Diferencijalna geometrija u fizici

Bilješke, skice i škrabotine

Ivica Smolić

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Radna verzija

2022 | Lipanj | 6

Sadržaj

Predgovor

Before I speak, I have something important to say.
Groucho Marx

Bla bla …

Uvod

U samom srcu teorijske fizike nalazi se geometrija. No, na što točno mislimo kada kažemo "geometrija"? Tradicionalno gledajući, geometrija je grana matematike koja se bavi oblikom, veličinom i relativnim odnosom dijelova prostora. Stoga, već na prvi pogled imamo jasnu vezu s fizikom koja smješta različite objekte u prostor te promatra njihovu dinamiku u vremenu. Međutim, veza između fizike i geometrije je puno dublja.

Evolucijom moderne geometrije izdvojile su se njene dvije velike grane koje su posebno značajne za teorijsku fiziku. S jedne strane je topologija koja se bavi globalnim svojstvima skupova, a s druge diferencijalna geometrija, fokusirana na njihova lokalna svojstva. Ova dva aspekta geometrije isprepletena su nizom istaknutih teorema poput Gauss-Bonnetovog ili Atiyah-Singerovog.

U dodiplomskoj nastavi fizike s geometrijom se obično prvo susrećemo kroz vektorsku analizu u intuitivnom kontekstu trodimenzionalnog Euklidskog prostora. Skalarni i vektorski produkti vektora, operator nabla i njegovi "srodnici", Gaussov i Stokesov teorem samo su dio asortimana osnovnih geometrijskih alata. Ovdje, međutim, brzo nailazimo na očita ograničenja koja otvaraju niz pitanja o poopćenju navedenih pojmova. Na primjer, što ako je broj dimenzija prostora različit od 3 ili ako prostor nije ravan, poput Euklidskog, već zakrivljen? Na sve ovo nailazimo u relativističkim modelima prostorvremena, kao i kod raznih faznih prostora.

Promotrimo za uvod neke konkretne primjere u kojima smo pomalo nesvjesno susreli probleme za čije će se razumijevanje diferencijalna geometrija pokazati neophodnom.

- Prvi zakon termodinamike ograničava pretvorbu između unutarnje energije U, topline Q i rada W kojeg okolina vrši nad sustavom,

  $$\mathrm{d}U = đQ + đW$$

  Infinitezimalna promjena s lijeve strane jednakosti naznačena je diferencijalom "d", dok s desne strane imamo "neprave" (Pfaffove) diferencijale "đ" koji naglašavaju kako integral takvih veličina po zatvorenom putu ne iščezava. No, *što* je točno ovaj potonji matematički objekt i kako ga možemo geometrijski dočarati?

- Kada u magnetostatici promatramo dio prostora u kojem nema struja, Ampèreov zakon (u diferencijalnom obliku) nam govori kako rotacija magnetskog polja iščezava,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

  Stoga, prirodno je uvesti magnetski skalarni potencijal Ψ, analogno s električnim, preko $\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\Psi$. Ovakav potencijal je, međutim, općenito definiran samo *lokalno*. Što to znači? Promotrimo jednostavan primjer beskonačnog ravnog vodiča kroz koji teče konstantna struja $I \neq 0$. Neka je K krug kojeg ovaj vodič okomito probada, a C kružnica koja je rub kruga K. Ovdje naizgled benignim računom dobivamo kontradikciju,

$$\mu_0 I = \oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\oint_C (\boldsymbol{\nabla}\Psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$$

  S obzirom da je jednadžba (1) zadovoljena duž cijele kružnice C, s pravom se možemo zapitati što je ovdje pošlo po zlu? Zašto analogan problem nemamo kod skalarnog električnog potencijala beskonačnog homogeno nabijenog pravca?

- Zakretanje ravnine njihanja Foucaltovog njihala jedna je od uobičajenih demonstracija Coriolisove sile. Fizikalno objašnjenje obično uključuje raspisivanje jednadžbi gibanja u neinercijalnom sustavu. Jednostavnije gledajući, ravnina njihanja je paralelno transportirana kroz prostor prilikom Zemljine rotacije. Zašto se onda ova ravnina ne vrati u početni položaj nakon punog kruga?

- P.A.M. Dirac je 1931. godine povezao magnetske monopole s kvantizacijom električnog naboja. Koja geometrijska slika se krije iza ovog važnog teorijskog argumenta?

Dakako, ovo nisu jedini primjeri u fizici. A. Einstein je u općoj teoriji relativnosti uveo diferencijalnu geometriju na velika vrata. Analiza svojstava prostorvremena je nezamisliva bez alata diferencijalne geometrije. Moderan opis kvantnih među djelovanja počiva na baždarnim teorijama i njihovom principu lokalne baždarne invarijantnosti, koje imaju jednostavnu geometrijsku sliku i iz koje slijede važni netrivijalni zaključci.

Jednom kada imamo pojam okoline moći ćemo razlučiti temeljnu razliku između tvrdnji koje su

- ultralokalne (vrijede *u točki*),
- lokalne (vrijede na nekoj *okolini*), i
- globalne (vrijede *svugdje*).

S topološkim prostorima pripremamo teren za pojam *lokalnog* na skupu. U svakoj točki ćemo izgraditi tenzorske strukture počevši od tangentnih vektora. Potom ćemo sagraditi globalne strukture …

Tehničke napomene

- Matematičke strukture koje uključuju uređene n-torke objekata, poput grupe $(G, *)$, vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ili vlaknastog svežnja (E, π, B, F), često oslovljavamo skraćeno izostavljajući dio informacije koja je ili jasna iz konteksta ili nebitna u tom dijelu diskusije: npr. "grupa G", "vektorski prostor V", "svežanj $E \to B$", itd.
- Einsteinova sumacijska konvencija
- povremeno koristimo pokratu **akko** sa značenjem "ako i samo ako" (logička ekvivalencija)
- Ako je argument funkcije f uređena n-torka, onda koristimo pokratu

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f((x_1, \dots, x_n))$$

0

Temelji

0.1 Skupovi

Imamo li dva skupa, A i B, s eventualnim nepraznim presjekom $A \cap B$, ponekad ih želimo promatrati u uniji, ali bez da smo elemente iz presjeka "stopili" (drugim riječima, želimo elemente presjeka "brojati dvaput"). Takav skup zovemo **diskretna unija** i definiramo ga s …U slučaju općenite familije skupova …Neka je $\{X_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$ familija skupova,

$$X = \coprod_{\alpha \in J} X_\alpha \equiv \bigcup_{\alpha \in J} (X_\alpha \times \{\alpha\}) = \{(x, \alpha) \mid \alpha \in J\,,\ x \in X_\alpha\} \tag{1}$$

Definicija 0.1. Osnovne operacije na skupovima $A, B \subseteq X$:

Unija skupova	$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$
Presjek skupova	$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
Razlika skupova	$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Kažemo da skup A *presjeca* skup B ako vrijedi $A \cap B \neq \emptyset$. Kažemo da su skupovi A i B *disjunktni* ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$. **Komplement** podskupa $A \subseteq X$ unutar skupa X je skup $X - A$.

Algebra skupova $A, B, C \subseteq X$

Idempotentnost	Komutativnost	Operacije s $\emptyset$	Operacije s X
$A \cup A = A$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup X = X$
$A \cap A = A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap X = A$

Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

de Morganovi zakoni

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$
$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

Teorem 0.2. *Neka su $A, B \subseteq X$. Tada su sve naredne tvrdnje ekvivalentne,*

$$\begin{array}{c|c|c} A \subseteq B & A \cup B = B & (X - A) \cup B = X \\ X - A \supseteq X - B & A \cap B = A & A \cap (X - B) = \emptyset \end{array}$$

Teorem 0.3. *Neka su $A, B \subseteq X$. Tada vrijedi*

(a) $A \cap B = A - (X - B) = A - (A - B)$;

(b) $A - B = A \cap (X - B)$;

0.2 Relacije

Definicija 0.4. **Binarna relacija** među skupovima A i B je podskup R Kartezijevog produkta $A \times B$. Specijalno, binarna relacija na skupu A je podskup R Kartezijevog produkta $A \times A$. Koristimo oznaku xRy u značenju $(x, y) \in R$.

Definicija 0.5. Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da je

- **refleksivna** ako $(\forall\, x \in A) : \; xRx$;
- **simetrična** ako $(\forall\, x, y \in A) \; : \; xRy \; \Rightarrow \; yRx$;
- **antisimetrična** ako $(\forall\, x, y \in A) : \; xRy \wedge yRx \; \Rightarrow \; x = y$;
- **tranzitivna** ako $(\forall\, x, y, z \in A) : \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definicija 0.6. Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da definira

- **parcijalni uređaj** na skupu A ako je R refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija;
- **totalni uređaj** na skupu A ako R definira parcijalni uređaj na A i ako

$$(\forall\, x, y \in A) : \; xRy \vee yRx \; .$$

Za općenitu relaciju parcijalnog uređaja ponekad koristimo oznaku "$\leq$", a parcijalno uređen skup A s pripadnom relacijom $\leq$ pišemo kao par $(A, \leq)$.

Primjer|i 0.7. Inkluzija $\subseteq$ na nepraznoj familiji skupova $\mathcal{F}$ definira parcijalni uređaj. Međutim, ona općenito ne definira totalni uređaj jer u promatranoj familiji skupova $\mathcal{F}$ mogu postojati disjunktni neprazni skupovi. Nejednakost $\leq$ na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ definira totalni uređaj. S druge strane, stroga inkluzija $\subsetneq$ i stroga nejednakost $<$ nisu refleksivne relacije. //

Definicija 0.8. Neka je $(X, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Za skup S kažemo da je

- **omeđen odozgo** ako $(\exists\, M \in X)(\forall\, a \in S) \; : \; a \leq M$, pri čemu element M zovemo **gornja međa** skupa S;
- **omeđen odozdo** ako $(\exists\, m \in X)(\forall\, a \in S) \; : \; m \leq a$, pri čemu element m zovemo **donja međa** skupa S;
- **omeđen** ako je omeđen i odozgo i odozdo.

