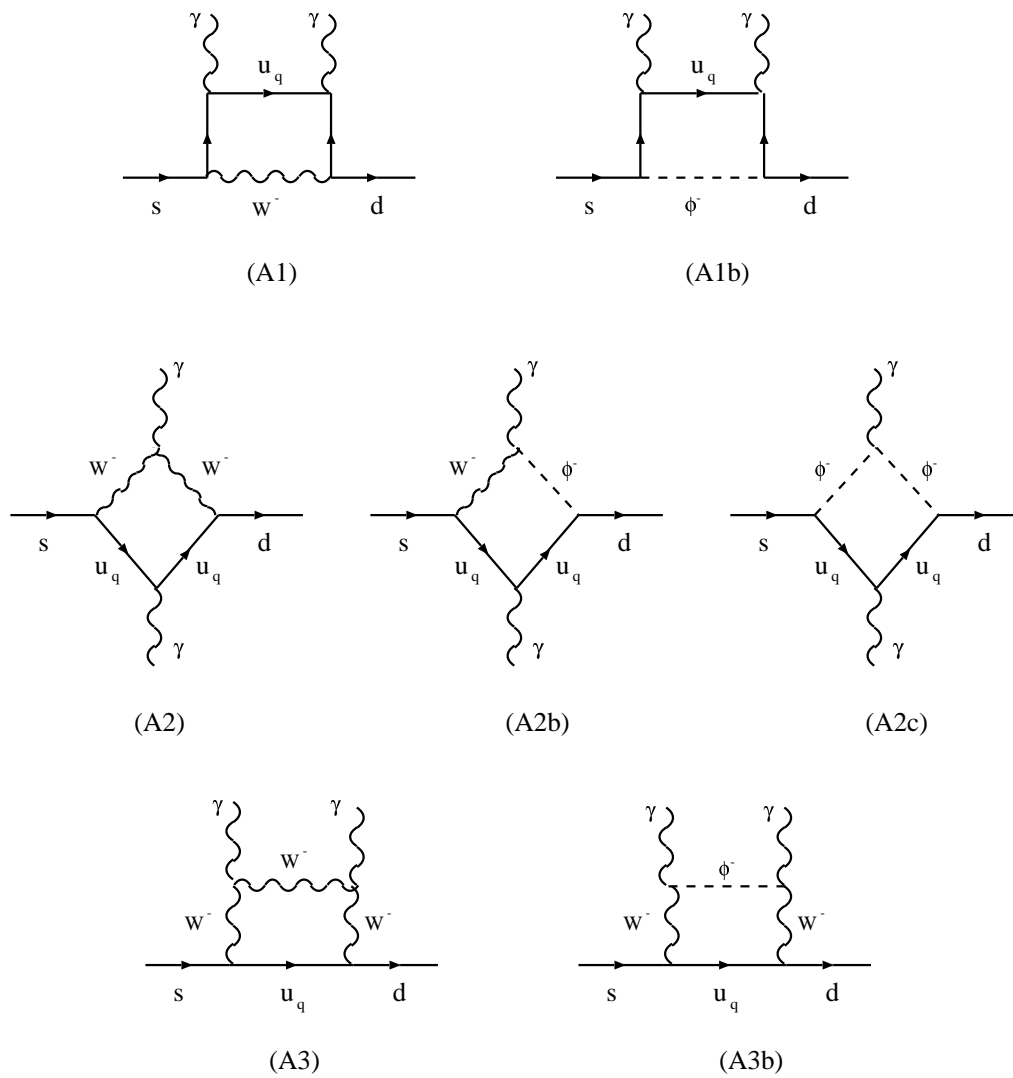
Jednočestično ireducibilna amplituda $M_{\mu\nu}$ se računa izvrijednjavanjem dijagrama sa slike 2.3. Konkretno, napišemo amplitudu pojedinog dijagrama pomoću Feynmanove parametrizacije i zatim je ubacimo u jednadžbu (2.9) pa izvrijednjujemo punu amplitudu dijagrama sa dvije petlje. Kako bismo račun učinili mogućim, nužno je pribjeći određenim pojednostavljivanjima. Već smo spomenuli kako zanemarujemo masu miona koji se propagira u petlji. Isto tako, zanemarit ćemo mase vanjskih s i d kvarkova koje su također puno manje od mase W bozona koja određuje elektroslabu energijsku skalu. Uz ove pretpostavke, oblik naših amplituda postaje dovoljno jednostavan da je integraciju po impulsima čestica u petljama moguće izvesti analitičkim postupkom. Tako će na kraju jedina stvar koja će se raditi numeričkim metodama biti trivijalna integracija po Feynmanovim parametrima.

Prikažimo sada detaljnije ovaj račun.

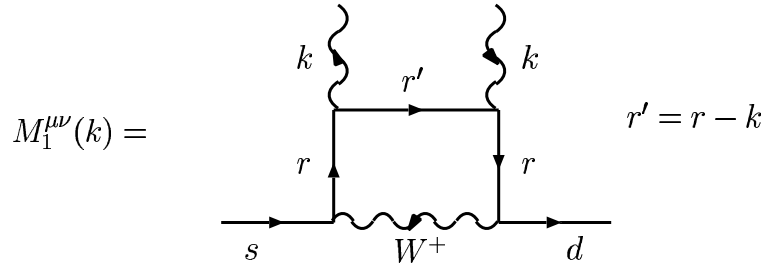
Dijagram A1

Upotreba Feynmanovih pravila u 't Hooft-Feynmanovom baždarenju daje za dijagram A1 sa slike 2.4

$$M_1^{\mu\nu} = \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha L \right) \times \\ \times iS(r) (ie_q \gamma^\nu) iS(r') (ie_q \gamma^\mu) iS(r) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\alpha L \right) s \frac{-i}{r^2 - M_W^2}, \quad (2.10)$$



Slika 2.3: Dijagrami koji doprinose jednočestično ireducibilnoj amplitudi $M_{\mu\nu}$ sa slike 2.2.



Slika 2.4: Dijagram A1.

gdje su d i s spinori odgovarajućih kvarkova, e_q je naboj kvarka koji se propagira u petlji ($q = u, c, t$), g je slaba konstanta vezanja, $S(r)$ je fermionski propagator

$$S(r) = \frac{\not{r} + m}{r^2 - m^2}, \quad (2.11)$$

m je masa “gornjeg” kvarka koji se propagira u petlji, a impulsi su kako je označeno na slici 2.4.

Nazivnike propagatora čestica u petlji udružujemo pomoću Feynmanove parametrizacije

$$\frac{1}{(r^2 - m^2)(r'^2 - m^2)(r^2 - M_W^2)} = 3! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - x - y}{N^4}, \quad (2.12)$$

gdje je

$$N = (r'^2 - m^2)x + (r^2 - M_W^2)y + (1 - x - y)(r^2 - m^2) \quad (2.13)$$

nazivnik kojeg uvođenjem varijable

$$\bar{r} \equiv r - xk, \quad (2.14)$$

nadopunjavamo do potpunog kvadrata

$$N = \bar{r}^2 - \bar{A}, \quad (2.15)$$

gdje je

$$\bar{A} = y(M_W^2 - m^2) + m^2 - x(1 - x)k^2. \quad (2.16)$$

(Ovo uvođenje mnogih novih oznaka će nam kasnije olakšati manipuliranje izrazima.) Uzevši u obzir sve ovo i uvrstivši dobiveni izraz za $M^{\mu\nu}$ u jednadžbu (2.9)

dobijemo za \mathcal{A}_1

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = & (ee_q \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy \times \\ & \times \frac{12(1-x-y)}{k^6 N^4} DIRAC_1^\beta s, \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdje smo s $DIRAC_1^\beta$ označili izraz

$$\begin{aligned} DIRAC_1^\beta & \equiv \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma \gamma^\alpha L(\not{r} + x\not{k} + m) \gamma_\nu (\not{r} + (x-1)\not{k} + m) \gamma_\mu \\ & \quad \times (\not{r} + x\not{k} + m) \gamma_\alpha L \\ & = -\epsilon^{\beta\mu\nu\sigma} \gamma^\alpha L(\not{r} + m + \not{k}x) \gamma_\nu (\not{r} + m + \not{k}(-1+x)) \gamma_\mu \\ & \quad \times (\not{r} + m + \not{k}x) \gamma_\alpha L k_\sigma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ovaj izraz je moguće prije integracija pojednostaviti korištenjem pravila za algebru Diracovih γ -matrica. To je principijelno jednostavan, ali dugotrajan posao podložen pogreškama. Radi toga smo se u računu koristili *Mathematica* jezikom za računalnu algebru (Wolfram, 1988) i programom *FeynCalc* Mertig et al. (1991) specijaliziranim za algebarske račune u fizici visokih energija. Kako bismo još više automatizirali račune ovih dijagrama s dvije petlje, napisali smo i program *check* koji prilagođava upotrebu *Mathematice* i *FeynCalca* našim amplitudama. Detaljni prikaz ovih programa i način njihove upotrebe dan je u dodatku A gdje i demonstrirana njihova upotreba upravo na primjeru ove A_1 amplitude. Samo ćemo još spomenuti da u tom dijelu koji izvodimo na računalu osim standardne Diracove i Lorentzove algebre, pri pojednostavljivanju se koristimo i činjenicom da će izraz $DIRAC^\beta$ kasnije biti integriran preko čitavih r i k prostora pa možemo eliminirati članove neparne u tim varijablama, a u onim kvadratnim izvršiti zamjenu

$$k^\mu k^\nu \longrightarrow \frac{1}{4} g^{\mu\nu} k^2, \quad (2.19)$$

i ekvivalentnu zamjenu za r .

Nakon svih tih manipulacija, kako je pokazano u dodatku A, $DIRAC_1^\beta$ postaje¹

$$DIRAC_1^\beta = \frac{3i}{2} k^2 (-2m^2 - \bar{r}^2 - 2m^2 x + 3\bar{r}^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3) \gamma^\beta L, \quad (2.20)$$

tako da je amplituda \mathcal{A}_1 prije integracije po impulsima petlje

$$\mathcal{A}_1 = i(ee_q \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy \times$$

¹U dodatku A je, radi pojednostavljenja izraza koji se unosi u računalu, varijabla \bar{r} označena s r .

$$\times \frac{1-x-y}{k^6 N^4} 18 k^2 (-2m^2 - \bar{r}^2 - 2m^2 x + 3\bar{r}^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3) . \quad (2.21)$$

Samu integraciju po impulsima petlje jednostavno provodimo koristeći integrale dane u dodatku B. Tako prvo integriramo po $d^4 r$ i dobijemo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= i(ee_q \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 dx dy \times \\ &\times \frac{1-x-y}{k^4} \frac{18i}{16\pi^2} \left\{ \frac{-2m^2 - 2m^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3}{6A^2} - \frac{-1+3x}{3A} \right\} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Isto tako, pomoću integrala iz dodatka B izvedemo i integraciju po $d^4 k$ i dobijemo konačno

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= -i \left(\frac{i}{16\pi^2} \right) (e^2 \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \times \\ &\times \frac{8}{3} \left\{ (3x-1)J_a + x^2(1-x)J_b + m^2(1+x)J_c \right\} , \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdje su J_a , J_b i J_c funkcije od m , M_W , x , y i Λ definirane u dodatku B. Λ je infracrvena granica do koje idu integrali po impulsu fotona k .

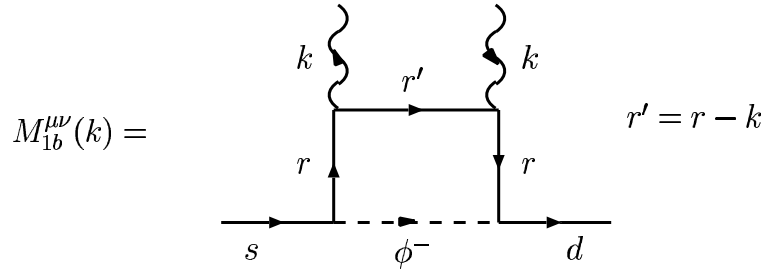
Sada ovu preostalu integraciju po Feynmanovim parametrima x i y izvodimo numerički. Te numeričke integracije smo izvodili programima u FORTRAN-u, a za po jedan izbor parametara m i Λ smo za svaki dijagram izveli i jednu kontrolnu numeričku integraciju u *Mathematici*. U tu svrhu smo iz svih dijagrama izvukli zajednički faktor u kojeg su ušle konstante vezanja te hadronska i leptonska struja na slijedeći način:

$$\mathcal{A}_1 = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) A1 , \quad (2.24)$$

gdje je G_F Fermijeva konstanta, a $A1$ je amplituda

$$\begin{aligned} A1 &= -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ &\times \frac{8}{3} (1-x-y) \left\{ (3x-1)J_a x^2 (1-x)J_b + m^2(1+x)J_c \right\} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

koju navodimo kasnije u tabelama zajedno s odgovarajućim amplitudama za ostale dijagrame.



Slika 2.5: Dijagram A1b.