Definicija 0.9. Neka je $(X, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Ako je S omeđen odozgo, tada za njegovu najmanju gornju među (ako takva postoji), element $M \in X$ takav da vrijedi $M \leq M'$ za svaku gornju među M' skupa S, kažemo da je **supremum** skupa S i pišemo

$$M = \sup S \; . \tag{2}$$

Ako je S omeđen odozdo, tada za njegovu najveću donju među (ako takva postoji), element $m \in X$ takav da vrijedi $m \geq m'$ za svaku donju među m' skupa S, kažemo da je **infimum** skupa S i pišemo

$$m = \inf S \; . \tag{3}$$

Komentar 0.10. Ako postoje, supremum i infimum nekog skupa su jedinstveni. Naime, pretpostavimo da su M_1 i M_2 sva supremuma promatranog skupa: tada po definiciji vrijedi $M_1 \leq M_2 \leq M_1$, pa antisimetričnost relacije $\leq$ povlači da je $M_1 = M_2$. Također, ako su m_1 i m_2 dva infimuma promatranog skupa, tada je $m_1 \geq m_2 \geq m_1$, stoga $m_1 = m_2$. //

Primjer|i 0.11. Uzmemo li, na primjer, na parcijalno uređenom skupu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leq)$ skup $A = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, tada je $\sup A = 5 \in A$ i $\inf A = 3 \in A$. S druge strane, uzmemo li na parcijalno uređenom skupu racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, \leq)$ skup $B = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$, tada je $\sup B = 1 \in B$, ali $\inf B = 0 \notin B$. Također, primjetimo da skup $S = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ nema niti supremuma niti infimuma na skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. //

Definicija 0.12. Za relaciju R na skupu A kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Za relaciju ekvivalencije često se koristi oznaka $\sim$.

Definicija 0.13. Za dani neprazni skup A i njegov element $a \in A$ relacija ekvivalencije na skupu A definira **klasu ekvivalencije**, skup onih elemenata koji su u relaciji s a,

$$[a] \equiv \{x \in A \mid x \sim a\} \tag{4}$$

Skup svih klasa ekvivalencija u skupu A zovemo **kvocijentni skup** i pišemo

$$A/\!\sim \; \equiv \{[a] \mid a \in A\} \tag{5}$$

Primjer|i 0.14.

- Među točkama u ravnini s istaknutim ishodištem, točkom O, možemo definirati relaciju koja vrijedi akko su promatrane točke na istoj udaljenosti od O. Lako se provjeri da je ovo relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije neke točke $T \neq O$ u ravnini je kružnica sa središtem u ishodištu i radijusom $|OT|$.

- Za svaki prirodni broj $n \geq 2$ možemo definirati relaciju $x \sim y$ na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, koja vrijedi akko je apsolutna razlika $|x-y|$ dijeljiva s n (drugim riječima, akko x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju s n). Lako se provjeri da je ovo relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije ove relacije su podskupovi $[\ell] = \{kn + \ell \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

//

Naredni teorem dokazuje korisno svojstvo relacije ekvivalencije i pripadnih klasa ekvivalencije.

Teorem 0.15. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada kvocijentni skup čini jednu* **particiju** *skupa A, odnosno klase ekvivalencije zadovoljavaju svojstva*

1. $\forall\, a \in A \;:\; a \in [a]\,,$
2. *vrijedi ili* $[a] = [b]$ *(akko je $a \sim b$) ili* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Bez ulaženja u strogu aksiomatiku dotičnih skupova, koristeće relacije ekvivalencije ovdje možemo uvesti nekoliko skupova s kojima ćemo se često služiti.

- Skup **cijelih brojeva** možemo definirati kao kvocijentni skup

  $$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\!\sim\,,$$

  gdje je $(a,b) \sim (c,d)$ akko $a + d = b + c$. Naime, ideja je uvesti negativne cijele brojeve pomoću objekata koje već poznajemo. Uočimo li kako primjerice broj -3 možemo višestruko prikazati kao rezultat oduzimanja prirodnih brojeva

  $$-3 = 1 - 4 = 2 - 5 = 3 - 6 = \dots$$

  tada njega isto tako možemo promatrati kao skup uređenih parova

  $$\{(1,4),(2,5),(3,6),\dots\}\,.$$

  Ovaj skup je upravo jedna klasa ekvivalencije gore definirane relacije.

- Skup **racionalnih brojeva** možemo definirati kao kvocijentni skup

  $$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\!\sim\,,$$

  gdje je $(a,b) \sim (c,d)$ akko $ad = bc$.

0.3 Preslikavanja

Navikli smo na preslikavanja (funkcije) gledati kao "pridruživanje" elemenata iz jednog skupa elementima drugog skupa. U skladu s tim, operaciju "pridruživanja" simbolički predstavljamo uređenim parom $(x, F(x))$ varijable x i "vrijednosti" $F(x)$ koju joj pridružuje funkcija F. Međutim, koristeći gore uvedene pojmove možemo uobličiti precizniju definiciju.

Definicija 0.16. Neka su D (**domena**) i K (**kodomena**) neprazni skupovi. Za relaciju F među skupovima D i K kažemo da je **preslikavanje** ili **funkcija** ako zadovoljava naredna dva svojstva,

(a) $(\forall\, x \in D)(\exists\, y \in K):\ xFy$, i

(b) $(\forall\, x \in D)(\forall\, y_1, y_2 \in K):\ xFy_1 \wedge xFy_2 \ \Rightarrow\ y_1 = y_2$.

Drugim riječima, svaki element iz D je u relaciji s jednim i točno jednim elementom iz K. Preslikavanje zajedno s njenom domenom i kodomenom obično označavamo s $F : D \to K$, a relaciju xFy pišemo kao $F(x) = y$.

Primjer|i 0.17. Na svakom nepraznom skupu X možemo uvesti elementarno preslikavanje, **identitet** $\mathrm{id}_X : X \to X$, takvo da je za svaki $x \in X$ definirano $\mathrm{id}_X(x) = x$. Također, za svaku danu domenu D, kodomenu K i element $y \in K$ možemo definirati **konstantnu funkciju** $c_y : D \to K$ s $c_y(x) = y$ za svaki $x \in D$. //

Definicija 0.18. Neka je $f : D \to K$ preslikavanje te $A \subseteq D$ i $B \subseteq K$. Tada definiramo

- **sliku** skupa A, $f(A) \equiv \big\{ f(a) \in K \mid a \in A \big\}$
- **prasliku** skupa B, $f^{-1}(B) \equiv \big\{ x \in D \mid f(x) \in B \big\}$

Teorem 0.19. *Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje među skupovima X i Y. Ako su zadani skupovi $A, B \subseteq X$ i $G, H \subseteq Y$, tada f^{-1} "čuva" uniju, presjek i razliku, ali f "čuva" samo uniju skupova,*

$$
\begin{array}{r|l}
f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) & f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \\
f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) & f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \\
f(A - B) \supseteq f(A) - f(B) & f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H)
\end{array}
$$

Definicija 0.20. Preslikavanje $f : D \to K$ je

- **injekcija** ako $\forall\, a, b \in D : \; a \neq b \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b)$;
- **surjekcija** ako je $f(D) = K$;
- **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Primjer|i 0.21. Na primjer, preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ nije niti injekcija niti surjekcija. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ je injekcija ali nije surjekcija. Preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = |x|$ nije injekcija ali je surjekcija. Konačno, preslikavanje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x/3$ je bijekcija. //

Definicija 0.22. Ako su zadana preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, tada je njihova **kompozicija** preslikavanje $(g \circ f) : X \to Z$, definirano s $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$ za svaki $x \in X$.

Definicija 0.23. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ preslikavanja za koja vrijedi $g \circ f = \mathrm{id}_X$ i $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Tada kažemo da su preslikavanja f i g jedno drugomu **inverzi**. U ovom slučaju obično koristimo oznaku $f^{-1} = g$, odnosno $g^{-1} = f$.

Teorem 0.24. *Preslikavanje $f : X \to Y$ ima inverz akko je bijekcija.*

Kardinalnost skupova (intuitivno: broj elemenata skupa). Za skup S kažemo da je **konačan** ako je prazan ili ako postoji bijekcija $b : S \to \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. U protivnom kažemo da je skup **beskonačan**. U slučaju kada između beskonačnog skupa S i skupa $\mathbb{N}$ postoji bijekcija, kažemo da je S **prebrojivo beskonačan** (specijalno, samo skup $\mathbb{N}$, ali i skup $\mathbb{Q}$ su prebrojivo beskonačni). U protivnom za beskonačan skup S kažemo da je **neprebrojivo beskonačan** (npr. partitivni skup prirodnih brojeva $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ je neprebrojivo beskonačan).

Definicija 0.25. Neka je A neki neprazan skup. **Niz** je preslikavanje $f : \mathbb{N} \to A$. Ako "članove" niza obilježimo s $a_n = f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada za niz koristimo oznake poput $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ ili (a_n).

Komentar 0.26. Valja razlikovati niz od *skupa* njegovih vrijednosti u kodomeni. Na primjer, niz $a_n = (-1)^n$ ima beskonačno mnogo "članova", ali skup njegovih vrijednosti, $S = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$, ima samo dva elementa. //

Definicija 0.27. Indeksna funkcija za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ je svaka surjekcija $f : J \to \mathcal{A}$. Skup J nazivamo **skupom indeksa**, a familiju $\mathcal{A}$ zajedno s indeksnom funkcijom f **indeksirana familija skupova**. Za $\alpha \in J$ skup $f(\alpha) \in \mathcal{A}$ označavamo s A_α, a indeksiranu familiju s $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ili samo s $\{A_\alpha\}$, ako je iz konteksta jasno o kojem skupu indeksa je riječ.