Dijagram A1b

Jedina razlika ovog dijagrama obzirom na prethodni je to da se u petlji umjesto W bozona izmjenjuje nefizikalni nabijeni ϕ Higgsov bozon. Feynmanova pravila daju za amplitudu (vidi sliku 2.5)

$$M_{1b}^{\mu\nu} = \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M_W} R - \frac{m_d}{M_W} L \right) \times$$

$$\times iS(r) (ie_q \gamma^\nu) iS(r') (ie_q \gamma^\mu) iS(r) i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M_W} L - \frac{m_s}{M_W} R \right) s \frac{i}{r^2 M_W^2}, \quad (2.26)$$

gdje su m_d i m_s mase d i s kvarkova. Slično kao i kod prošlog dijagrama korištenje Feynmanove parametrizacije omogućuje nam da ovo, nakon uvođenja nove varijable

$$\bar{r} \equiv r - xk \quad (2.27)$$

i uvrštavanja u (2.9) napišemo u obliku

$$\mathcal{A}_{1b} = -(ee_q \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy \times$$

$$\times \frac{12(1-x-y)}{k^6 N^4} DIRAC_{1b}^\beta s, \quad (2.28)$$

gdje smo s $DIRAC_{1b}^\beta$ označili izraz

$$DIRAC_{1b}^\beta \equiv \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma (mR - m_d L) (\not{r} + (x-1)\not{k} + m) \gamma_\nu \times$$

$$\times (\not{r} + x\not{k} + m) (mL - m_s R) \frac{1}{M_W^2}. \quad (2.29)$$

Sada ovaj izraz opet pojednostavimo korištenjem programa `FeynCalc` i check kako je opisano u dodatku A i dobijemo

$$\begin{aligned} DIRAC_{1b}^\beta &= i \left[\frac{m^2}{M_W^2} \gamma_\beta L - \frac{m_d m_s}{M_W^2} \gamma_\beta R \right] \times \\ &\times \frac{3}{4} k^2 (-2m^2 - \bar{r}^2 - 2m^2 x + 3\bar{r}^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3), \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ono što sad možemo primijetiti je da je za lagane kvarkove u petlji $m = m_{u,c}$ ovaj dijagram potisnut obzirom na $A1$ za faktor m^2/M_W^2 pa ga u tom slučaju možemo zanemariti. Ako se pak u petlji propagira teški kvark t onda je drugi član u uglatoj zagradi puno manji od prvog i možemo ga zanemariti tako da imamo

$$DIRAC_{1b}^\beta = \frac{3im^2}{4M_W^2} k^2 (-2m_\mu^2 - \bar{r}^2 - 2m_\mu^2 x + 3\bar{r}^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3) \gamma^\beta L. \quad (2.31)$$

Usporedimo li to s (2.20) vidimo da se ta dva izraza razlikuju samo za konstantni faktor

$$DIRAC_{1b}^\beta = \frac{m^2}{2M_W^2} DIRAC_1^\beta, \quad (2.32)$$

tako da integrale po impulsima petlji ne moramo ni računati već odmah iščitamo

$$\mathcal{A}_{1b} = -\frac{m^2}{2M_W^2} \mathcal{A}_1, \quad (2.33)$$

gdje se lijepo vidi da će ovaj dijagram biti eventualno važan samo za amplitude s t kvarkom u petlji.

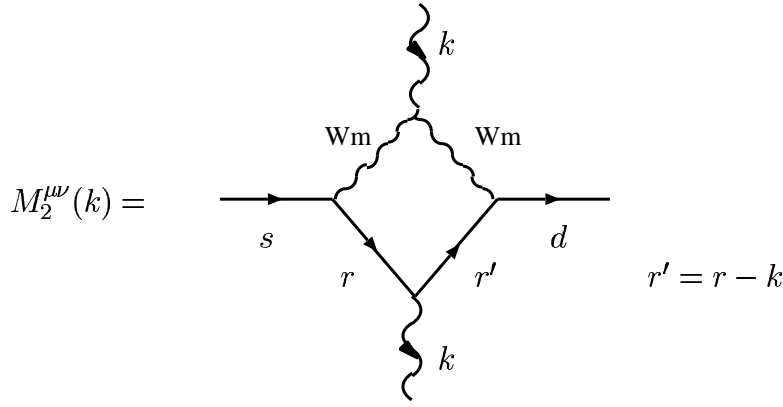
Dijagram $A2$

Amplituda je, prema slici 2.6

$$\begin{aligned} M_2^{\mu\nu} &= \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\lambda L \right) iS(r') (ie_q \gamma^\mu) iS(r) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\rho L \right) s \times \\ &\times \left(\frac{-ig_{\lambda\lambda'}}{r'^2 - M_W^2} \right) \left(\frac{-ig_{\rho\rho'}}{r^2 - M_W^2} \right) \times \\ &\times (ie) \left[-g^{\lambda'\nu} (k - r')^{\rho'} - g^{\nu\rho'} (-r - k)^{\lambda'} - g^{\rho'\lambda'} (r' + r)^\nu \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Četiri propagatora iz petlje kombiniramo ponovo pomoću Feynmanove parametrizacije

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(r'^2 - m^2)(r^2 - M_W^2)(r'^2 - M_W^2)(r^2 - m^2)} = \\ &= 3! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{\tilde{N}^2}, \end{aligned} \quad (2.35)$$



Slika 2.6: Dijagram A2.

gdje je

$$\tilde{N} = \tilde{r}^2 - \tilde{A}^2, \quad (2.36)$$

uz uvedene nove varijable

$$\tilde{r} \equiv r - k(x + z), \quad (2.37)$$

i

$$\tilde{A} \equiv m^2 + (M_W^2 - m^2)(y + z) - (x + z)(1 - x - z)k^2. \quad (2.38)$$

Izrazimo li sada i brojnik pomoću ove nove varijable i uvrstimo $M_2^{\mu\nu}$ u (2.9) dobijemo

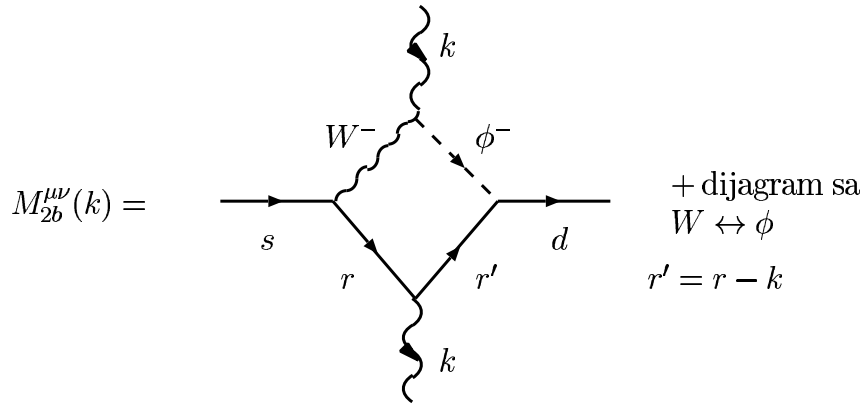
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 = & (e^3 e_q \frac{g^2}{2})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} dx dy dz \times \\ & \times \frac{12}{k^6 \tilde{N}^4} DIRAC_2^\beta s, \end{aligned} \quad (2.39)$$

gdje je

$$\begin{aligned} DIRAC_2^\beta = & \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma \gamma^\lambda L (\not{k} + \not{k}(x + z - 1) + m) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}(x + z) + m) \times \\ & \times \gamma^\rho L \left[(2\tilde{r}_\nu + 2k_\nu(x + z - \frac{1}{2})) g_{\rho\lambda} - (\tilde{r}_\lambda + k_\lambda(x + z + 1)) g_{\nu\rho} - \right. \\ & \left. - (\tilde{r}_\rho + k_\rho(x + z - 2)) g_{\nu\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Kod ovakvih složenih izraza pokazuje se prava snaga programa `FeynCalc` i `check` — nakon nekoliko sekundi računalo pojednostavljuje ovaj izraz na

$$DIRAC_2^\beta = \frac{9i}{4} k^2 (-2m^2 + \tilde{r}^2 - 2k^2 x + 2k^2 x^2 - 2k^2 z + 4k^2 xz + 2k^2 z^2) \gamma^\beta L. \quad (2.41)$$



Slika 2.7: Dijagram A2b.

Integracija po $d^4\tilde{r}$ je ista kao i za dijagram A1. Što se pak integracije po d^4k tiče, pojavljuju se neki novi integrali (K_a , K_b i K_c) koji su svi navedeni u dodatku B i krajnja amplituda je

$$\mathcal{A}_2 = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) A_2, \quad (2.42)$$

gdje je A_2 (amplituda koju kasnije tabeliramo) dana s

$$A_2 = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \times \\ \times 6 \{ K_a (1-x-y)(x+z) K_b + m^2 K_c \}. \quad (2.43)$$

Dijagram A2b

Ovdje imamo dva srodna dijagrama kako je prikazano na slici 2.7. Označimo li njihove amplitude s $M_{2b1}^{\mu\nu}$ i $M_{2b2}^{\mu\nu}$, onda za prvi od njih, $M_{2b1}^{\mu\nu}$, imamo

$$M_{2b1}^{\mu\nu} = \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M_W} R - \frac{m_d}{M_W} L \right) i S(r') \times \\ \times (ie_q \gamma^\mu) i S(r) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\rho L \right) s \left(\frac{-ig_{\rho\rho'}}{r^2 - M_W^2} \right) (ieg^{\rho'\nu} M_W) \left(\frac{1}{r'^2 - M_W^2} \right). \quad (2.44)$$

Nazivnik je isti kao i kod prošlog dijagrama — \tilde{N} , pa istim postupkom dolazimo do amplitude

$$\mathcal{A}_{2b1} = e^3 e_q \frac{g^2}{2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} dx dy dz \times$$

$$\times \frac{12}{k^6 \tilde{N}^4} DIRAC_{2b1}^\beta s , \quad (2.45)$$

gdje je

$$DIRAC_{2b1}^\beta = \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma (mR - m_d L) (\not{k} + \not{k}(x+z-1) + m) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}(x+z) + m) \gamma_\nu L . \quad (2.46)$$

Ovaj izraz računalo pojednostavljuje na

$$DIRAC_{2b1}^\beta = -\frac{3i}{2} m^2 k^2 \gamma^\beta L , \quad (2.47)$$

tako da nakon integracija po impulsima petlji odgovarajuća amplituda postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2b1} = & -i \left(\frac{i}{16\pi^2} \right) (e^2 \frac{g}{\sqrt{2}})^2 (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) \times \\ & \times \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz 2m^2 K_c , \end{aligned} \quad (2.48)$$

gdje je K_c integral koji se već pojavljivao i koji je definiran u dodatku B.

Provedemo li na isti način račun drugog dijagrama sa slike 2.7, za zamijenjenim W i ϕ propagatorima, dobijemo identičnu amplitudu tako da definiramo

$$\mathcal{A}_{2b} \equiv \mathcal{A}_{2b1} + \mathcal{A}_{2b2} = 2\mathcal{A}_{2b1} , \quad (2.49)$$

za koju konačno vrijedi

$$\mathcal{A}_{2b} = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) A_{2b} , \quad (2.50)$$

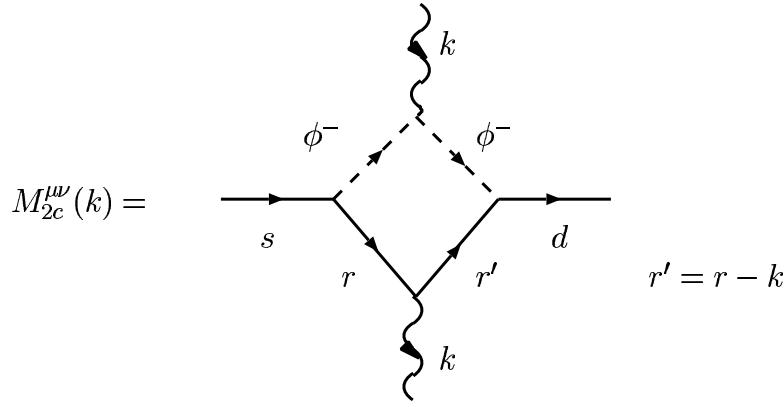
gdje je A_{2b}

$$A_{2b} = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \{ 4m^2 K_c \} . \quad (2.51)$$

Dijagram A_{2c}

Sa slike 2.8, koristeći Feynmanova pravila imamo za amplitudu $M_{2c}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} M_{2c}^{\mu\nu} = & \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M_W} R - \frac{m_d}{M_W} L \right) \times \\ & \times i S(r') (ie_q \gamma^\mu) i S(r) i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M_W} L - \frac{m_s}{M_W} R \right) s \times \\ & \times \left(\frac{1}{r^2 - M_W^2} \right) (ie(r' + r)^\nu) \left(\frac{1}{r'^2 - M_W^2} \right) , \end{aligned} \quad (2.52)$$



Slika 2.8: Dijagram A2c.

pa onda, uvrštavanjem u (2.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2c} = & -e^3 e_q \frac{g^2}{2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} dx dy dz \times \\ & \times \frac{12}{k^6 \tilde{N}^4} DIRAC_{2c}^\beta s, \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdje je

$$\begin{aligned} DIRAC_{2c}^\beta = & \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma (2\tilde{r}_\nu + 2k_\nu(x + z + \frac{1}{2})) (mR - m_d L) \times \\ & \times (\not{r} + \not{k}(x + z - 1) + m) \gamma^\mu (\not{r} + \not{k}(x + z) + m) \times \\ & \times (mL - m_s R) \frac{1}{M_W^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ovo se pojednostavljuje na

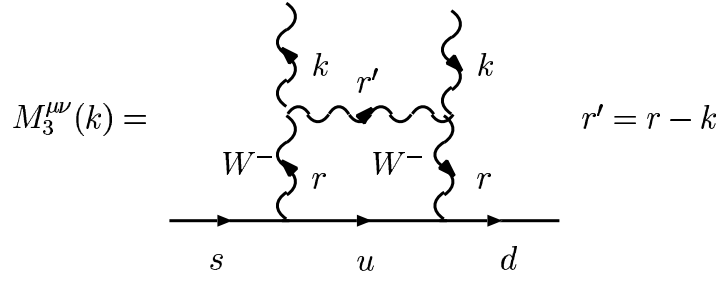
$$DIRAC_{2c}^\beta = -\frac{3i}{4} \left(\frac{m^2}{M_W^2} k^2 \tilde{r}^2 \right) \gamma^\beta L, \quad (2.55)$$

pa nakon integracije po r i k imamo amplitudu

$$\mathcal{A}_{2c} = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) A_{2c}, \quad (2.56)$$

gdje je A_{2c}

$$A_{2c} = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \left\{ 3 \frac{m^2}{M_W^2} K_a \right\}. \quad (2.57)$$



Slika 2.9: Dijagram A3.