Komentar 0.28. Indeksna funkcija ne mora biti injektivna, tj. možemo imati $A_\alpha = A_\beta$ iako je $\alpha \neq \beta$. //

0.4 Osnovne algebarske strukture

Po uzoru na osnovne računske operacije na skupu cijelih ili skupu realnih brojeva, na općenitom (nepraznom) skupu možemo izdvojiti posebna preslikavanja ("operacije") pomoću kojih gradimo algebarski jezik na tom skupu. Jednakost, odnosno *izomorfizam* među algebarskim strukturama je uvijek bijekcija koja "čuva operacije".

Definicija 0.29. Neka je S neprazni skup, a $* : S \times S \to S$ operacija. Tada kažemo da operacija $*$ zadovoljava

(a) asocijativnost ako $(\forall\, a, b, c \in G) :\ (a * b) * c = a * (b * c)$,

(n) postojanje neutralnog elementa ako $(\exists\, e \in G)(\forall\, a \in G) :\ e * a = a * e = a$,

(i) postojanje inverza ako $(\forall\, a \in G)(\exists\, a^{-1} \in G) :\ a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Za uređen par $(S, *)$, ovisno o svojstvima operacije, kažemo da je

polugrupa	(a)
monoid	(a+n)
grupa	(a+n+i)

Za svaku od navedenih struktura kažemo da je **komutativna** ako operacija za sve elemente $a, b \in S$ zadovoljava $a * b = b * a$. Specijalno, komutativnu grupu zovemo i **Abelova grupa**.

Primjer|i 0.30. $(\mathbb{Z}, +)$, grupa cijelih brojeva s operacijom zbrajanja; $(\mathbb{Q}, +)$, grupa racionalnih brojeva s operacijom zbrajanja; $(\mathbb{Z}_k, +_k)$, grupa ostataka pri djeljenju s prirodnim brojem $k \ge 2$ i zbrajanjem modulo k; $(\mathbb{Q}^\times, \cdot\,)$, grupa racionalnih brojeva bez nule s operacijom množenja; $(\mathrm{Bij}(X), \circ\,)$, grupa bijekcija $b : X \to X$ na nepraznom skupu X s operacijom kompozicije funkcija; itd. S druge strane, primjerice, uređen par $(\mathbb{N}_0, +)$ nenegativnih cijelih brojeva s operacijom zbrajanja *nije* grupa (jer niti jedan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ nema inverz) već je samo komutativni monoid. Slično tako, uređen par $(\mathbb{N}, +)$ je komutativna polugrupa. //

Definicija 0.31. Podgrupa, normalna podrupa, centar. Za grupu G kažemo da je **prosta** ako su joj jedine normalne podgrupe trivijalne, podgrupa $\{e\}$ i sama grupa G.

Definicija 0.32. **Prsten** je uređena trojka $(R, +, \cdot\,)$ nepraznog skupa R i operacija "zbrajanja" $+ : R \times R \to R$ i "množenja" $\cdot : R \times R \to R$, koja zadovoljava naredna svojstva:

(R1) $(R, +)$ je Abelova grupa (s neutralnim elementom $0 \in R$),

(R2) $(R, \cdot\,)$ je polugrupa,

(R3) distibutivnost, $(\forall\, a, b, c \in R)$:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Polje je prsten u kojem je uređen par $(R - \{0\}, \cdot\,)$ Abelova grupa.

Primjer|i 0.33. Uređene trojke $(\mathbb{Q}, +, \cdot\,)$ i $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ su polja. S druge strane, uređena trojka $(\mathbb{Z}, +, \cdot\,)$ je prsten ali *nije* polje jer uređen par $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot\,)$ nije grupa. //

Realne brojeve možemo jednoznačno opisati kao polje $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ koje je totalno uređeno s relacijom $\le$, kompatibilnom s operacijama na skupu,

$$a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c\,,$$

$$a \le b \wedge 0 \le c \;\Rightarrow\; ac \le bc\,,$$

i svojstvom da svaki odozgo omeđen podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum na skupu $\mathbb{R}$.

Konstrukciju takvog skupa možemo uvesti preko *Dedekindovog reza* na racionalnim brojevima: $\mathbb{R}$ je skup uređenih particija skupa $\mathbb{Q}$, odnosno uređenih parova skupova (A, B), gdje su $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, takvi da je $a < b$ za sve $a \in A$ i

$b \in B$, pri čemu se primjerice držimo konvencije kako B nema najmanjeg elementa. Na primjer, $\sqrt{2} = (A, B)$, gdje je A unija svih negativnih racionalnih brojeva i onih racionalnih brojeva q za koje je $q^2 < 2$, a B skup svih pozitivnih racionalnih brojeva q za koje je $q^2 > 2$. Primjetimo, skup racionalnih brojeva ne posjeduje svojstvo da mu svaki odozgo omeđen podskup ima supremum (među racionalnim brojevima).

Komentar 0.34. Često koristimo neke pomoćne oznake, poput skupa pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$, skupa pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ (i analogno, negativnih racionalnih $\mathbb{Q}^-$ i negativnih realnih brojeva $\mathbb{R}^-$), skupa cijelih brojeva bez nule, $\mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z} - \{0\}$, skupa racionalnih brojeva bez nule, $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} - \{0\}$ i skupa realnih brojeva bez nule, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$. //

TO DO: kompleksni, kvaternioni, oktonioni, …

0.5 Vektorski prostori i algebre

Definicija 0.35. **Vektorski prostor** (ili **linearni prostor**) nad poljem $\mathbb{K}$ je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ skupa V i dvije operacije, $+ : V \times V \to V$ (zbrajanje vektora) i $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (množenje skalarom), koje zadovoljavaju sljedeća svojstva za sve $a, b \in V$ i sve $\lambda, \kappa \in \mathbb{K}$

1. $(V, +)$ je Abelova grupa,
2. kvaziasocijativnost, $\lambda \cdot (\kappa \cdot a) = (\lambda\kappa) \cdot a$,
3. postoji *jedinica* $1 \in F$, takva da je $1 \cdot a = a$,
4. distributivnost s obzirom na zbrajanje skalara, $(\lambda + \kappa) \cdot a = \lambda \cdot a + \kappa \cdot a$,
5. distributivnost s obzirom na zbrajanje vektora, $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$.

Definicija 0.36. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Za preslikavanje $L : V \to W$ kažemo da je $\mathbb{K}$-**linearno** ako za sve $a, b \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vrijedi

$$L(\alpha a + \beta b) = \alpha L(a) + \beta L(b) \ .$$

Izomorfizam među vektorskim prostorima V i W je $\mathbb{K}$-linearna bijekcija $\phi : V \to W$.

Definicija 0.37. **Algebra** (A, m) nad poljem $\mathbb{K}$ je uređen par vektorskog prostora A (nad poljem $\mathbb{K}$) i $\mathbb{K}$-bilinearnog preslikavanja $m : A \times A \to A$, pri čemu koristimo skraćen zapis $ab \equiv m(a, b)$. Za algebru kažemo da je

- **algebra s dijeljenjem** ako nema dijelitelja nule, $(\nexists\, a, b \in A^\times) : \ ab = 0$;
- **asocijativna algebra** ako $(\forall\, a, b, c \in A) : \ (ab)c = a(bc)$;
- **komutativna algebra** ako $(\forall\, a, b \in A) : \ ab = ba$.

Definicija 0.38. Za algebre A i B kažemo su izomorfne ako postoji izomorfizam među vektorskim prostorima $\phi : A \to B$ koji za sve $x, y \in A$ zadovoljava $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

Teorem 0.39 (Frobenius). *Svaka konačnodimenzionalna asocijativna algebra s dijeljenjem nad poljem realnih brojeva izomorfna je s* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *ili* $\mathbb{H}$.

Definicija 0.40. **Liejeva algebra** $(A, [\,.\,,\,.\,])$ je algebra u kojoj bilinearno preslikavanje $[\,.\,,\,.\,]$ zadovoljava

(a) $(\forall\, a \in A) : \ [a, a] = 0$, i

(b) **Jacobijev identitet**,

$$(\forall\, a, b, c \in A) : \ [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \,.$$

Komentar 0.41. Prvo svojstvo, $[a, a] = 0$, zajedno s linearnosti odmah povlači antisimetričnost produkta, $[c, b] = -[b, c]$. Obratno, antisimetričnost produkta $[c, b] = -[b, c]$ povlači svojstvo $[a, a] = 0$ samo ako je karakteristika polja $\mathbb{K}$ različita od 2. //

0.6 Grupna djelovanja

Neka je X neki neprazan skup. Prvo se valja prisjetiti da skup svih bijekcija $b : X \to X$, kojeg ćemo označiti s $\mathrm{Bij}(X)$, zajedno s operacijom kompozicije funkcija $\circ$ čini Abelovu grupu (neutralni element je identitet id_X). Bijekcije na skupu X možemo intuitivno predočiti poput permutacija, odnosno preslagivanja elemenata skupa X. Kako bi ova preslagivanja sustavno strukturirali možemo ih prvo povezati s grupama.

Definicija 0.42. Neka je X neprazan skup i $(G, \cdot)$ grupa. **Djelovanje grupe** G na skupu X je grupni homomorfizam $\alpha : (G, \cdot) \to (\mathrm{Bij}(X), \circ)$.