Dijagram A3

Dijagram sa slike 2.9 daje amplitudu $M_3^{\mu\nu}$

$$M_3^{\mu\nu} = \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\lambda L \right) iS(-r) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\rho L \right) s \times \\ \times \left(ie\tilde{\Gamma}^{\alpha'\nu\lambda'}(r', k, -r) \right) \left(\frac{-ig_{\alpha\alpha'}}{r'^2 - M_W^2} \right) \left(ie\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\rho'}(-k, -r', r) \right) \left(\frac{-ig_{\rho\rho'}}{r^2 - M_W^2} \right), \quad (2.58)$$

gdje je $\tilde{\Gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3)$ γWW vrh dan s

$$\tilde{\Gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) = \left[g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu \right]. \quad (2.59)$$

Nazivnike propagatora i opet množimo pomoću Feynmanovih parametara

$$\frac{1}{(r^2 M_W^2)(r'^2 - M_W^2)^2(r^2 - m^2)} = 3! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1-x-y}{\hat{N}^4}, \quad (2.60)$$

gdje je

$$\hat{N} \equiv \bar{r} - \hat{A}, \quad (2.61)$$

uz

$$\hat{A} \equiv y(m^2 - M_W^2) + M_W^2 - x(1-x)k^2, \quad (2.62)$$

a \bar{r} je, kao i ranije

$$\bar{r} \equiv r - xk. \quad (2.63)$$

Uvrstimo li to u (2.9) dobijemo amplitudu

$$\mathcal{A}_3 = e^4 \frac{g^2}{2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy dz \times \\ \times \frac{12(1-x-y)}{k^6 \hat{N}^4} DIRAC_3^\beta s, \quad (2.64)$$

gdje je

$$\begin{aligned} DIRAC_3^\beta &= \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma \gamma^\lambda L(-\not{k} - x\not{k} + m) \gamma^\rho L \times \\ &\times \left[g_{\lambda\alpha}(2\bar{r}_\nu + k_\nu(2x-1)) - g_{\nu\lambda}(\bar{r}_\alpha + k_\alpha(x+1)) - \right. \\ &\quad \left. - g_{\nu\alpha}(\bar{r}_\lambda + k_\lambda(x-2)) \right] \times \\ &\times \left[g_\rho^\alpha(2\bar{r}_\mu + k_\mu(2x-1)) - g_{\mu\rho}(\bar{r}^\alpha + k^\alpha(x+1)) - \right. \\ &\quad \left. - g_\mu^\alpha(\bar{r}_\rho + k_\rho(x-2)) \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

što se pojednostavljuje na

$$DIRAC_3^\beta = -\frac{3i}{4} k^2 (9\bar{r}^2 + 2k^2 x + 3\bar{r}^2 x + 4k^2 x^2 + k^2 x^3). \quad (2.66)$$

Sada obavimo dvije integracije po impulsima u jednoj i drugoj petlji i dobijemo

$$\mathcal{A}_3 = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) A_3, \quad (2.67)$$

gdje je A_3

$$\begin{aligned} A_3 &= -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \times \\ &\times 3 \left\{ -3(3+x)L_a + x(x+1)^2 L_b \right\}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ovdje su L_a i L_b novi izrazi koji se pojavljuju pri integraciji po $d^4 k$ i koji su dani u dodatku B.

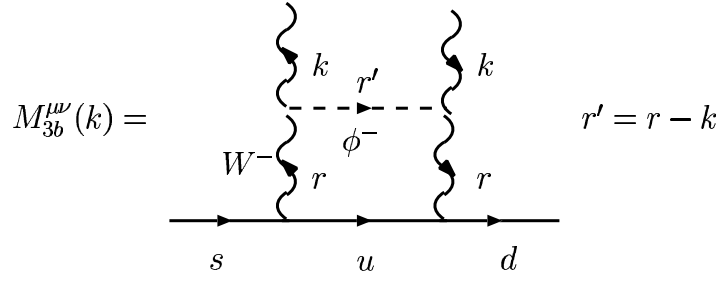
Dijagram A_{3b}

Posljednji od dijagrama s jednočestično ireducibilnim subdijagramom za prijelaz $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prikazan je na slici 2.10, a odgovarajuća amplituda $M_{3b}^{\mu\nu}$ je

$$\begin{aligned} M_{3b}^{\mu\nu} &= \bar{d} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\lambda L \right) iS(-r) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\rho L \right) s \times \\ &\times \left(\frac{-ig_{\lambda\lambda'}}{r^2 - M_W^2} \right) (ieg^{\lambda'\nu} M_W) \left(\frac{i}{r'^2 - M_W^2} \right) (ieg^{\rho'\mu} M_W) \left(\frac{-ig_{\rho\rho'}}{r'^2 - M_W^2} \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

što kad uvrstimo u (2.9), koristeći istu zamjenu varijabli i istu Feynmanovu parametrizaciju kao i kod prošlog dijagrama, daje

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3b} &= -e^4 \frac{g^2}{2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \bar{d} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy dz \times \\ &\times \frac{12(1-x-y)}{k^6 \hat{N}^4} DIRAC_{3b}^\beta s, \end{aligned} \quad (2.70)$$



Slika 2.10: Dijagram A3b.

gdje je

$$DIRAC_{3b}^{\beta} = \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_{\sigma} \gamma_{\mu} L M_W^2, \quad (2.71)$$

što se pojednostavljuje na

$$DIRAC_{3b}^{\beta} = -\frac{3i}{4} k^2 (x M_W^2). \quad (2.72)$$

Integracija po impulsima konačno daje

$$\mathcal{A}_{3b} = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_{\beta} \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^{\beta} L s) A_{3b}, \quad (2.73)$$

gdje je A_{3b}

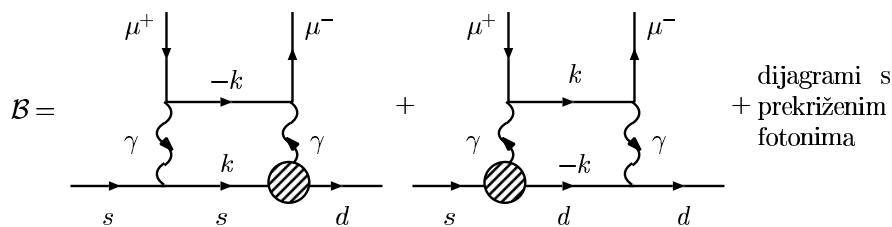
$$A_{3b} = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \{ -3M_W^2 L_c \}. \quad (2.74)$$

Ostali dijagrami koji omogućuju jednočestično ireducibilni prijelaz $s \rightarrow d\gamma\gamma$, na primjer dijagrami kod kojih se u petlji propagiraju dva ili tri nefizikalna Higgs-ova bozona, a koji nisu ni nacrtani na slici 2.3, nemaju zadovoljavajuću strukturu i ne mogu doprinositi takvim prijelazima kod kojih su fotoni u stanju s $CP = -1$.

2.2.2 B-doprinosi

Prelazimo sada na B -doprinos na našoj amplitudi tj. one koji su realizirani preko jednočestično ireducibilnog $s \rightarrow d\gamma$ prijelaza reprezentiranog crtkanim krugovima na slici 2.11. Podijelimo li ove dijagrame na one kod kojih se u petlji propagira s kvark i na one kod kojih se u petlji propagira d kvark, te na odgovarajući način podijelimo ukupnu amplitudu

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_s + \mathcal{B}_d, \quad (2.75)$$



Slika 2.11: B -doprinosi amplitudi $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, tj. doprinosi subdijagrama s jednočestično ireducibilnim $s \rightarrow d\gamma$ prijelazom.

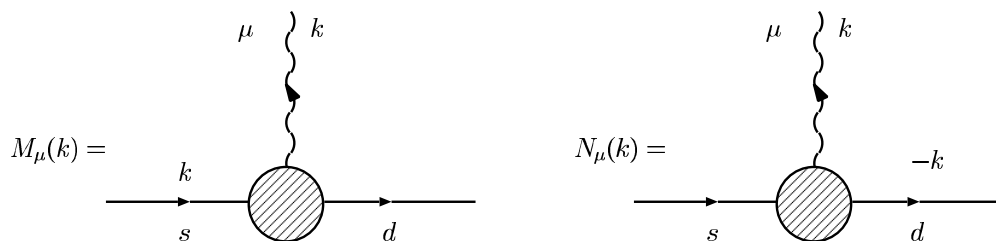
onda, prema dijagramima sa slike 2.11, imamo

$$\mathcal{B}_s = e^2 e_d (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^8} \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma (\bar{d} M_\mu k \gamma_\nu s), \quad (2.76)$$

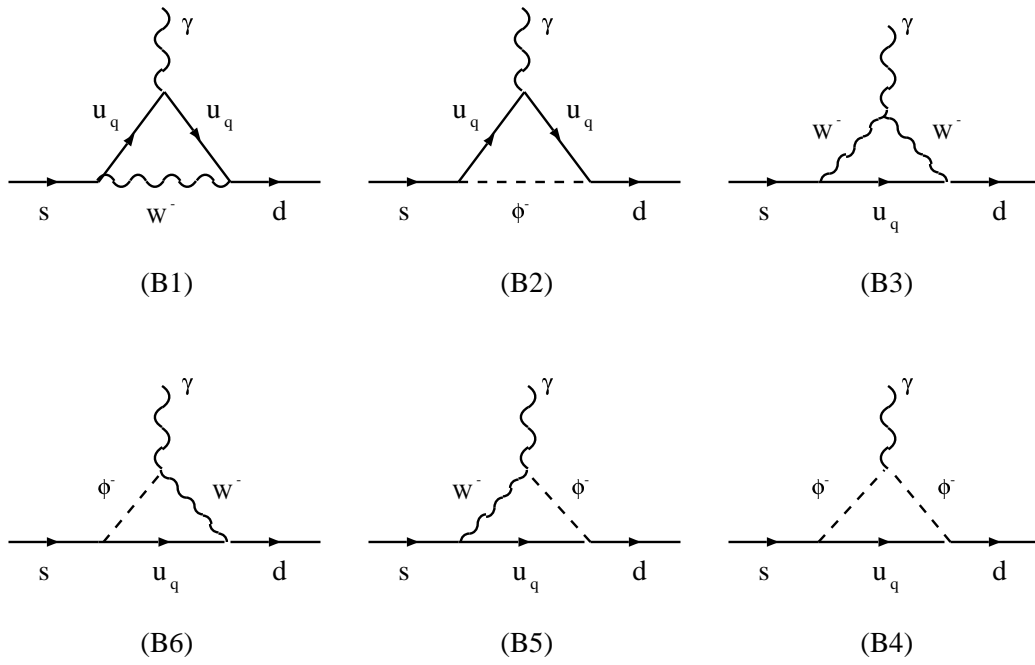
i

$$\mathcal{B}_d = e^2 e_d (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^8} \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma (\bar{d} \gamma_\nu k N_\mu s), \quad (2.77)$$

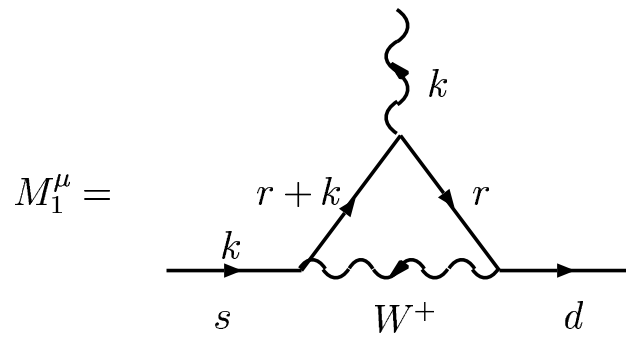
gdje je $e_d = -e/3$ naboj donjih kvarkova, a amplitude $M_\mu(k)$ i $N_\mu(k)$ su definirane na slici 2.12. Doprinosi svakoj od tih dviju amplituda, $M_\mu(k)$ i $N_\mu(k)$, dani su dijagramima prikazanim na slici 2.13 koje onda treba izračunati na isti način kao i dijagrame za A -doprinos.



Slika 2.12: Jednočestično ireducibilne amplitude M_μ i N_μ prijelaza $s \rightarrow d\gamma$.



Slika 2.13: Dijagrami koji doprinose jednočestično ireducibilnim amplitudama M_μ i N_μ sa slike 2.12.



Slika 2.14: Dijagram B1.

Dijagram B1

Izračunajmo prvo amplitudu M_μ^1 koja doprinosi amplitudi \mathcal{B}_s . Odgovarajući Feynmanov dijagram prikazan je na slici 2.14 i iz njega slijedi

$$M_\mu^1 = \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} (i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha L) iS(r) (ie_q \gamma_\mu) iS(r+k) (i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\alpha L) \frac{-i}{r^2 - M_W^2} . \quad (2.78)$$

Primjenom Feynmanove parametrizacije ova amplituda postaje

$$M_\mu^1 = e_q \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 \bar{r}}{(2\pi)^4} dx dy \frac{2}{N^3} \gamma^\alpha L (\not{\bar{r}} - x \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{\bar{r}} + (1-x) \not{k} + m) \gamma_\alpha L , \quad (2.79)$$

gdje se pojavljuju \bar{r} i N koji su definirani prilikom izračunavanja dijagrama A1, a također i u dodatku B.

Problem na koji nailazimo prilikom izvršavanja ovog dijagrama, a koji se nije javljao kod jednočestično ireducibilnih dijagrama A-tipa je da je ovaj dijagram divergentan i stoga ga je potrebno na neki način regularizirati. Kako je opisano ranije (vidi jednadžbu (2.2) s pridruženim komentarima) naši B-dijagrami nakon regularizacije imaju baždarno invarijantnu strukturu koja zahtijeva da M_μ amplituda bude oblika

$$M_\mu \propto [k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu] \gamma^\nu L . \quad (2.80)$$

Ovu smo činjenicu koristili prilikom pojednostavljivanja gornje amplitude programima FeynCalc i check tako što smo pritom i regularizirali dijagrama ekstrahirajući samo članove gornjeg oblika. Tako se konkretno struktura

$$\gamma^\alpha L (\not{\bar{r}} - x \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{\bar{r}} + (1-x) \not{k} + m) \gamma_\alpha L \quad (2.81)$$

iz M_μ^1 pojednostavljuje na baždarno invarijantnu strukturu

$$4(1-x)x [k_\mu \not{k} L - k^2 \gamma_\mu L] . \quad (2.82)$$

Kad se to uvrsti u (2.76) i izvrše obje integracije po impulsima petlji te se to isto napravi za N_μ^1 vidi se da su doprinosi \mathcal{B}_s i \mathcal{B}_d jednaki i oni se zbroje u konačnu \mathcal{B}_1 amplitudu

$$\mathcal{B}_1 = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) B1 , \quad (2.83)$$

gdje je B1

$$B1 = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-16}{3} \{x(1-x) J_a\} , \quad (2.84)$$

i taj B1 kasnije navodimo u tabelama.



Slika 2.15: Doprinosi dijagrama nedijagonalnih vlastitih energija prijelazu $s \rightarrow d\gamma$. Značenje crtkanih krugova dato je na slici 2.16.

Dijagrami $B2-B6$

Ostali dijagrami, nacrtani na slici 2.13 računaju se na isti način kao i $B1$ pa nećemo davati detaljni prikaz računa svakog pojedinog dijagrama već ćemo samo dati konačne izraze. Dakle, amplituda svakog od ovih dijagrama na kraju ima oblik

$$\mathcal{B}_i = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) B_i \quad i = 2, \dots, 6, \quad (2.85)$$

gdje su B_i dani kao

$$B2 = \frac{m^2}{2M_W^2} B1, \quad (2.86)$$

$$B3 = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy 4 \left\{ -x(1-2x) L_a \right\}, \quad (2.87)$$

$$B4 = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy 4 \left\{ 2(2x-1) \frac{m^2}{M_W^2} L_a \right\}, \quad (2.88)$$

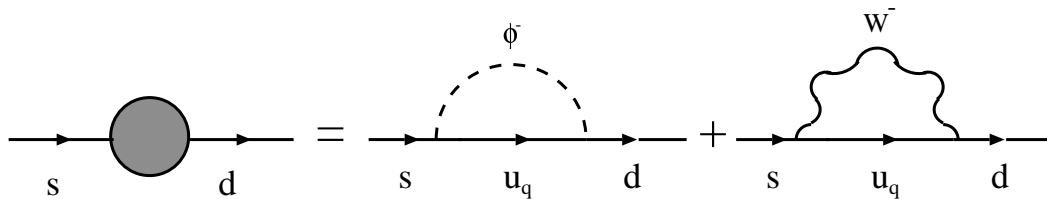
$$B5 = 0 \quad (2.89)$$

$$B6 = 0 \quad (2.90)$$

2.2.3 C -doprinosi

Doprinosi dijagrama s jednočestično ireducibilnim subdijagramima $s \rightarrow d$ (nedijagonalne vlastite energije) možemo tretirati slično kao i B -doprinosi dakle izračunavajući dijagrame sa slike 2.11 s tim da ovaj put crtkani krugovi na toj slici ne predstavljaju jednočestično ireducibilne dijagrame već dijagrame prikazane na slici 2.15. Tako na sličan način dolazimo do rezultata

$$\mathcal{C}_i = i \frac{G_F \alpha^2}{2\sqrt{2}\pi^2} (\bar{\psi} \gamma_\beta \gamma_5 \psi) (\bar{d} \gamma^\beta L s) C_i \quad i = 1, 2, \quad (2.91)$$



Slika 2.16: Dijagrami s jednom petljom koji doprinose “vlastitoj energiji” $s \rightarrow d$ prijelaza.

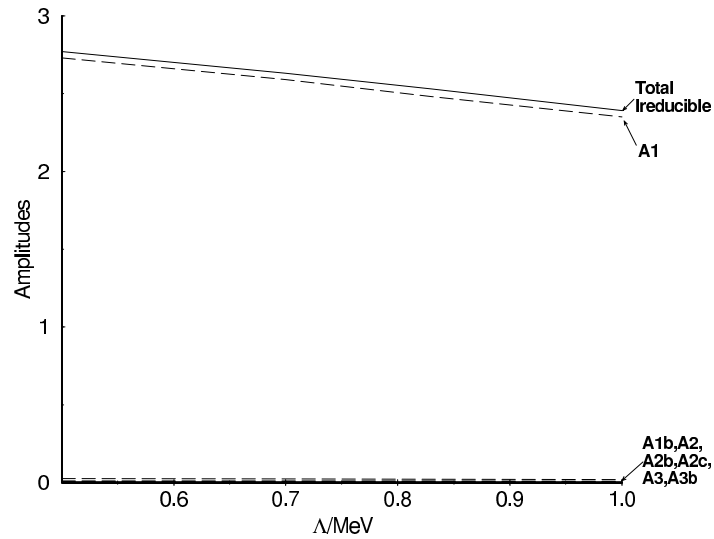
gdje je $C1$ doprinos dijagrama sa slike 2.16 kod kojeg se u petlji propagira W bozon, a $C2$ doprinos dijagrama s nefizikalnim Higgsovim bozonom ϕ i gdje su

$$C1 = -i \frac{16\pi^2 M_W^2}{2} \int_0^1 dx \frac{2}{3} \{x J_h\} , \quad (2.92)$$

i

$$C2 = \frac{m^2}{2M_W^2} C1 . \quad (2.93)$$

Vidjet ćemo kasnije kako je doprinos ovih C -dijagrama zbog GIM kraćenja vrlo malen.



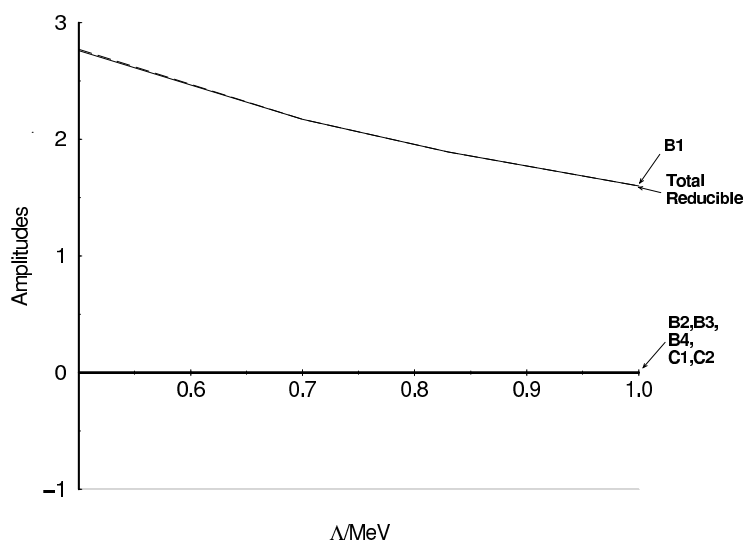
Slika 2.17: Amplitude s jednočestično ireducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazima (A -doprinosi) i s lakim kvarkovima (c, u) u petlji. Vidi se dominacija $A1$ doprinosa.

2.2.4 Numerički rezultati

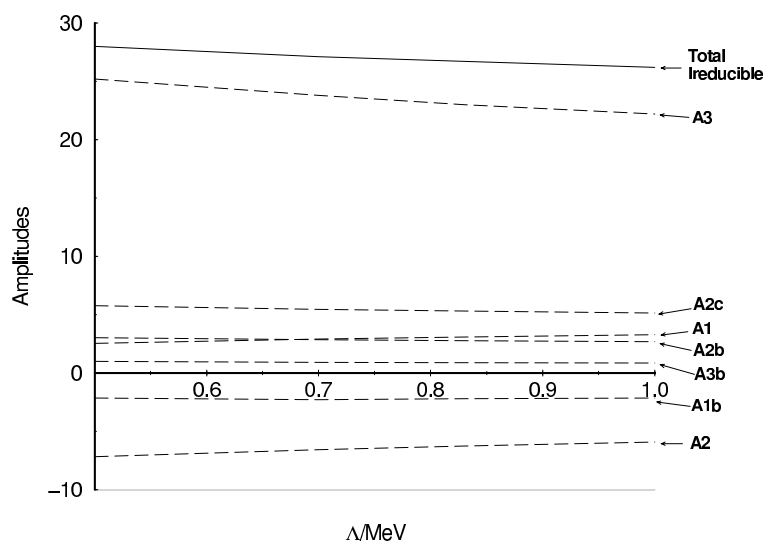
Prije nego što pređemo na diskusiju korekcija rezultata iz prošlih odjeljaka zbog učinaka kvantne kromodinamike dat ćemo numeričke vrijednosti ovih elektroslabih amplituda. Na taj ćemo način odmah vidjeti koje amplitude dominiraju što će nam omogućiti da se kasnije skoncentriramo samo na njih, a moći ćemo i lakše uspostaviti korespodenciju s prijašnjim rezultatima (Voloshin i Shabalin, 1976).

Kako bismo što zornije prikazali dominaciju pojedinih amplituda, te njihovu zadovoljavajuću slabu ovisnost o izboru donje granice Λ , numeričke rezultate za sve amplitude prikazujemo grafički na slikama 2.17–2.20. Na tim su slikama prikazane, u ovisnosti o granici Λ , amplitude nakon GIM oduzimanja u sektoru lakih kvarkova (c, u) (slike 2.17 i 2.18) i u sektoru teških kvarkova (t, c) (slike 2.19 i 2.20) kako je to objašnjeno u jednadžbama (2.4) i (2.5). Vrijednosti konstanti koje smo upotrebljavali su: $m_t=173$ GeV, $m_c=1.5$ GeV, a m_u smo postavili na vrijednost infracrvene granice Λ .

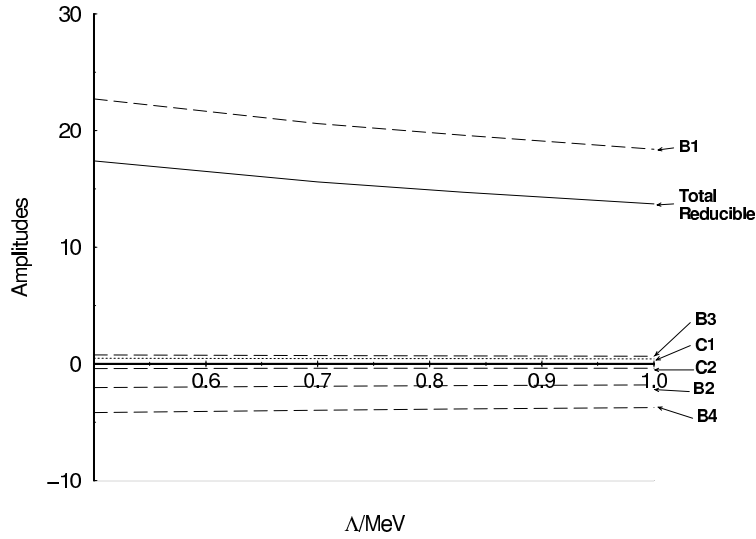
Gledajući ove grafove, odmah skače u oči činjenica da u svakoj od četiri grupe amplituda (teški i laki sektor te amplitude s jednočestično ireducibilnim ili reducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazima) imamo po jednu amplitudu koja apsolutno dominira nad ostalima. Tako je potpuno opravdano aproksimirati svaku od te četiri amplitude tim dominantnim doprinosom što ćemo i uraditi u slijedećem odjeljku u kojem ćemo korigirati naše rezultate zbog učinaka kvantne kromodinamike. Kon-



Slika 2.18: Amplitude s jednočestično reducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazima (B i C -doprinosi) i s lakim kvarkovima (c , u) u petlji. Ovdje $B1$ doprinos apsolutno dominira.



Slika 2.19: Amplitude s jednočestično ireducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazima (A -doprinosi) i s teškim kvarkovima (t , c) u petlji.



Slika 2.20: Amplitude s jednočestično reducibilnim $s \rightarrow d\gamma\gamma$ prijelazima (B i C -doprinosi) i s teškim kvarkovima (t , c) u petlji.

ačno, situacija nakon izvedenog elektroslabog računa je dana u tablici 2.1.

Povrh svega ovog, u slučaju laganih kvarkova u petlji, za dominantne amplitude ($A1$ i $B1$) moguće je dobiti i analitičke izraze za doprinose vodećih logaritama koji se podudaraju s rezultatima iz (Voloshin i Shabalin, 1976). Konkretno, u aproksimaciji $m^2 \ll M_W^2$ doprinos vodećih logaritama (LL) elektroslaboj amplitudi $A1$ je

$$A1_{LL} = -\frac{2}{3} \left[\ln \frac{M_W^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right], \quad (2.94)$$

gdje je Λ kao i dosad infracrvena granica pomoću koje izbjegavamo integriranje po području u kojem su impulsi fotona mali i koje odgovara dugodosežnim doprinosima, a koje je potrebno tretirati drugačijim metodama (vidi odjeljak 1.3. Isto tako, doprinos vodećih logaritama amplitudi $B1$ je (za $m^2 \ll M_W^2$):

$$B1_{LL} = -\frac{4}{9} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{M_W^2}{\Lambda^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2 + \frac{5}{6} \ln \frac{M_W^2}{m^2} - \frac{5}{6} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right]. \quad (2.95)$$

Ovako kako su napisani, izrazi (2.94) i (2.95) predstavljaju rezultate za c kvark u petlji. Odgovarajući doprinos u kvarka dobijemo zamjenom $m_u \rightarrow \Lambda$. Nakon

Dominant (c, u) dijagram	Čisti EW		Dominantni (t, c) dijagram	Čisti EW	
	$\Lambda = 0.7$	$\Lambda = 0.9$		$\Lambda = 0.7$	$\Lambda = 0.9$
$A1$	1.86	1.22	$A3$	23.8	22.7
A total	1.90	1.25	A total	27.1	26.4
$B1$	1.70	1.04	$B1$	20.6	19.1
B total	1.70	1.03	B total	15.6	14.2
Total	3.59	2.28	Total	42.7	40.7
$\text{Re } \mathcal{A}/10^{-5}$	1.55	0.98	$\text{Re } \mathcal{A}/10^{-5}$	0.017	0.016

Tablica 2.1: Čisti elektroslabi (EW) rezultati računa na dvije petlje za lagane (c, u) i teške (t, c) kvarkove u petlji. Konstante koje su korištene su: $m_t=173$ GeV, $m_c = 1.5$ GeV i kao m_u je korištena vrijednost infracrvene granice Λ od 0.7 ili 0.9 GeV (što odgovara rasponu iz jednadžbe (2.107)). Vrijednosti u posljednjem redu su dobivene množenjem s $\lambda_u = 0.215$ ili $\lambda_t \simeq 2 \times 10^{-4}$, i mogu se usporediti s $|\mathcal{A}_{\text{expt}}| \simeq |\text{Im} \mathcal{A}| = \sqrt{B_{\text{abs}}} = 8.4 \times 10^{-5}$. Račun kratkodosežnih doprinosa preko dijagrama s jednom petljom odgovara vrijednosti $\text{Re} \mathcal{A}$ (vidi (2.108)) od oko -3.5×10^{-5} .

što uzmemo u obzir GIM mehanizam, ovi izrazi se slažu s izrazima u (Voloshin i Shabalin, 1976).

Kao naš novi doprinos, izračunali smo, kako je pokazano, i doprinose dijagrama s dvije petlje s *teškim* kvarkovima ($q = t, c$) u petlji. Pokazalo se, vidi slike 2.19 i 2.20, da su u tom slučaju dominantni doprinosi $A3$ i $B1$. Međutim, kako se ovi doprinosi množe s malim Kobayashi-Maskawa faktorom λ_t oni su dosta potisnuti.

Svi ovi dominirajući doprinosi specificirani su u tablici 2.1 gdje smo, baš kao i na slikama, dali i ukupnu amplitudu tako da se vidi u kojoj su mjeri ovi doprinosi zaista dominantni. Također se vidi relativno slaba ovisnost amplituda o izboru parametra Λ . Dobro slaganje numeričkih ($A1$ i $B1$) i analitičkih LL rezultata (2.94) i (2.95), nakon GIM oduzimanja, eksplicirano je u odgovarajućim redovima tablice 2.2. Konačno, zadnji red tablice 2.1, normaliziran na eksperimentalnu amplitudu, pokazuje veličinu elektroslabog doprinosa. Ovaj čisti elektroslabi doprinos bi značajno poništio amplitudu dijagrama s jednom petljom (Buchalla i Buras, 1994; Buchalla et al., 1996).