Komentar 0.43. Načelno možemo razlikovati djelovanje grupe *s lijeva*, gdje pretpostavljamo da za sve $g_1, g_2 \in G$ imamo

$$\alpha_L(g_1 g_2) = \alpha_L(g_1) \circ \alpha_L(g_2) \,,$$

od grupnog djelovana *s desna* gdje imamo

$$\alpha_R(g_1 g_2) = \alpha_R(g_2) \circ \alpha_R(g_1) \,.$$

Međutim, za svako djelovanje s desna ρ možemo definirati jedinstveno djelovanje s lijeva λ preko $\lambda(g) \equiv \rho(g^{-1})$. Naime, imamo

$$\lambda(g_1 g_2) = \rho(g_2^{-1} g_1^{-1}) = \rho(g_1^{-1}) \circ \rho(g_2^{-1}) = \lambda(g_1) \circ \lambda(g_2) \,.$$

Stoga, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da imamo grupno djelovanje s lijeva. //

Komentar 0.44. Alternativni zapis grupnog djelovanja je preko preslikavanja $\sigma : G \times X \to X$, gdje je $\sigma(g, \cdot\,) = \alpha(g)$. Na primjer, uvjet da je α grupni homomorfizam, $\alpha(gh) = \alpha(g) \circ \alpha(h)$, zapisujemo preko $\sigma(gh, x) = \sigma(g, \sigma(h, x))$. Također, djelovanje grupnog elementa $g \in G$ na točku $x \in X$ u literaturi se ponekad skraćeno zapisuje kao $g.x = \sigma(g, x)$. //

Primjer|i 0.45. Djelovanje cikličke grupe C_n na skup od n elemenata. //

Primjer|i 0.46. Svaka grupa G djeluje na samu sebe na nekoliko načina. Primjerice, za svaki $g \in G$ imamo naredne bijekcije: množenje s lijeva $L_g(h) = gh$, množenje s desna $R_g(h) = hg$ i konjugaciju $c_g = L_g \circ R_g^{-1}$, odnosno $c_g(h) = ghg^{-1}$. Sva preslikavanja $g \mapsto L_g$, $g \mapsto R_g$ i $g \mapsto c_g$ su homomorfizmi. Valja uočiti kako sama preslikavanja $L_g, R_g : G \to G$ općenito *nisu* homomorfizmi, dok je konjugacija $c_g : G \to G$ izomorfizam za svaki $g \in G$. //

Definicija 0.47. **Stabilizator** (**grupa izotropije**, **mala grupa**) točke $a \in X$ s obzirom na djelovanje grupe G definirana je s

$$\mathrm{St}(a) \equiv \{g \in G \mid \sigma(g, a) = a\} \,. \tag{6}$$

Komentar 0.48. Valja prvo provjeriti da je uistinu $\mathrm{St}(a) \le G$ za svaki $a \in X$. Kako je α grupni homomorfizam, za svaki $g \in G$ imamo $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$. Stoga, za svaki $g \in \mathrm{St}(a)$ slijedi da je $(\alpha(g^{-1}))(a) = (\alpha(g))^{-1}(a) = a$, odnosno $\sigma(g^{-1}, a) = a$ i stoga $g^{-1} \in \mathrm{St}(a)$. Nadalje, za sve $g, h \in \mathrm{St}(a)$ imamo $\sigma(gh, a) = \sigma(g, \sigma(h, a)) = \sigma(g, a) = a$ pa je $gh \in \mathrm{St}(a)$. Primjetimo, za svaki $a \in X$ i svaki $g \in G$ vrijedi $g\,\mathrm{St}(a)\,g^{-1} = \mathrm{St}(\sigma(g, a))$ pa općenito $\mathrm{St}(a)$ *nije* normalna podgrupa grupe G. //

Definicija 0.49. **Orbita** točke $a \in X$ s obzirom na grupno djelovanje σ grupe G je skup

$$\mathrm{Orb}(a) \equiv \{\sigma(g,a) \mid g \in G\} \subseteq X\ . \tag{7}$$

Za točku $a \in X$ kažemo da je **fiksna točka elementa** $g \in G$ ako je $\sigma(g,a) = a$. Skup svih fiksnih točaka elementa $g \in G$ obilježavamo s

$$\mathrm{Fix}(g) \equiv \{a \in X \mid \sigma(g,a) = a\} \subseteq X\ . \tag{8}$$

Za točku $a \in X$ kažemo da je **fiksna točka grupnog djelovanja** ako je $\mathrm{Orb}(a) = \{a\}$, odnosno $\mathrm{St}(a) = G$.

Primjer|i 0.50. Na primjer, $\mathrm{Fix}(e) = X$. Naime, iz $\alpha(e) \circ \alpha(e) = \alpha(e)$ slijedi da je $\alpha(e) = \mathrm{id}_X$. //

Definicija 0.51. Kažemo da je grupno djelovanje grupe G na skup X

- **vjerno** (**efektivno**) ako je $\mathrm{Fix}(g) \neq X$ za svaki netrivijalni element $g \neq e$ grupe G;
- **slobodno** ako je $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$ za svaki netrivijalni element $g \neq e$ grupe G, odnosno ako je $\mathrm{St}(a) = \{e\}$ za svaki $a \in X$;
- **tranzitivno** ako za sve $a, b \in X$ postoji $g \in G$ takav da je $b = \sigma(g,a)$, odnosno ako je $\mathrm{Orb}(a) = X$ za svaki $a \in X$.

Komentar 0.52. Ako je djelovanje grupe vjerno, tada je pripadna α injekcija. Naime, pretpostavimo da postoje $g, g' \in G$, takvi da je $\sigma(g,x) = \sigma(g',x)$ za sve $x \in X$. No, tada je

$$x = \sigma(e,x) = \sigma(g^{-1}, \sigma(g,x)) = \sigma(g^{-1}, \sigma(g',x)) = \sigma(g^{-1}g', x)$$

Kako je po pretpostavci djelovanje vjerno, slijedi da je $g^{-1}g' = e$, odnosno $g' = g$. //

0.7 Realna analiza

Definicija 0.53. Multiindeksi $I = (i_1, \ldots, i_n)$.

Teorem 0.54 (Taylor). *Neka je $O \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren podskup, $a \in O$, $f \in C^{k+1}(O)$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$. Ako je $V \subseteq O$ konveksan podskup skupa O tada za sve $x \in V$ vrijedi*

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x)\ , \tag{9}$$

gdje je $P_k(x)$ Taylorov polinom reda k funkcije f u točki a,

$$P_k(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} \sum_{|I|=n} (x-a)^I \partial_I f(a)\ , \tag{10}$$

a $R_k(x)$ ostatak, definiran s

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{|I|=k+1} (x-a)^I \int_0^1 (1-t)^k \partial_I f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t\ . \tag{11}$$

DOKAZ : Matematičkom indukcijom. Slučaj $k=0$ slijedi integracijom,

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t\ .$$

Nadalje, ako tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}_0$, tada upotrebom parcijalne integracije dobivamo

$$\int_0^1 (1-t)^k \partial_I f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{k+1} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(1-t)^{k+1}}{\mathrm{d}t} \partial_I f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} \partial_I f(a+t(x-a)) \Big|_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} \partial_I f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{k+1} \partial_I f(a) + \frac{1}{k+1} \int_0^1 (1-t)^{k+1} (x-a)^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \partial_I f(a+t(x-a))\, \mathrm{d}t\ ,$$

što uvrštavanjem u izraz za ostatak $R_k(x)$ dokazuje korak indukcije. □

Dodatna literatura

-

Zadaci

1. Naizgled, simetričnost i tranzitivnost nužno povlače refleksivnost,

$$a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a \;\Rightarrow\; a \sim a\,.$$

   Gdje je pogreška u ovakvom rezoniranju?

2. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan omeđen skup. Tada vrijedi $\inf S \le \sup S$. Ako je $\inf S = \sup S$ tada se S sastoji od točno jedne točke.

3. Dokažite da je preslikavanje $f : X \to Y$

   (a) injekcija akko $(\forall\, A, B \subseteq X):\; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

   (b) injekcija akko $(\forall\, A \subseteq X):\; A = f^{-1}(f(A))$;

   (c) surjekcija akko $(\forall\, C \subseteq Y):\; C = f(f^{-1}(C))$;

   (d) bijekcija akko $(\forall\, A \subseteq X):\; f(X - A) = Y - f(A)$.

4. Neka je X neprazan skup, a $\mathscr{P}(X)$ njegov partitivni skup. Kakve algebarske strukture su $(\mathscr{P}(X), \cup)$ i $(\mathscr{P}(X), \cap)$?

5. Dokažite da su množenje s lijeva L_g i množenje s desna R_g slobodna tranzitivna djelovanja grupe na samu sebe.

1

Topološki prostori

1.1 Topološki prostor

Motivacija. Skup je amorfan objekt, bez unutrašnje strukture. Želimo li na skupu pričati o analizi (limesima, derivacijama, itd.) potreban nam je temeljni pojam, *okolina* točke, odnosno *otvoreni skup* koji sadrži tu točku. Stoga, prvo valja napraviti *selekciju* podskupova zadanog skupa koje ćemo zvati otvorenim skupovima.

Definicija 1.1. **Topološki prostor** je uređen par $(X, \mathscr{T})$ gdje je X skup, a $\mathscr{T}$ familija podskupova skupa X koja zadovoljava sljedeća svojstva

1. $X \in \mathscr{T}$ i $\emptyset \in \mathscr{T}$,
2. unija *proizvoljnog* broja skupova iz $\mathscr{T}$ je opet element familije $\mathscr{T}$,
3. presjek *konačno* mnogo skupova iz $\mathscr{T}$ je opet element familije $\mathscr{T}$.

Za svaki skup $O \in \mathscr{T}$ kažemo da je **otvoreni skup**, dok za njihove komplemente $X - O$ kažemo da su **zatvoreni skupovi**.

Komentar 1.2. Skup ne mora biti nužno otvoren ili zatvoren: postoje skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni ili oni koji nisu nijedno od to dvoje. Drugim riječima, skupovi nisu "poput vrata", koja uvijek moraju biti otvorena ili zatvorena. Na primjer, prema samoj definiciji cijeli skup X i prazan skup $\emptyset$ su u svakoj topologiji primjer skupova koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni. Valja uočiti kako skupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni (mi ćemo ih kratko oslovljavati "o/z skupovi") u svakoj topologiji dolaze u paru, A i $X - A$. //

Teorem 1.3. *Zatvoreni skupovi zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

(a) unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup;

(b) presjek bilo kojeg broja zatvorenih skupova je zatvoren skup.