2.3 QCD korekcije

U prošlom odjeljku smo vidjeli kako čisti elektroslabi račun procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ na dvije petlje s fotonima izvan masene ljuske u međustanju daje relativno velik

doprinos ukupnoj amplitudi. U ovom ćemo odjeljku vidjeti kako korekcije zbog učinaka kvantne kromodinamike (QCD) uvelike mijenjaju sliku.

Proraćun ovih korekcija zahtijeva odrećenu paŹnju. Premda su korekcije zbog izmjene gluona relevantne za kvarkovsku petlju, fotoni izvan masene ljuske koji zatvaraju drugu (kvarkovsko-leptonsku) petlju kontroliraju kratkodoseŹni reŹim ćitavog dijagrama. Općenito, svaka petlja doprinosi po jedan logaritam u konaćni izraz, kako je vidljivo na primjer u izrazu (2.95) za $B1$ -ćlan.

Za proraćun vodećih QCD korekcija postoji odgovarajući recept, uveden u (Vainshtein et al., 1976) i primjenjivan kasnije u na primjer (Picek, 1991). Koristeći taj recept, prvo napišemo amplitude kao integrale preko momenata virtualnih kvarkova. U našem konkretnom slućaju to izvodimo razmatrajući tok impulsa kroz naš dijagram s dvije petlje, ekstrahirajući strukturu vodećih logaritama i zbrajajući te logaritme koristeći formalizam renormalizacijske grupe. U tu svrhu koristimo se ranijim rezultatima — elektromagnetskim pingvinom iz (Eeg i Picek, 1988) (koji se ovdje pojavljuje u amplitudi $B1$), QCD korekcijama kvarkovske petlje u $A1$ (Eeg et al., 1990) i nedavnom tretmanu samo-pingvina (Bergan i Eeg, 1997). RazloŹimo to sada pobliŹe.

PokaŹimo prvo QCD korekcije petljama s c i u kvarkovima iz A -dijagrama. Prvo odrećujemo doprinos vodećih logaritama što odgovara $A1_{LL}$ ćlanu iz (2.94). Ovaj se rezultat moŹe razumjeti u svjetlu ranijeg $s\bar{d} \rightarrow \gamma\gamma$ raćuna (Eeg et al., 1990) gdje su se takoćer pojavljivala dva ćlana u kojima su dominirale skale M_W , odnosno m . Takoćer, ta su dva ćlana dolazila s relativnim teŹinama 1, odnosno -2. Kada se ova $s\bar{d} \rightarrow \gamma\gamma$ amplituda ubaci u dijagram za $s\bar{d} \rightarrow \mu^+\mu^-$ dobijemo još jedan logaritam. Kako dva ćlana u (2.94) potjeću od integrala u kojima dominiraju impulsi reda M_W , odnosno m , to konaćna QCD korigirana amplituda poprima oblik

$$A1_{LL}^{QCD} = -\frac{2}{3}\eta_1(M_W^2) \ln \frac{M_W^2}{\Lambda^2} + \frac{4}{3}\eta_1(m^2) \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}, \quad (2.96)$$

što se u naćelu slaŹe s (Voloshin i Shabalin, 1976) i u suprotnosti je s rezultatima iz radova (Vasilevskaya et al., 1991; Gvozdev et al., 1992). Ovdje QCD koeficijent η_1 odraŹava bojno-singletnu prirodu

$$\eta_1(q^2) = 2c_+(q^2) - c_-(q^2), \quad (2.97)$$

gdje su c_{\pm} Willsonovi koeficijenti ćetvero-kvarkovskih operatora \mathcal{O}_{\pm} u ućinkovnom $\Delta S = 1$ lagranŹijanu iz (Gaillard i Lee, 1974). U pribliŹenju preko vodećih logaritama imamo

$$c_{\pm}(q^2) = \left[\frac{\alpha_s(q^2)}{\alpha_s(M_W^2)} \right]^{a_{\pm}/b}, \quad (2.98)$$

gdje su $a_+ = -2$ and $a_- = 4$ anomalne dimenzije ovih operatora,

$$b = 11 - \frac{2N_f}{3}, \quad (2.99)$$

N_f je broj aktivnih kvarkovskih okusa, a α_s je konstanta fine strukture jakih međudjelovanja. Za razliku od numerički prilično stabilnog bojno-oktetnog koeficijenta

$$\eta_8 = \frac{c_+ + c_-}{2}, \quad (2.100)$$

bojno-singletni koeficijent (2.98) je dosta osjetljiv na izbor Λ_{QCD} , a i njegov predznak se mijenja na skali od nekoliko GeV. Kombiniramo li doprinose u i c kvarka u petlji i uzmemo li u obzir GIM mehanizam kao u izrazu (2.4) jedino drugi član u (2.94) će preživjeti.

Što se $B1$ amplitude u (2.95) tiče, nju možemo razumjeti tako da prvo uočimo da tu imamo subpetlju oblika elektromagnetskog pingvina koja je, u približenju preko vodećih logaritama, oblika

$$\ln\left(\frac{M_W^2}{m^2}\right) - \frac{5}{6} \quad \text{za} \quad k^2 < m^2 < M_W^2, \quad (2.101)$$

te

$$\ln\left(\frac{M_W^2}{k^2}\right) + \frac{5}{6} \quad \text{za} \quad m^2 < k^2 < M_W^2, \quad (2.102)$$

gdje je k impuls virtualnih fotona. Kad ubacimo tu petlju u dijagram s još jednom petljom dobijemo još jedan logaritam. Konkretno imamo

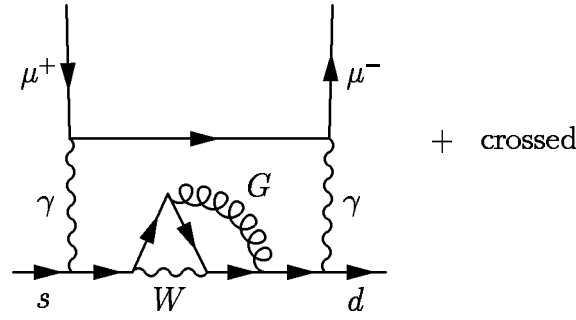
$$\ln \longrightarrow \frac{\ln^2}{2}, \quad (2.103)$$

i otud \ln^2 struktura u (2.95). Ovo vodi na QCD-korigiranu amplitudu koju u integralnom obliku možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} B1_{LL}^{\text{QCD}} = & -\frac{4}{9} \left[\int_{m^2}^{M_W^2} \frac{dp^2}{p^2} \eta_1(p^2) \left(\ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + \frac{5}{6} \right) \right. \\ & \left. - \frac{5}{6} \eta_1(m^2) \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Kao i prije, izrazi (2.96) i (2.104) se odnose na situaciju s c kvarkom u petlji. Doprinos od u kvarka dobijemo iz ovih izraza zamjenom $m \rightarrow \Lambda$. Ovo znači da će nakon GIM oduzimanja integral u (2.104) ići od Λ^2 do m_c^2 . Krajnji rezultat je sličan onome za $A1$ amplitudu: potisnuće i promjena predznaka.

C -doprinos, koji potječe od QCD-induciranog samo-pingvina (SP), kako je prikazano na slici 2.21, mogao bi također biti zanimljiv. Za razliku od $A1$ i $B1$ doprinosa, on umjesto η_1 sadrži bojno-oktetni faktor η_8 koji ne uzrokuje potisnuće. No, s druge strane, ovaj je doprinos potisnut faktorom α_s/π . Za, $m = m_c$



Slika 2.21: QCD doprinos prijelazu $s \rightarrow d\mu^+\mu^-$, induciran $s \rightarrow d$ samo-pingvinom.

dobijemo, zbrojeno po svim redovima QCD-a,

$$C_{\text{LL}}^{\text{QCD}} = \frac{7}{162} \left[\int_{m^2}^{M_W^2} \frac{dp^2}{p^2} \rho(p^2) \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{25}{21} \right) \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right] - \frac{5}{6} \rho(m^2) \frac{1}{2} \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2 \right], \quad (2.105)$$

gdje je

$$\rho(p^2) = \frac{\eta_8(p^2) \alpha_s(p^2)}{\pi}, \quad (2.106)$$

a članovi s $5/6$ imaju isto porijeklo kao i u (2.102) i (2.104). Doprinos u kvarka se ponovno dobije zamjenom $m \rightarrow \Lambda$.

Pri računu izraza (2.105) koristili smo približenje $m^2 \ll M_W^2$. Izvan tog približenja, dakle kad se u petlji propagira teški t kvark, račun je mnogo teži (Bergan i Eeg, 1997). Uzmemo li u obzir da je $\alpha_s(m_t)$ otprilike $1/3$ od $\alpha_s(m_c)$, možemo procijeniti da je doprinos t kvarka otprilike 10% doprinosa c kvarka.

Tablica 2.2 pokazuje detaljnu strukturu dominantnih doprinosa iz tablice 2.1, prije i nakon primjene GIM mehanizma: prvi, drugi i treći blok tablice daju A , B , odnosno C doprinos. U trećem bloku $C_{\text{LL}}^{\text{SP}}$ označava goli, a $C_{\text{LL}}^{\text{QCD}}$ obučeni doprinos samo-pingvina, dok je C zanemarivi čisto elektroslabi (EW) doprinos.

2.4 Zaključak

U ovom smo se poglavlju usredotočili na doprinose dijagrama s dvije petlje koji vode na kratkodosežni operator za kvarkovski prijelaz $s\bar{d} \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$. Ove doprinose možemo usporediti s komplementarnim, dugodosežnim doprinosima s mehanim fotonima u međustanju, koji se računaju drugim metodama koje su zasad izrazito modelske prirode. Pokazuje se da su numerički značajne one amplitude kod kojih se u petlji propagiraju lagani (u i c) kvarkovi. Osim što smo

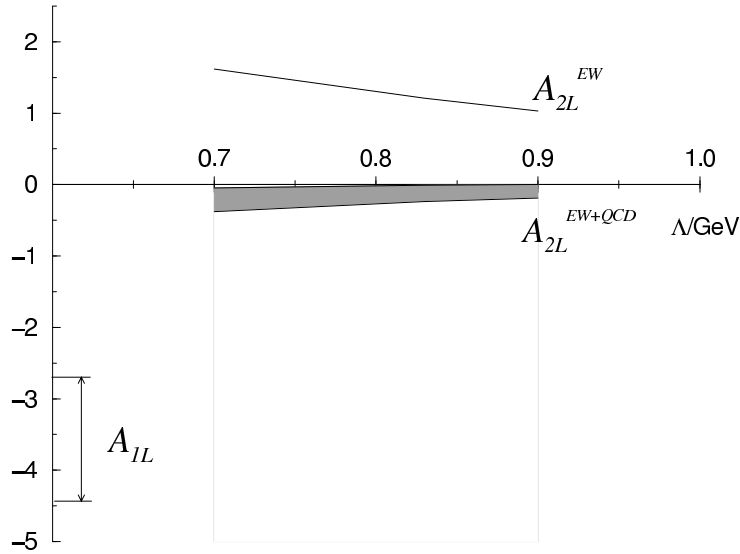
	EW + SD QCD				EW + SD QCD		
	c -loop	u -loop	$(c - u)$		t -loop	c -loop	$(t - c)$
$A1$	-2.14	-3.57	1.42	$A3$	-17.4	-40.4	23.0
$A1_{LL}$	-4.52	-6.09	1.58	$A3_{LL}$	-22.3	-18.3	-4.0
$A1_{LL}^{\text{QCD}}$	-6.19	-6.09	-0.10	$A3_{LL}^{\text{QCD}}$	-22.3	-18.3	-4.0
$B1$	-20.4	-21.6	1.24	$B1$	-0.8	-20.4	19.6
$B1_{LL}$	-20.8	-22.0	1.19	$B1_{LL}$	-2.0	-20.8	18.8
$B1_{LL}^{\text{QCD}}$	-14.9	-14.7	-0.23	$B1_{LL}^{\text{QCD}}$	-2.0	-14.9	12.9
C	-0.61	-0.61	3×10^{-3}	C	-0.52	-0.61	0.09
C_{LL}^{SP}	0.46	0.47	-0.01	$ C_{LL}^{\text{SP}} $	< 0.2	0.47	< 0.7
C_{LL}^{QCD}	0.47	0.48	-0.01	$ C_{LL}^{\text{QCD}} $	< 0.2	0.47	< 0.7

Tablica 2.2: Anatomija QCD korekcija: egzaktni EW račun na dvije petlje uspoređen je s LL vrijednostima i renormalizacijskom grupom posumiranim LL QCD korigiranim vrijednostima. Vrijednosti konstanti su iste kao i u tablici 2.1 s tim što je infracrvena granica na $\Lambda=0.83$ GeV i $\alpha_s(M_Z) = 0.118$. Usporedba s empirijskim vrijednostima može se dobiti pomoću posljednjeg reda tablice 2.1.

nadopunili ranije račune s ovim laganim kvarkovima, također smo izračunali i doprinose dijagrama s teškim (c , t) kvarkovima u petlji. Naime, veliki broj elektroslabih dijagrama mogao bi kompenzirati maleni Kobayashi-Maskawa faktor i u načelu je moguće očekivati nezanemarive doprinose i u tom sektoru. Međutim, konkretan račun pokazuje da razne amplitude imaju razne predznake što, kad se uzme u obzir mali λ_t , ipak rezultira zanemarivom teško-kvarkovskom amplitudom.

Nadalje, ukazali smo na značaj kratkodosežnih korekcija dijagramima s dvije petlje zbog učinaka kvantne kromodinamike, što je zorno prikazano na slici 2.22.

Uključenje ovih QCD korekcija se pokazuje suptilnije i dramatičnije nego u slučaju dijagrama sa samo jednom petljom. Prije dva desetljeća postojala je kontroverza oko tih korekcija koja je razriješena (Vainshtein et al., 1976) pravilnim tretmanom integrala po impulsima u petlji. Naši rezultati za kratkodosežne korekcije dijagramima sa *dvije* petlje prikazani su u tablici 2.2. Kratkodosežne QCD korekcije potiskuju ranije dominantne dijelove amplitude. Osnovni razlog tome je ranije spomenuto ponašanje $\eta_1 = (2c_+ - c_-)$ QCD koeficijenta. Konkretno, $A1$ i $B1$ amplitude su u velikoj mjeri potisnute i više ne interferiraju negativno



Slika 2.22: Kvantna kromodinamika ima trostruki učinak na elektroslabu 2L amplitudu. Ona i) smanjuje njenu ovisnost o Λ (omogućujući tako bolju definiranost kratkodosežne amplitude), ii) mijenja joj predznak (čineći je tako koherentnom s 1L amplitudom) i iii) snažno je potiskuje.

s kratkodosežnom 1L amplitudom iz (Buchalla i Buras, 1994; Buchalla et al., 1996). Bez tog potisnuća, scenario sa slike 1.2a bi bio vjerojatniji.

Ovdje je potrebno naglasiti da je naš tretman QCD korekcija 2L amplitude izveden na osnovu približenja vodećih logaritama, dok su korekcije 1L amplitude u (Buchalla i Buras, 1994; Buchalla et al., 1996) izvedene i u slijedećem redu (NLO).

Da zaključimo, pronašli smo umjeren doprinos dijagrama s dvije petlje i s lakim kvarkovima u petlji i s fotonima relativno velikog impulsa u međustanju. Uračunamo li pogrešku zbog izbora infracrvene granice Λ u rasponu 0.7–0.9 GeV, i onu značajniju zbog nepreciznog poznavanja vrijednosti α_s (odnosno odgovarajuće nepreciznosti u poznavanju Λ_{QCD} koju uzimamo u rasponu 150–250 MeV), dobivamo

$$-0.38 \times 10^{-5} \leq \mathcal{A}_{2L} \leq -0.001 \times 10^{-5}, \quad (2.107)$$

Ovo je istog predznaka i, za središnje vrijednosti, odgovara 5 % vrijednosti \mathcal{A}_{1L}

(Buchalla i Buras, 1994; Buchalla et al., 1996),

$$-4.4 \times 10^{-5} \leq \mathcal{A}_{1L} \leq -2.6 \times 10^{-5}, \quad (2.108)$$

gdje je glavna pogreška posljedica slabog poznavanja vrijednosti λ_t . Iako nismo mogli razmatrati 1L i 2L doprinose na isti način tj. u istom redu približenja u vodećim logaritmima, ovi rezultati nam ipak omogućuju procjenu \mathcal{A}_{LD} iz (1.9). Uzmemo li u obzir $|\text{Re}\mathcal{A}| \leq 2.7 \times 10^{-5}$, dobijemo da je dozvoljeni interval za \mathcal{A}_{LD}

$$-0.1 \times 10^{-5} \leq \mathcal{A}_{LD} \leq 7.5 \times 10^{-5}. \quad (2.109)$$

Dakle, postojanje disperzivne dugodosežne amplitude \mathcal{A}_{LD} koja bi bila veličine usporedive s apsorpcijskom amplitudom nije sasvim isključeno.

Računi ove dugodosežne disperzivne amplitude koji su u (Heinson et al., 1995) uzeti kao referentni imaju u osnovi suprotan predznak

$$-2.9 \times 10^{-5} \leq \mathcal{A}_{LD} \leq 0.5 \times 10^{-5} \quad (\text{Bergstrom et al., 1990}),$$

$$0.27 \times 10^{-5} \leq \mathcal{A}_{LD} \leq 4.7 \times 10^{-5} \quad \text{Ko (1992)}.$$

Na osnovi relativnog predznaka 1L i 2L doprinosa (Vasilevskaya et al., 1991; Gvozdev et al., 1992) su zaključili da su (Bergstrom et al., 1990) u pravu sa svojom dugodosežnom amplitudom suprotnog predznaka od kratkodosežne. U svojim radovima (Vasilevskaya et al., 1991; Gvozdev et al., 1992) su čak i zaključili da su mjerenja u Brookhavenu (Heinson et al., 1995) u konfliktu sa standardnim modelom.

Mi smatramo da su njihovi zaključci sumnjive prirode jer su bazirani na pogrešnom produljenju kratkodosežne analize u dugodosežno područje. Po našem mišljenju (Vasilevskaya et al., 1991; Gvozdev et al., 1992) pogrešno identificiraju ono što bi (prema njihovom načinu računanja) trebala biti \mathcal{A}_{2L} s \mathcal{A}_{LD} . U ovom radu mi smo izbjegli problematičnu niskoenergijsku skalu uvevši infracrvenu granicu Λ reda veličine mase ρ mezona. Pokazali smo da QCD korekcije na suptilan način potiskuju originalno prilično veliku elektroslabu amplitudu. Dakle, velika $K \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$ amplituda, dana u (2.109), za fotone malih momenata ($\sim \Lambda$ i manje), je i dalje dopuštena. Ovi rezultati se mogu upotrijebiti za provjeru konzistentnosti metoda korištenih u (Bergstrom et al., 1990; Ko, 1992).

Sagledavši teškoće koje se neminovno javljaju prilikom proračuna dugodosežnih amplituda, ograničenje u (2.109) je više nego dobrodošlo. Također, ukoliko su predznaci od \mathcal{A}_{LD} u (Heinson et al., 1995) korektni, onda BNL eksperiment u kombinaciji sa standardno-modelskim računom preferira rezultat iz (Ko, 1992), a time i scenario sa slike 1.2b. Ukoliko su učinci pojava izvan standardnog modela ograničeni na male kratkodosežne amplitude, cijela ova priča implicira da je te učinke teško identificirati u $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ raspadu. Na kraju, očekuju se i skori eksperimentalni rezultati koji će dalje testirati rezultate iz ovog rada.

Dodatak A

Diracova algebra na računalu

A.1 Programi 'FeynCalc' i 'check'

Kako je već spomenuto u poglavlju 2 prilikom računa Feynmanovih amplituda za dijagrame sa dvije petlje koji doprinose disperzivnoj amplitudi prijelaza $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ s dva fotona u međustanju koristili smo se *Mathematica* jezikom za računalnu algebru (Wolfram, 1988) te programom `FeynCalc` napisanim u *Mathematici*.

`FeynCalc` (Mertig et al., 1991) je program za algebarske račune u fizici visokih energija. Njegova osnovna namjena je da osigura okolinu i alate za proračun radijacijskih korekcija unutar standardnog modela. Input za `FeynCalc` su standardni izrazi za Feynmanove amplitude dobiveni primjenom Feynmanovih pravila koji se mogu ili unijeti ručno ili dobiti kao izlaz jednog drugog programa `FeynArts` (Küblbeck et al., 1990) koji generira sve dijagrame za zadani proces. Postoji i mogućnost definiranja teorija i interakcija različitih od standardnog modela. Također, korisnik može specificirati neke dodatne informacije o procesu kao na primjer kinematičke uvjete ili izbor standardnih matričnih elemenata. Nakon svega toga `FeynCalc` izvodi algebarske račune kao što su Diracova algebra, tenzorska algebra, dekompozicija i redukcija tenzorskih integrala i slično, dajući na kraju kao rezultat polinom u standardnim matričnim elementima, specijalnim funkcijama, kinematičkim varijablama i skalarima. Takav polinom se na kraju može i konvertirati u FORTRAN datoteku¹.

Kako je `FeynCalc` velikim dijelom specijaliziran za račun s Feynmanovim dijagramima sa samo jednom petljom mi smo koristili samo njegove mogućnosti manipulacije Diracovim γ -matricama i Lorentzovim vektorima i tenzorima. Radi maksimalne moguće automatizacije napisali smo dodatni program `check` u ko-

¹U međuvremenu se pojavila i nova inačica ovog programa `FeynCalc` 3.0 za *Mathematicu* 3.0 s mnogo većim mogućnostima.

jem smo definirali neke dodatne transformacije algebarskih izraza koje ćemo sad navesti i objasniti na primjeru računa jednočestično ireducibilne amplitude A_1 sa slike (2.4). Kako je sam program `check` prilično kompaktan dajemo ga sada u cijelosti.

```
(*****
(* Auxiliary macro package check.m for simplification of Dirac *)
(* algebra and for preparing the Feynman amplitude for          *)
(* numerical FORTRAN integration                                *)
(* 28/12/1994                                                    *)
(* Additional comments added and superfluous stuff deleted.    *)
(* 18/3/1998                                                    *)
(*****)
```

```
RemoveOddTerms::usage = "RemoveOddTerms[expr, pattern] removes
all terms in expr which are odd in pattern."
```

```
RemoveOddTerms[e_, p_] := Select[e,
                                EvenQ[Length[Position[#, p]]]&]
```

```
ExpandScalars::usage = "ExpandScalars[expr] expands slashes and
scalar products of different four-vectors."
```

```
ExpandScalars[e_] := e /. {
  ScalarProduct[k,r]->FourVector[k,11]*FourVector[r,11],
  ScalarProduct[q1,r]->FourVector[q1,14]*FourVector[r,14],
  DiracSlash[k]->DiracMatrix[12] FourVector[k,12],
  DiracSlash[r]->DiracMatrix[13] FourVector[r,13]
```

```
Reducerk2::usage = "Reducerk2[expr] changes names of scalar
products of four-vectors r and k to er and ka so that they don't
stand in the way of pattern recognition routines of other
simplification commands. It also anticipates later integration
over r and k."
```

```
Reducerk2[e_] := e /. {ScalarProduct[k,r]^2 -> er^2*ka^2/4,
  ScalarProduct[k,k] -> ka^2,
  ScalarProduct[r,r] -> er^2,
  r^2->er^2, k^2->ka^2};
```

```
FVtoG::usage = "FVtoG[expr] substitutes g[mu, nu]*k^2/4 for
k[mu]*k[nu] where k[mu] is any four-vector in expr. On
expressions consisting of more than one term it should be used
as Map[FVtoG, expr]"
```

```
FVtoG[e_] := FixedPoint[
  If[FreeQ[#, Pair[LorentzIndex[_], Momentum[_]]], #,
  Block[{lin,mom,a1,a2}, a1=
```

```

MapAt[(mom=#[[2]]; lin=#[[1]];1)&, #,
{Position[#, Pair[LorentzIndex[_], Momentum[_]]}[[1]]]];
a2=MapAt[(MetricTensor[lin,#[[1]]]/4)&, a1, Position[a1,
Pair[LorentzIndex[_], Momentum[mom]]]];
a2*Pair[mom, mom]]&, e]

FVtoGr[e_]:= FixedPoint[
If[FreeQ[#,Pair[LorentzIndex[_], Momentum[r]]], #,
Block[{lin,mom,a1,a2}, a1=
MapAt[(mom=#[[2]]; lin=#[[1]];1)&, #,
{Position[#, Pair[LorentzIndex[_], Momentum[r]]}[[1]]]];
a2=MapAt[(MetricTensor[lin,#[[1]]]/4)&, a1, Position[a1,
Pair[LorentzIndex[_], Momentum[mom]]]];
a2*Pair[mom, mom]]&, e]

Scalar2Square::usage = "Scalar2Square[expr] transforms
ScalarProduct[k, k] into k^2 for any four-vector k."

Scalar2Square[e_] := e /. ScalarProduct[p_, p_]->p^2

PutSquaresBack::usage = "PutSquaresBack[expr] puts back er and
ka to r and k."

PutSquaresBack[e_] := e /. {er->r, ka->k}

completeJob::usage = "completeJob[expr] simplifies maximally
expression using rules of Dirac algebra and anticipating later
integration over d^4 r and d^4 k."

completeJob[e_] := Simplify[Scalar2Square[PutSquaresBack[
DiracSimplify[Map[FVtoG, ExpandScalars[Reducerk2[
DiracSimplify[EpsChisholm[RemoveOddTerms[RemoveOddTerms[
Reducerk2[DiracSimplify[e]],r],k]]]]]]]]]]]]

completeJob2[e_] := Simplify[Scalar2Square[PutSquaresBack[
DiracSimplify[Map[FVtoG, ExpandScalars[Reducerk2[
DiracSimplify[EpsChisholm[RemoveOddTerms[Reducerk2[
DiracSimplify[e]],r]]]]]]]]]]]]

(*****)
```

A.2 Primjer: Amplituda A_1

Sada ćemo korak po korak dati kompletan prikaz računa onog dijela amplitude A_1 koji se izvodi na računalu unutar *Mathematica* jezika za računalnu algebru. Na početku učitavamo programe `FeynCalc.m` i `check.m`, te datoteku `dirac.m` u kojoj su definirane amplitude $DIRAC_i^\beta$ za pojedine dijagrame:

```
In[1]:=
<<FeynCalc.m
```

```
FeynCalc 1.44 (August 1992)
```

```
. |
.. |
... |
.... |
..... |
```

```
In[2]:=
<<check.m
```

```
In[3]:=
<<dirac.m
```

Kao naš demonstracijski primjer uzimamo amplitudu $A1$, odnosno njen dio $DIRAC_1^\beta$:

```
In[4]:=
DIRAC1
```

```
Out[4]=
-(eps[be, mu, nu, si] ga[al] ga[7] (gs[r] + m + gs[k] x)

  ga[nu] (gs[r] + m + gs[k] (-1 + x)) ga[mu]

  (gs[r] + m + gs[k] x) ga[al] ga[7] k[si])
```