DOKAZ :

(a) Neka je zadana *konačna* familija zatvorenih skupova $\{C_i\}$ s ukupno $n \in \mathbb{N}$ članova. Svaki skup C_i je po definiciji komplement otvorenog skupa, $C_i = X - O_i$. Upotrebom de Morganovih zakona slijedi

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - O_i) = X - \bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

Kako je presjek konačnog broja otvorenih skupova otvoren skup, slijedi tražena tvrdnja.

(b) Neka je zadana *proizvoljno velika* familija zatvorenih skupova $\{C_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Opet, upotrebom de Morganovih zakona slijedi

$$\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (X - O_\alpha) = X - \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha$$

Kako je unija proizvoljnog broja otvorenih skupova otvoren skup, slijedi tražena tvrdnja.

□

Primjer|i 1.4.

Na svakom skupu X je moguće zadati dvije jednostavne topologije,

(a) **Trivijalna topologija**, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$,

(b) **Diskretna topologija**, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$,

gdje je $\mathscr{P}(X)$ partitivni skup skupa X. U prvom slučaju su jedini otvoreni skupovi (ujedno i jedini zatvoreni skupovi) cijeli X i prazan skup $\emptyset$, dok je drugi slučaj suprotan ekstrem, *svi podskupovi* skupa X su otvoreni, a ujedno i zatvoreni skupovi. //

Primjer|i 1.5.

Topologiju možemo zadati na jednostavnim skupovima s konačno mnogo elemenata. Neka je npr. $X = \{a, b, c\}$. Tada su

$$\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\} \quad \text{i} \quad \mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$$

dva primjera topologije na skupu X (lako se provjeri da su zadovoljeni uvjeti iz definicije topologije). S druge strane, familija

$$\mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$$

nije topologija na skupu X jer $\{a\} \cup \{b\} \notin \mathscr{T}_3$. //

Primjer|i 1.6. Standardna topologija realnih brojeva

Kažemo da je na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana **standardna topologija** ako su otvoreni skupovi oni čiju svaku točku je moguće "okružiti" otvorenim intervalom u potpunosti sadržanim u tom skupu,

$$\mathscr{T} = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in O \ \exists \delta > 0 \ : \ \langle x - \delta, x + \delta \rangle \subseteq O\}$$

Prema ovoj definiciji sam skup $\mathbb{R}$, kao i prazan skup $\emptyset$ su otvoreni skupovi. Nadalje, neka je $\mathscr{F} = \{O_\alpha\}$ neka familija skupova iz gore definirane topologije, te neka je $x \in \bigcup_\alpha O_\alpha$. Tada postoji $O_\beta \in \mathscr{F}$, takav da je $x \in O_\beta$, a stoga i $\delta > 0$ sa svojstvom da je

$$\langle x - \delta, x + \delta \rangle \subseteq O_\beta \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$$

Drugim riječima, skup $\bigcup_\alpha O_\alpha$ je otvoren. Konačno, neka je $\mathscr{F} = \{O_i\}$ neka *konačna* familija otvorenih skupova, te neka je $x \in \bigcap_i O_i$. Tada za svaki i vrijedi $x \in O_i$ i postoji $\delta_i > 0$ sa svojstvom $\langle x - \delta_i, x + \delta_i \rangle \subseteq O_i$. Ako sada definiramo $\delta_* = \min\{\delta_i\}$, tada za svaki i vrijedi

$$\langle x - \delta_*, x + \delta_* \rangle \subseteq \langle x - \delta_i, x + \delta_i \rangle \subseteq O_i$$

pa je

$$\langle x - \delta_*, x + \delta_* \rangle \subseteq \bigcap_i O_i$$

odakle zaključujemo da je $\bigcap_i O_i$ otvoren skup. //

Komentar 1.7. Na svakom od skupova $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}$ možemo zadati *standardnu topologiju*, analognu onoj na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, zamjenom otvorenog intervala $\langle x - \delta, x + \delta \rangle$ iz definicije s otvorenom kuglom $B^n(x, \delta)$ radijusa δ sa središtem u točki $x \in \mathbb{R}^n$. U ostatku teksta, ako izričito nije naglašeno drugačije, podrazumijeva se da je na skupovima $\mathbb{R}^n$ zadana standardna topologija! //

Komentar 1.8. Zašto je u definiciji otvorenih skupova dozvoljen samo presjek *konačnog* broja otvorenih skupova? Ako bi uveli alternativnu definiciju topologije u kojoj bi i presjek *proizvoljnog* broja otvorenih skupova bio otvoren skup, tada standardna topologija na skupu realnih brojeva više ne bi zadovoljavala (alternativne) aksiome topološkog prostora. Na primjer, presjek beskonačne familije otvorenih skupova

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\infty, 1/n \rangle = \langle -\infty, 0]$$

bi trebao biti otvoren skup. Međutim, rubna točka 0 nema okolinu oblika $\langle -\delta, \delta \rangle$ sadržanu u skupu A pa prema definiciji otvorenih skupova u standardnoj topologiji na $\mathbb{R}$ skup A nije otvoren! Zamjerka ovakvoj alternativnoj definiciji topologije na skupu nije u tome što je ona *pogrešna* (što god to značilo), već u tome da je manje *upotrebljiva* (za početak, ne opisuje standardne otvorene skupove na skupu realnih brojeva). //

Definicija 1.9. Ako otvoren skup O sadrži točku x, tada kažemo da je skup O **okolina** točke x. Mi ćemo koristiti oznaku O_x za skup koji je okolina točke x (iz konteksta je uvijek jasno je li posrijedi indeks skupa ili oznaka točke kojoj je taj skup okolina).

1.2 Baza topološkog prostora

Motivacija. Jednom kada smo na skupu postavili osnovnu strukturu, ona je “nezgrapna” za uporabu jer se u principu radi samo o popisu izdvojenih objekata (otvorenih podskupova u slučaju topologije). Potrebno nam je nekakvo sustavno prikazivanje članova naše strukture pomoću manjeg skupa temeljnih objekata. Na primjer, među vektorima vektorskog prostora biramo manji skup vektora, *bazu*, takav da je sve vektore u tom prostoru moguće prikazati kao *linearnu kombinaciju* elemenata baze. Isto tako, među otvorenim skupovima topološkog prostora ćemo probrati *bazu topologije*, takvu da je svaki otvoreni skup u tom prostoru moguće prikazati kao *uniju* elemenata baze. Pri tom moramo pripaziti da se baza dobro ponaša s obzirom na osnovne skupovne operacije, unije i presjeke.

Definicija 1.10. Familija skupova $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ je **baza** (neke topologije) na skupu X ako zadovoljava svojstva

1. Svaka točka $x \in X$ sadržana je barem u jednom skupu $B \in \mathcal{B}$, i
2. Za svaku točku $x \in B_1 \cap B_2$, gdje su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, postoji skup $B_3 \in \mathcal{B}$ za koji vrijedi $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Prvo svojstvo nam govori da familija $\mathcal{B}$ *pokriva* skup X, a drugo da je presjek svaka dva člana baze unija nekih članova baze. Sada ćemo, kopirajući ideju definicije standardne topologije na skupu realnih brojeva, uvesti topologiju izgrađenu iz zadane baze.

Teorem 1.11. *Neka je X skup i $\mathcal{B}$ baza na tom skupu. Tada je familija skupova*

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \{O \subseteq X \mid (\forall\, x \in O)(\exists\, B \in \mathcal{B}) :\ x \in B \subseteq O\} \tag{1.1}$$

topologija na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ na skupu X **generirana** *bazom $\mathcal{B}$.*

Dokaz : Prazan skup trivijano zadovoljava $\emptyset \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, a cijeli skup je otvoren, $X \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, jer je svaki $x \in X$, po definiciji baze, element nekog člana baze, $x \in B \subseteq X$. Nadalje, promotrimo indeksiranu familiju skupova $\{O_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}} \mid \alpha \in J\}$. Treba pokazati da je njihova unija,

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha$$

također element familije $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. Za svaki $x \in V$ postoji α, takav da je $x \in O_\alpha$, a kako je $O_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, postoji $B \in \mathcal{B}$, takav da je $x \in B \subseteq O_\alpha$. No, to znači i da je $B \subseteq V$, pa je po definiciji $V \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. Nadalje, promotrimo presjek dva otvorena skupa, $O_1, O_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. Za svaki $x \in O_1 \cap O_2$ po definiciji postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, takvi da je

$$x \in B_1 \subseteq O_1 \quad \text{i} \quad x \in B_2 \subseteq O_2$$

Prema definiciji baze postoji i $B_3 \in \mathcal{B}$, takav da je

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2 \ ,$$

pa je $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. Zatvorenost familije skupova $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ na konačne presjeke slijedi indukcijom. □

Komentar 1.12. Primjetimo, iz gornjeg teorema odmah slijedi da su u topološkom prostoru $(X, \mathscr{T}_{\mathcal{B}})$ svi elementi baze $\mathcal{B}$ otvoreni skupovi. Također, svaki otvoren skup $O \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ je unija elemenata baze $\mathcal{B}$, iako taj prikaz općenito *nije* jedinstven! //

Primjer|i 1.13.

- Trivijalna topologija na skupu X generirana je bazom koja se sastoji od samo jednog člana, samog skupa X. Diskretna topologija na skupu X generirana je bazom koja se sastoji od svih jednočlanih podskupova skupa X.
- Standarna topologija na $\mathbb{R}^n$ generirana je, primjerice, bazom koja se sastoji od otvorenih kugli.

//

Želimo li pronaći bazu za topologiju koja je unaprijed zadana na nekom skupu, praktično pitanje je s kojim kriterijem možemo jednostavno provjeriti je li neka familija skupova uistinu baza te topologije. Jedan odgovor daje naredni reultat.