Ovo gore, pod Out[4], je interna reprezentacija izraza za $DIRAC_1^\beta$:

$$\begin{aligned}
 DIRAC_1^\beta &\equiv \epsilon^{\beta\mu\sigma\nu} k_\sigma \gamma^\alpha L (\not{f} + x \not{k} + m) \gamma_\nu (\not{f} + (x-1) \not{k} + m) \gamma_\mu \\
 &\quad \times (\not{f} + x \not{k} + m) \gamma_\alpha L \\
 &= -\epsilon^{\beta\mu\nu\sigma} \gamma^\alpha L (\not{f} + m + \not{k} x) \gamma_\nu (\not{f} + m + \not{k} (-1+x)) \gamma_\mu \\
 &\quad \times (\not{f} + m + \not{k} x) \gamma_\alpha L k_\sigma. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Vidimo da imamo slijedeću korespondenciju između Diracovih matrica, Lorentzovih vektora, Levi-Civita tenzora i odgovarajućih internih objekata programa FeynCalc:

$$\gamma^\mu, \gamma^\nu \longleftrightarrow \text{ga}[\text{mu}], \text{ga}[\text{nu}], \tag{A.2}$$

$$L = (1 - \gamma_5)/2, R = (1 + \gamma_5)/2 \longleftrightarrow \text{ga}[7], \text{ga}[6], \tag{A.3}$$

$$\not{k}, \not{p} \longleftrightarrow \text{gs}[\text{k}], \text{gs}[\text{p}], \tag{A.4}$$

$$k^\mu, p^\mu \longleftrightarrow \text{k}[\text{mu}], \text{p}[\text{mu}], \tag{A.5}$$

$$\epsilon^{\beta\mu\nu\sigma} \longleftrightarrow \text{eps}[\text{be}, \text{mu}, \text{nu}, \text{si}], \tag{A.6}$$

$$\epsilon^{\beta\mu\nu\sigma} k_\sigma \longleftrightarrow \text{eps}[\text{be}, \text{mu}, \text{nu}, \text{k}] \text{ itd.} \tag{A.7}$$

pomoću koje možemo “prevesti” sve donje izraze. Prvi korak u pojednostavljanju ovog izraza je primjena operacije `DiracSimplify` koja pojednostavljuje umnoške Diracovih matrica, kontrahira dvostruke Lorentzove indekse, eventualno primjenjuje Diracovu jednadžbu (kod nas toga nema) i prebacuje sve matrice γ_5 , L i \bar{R} na desnu stranu izraza:

```
In[5]:=
DiracSimplify[%]

Out[5]=
2
2 m x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

2
2 m eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[r] ga[7] -

2
2 m eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] ga[nu] ga[7] +

2
2 m x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] ga[nu] ga[7] +

2
2 m eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[r] ga[nu] ga[7] +

[--- 42 ispuštene linije ---]

4 eps[be, mu, nu, k] ga[nu] ga[7] r.r r[mu] -

4 eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +

4 x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +

4 x eps[be, mu, nu, k] gs[k] ga[mu] gs[r] ga[7] r[nu] +

8 eps[be, mu, nu, k] gs[r] ga[7] r[mu] r[nu]
```

Slijedeći korak je primjena transformacije `Reducerk2` iz programa `check`. Ova transformacija mijenja imena varijablama r i k (impulsi u petljama) u er i ka ukoliko se ove varijable nalaze u Lorentzovom produktu sa samim sobima ($r \cdot r$, $k \cdot k$, $r \cdot k$), a ne s Diracovim matricama ili Levi-Civita tenzorom. Tako se ta trivijalna pojavljivanja ovih varijabli uklanjaju s puta transformaciji `FVtoG` koja (vidi niže) “traži” netrivijalna pojavljivanja istih da bi ih zamijenila koristeći izraz (A.12).

```
In[6]:=
Reducerk2[%]
```

```
Out[6]=
2
```



```

-2 er  x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2
2 m   x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2 2
2 ka  x  eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] -

      2 3
2 ka  x  eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] -

      2
2 er  eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[r] ga[7] +

[--- 44 ispuštene linije ---]

4 x eps[be, mu, nu, k] gs[r] ga[nu] gs[k] ga[7] r[mu] -

4 eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +

4 x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +

4 x eps[be, mu, nu, k] gs[k] ga[mu] gs[r] ga[7] r[nu] +

8 eps[be, mu, nu, k] gs[r] ga[7] r[mu] r[nu]

```

Slijedeća na redu je transformacija `RemoveOddTerms`. Njena primjena anticipira činjenicu da će izraz kojim manipuliramo kasnije biti dio podintegralne funkcije koju ćemo integrirati preko čitavih r i k četverodimenzionalnih prostora. Kako je preostali dio podintegralne funkcije paran u tim varijablama, članove našeg izraza koji su neparni u r ili k možemo eliminirati. To radi `RemoveOddTerms`:

```

In[7]:=
RemoveOddTerms[RemoveOddTerms[%, r], k]

Out[7]=
      2
-2 er  x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2
2 m   x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2 2
2 ka  x  eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] -

      2 3
2 ka  x  eps[be, mu, nu, k] ga[mu] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2

```

```

2 er eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] ga[nu] ga[7] -
    [--- 17 ispuštenih linija ---]
4 x eps[be, mu, nu, k] gs[k] ga[nu] gs[r] ga[7] r[mu] +
4 x eps[be, mu, nu, k] gs[r] ga[nu] gs[k] ga[7] r[mu] -
4 eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +
4 x eps[be, mu, nu, k] ga[mu] gs[k] gs[r] ga[7] r[nu] +
4 x eps[be, mu, nu, k] gs[k] ga[mu] gs[r] ga[7] r[nu]

```

Sada primjenjujemo transformaciju EpsChisholm. Ona na strukture u kojima se pojavljuje Levi-Civita tenzor kontrahiran s Diracovom matricom primjenjuje Chisholmov identitet

$$\gamma_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = i(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - g^{\nu\rho} \gamma^\sigma - g^{\rho\sigma} \gamma^\nu + g^{\nu\sigma} \gamma^\rho) \gamma^5, \quad (\text{A.8})$$

tako da se riješimo svih pojavljivanja Levi-Civita tenzora:

```

In[8]:=
EpsChisholm[%]

Out[8]=
      2
-2 I er  x g[be, nu] gs[k] ga[5] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2
2 I m  x g[be, nu] gs[k] ga[5] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2 2
2 I ka  x g[be, nu] gs[k] ga[5] ga[nu] gs[k] ga[7] -

      2 3
2 I ka  x g[be, nu] gs[k] ga[5] ga[nu] gs[k] ga[7] +

      2
2 I er  g[be, nu] gs[k] ga[5] gs[k] ga[nu] ga[7] -

    [--- 89 ispuštenih linija ---]

4 I x ga[nu] ga[5] gs[k] gs[r] ga[7] k[be] r[nu] -
4 I x gs[k] ga[nu] ga[5] gs[r] ga[7] k[be] r[nu] -
4 I ga[be] ga[5] gs[k] gs[r] ga[7] k[nu] r[nu] +

```

$$4 \text{ I } x \text{ ga[be] ga[5] gs[k] gs[r] ga[7] k[nu] r[nu] +}$$

$$4 \text{ I } x \text{ gs[k] ga[be] ga[5] gs[r] ga[7] k[nu] r[nu]}$$

Kako je nakon ove transformacije naš izraz bitno promijenio strukturu, ponavljamo djelovanje prvih dviju transformacija: DiracSimplify:

In[9]:=

DiracSimplify[%]

Out[9]=

$$\begin{aligned} & 4 \text{ I } \text{er}^2 \text{ ga[be] ga[7] k.k} - 4 \text{ I } \text{m}^2 \text{ ga[be] ga[7] k.k} + \\ & 4 \text{ I } \text{er}^2 x \text{ ga[be] ga[7] k.k} - 4 \text{ I } \text{m}^2 x \text{ ga[be] ga[7] k.k} - \\ & 4 \text{ I } \text{ka}^2 x^2 \text{ ga[be] ga[7] k.k} + 4 \text{ I } \text{ka}^2 x^3 \text{ ga[be] ga[7] k.k} - \\ & 8 \text{ I } \text{ga[be] gs[k] gs[r] ga[7] k.r} + \\ & 8 \text{ I } x \text{ ga[be] gs[k] gs[r] ga[7] k.r} - \\ & \quad [--- 6 \text{ ispuštenih linija} ---] \\ & 4 \text{ I } \text{m}^2 \text{ gs[k] ga[7] k[be]} - 4 \text{ I } \text{er}^2 x \text{ gs[k] ga[7] k[be]} + \\ & 4 \text{ I } \text{m}^2 x \text{ gs[k] ga[7] k[be]} + 4 \text{ I } \text{ka}^2 x^2 \text{ gs[k] ga[7] k[be]} - \\ & 4 \text{ I } \text{ka}^2 x^3 \text{ gs[k] ga[7] k[be]} + 8 \text{ I } \text{gs[r] ga[7] k.r k[be]} - \\ & 8 \text{ I } x \text{ gs[r] ga[7] k.r k[be]} + 8 \text{ I } \text{gs[k] ga[7] r.r k[be]} + \\ & 8 \text{ I } \text{gs[r] ga[7] k.k r[be]} - 8 \text{ I } x \text{ gs[k] ga[7] k.r r[be]} \end{aligned}$$

i Reducerk2:

In[10]:=

Reducerk2[%]

Out[10]=

$$\begin{aligned} & -4 \text{ I } \text{er}^2 \text{ ka}^2 \text{ ga[be] ga[7]} - 4 \text{ I } \text{ka}^2 \text{ m}^2 \text{ ga[be] ga[7]} + \\ & 4 \text{ I } \text{er}^2 \text{ ka}^2 x \text{ ga[be] ga[7]} - 4 \text{ I } \text{ka}^2 \text{ m}^2 x \text{ ga[be] ga[7]} - \end{aligned}$$

```

      4 2      4 3
4 I ka x ga[be] ga[7] + 4 I ka x ga[be] ga[7] -

8 I ga[be] gs[k] gs[r] ga[7] k.r +

8 I x ga[be] gs[k] gs[r] ga[7] k.r -

[--- 5 ispuštenih linija ---]

      2      2
4 I er gs[k] ga[7] k[be] + 4 I m gs[k] ga[7] k[be] -

      2      2
4 I er x gs[k] ga[7] k[be] + 4 I m x gs[k] ga[7] k[be] +

      2 2      2 3
4 I ka x gs[k] ga[7] k[be] - 4 I ka x gs[k] ga[7] k[be] +

8 I gs[r] ga[7] k.r k[be] - 8 I x gs[r] ga[7] k.r k[be] +

      2
8 I ka gs[r] ga[7] r[be] - 8 I x gs[k] ga[7] k.r r[be]

```

Sada obavljam posljednju pripremnu operaciju za FVtoG. To je djelovanje transformacije `ExpandScalars` koja rastavlja skalarne produkte:

$$k \cdot r \longrightarrow k^\mu r_\mu \equiv k[\text{mu}]r[\text{mu}] , \quad (\text{A.9})$$

$$\not{k} \longrightarrow k^\mu \gamma_\mu , \quad (\text{A.10})$$

$$\not{r} \longrightarrow r^\mu \gamma_\mu , \quad (\text{A.11})$$

kako bi FVtoG, koji traži objekte oblika `četverovektor[Lorentzov index]`, mogao pronaći sva mjesta na kojima se pojavljuju k ili r .

```

In[11]:=
ExpandScalars[%]

Out[11]=
      2 2      2 2
-4 I er ka ga[be] ga[7] - 4 I ka m ga[be] ga[7] +

      2 2      2 2
4 I er ka x ga[be] ga[7] - 4 I ka m x ga[be] ga[7] -

      4 2      4 3
4 I ka x ga[be] ga[7] + 4 I ka x ga[be] ga[7] +

      2

```

```

4 I er (ga[l2] k[l2]) ga[7] k[be] +

      2
4 I m (ga[l2] k[l2]) ga[7] k[be] -

      [--- 10 ispuštenih linija ---]

ga[7] k[l1] r[l1] - 4 I x

(ga[l3] r[l3]) ga[be] (ga[l2] k[l2]) ga[7] k[l1] r[l1] +

8 I (ga[l3] r[l3]) ga[7] k[be] k[l1] r[l1] -

8 I x (ga[l3] r[l3]) ga[7] k[be] k[l1] r[l1] -

8 I x (ga[l2] k[l2]) ga[7] k[l1] r[be] r[l1]

```

Sada je na redu posljednja netrivialna transformacija — FVtoG. Ona, kako je već spomenuto, traži u izrazu parove $k^\mu k^\nu$ (ili $r^\mu r^\nu$), gdje μ i ν mogu biti bilo koji Lorentzovi indeksi i, ponovno anticipirajući integraciju preko k i r prostora, zamjenjuje ih pomoću pravila

$$k^\mu k^\nu \longrightarrow \frac{1}{4} g^{\mu\nu} k^2, \quad (\text{A.12})$$

omogućujući tako daljnje pojednostavljenje izraza.

```

In[12]:=
Map[FVtoG, %]

Out[12]=
      2      2      2      2
-4 I er ka ga[be] ga[7] - 4 I ka m ga[be] ga[7] +

      2      2      2      2
4 I er ka x ga[be] ga[7] - 4 I ka m x ga[be] ga[7] -

      4      2      4      3
4 I ka x ga[be] ga[7] + 4 I ka x ga[be] ga[7] +

      2
I er g[be, l2] ga[l2] ga[7] k.k +

      2
I m g[be, l2] ga[l2] ga[7] k.k -

      [--- 10 ispuštenih linija ---]

I

```

```

- x g[l1, l2] g[l1, l3] ga[be] ga[l2] ga[l3] ga[7] k.k r.r -
2

I
- g[l1, l2] g[l1, l3] ga[l2] ga[be] ga[l3] ga[7] k.k r.r +
2

I
- x g[l1, l2] g[l1, l3] ga[l2] ga[be] ga[l3] ga[7] k.k r.r +
2

I
- x g[l1, l2] g[l1, l3] ga[l2] ga[l3] ga[be] ga[7] k.k r.r -
4

I
- x g[l1, l2] g[l1, l3] ga[l3] ga[be] ga[l2] ga[7] k.k r.r
4

```

Generalnija verzija transformacijske rutine FVtOG bi mogla također zamjenjivati četvorke $k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma$

$$k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma \longrightarrow \frac{1}{24}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu})k^4, \quad (\text{A.13})$$

ali se takve četvorke u našem slučaju nakon svih gornjih transformacija ne pojavljuju. Nakon ove transformacije primjenjujemo još jednom vrlo korisni `DiracSimplify`:

```

In[13]:=
DiracSimplify[%]

Out[13]=
      2      2      2      2
-4 I er ka ga[be] ga[7] - 4 I ka m ga[be] ga[7] +

      2      2      2      2
4 I er ka x ga[be] ga[7] - 4 I ka m x ga[be] ga[7] -

      4      2      4      3
4 I ka x ga[be] ga[7] + 4 I ka x ga[be] ga[7] +

      2      2
I er ga[be] ga[7] k.k + I m ga[be] ga[7] k.k -

      2      2
I er x ga[be] ga[7] k.k + I m x ga[be] ga[7] k.k +

      2      2      2      3
I ka x ga[be] ga[7] k.k - I ka x ga[be] ga[7] k.k +

```

$$2 \text{ I } k a^2 \text{ ga[be] ga[7] } r \cdot r - \frac{\text{I}}{2} \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k r \cdot r +$$

$$\frac{3 \text{ I}}{2} x \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k r \cdot r$$