Teorem 1.14. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Familija otvorenih skupova $\mathcal{A}$ u X je baza topologije $\mathscr{T}$ akko za svaki otvoren skup $O \in \mathscr{T}$ i svaki $x \in O$ postoji skup $A_x \in \mathcal{A}$ za koji vrijedi $x \in A_x \subseteq O$.*

Dokaz : Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ baza topologije $\mathscr{T}$ i promotrimo neki otvoren skup $O \in \mathscr{T}$. Tada postoji familija skupova $\{A_\alpha \in \mathcal{A} \,|\, \alpha \in I\}$, takvih da je $O = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ pa je svaka točka $x \in O$ sadržana barem u jednom skupu iz ove unije.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ familija otvorenih skupova koja zadovoljava svojstvo iz teorema. Prvo valja pokazati da $\mathcal{A}$ zadovoljava svojstva baze. Kako je $X \in \mathscr{T}$, po pretpostavci za svaki $x \in X$ postoji $A_x \in \mathcal{A}$, takav da je $x \in A_x$. Nadalje, kako su elementi familije $\mathcal{A}$ otvoreni skupovi, za svaki par $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ presjek $A_1 \cap A_2$ je otvoren skup pa po pretpostavci postoji $A_3 \in \mathcal{A}$, takav da je $x \in A_3 \subseteq (A_1 \cap A_2)$. Konačno, trebamo pokazati da je topologija $\mathscr{T}_{\mathcal{A}}$ koju generira baza $\mathcal{A}$ upravo jednaka topologiji $\mathscr{T}$. Svaki skup $V \in \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$ možemo prikazati kao uniju $V = \bigcup_{\beta \in J} A_\beta$, a kako je po pretpostavci svaki skup A_β otvoren, vrijedi $V \in \mathscr{T}$ i stoga $\mathscr{T}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathscr{T}$. Obratno, za svaki otvoren skup $O \in \mathscr{T}$ iz pretpostavke teorema slijedi da ga je moguće prikazati kao uniju $O = \bigcup_{x \in O} A_x$ pa je $O \in \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$ i stoga $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$. Odavde slijedi $\mathscr{T}_{\mathcal{A}} = \mathscr{T}$. □

Primjer|i 1.15. Topološki dokaz u teoriji brojeva

Matematičar Hillel Fürstenberg je 1955. godine konstruirao topološki dokaz beskonačnosti skupa prostih brojeva [Für55]. Ideja polazi od zadavanja specifične topologije na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, pomoću baze koju čine aritmetički nizovi,

$$\mathcal{B} = \{S(a,b) = a\mathbb{Z} + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\,,\ a \neq 0\}\ .$$

Lako se provjeri da $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstva baze:

- svaki $x \in \mathbb{Z}$ je član jednog aritmetičkog niza, $x \in S(x,0)$,
- promotrimo $x \in S(a_1,b_1) \cap S(a_2,b_2)$, te neka je c najmanji zajednički višekratnik brojeva a_1 i a_2; tada je $S(c,x) \subseteq S(a_1,b_1)$ i $S(c,x) \subseteq S(a_2,b_2)$, odakle slijedi $S(c,x) \subseteq S(a_1,b_1) \cap S(a_2,b_2)$.

Nadalje, valja izdvojiti dva važna svojstva ove topologije:

1. neprazan konačan skup ne može biti otvoren (jer su elementi baze beskonačni skupovi), drugim riječima, komplement konačnog skupa ne može biti zatvoren;
2. sami elementi baze $\mathcal{B}$ su o/z skupovi jer se njihovi komplementi mogu napisati kao unije aritmetičkih nizova,

$$\mathbb{Z} - S(a,b) = \bigcup_{j=1}^{a-1} S(a, b+j)$$

Korištenjem ovih informacija možemo dovršiti dokaz. Jedini cijeli brojevi koji nisu višekratnici prostih brojeva su -1 i $+1$,

$$\mathbb{Z} - \big\{-1, +1\big\} = \bigcup_{\text{prost } p} S(p,0)\ .$$

S lijeve strane se nalazi komplement konačnog skupa, pa on ne može biti zatvoren. Ako pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno mnogo, s desne strane jednakosti imamo konačnu uniju o/z skupova, pa prema tome zatvoren skup, što je kontradikcija! //

1.3 Dijelovi skupova

Čak i u neformalnom jeziku ćemo govoriti o "rubu" ili "unutrašnjosti" nekog skupa. Na primjer, intuitivno nam je jasno što bi trebali biti rub i unutrašnjost otoka prikazanog na nekoj geografskoj karti. Koristeći topologiju na nekom skupu možemo preciznije definirati i razmotriti anatomiju pojedinih podskupova tog prostora.

Definicija 1.16. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Svakom skupu $A \subseteq X$ definiramo

Unutrašnjost $A^\circ = \{x \in X \mid (\exists\, O_x \in \mathscr{T}) : \ O_x \subseteq A\}$

Rub $\partial A = \{x \in X \mid (\forall\, O_x \in \mathscr{T}) :$
$O_x \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ O_x \cap (X - A) \neq \emptyset\}$

Zatvarač $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = \{x \in X \mid (\forall\, O_x \in \mathscr{T}) : \ O_x \cap A \neq \emptyset\}$

Komentar 1.17. Nije teško dokazati kako zamjenom otvorenog skupa O_x s elementom baze $B_x \in \mathcal{B}$, takvim da je $x \in B_x$, u definicijama unutrašnjosti, ruba i zatvarača skupa, dobivamo ekvivalentnu definiciju. //

Iz gornjih definicija odmah slijedi da je

$$X^\circ = X = \overline{X}\,, \quad \partial X = \emptyset \quad \text{i} \quad \emptyset^\circ = \partial\emptyset = \overline{\emptyset} = \emptyset \tag{1.2}$$

Također, odmah vidimo da općenito vrijedi

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \tag{1.3}$$

Naime, za svaki $x \in A^\circ$ postoji okolina $O_x \subseteq A$, pa je $x \in A$, odakle slijedi $A^\circ \subseteq A$. Nadalje, za svaki $x \in A$, svaka okolina O_x siječe skup A (barem u točki x), pa je $x \in \overline{A}$ i stoga $A \subseteq \overline{A}$.

Definicije ruba skupa i ruba njegovog komplementa su identične, pa za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $\partial A = \partial(X - A)$. Nadalje, unutrašnjost i rub bilo kojeg skupa $A \subseteq X$, kao i unutrašnjost komplementa tog skupa su uvijek međusobno disjunktni skupovi,

$$A^\circ \cap \partial A = \partial A \cap (X - A)^\circ = (X - A)^\circ \cap A^\circ = \emptyset \tag{1.4}$$

pa je rub skupa moguće prikazati kao presjek $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$. Odavde slijedi da je topološki prostor X moguće rastaviti na spomenute disjunktne skupove,

$$X = A^\circ \cup \partial A \cup (X - A)^\circ \tag{1.5}$$

Primjer|i 1.18. Promotrimo prvo jednostavan skup $X = \{a, b, c\}$ s narednom topologijom,

$$\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$$

U tablici ispod je dano nekoliko skupova $A \subseteq X$, s pripadnim unutrašnjostima, rubovima i zatvaračima.

A	A°	∂A	$\overline{A}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	$\{a, c\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{c\}$	X
$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	$\{a, c\}$

//

Primjer|i 1.19. Dijelovi skupova realnih brojeva (sa standardnom topologijom)

A	A°	∂A	$\overline{A}$
$\langle -\infty, 1\rangle$	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\{1\}$	$\langle -\infty, 1]$
$\langle -\infty, 1]$	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\{1\}$	$\langle -\infty, 1]$
$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\{0, 1\}$	$[0, 1]$
$\langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$	$\langle 0, 1\rangle$	$\{0, 1, 2\}$	$[0, 1] \cup \{2\}$
$\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$	$\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$	$\{0, 1, 2\}$	$[0, 2]$

//

Komentar 1.20. Tipično unutrašnjost skupa zamišljamo kao njegov "mesnati" dio, oko kojeg je rub omotan kao nekakva tanka "opna". Međutim, postoji mnogi primjeri kod kojih je takav zorni prikaz pogrešan. Na primjer, skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva,

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset \,, \quad \partial\,\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki element baze $B_x = \langle a, b\rangle$ koji sadrži x, B_x siječe i skup racionalnih $\mathbb{Q}$ i skup iracionalnih brojeva $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Kako ovo vidimo? Odaberimo neki prirodan broj $n > 1/(b-a)$ i najveći cijeli broj m, takav da je $m/n \le a$. Tada je $q = (m+1)/n \in B_x \cap \mathbb{Q}$. Nadalje, iracionalni broj $s \in B_x \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ u promatranom intervalu možemo pronaći prema

$$s = \begin{cases} q + t(b-q)\,, & b \in \mathbb{Q} \\ (q+b)/2\,, & b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

gdje je $t \in \langle 0, 1\rangle \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, na primjer $t = 1/\sqrt{2}$. Primjetimo, u ovom primjeru je skup čak i sadržan u svom rubu, $\mathbb{Q} \subsetneq \partial\mathbb{Q}$! //

Sada ćemo dokazati neka osnovna svojstva koja zadovoljavaju dijelovi skupova u općenitim topološkim prostorima.

Teorem 1.21. *Unutrašnjost skupa je otvoren, a rub i zatvarač su zatvoreni skupovi.*

DOKAZ :

(a) Za svaki $x \in A^\circ$ postoji okolina sadržana u skupu A, $O_x \subseteq A$. Nadalje, vrijedi i $O_x \subseteq A^\circ$ jer je svaki $y \in O_x$ zbog $O_x \subseteq A$ element skupa A°. Odavde slijedi

$$A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} O_x$$

jer smo takvom unijom obuhvatili sve točke iz A° i nijednu točku van A°. Kako je unija otvorenih skupova otvoren skup slijedi tvrdnja.

(b) $X - \partial A = A^\circ \cup (X - A)^\circ$ je, prema a) dijelu tvrdnje, unija otvorenih skupova, pa je i sam otvoren skup, a otuda slijedi tvrdnja.

(c) $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$, a kako je, prema a) dijelu teorema $(X - A)^\circ$ otvoren skup, slijedi tvrdnja. □

Teorem 1.22. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada vrijedi*

(a) $A^\circ = A$ akko je A otvoren skup;

(b) $\overline{A} = A$ akko je A zatvoren skup;

(c) $\partial A = \emptyset$ akko je A o/z skup.

Dokaz :

(a) Ako je $A = A^\circ$, tada je prema Teoremu 1.21 A otvoren skup. Obratno, ako pretpostavimo da je A otvoren skup, tada za svaki $x \in A$ postoji okolina $O_x \subseteq A$ (konkretno, možemo uzeti $O_x = A$), pa je po definiciji $x \in A^\circ$ i stoga $A \subseteq A^\circ$. Kako uvijek vrijedi $A^\circ \subseteq A$, slijedi da je $A = A^\circ$.

(b) Ako je $A = \overline{A}$, tada je prema Teoremu 1.21 A zatvoren skup. Obratno, ako pretpostavimo da je A zatvoren skup, tada je $X - A$ otvoren skup, pa prema (a) dijelu teorema vrijedi

$$X - A = (X - A)^\circ = X - \overline{A}\,,$$

a odavde slijedi $A = \overline{A}$.

(c) Pretpostavimo da je A o/z skup. Koristeći (a) i (b) dio, slijedi $A = A^\circ$ i $A = \overline{A}$. To znači da je $\partial A = \overline{A} - A^\circ = \emptyset$. Obratno, pretpostavimo da je $\partial A = \emptyset$. Odavde slijedi $\overline{A} = A^\circ$, pa je $A \supseteq A^\circ = \overline{A}$ i stoga $A = \overline{A}$ (jer uvijek vrijedi $A \subseteq \overline{A}$). Imamo dakle, jednakost $A = \overline{A} = A^\circ$, odakle, prema Teoremu 1.21, slijedi da je A i zatvoren i otvoren skup. □

Teorem 1.23. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$.*

(a) A° je najveći *otvoren skup sadržan u A, odnosno: za svaki otvoren skup $O \subseteq A$ vrijedi $O \subseteq A^\circ$.*

(b) $\overline{A}$ je najmanji *zatvoren skup koji sadrži A, odnosno: za svaki zatvoren skup $C \supseteq A$ vrijedi $C \supseteq \overline{A}$.*

Dokaz :

(a) Neka je O otvoren skup za koji vrijedi $O \subseteq A$. Tada je za svaki $x \in O$ skup O je upravo okolina O_x iz definicije unutrašnjosti skupa A, pa je $x \in A^\circ$, otkud slijedi $O \subseteq A^\circ$.

(b) Neka je C zatvoren skup za koji vrijedi $C \supseteq A$. Prema tvrdnji iz prvog dijela teorema, vrijedi $A^\circ \subseteq A \subseteq C$, pa preostaje dokazati da je i rub skupa A nužno sadržan unutar skupa C. Neka je $x \in \partial A$. Prema definiciji ruba, svaka okolina O_x presijeca skup A, a time i skup C, pa je $x \in \overline{C} = C$. Dakle, vrijedi i $\partial A \subseteq C$, čime je dokazana tvrdnja. □

Teorem 1.24. *Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$ njegovi podskupovi. Tada vrijedi*

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad i \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.6}$$

DOKAZ :
(a) Općenito vrijedi $(A^\circ \cap B^\circ) \subseteq A^\circ \subseteq A$ i $(A^\circ \cap B^\circ) \subseteq B^\circ \subseteq B$ pa je $(A^\circ \cap B^\circ) \subseteq (A \cap B)$. Nadalje, kako je $A^\circ \cap B^\circ$ otvoren skup, slijedi $(A^\circ \cap B^\circ) \subseteq (A \cap B)^\circ$. S druge strane, za svaki $x \in (A \cap B)^\circ$ postoji okolina $O_x \subseteq A \cap B$, odnosno $O_x \subseteq A$ (iz čega slijedi $x \in A^\circ$) i $O_x \subseteq B$ (iz čega slijedi $x \in B^\circ$) pa je $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Odavde je i $(A \cap B)^\circ \subseteq (A^\circ \cap B^\circ)$, odakle slijedi tvrdnja.
(b) Iz $\overline{A} \supseteq A$ i $\overline{B} \supseteq B$ slijedi $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq A \cup B$. Kako je $\overline{A} \cup \overline{B}$ zatvoren skup, vrijedi i $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$. S druge strane, iz $\overline{A \cup B} \supseteq (A \cup B) \supseteq A$ slijedi $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A}$ (jer je $\overline{A \cup B}$ zatvoren skup) te analogno $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{B}$. To znači da je i $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, odakle slijedi tvrdnja. □

Definicija 1.25. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je **gust** u X ako vrijedi $\overline{A} = X$, odnosno akko svaki otvoren neprazan skup $O \subseteq X$ siječe skup A. Kažemo da je skup $A \subseteq X$ **nigdje gust** u X ako vrijedi $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.

Na primjer, skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$, a skup $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$. Ovdje možemo malo konkretnije uobličiti naše intuitivno očekivanje kako su rubovi skupova njihove "tanke opne", bar u slučaju otvorenih i zatvorenih skupova.

Teorem 1.26. *Neka je X topološki prostor, $O \subseteq X$ otvoren i $C \subseteq X$ zatvoren skup. Tada su rubovi ∂O and ∂C nigdje gusti skupovi.*

DOKAZ : Koristeći činjenicu da su $X - O$, C i rub bilo kojeg skupa zatvoreni skupovi, imamo

$$\left(\overline{\partial O}\right)^\circ = (\partial O)^\circ = \left(\overline{O} \cap (X - O)\right)^\circ = \left(\overline{O}\right)^\circ \cap (X - O)^\circ = \left(\overline{O}\right)^\circ \cap (X - \overline{O}) = \emptyset$$

$$\left(\overline{\partial C}\right)^\circ = (\partial C)^\circ = \left(C \cap (X - C^\circ)\right)^\circ = C^\circ \cap (X - C^\circ)^\circ \subseteq C^\circ \cap (X - C^\circ) = \emptyset$$

Ako neki skup nije ni otvoren ni zatvoren, tada njegov rub ne mora biti nigdje gust. Na primjer, za $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, rub $\partial A = \mathbb{R}$ je upravo suprotno, gust skup. □

1.4 GOMILIŠTA

Jedan od temeljnih pojmova u realnoj i kompleksnoj analizi je gomilište. Sada ćemo ga definirati u puno općenitijem kontekstu topoloških prostora.

Definicija 1.27. **Gomilište** skupa A je točka $x \in X$ za koju vrijedi: svaka okolina O_x siječe $A - \{x\}$, odnosno, svaka okolina točke x sadrži barem još jednu točku iz A različitu od same točke x. Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A'. Elemente skupa $A - A'$ zovemo **izoliranim točkama** skupa A.

Primjer|i 1.28.

- U prostoru $(X, \mathscr{T})$ s *diskretnom* topologijom svaki skup je otvoren, specijalno, skup $\{x\}$ je otvoren za svaki $x \in X$. To znači da je uvijek moguće pronaći otvoren skup koji sadrži promatranu točku i nijednu drugu, pa nijedna točka ne može biti točka gomilišta. Drugim riječima, za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $A' = \emptyset$.
- U prostoru $(X, \mathscr{T})$ s *trivijalnom* topologijom jedini neprazan otvoren skup je X. Ovdje valja razmotriti dva zasebna slučaja: ako neprazan skup A sadrži samo jednu točku x, tada su sve točke u X izuzev x gomilišta skupa (jer jedini otvoren skup, X, pored promatrane točke y uvijek sadrži i x), pa je $A' = X - \{x\}$; ako neprazan skup A sadrži više od jedne točke, tada su sve točke u X njegove točke gomilišta, $A' = X$.
- Nekoliko primjera na skupu realnih brojeva,

A	A'
$\langle 0, 1\rangle$	$[0, 1]$
$\langle 0, 1] \cup \{2\}$	$[0, 1]$
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}$

//

Komentar 1.29. Valja napomenuti kako u literaturi postoji suptilna razlika u upotrebi riječi "gomilište". Gornja definicija se odnosi na gomilišta *skupova*, prema kojoj na primjer dvočlani skup

$$S = \big\{(-1)^k \mid k \in \mathbb{N}\big\} = \{-1, 1\}$$

nema gomilišta, iako nam intuitivno izgleda kao da je niz $a_k = (-1)^k$ "nagomilan" u točkama -1 i 1. Suptilnost se sastoji u tome što smo u slučaju skupa S napravili uniju *vrijednosti* članova niza a_k, čime smo "ponavljajuće" članove pretvorili u jedan. Iz ovog razloga se koristi donekle različita definicija gomilišta *nizova*: gomilište niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je točka x čija svaka okolina sadrži beskonačno mnogo (ne nužno međusobno različitih) članova tog niza. Prema ovoj definiciji su, očigledno, točke -1 i 1 gomilišta niza $a_k = (-1)^k$. //

Teorem 1.30. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi*

$$\overline{A} = A \cup A' \tag{1.7}$$

Dokaz : Neka je $x \in A'$. Tada, prema definiciji gomilišta, svaka okolina O_x siječe skup $A - \{x\}$, a onda i sâm skup A. Prema tome, vrijedi $x \in \overline{A}$ i stoga $A' \subseteq \overline{A}$. Kako uvijek vrijedi $A \subseteq \overline{A}$ imamo sve skupa $(A \cup A') \subseteq \overline{A}$. Obratno, neka je $x \in \overline{A}$. Ako je $x \in A$, tada smo gotovi s dokazom, pa pretpostavimo suprotno, $x \notin A$. Prema definiciji zatvarača, svaka okolina O_x siječe skup A, a kako je po pretpostavci $x \notin A$, okolina O_x siječe $A - \{x\}$. Stoga, vrijedi $x \in A'$, odnosno $A' \supseteq \overline{A}$. Time smo dokazali i obratnu inkluziju, $(A \cup A') \supseteq \overline{A}$, odakle slijedi tražena tvrdnja. □

Korolar 1.31. *Skup A sadrži sva svoja gomilišta akko je zatvoren skup. Također, skup bez gomilišta ($A' = \emptyset$) je nužno zatvoren skup.*

Komentar 1.32. Izolirane točke nekog skupa *nisu nužno* elementi ruba tog skupa. Primjerice, u prostorima s diskretnom topologijom sve točke su izolirane, a nijedna ne može biti točka ruba nekog skupa. //

1.5 Potprostori

Prirodan način uvođenja novog topološkog prostora jest odabirom nekog podskupa unutar nekog postojećeg, ranije definiranog prostora, s topologijom koja će biti "nasljeđena" iz ambijentnog prostora.