Sada vraćamo imena varijablama k i r ($er \rightarrow r$ i $ka \rightarrow k$) transformacijom PutSquaresBack, koja je dakle neka vrsta inverzne rutine rutini Reducerk2:

```
In[14]:=
PutSquaresBack[%]
```

```
Out[14]=
```

$$\begin{aligned}
& -4 \text{ I } k^2 m^2 \text{ ga[be] ga[7]} - 4 \text{ I } k^2 r^2 \text{ ga[be] ga[7]} - \\
& 4 \text{ I } k^2 m^2 x \text{ ga[be] ga[7]} + 4 \text{ I } k^2 r^2 x \text{ ga[be] ga[7]} - \\
& 4 \text{ I } k^4 x^2 \text{ ga[be] ga[7]} + 4 \text{ I } k^4 x^3 \text{ ga[be] ga[7]} + \\
& \text{I } m^2 \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k + \text{I } r^2 \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k + \\
& \text{I } m^2 x \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k - \text{I } r^2 x \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k + \\
& \text{I } k^2 x^2 \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k - \text{I } k^2 x^3 \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k + \\
& 2 \text{ I } k^2 \text{ ga[be] ga[7] } r \cdot r - \frac{\text{I}}{2} \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k r \cdot r + \\
& \frac{3 \text{ I}}{2} x \text{ ga[be] ga[7] } k \cdot k r \cdot r
\end{aligned}$$

Na kraju prebacujemo $k \cdot k$ i $r \cdot r$ u k^2 i r^2 transformacijom Scalar2Square:

```
In[15]:=
Scalar2Square[%]
```

```
Out[15]=
```

$$-3 \text{ I } k^2 m^2 \text{ ga[be] ga[7]} - \frac{3 \text{ I}}{2} k^2 r^2 \text{ ga[be] ga[7]} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} \text{I} k^2 m^2 x \text{ga[be]} \text{ga[7]} + \frac{9}{2} \text{I} k^2 r^2 x \text{ga[be]} \text{ga[7]} - \\
& \frac{4}{3} \text{I} k^2 x \text{ga[be]} \text{ga[7]} + \frac{4}{3} \text{I} k^2 x^3 \text{ga[be]} \text{ga[7]}
\end{aligned}$$

i sređujemo ovaj izraz *Mathematicinom* transformacijom `Simplify`:

```

In[16]:=
Simplify[%]

Out[16]=
3 I 2 2 2 2 2 2 2 3
--- k (-2 m - r - 2 m x + 3 r x - 2 k x + 2 k x )
2

ga[be] ga[7]

In[17]:= Quit

```

Dakle, naš konačni izraz je

$$DIRAC_1^\beta = \frac{3i}{2} k^2 (-2m_\mu^2 - r^2 - 2m_\mu^2 x + 3r^2 x - 2k^2 x^2 + 2k^2 x^3) \gamma^\beta L, \quad (\text{A.14})$$

i njega sad možemo lako integrirati po $d^4 k$ i $d^4 r$.

Ovaj slijed transformacija je inače u programu `check` ujedinen u jednu jedinu transformaciju `completeJob` koju onda primjenjujemo na sve naše amplitude. Njeno djelovanje je višestruko provjereno manualnim računima.

Dodatak B

Integrali po impulsima u petljama

U ovom dodatku su skupljeni svi integrali koji nam trebaju prilikom računanja elektroslabih dijagrama s dvije petlje u poglavlju 2.

Prvo uvodimo skraćenice

$$B_1 \equiv y(M_W^2 - m^2) + m^2, \quad (\text{B.1})$$

$$B_2 \equiv (y + z)(M_W^2 - m^2) + m^2, \quad (\text{B.2})$$

$$B_3 \equiv y(m^2 - M_W^2) + M_W^2, \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{A} \equiv B_1 - x(1 - x)k^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\tilde{A} \equiv B_2 - (x + z)(1 - x - z)k^2, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{A} \equiv B_3 - x(1 - x)k^2, \quad (\text{B.6})$$

$$N \equiv \tilde{r}^2 - \bar{A}^2 \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{N} \equiv \tilde{r}^2 - \tilde{A}^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{N} \equiv \tilde{r}^2 - \hat{A}^2 \quad (\text{B.9})$$

B.1 r -integrali

$$\int \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{6\bar{A}^2}, \quad (\text{B.10})$$

$$\int \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{r}^2}{N^4} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{3\bar{A}} \quad (\text{B.11})$$

$$\int \frac{d^4 \tilde{r}}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^3} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{2\bar{A}}, \quad (\text{B.12})$$

B.2 k -integrali

U slijedećim integralima Λ je donja granica do koje ide iznos impulsa k po kojem integriramo.

B.2.1 Dijagrami A1, A1b, B1

$$J_a \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \bar{A}} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_1} \ln \left(1 + \frac{B_1}{\Lambda^2 x(1-x)} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$J_b \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 \bar{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{B_1 x(1-x)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 x(1-x)}{B_1} \right)} \quad (\text{B.14})$$

$$J_c \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \bar{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_1^2} \left[\ln \left(1 + \frac{B_1}{\Lambda^2 x(1-x)} \right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 x(1-x)}{B_1} \right)} \right] \quad (\text{B.15})$$

B.2.2 Dijagrami A2, A2b i A2c

$$K_a \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \tilde{A}} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_2} \ln \left(1 + \frac{B_2}{\Lambda^2 (x+z)(1-x-z)} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$K_b \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 \tilde{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{B_2 (x+z)(1-x-z)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 (x+z)(1-x-z)}{B_2} \right)} \quad (\text{B.17})$$

$$K_c \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \tilde{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_2^2} \left[\ln \left(1 + \frac{B_2}{\Lambda^2 (x+z)(1-x-z)} \right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 (x+z)(1-x-z)}{B_2} \right)} \right] \quad (\text{B.18})$$

B.2.3 Dijagrami A3, A3b, B3, B4

$$L_a \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \bar{A}} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_3} \ln \left(1 + \frac{B_3}{\Lambda^2 x(1-x)} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$L_b \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 \bar{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{B_3 x(1-x)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 x(1-x)}{B_3}\right)} \quad (\text{B.20})$$

$$L_c \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 \bar{A}^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{B_3^2} \left[\ln \left(1 + \frac{B_3}{\Lambda^2 x(1-x)} \right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2 x(1-x)}{B_3}\right)} \right] \quad (\text{B.21})$$

B.2.4 Dijagrami $C1$ i $C2$

$$\begin{aligned} J_h &\equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^6} \ln \left(1 - \frac{x(1-x)k^2}{xM_W^2 + (1-x)m^2} \right) = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\Lambda^2} \ln \left(1 + \frac{x(1-x)\Lambda^2}{xM_W^2 + (1-x)m^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x(1-x)}{xM_W^2 + (1-x)m^2} \ln \left(1 + \frac{xM_W^2 + (1-x)m^2}{x(1-x)\Lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

Bibliografija

- M. Bando, T. Kugo i K. Yamawaki (1988), *Nonlinear realization and hidden local symmetries*, Phys. Rept. **164**, 217–314.
- A. E. Bergan i J. O. Eeg (1997), *The selfpenguin contribution to $K \rightarrow 2\pi$* , Phys. Lett. **B390**, 420–426.
- L. Bergstrom, E. Masso i P. Singer (1990), *Radiative and muonic decays of K_L : Implications for the top mass*, Phys. Lett. **B249**, 141–144.
- G. Buchalla i A. J. Buras (1994), *The rare decays $K_+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ and $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ beyond leading logarithms*, Nucl. Phys. **B412**, 106–142.
- G. Buchalla, A. J. Buras i M. E. Lautenbacher (1996), *Weak decays beyond leading logarithms*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1125–1144.
- C. Caso et. al. (Particle Data Group) (1998), *Review of particle physics*, Eur. Phys. J. **C3**, 1.
- J. O. Eeg, K. Kumerički i I. Picek (1996), *Short comment on the $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ amplitude*, in L. Ionomidou-Fayard, (ed.) *Proceedings of the Workshop on K Physics*, 369, Orsay, Francuska.
- J. O. Eeg, K. Kumerički i I. Picek (1998), *On the short distance dispersive two photon $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ amplitude*, Eur. Phys. J. **C1**, 531–537.
- J. O. Eeg, B. Nižić i I. Picek (1990), *Direct CP violation in $K_{L,S} \rightarrow 2\gamma$ for a large top mass*, Phys. Lett. B **244**, 513–518.
- J. O. Eeg i I. Picek (1988), *Short distance CP violating contributions to the $K_L \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ decay*, Phys. Lett. **B214**, 651.
- M. K. Gaillard i B. W. Lee (1974), *Rare decay modes of the K mesons in gauge theories*, Phys. Rev. D **10**, 897–916.

- M. K. Gaillard, B. W. Lee i R. E. Shrock (1976), *Comment on calculations of the $K_L \rightarrow \mu\bar{\mu}$ decay rate in gauge theories*, Phys. Rev. **D13**, 2674–2679.
- S. L. Glashow, J. Iliopoulos i L. Maiani (1970), *Weak interactions with lepton-hadron symmetry*, Phys. Rev. **D2**, 1285–1292.
- A. A. Gvozdev, N. V. Mikheev i L. A. Vasilevskaya (1992), *The electroweak $K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ process as a probe of the top quark mass*, Phys. Lett. **B274**, 205.
- A. P. Heinson et al. (1995), *Measurement of the branching ratio for the rare decay $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$* , Phys. Rev. **D51**, 985–1013.
- T. Inagaki et al. (1991), *Measurement of the branching ratio of the decay $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$* , Phys. Rev. Lett. **67**, 2618–2621.
- T. Inami i C. S. Lim (1981), *Effects of superheavy quarks and leptons in low-energy weak processes $K_L \rightarrow \mu\bar{\mu}$, $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ and $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$* , Prog. Theo. Phys. **65**, 297–314, errata: ibid, p. 1772.
- P. Ko (1992), *$K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$, the top mass and other related topics*, Phys. Rev. **D45**, 174–177.
- J. Küblbeck, M. Böhm i A. Denner (1990), *FeynArts: Computer algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes*, Comp. Phys. Comm. **60**, 165.
- R. Mertig, M. Böhm i A. Denner (1991), *FeynCalc — Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes*, Comp. Phys. Comm. **64**, 345–359.
- M. E. Peskin i D. V. Schroeder (1995), *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley.
- I. Picek (1991), *CP violation in $K_{L,S} \rightarrow 2\gamma$ transitions*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **24A**, 101–110.
- L. Sehgal (1969), *Electromagnetic contribution to the decays $K_S \rightarrow l\bar{l}$ and $K_L \rightarrow l\bar{l}^*$* , Phys. Rev. **183**, 1511–1513.
- E. Shabalin (1980), *Amplitude of the nondiagonal transition $F_1 \rightarrow F_2\gamma$ for arbitrary fermion charges*, Sov. J. Nucl. Phys. **32**, 129–133, [Yad. Fiz. **32** (1980) 249-258].
- A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov i M. A. Shifman (1976), *Processes of the second order in the weak interaction in asymptotically free strong interaction theories*, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 540–543, [Yad. Fiz. **23** (1976) 1024-1031].

- L. A. Vasilevskaya, A. A. Gvozdev i N. V. Mikheev (1991), *Rare $K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$, $K_L^0 \rightarrow 2\gamma$ processes in quark approach and the top quark mass*, Yad. Fiz. **53**, 1682.
- M. Voloshin i E. Shabalin (1976), *Contribution of two-photon mechanism to the real part of the $K_L \rightarrow \mu\bar{\mu}$ decay amplitude and estimates of the masses of charmed particles*, JETP Lett. **23**, 107–110, [Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **23**(2) (1976) 123-127].
- S. Wolfram (1988), *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley.

Sažetak

U radu je opisan značaj rijetkih kaonskih raspada za izučavanje fizike elementarnih čestica na visokim energijama. Dan je detaljan pregled procesa $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, s posebnim naglaskom na doprinos kratkodosežne disperzivne (realne) amplitude realizirane Feynmanovim dijagramima s dvije petlje. Ovaj je doprinos kompletno izračunat unutar elektroslabe teorije, a zatim su dominantni dijelovi amplitude korigirani zbog učinaka kvantne kromodinamike. Dobiveni rezultati omogućuju ograničenje nepoznatog dugodosežnog disperzivnog doprinosa ovom procesu.

Summary

Importance of rare kaon decays for studies in high energy particle physics is stressed. Detailed exposition of decay $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ is given, with special emphasis on short-distance dispersive (real) two-loop contribution. This contribution is completely calculated in the framework of pure electroweak theory and then the dominant amplitudes are corrected for the effects of quantum chromodynamics. Results thus obtained enable us to constrain otherwise uncertain long-distance dispersive contribution to this process.

Životopis

Rođen sam 30. listopada 1968. godine u Zagrebu. Osnovnu školu pohađao sam u Samoboru gdje i živim. Srednjoškolsko obrazovanje stekao sam u COUO za elektroniku, preciznu mehaniku i optiku “Ruđer Bošković” u Zagrebu.

Prirodoslovno–matematički fakultet u Zagrebu, smjer inženjer fizike, upisao sam 1988. godine. Diplomirao sam 1993. godine s temom “*Fermionsko–Higgsov sektor teorije elektroslabog međudjelovanja*,” a magistrirao 1996. godine s temom “*Elektroslabi fotonski raspadi mezona*,” oboje pod stručnim vodstvom prof. dr. Ivice Piceka.

1993. godine sam se zaposlio kao znanstveni novak na Zavodu za teorijsku fiziku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Pored nastavnih zaduženja (držao sam vježbe iz kolegija *Relativistička kvantna fizika*, *Uvod u energetiku*, *Simetrije u fizici* te *Kvantna fizika i struktura materije*), aktivno sam sudjelovao u znanstvenim istraživanjima pod vodstvom prof. Ivice Piceka.

Popis radova

1. D. Kekez, D. Klabučar, K. Kumerički i I. Picek (1995), *Quark off-shell contributions to $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ in a bound-state approach*, Phys. Lett. **B348**, 239–246.
2. K. Kumerički i I. Picek (1995), *Chiral anomaly route to the $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ decay*, Fizika **B4**, 247–258.
3. J. O. Eeg, K. Kumerički i I. Picek (1996), *Short comment on the $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ amplitude*, Proceedings of the Workshop on *K* Physics, Orsay, France, May 30 – June 4, 1996., L. Iconomidou-Fayard (ed.), p. 369.
4. J. O. Eeg, K. Kumerički i I. Picek (1998), *On the dispersive two-photon $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ amplitude*, Eur. Phys. J. **C1**, 531–537.
5. D. Klabučar, K. Kumerički, B. Melić i I. Picek (1998), *On the instanton-induced portion of the nucleon strangeness*, submitted to Eur. Phys. J. **C**, hep-ph/9807357.