Definicija 1.33. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Kažemo da smo zadali **relativnu topologiju** $\mathscr{T}_Y$ na skupu Y, ako smo definirali otvorene skupove u Y kao one koji nastaju presjekom otvorenih skupova u X sa skupom Y,

$$\mathscr{T}_Y = \{Y \cap O \mid O \in \mathscr{T}\} \tag{1.8}$$

Za skup Y s relativnom topologijom $\mathscr{T}_Y$ kažemo da je **potprostor** prostora X.

Prvo valja provjeriti da skupovi iz familije $\mathscr{T}_Y$ uistinu zadovoljavaju aksiome topologije. Trivijalno imamo $\emptyset = Y \cap \emptyset$ i $Y = Y \cap X$. Nadalje,

- za svaki $O_\alpha \in \mathscr{T}_Y$ postoji $\widetilde{O}_\alpha \in \mathscr{T}$, takav da je $O_\alpha = Y \cap \widetilde{O}_\alpha$ pa možemo pisati
$$\bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (Y \cap \widetilde{O}_\alpha) = Y \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in J} \widetilde{O}_\alpha \Big) \in \mathscr{T}_Y \ ,$$

- za konačne presjeke imamo

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcap_{i=1}^{n}(Y \cap \widetilde{O}_i) = Y \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{O}_i\Big) \in \mathscr{T}_Y \,.$$

Lema 1.34. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i $(Y, \mathscr{T}_Y)$ njegov potprostor. Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathscr{T}$, tada je familija skupova*

$$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

baza relativne topologije $\mathscr{T}_Y$ skupa Y.

Dokaz : Za svaku točku $y \in V = Y \cap O$, gdje je $O \in \mathscr{T}$, postoji element baze $B \in \mathcal{B}$, takav da vrijedi $y \in B \subseteq O$. Tada imamo $Y \cap B \in \mathcal{B}_Y$ i $y \in Y \cap B \subseteq Y \cap O$, pa iz Teorema 1.14 slijedi da je $\mathcal{B}_Y$ baza topologije $\mathscr{T}_Y$. □

Primjer|i 1.35.

- Promotrimo tri primjera potprostora skupa $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom:
  - ⋆ otvoren interval $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$; bazu njegove potprostorne topologije čine otvoreni intervali oblika $\langle 0, x\rangle$ i $\langle x, 1\rangle$, gdje je $x \in \langle 0, 1\rangle$.
  - ⋆ zatvoren interval $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$; bazu njegove potprostorne topologije čine intervali oblika $[0, x\rangle$, $\langle x, 1]$ i $\langle x, y\rangle$, gdje su $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.
  - ⋆ interval $[0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$; bazu njegove potprostorne topologije čine intervali oblika $[0, x\rangle$, $\langle x, 1\rangle$ i $\langle x, y\rangle$, gdje su $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.
- Ako je $B(p, r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvorena kugla (gdje je $n \in \mathbb{N}$), tada je njen rub n-sfera $\mathbb{S}^n = \partial B(p, r)$. Bazu potprostorne topologije 1-sfere $\mathbb{S}^1$ čine otvoreni lukovi; bazu potprostorne topologije 2-sfere $\mathbb{S}^2$ čine otvorene "kapice" (dijelovi sfere iznad ili ispod paralele); itd.

//

1.6 Povezanost

Definicija 1.36. Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je **povezan** ako se skup X ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna otvorena skupa.

Korolar 1.37. *Primjetimo, topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je povezan akko su X i $\emptyset$ jedini o/z skupovi.*

Primjer|i 1.38.

- Svi topološki prostori s trivijalnom topologijom su povezani. Svi topološki prostori s diskretnom topologijom, koji sadrže barem dva elementa, su nepovezani.
- Svi prostori $\mathbb{R}^n$ sa standardnom topologijom su povezani.
- Potprostor euklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ koji se sastoji od dva disjunktna kvadrata (s potprostornom topologijom) je nepovezan prostor.

//

Definicija 1.39. Za topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ kažemo da je **Hausdorffov prostor** ako za svake dvije različite točke $a, b \in X$ postoje disjunktne okoline O_a i O_b.

Definicija 1.40. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz točaka u X. Tada kažemo da ovaj niz **konvergira** k točki $a \in X$ ako za svaku okolinu O_a postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je $x_m \in O_a$ za svaki $m \geq N$.

Teorem 1.41. *U Hausdorffovom prostoru niz točaka može konvergirati najviše k jednoj točki. Tu točku nazivamo* **limes** *niza.*

Dokaz : Neka je $(X, \mathscr{T})$ Hausdorffov prostor. Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k točki $a \in X$, te neka je $b \in X - \{a\}$. Po pretpostavci postoje disjunktne okoline O_a i O_b. Okolina O_a sadrži sve osim konačno mnogo točaka promatranog niza, odakle slijedi da O_b sadrži konačno mnogo elemenata tog niza, pa promatrani niz ne može konvergirati u b. □

1.7 Kompaktnost

Motivacija. Pridjev "kompaktan" u neformalnom jeziku je obično sinonim s pridjevom "zbijen". Što bi neki *skup* trebao zadovoljavati pa da ga možemo zvati *kompaktnim*? Na primjer, možemo reći da je neprazan skup K kompaktan ako svaki njegov beskonačan podskup $B \subseteq K$ nužno ima gomilište u skupu K. Drugim riječima, skup K je "zbijen" pa nema mjesta za "nagurati" beskonačno elemenata u njemu bez da se oni negdje ne nagomilaju.

Promotrimo malo pobliže što ovo točno znači. Pretpostavimo da je neprazan skup K "kompaktan" (kako je to maloprije opisano) te da beskonačan podskup $B \subseteq K$ *nema* gomilište. Tada svaka točka $b \in B$ ima okolinu O_b, takvu da je $O_b \cap B = \{b\}$ (u protivnom bi bila gomilište skupa B). Osim toga, svaka točka $x \in K - B$ ima okolinu O_x disjunktnu sa skupom B (u protivnom bi bila gomilište skupa B). Dakle, konstruirali smo familiju *otvorenih* skupova

$$\mathcal{P} = \{O_b \mid b \in B\} \cup \{O_x \mid x \in K - B\}$$

koji *pokrivaju* skup K: svaki element skupa K sadržan je bar u jednom elementu familije $\mathcal{P}$. Sada želimo povezati prozaičnu "kompaktnost" s precizno definiranim matematičkim svojstvom, i to takvim da je gore opisana konstrukcija dovedena do kontradikcije (s obzirom da smo pretpostavili kako skup B nema gomilišta u skupu K). Možemo pretpostaviti da kompaktnost odgovara svojstvu da je uvijek moguće probrati *konačno* mnogo elemenata familije $\mathcal{P}$, takvih da oni i dalje pokrivaju skup K. Ovo odmah vodi na željenu kontradikciju jer bi elementi skupa B morali biti sadržani u konačno mnogo otvorenih skupova, od kojih svaki sadrži *najviše* jedan element skupa B. Možemo ovu diskusiju rezimirati u narednim definicijama i teoremu.

Definicija 1.42. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. **Pokrivač skupa** $A \subseteq X$ je familija (ne nužno otvorenih) skupova $\mathcal{P}$ čija unija sadrži A. Za pokrivač $\mathcal{P}$ kažemo da je **otvoren pokrivač** ako su mu svi elementi otvoreni skupovi. **Potpokrivač** $\widetilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ pokrivača $\mathcal{P}$ je familija skupova koja je i sama pokrivač promatranog skupa.

Komentar 1.43. Za svaki skup $A \subseteq X$ topološkog prostora $(X, \mathscr{T})$ uvijek *postoji bar jedan* otvoren pokrivač, $\mathcal{P} = \{X\}$. //

Definicija 1.44. Skup $A \subseteq X$ je **kompaktan** ako za svaki njegov *otvoren* pokrivač $\mathcal{P}$ postoji *konačan* potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}}$. Isto tako, za sam topološki prostor X kažemo da je kompaktan ako za svaki njegov *otvoren* pokrivač $\mathcal{P}$ postoji *konačan* potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Teorem 1.45. *Beskonačan podskup $B \subseteq K$ kompaktnog skupa K ima gomilište.*

Primjer|i 1.46.

- Na prostoru s trivijalnom topologijom, svaki njegov podskup je kompaktan.
- Na prostoru X s diskretnom topologijom, beskonačan skup $A \subseteq X$ ne može biti kompaktan jer otvoren pokrivač koji se sastoji od jednočlanih podskupova skupa A nema konačnog potpokrivača.
- Skup $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan jer njegov otvoren pokrivač

$$\mathcal{P} = \{\langle 1/n, 1\rangle \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

nema konačnog potpokrivača. Na sličan način možemo zaključiti kako niti jedan otvoren interval $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan skup. S druge strane, uskoro ćemo dokazati da su zatvoreni intervali $[a, b]$ kompaktni.

//

Sljedeća dva teorema pomažu u prepoznavanju kompaktnih skupova u topološkim prostorima.

Teorem 1.47. *Zatvoren podskup $A \subseteq X$ kompaktnog prostora X je kompaktan.*

DOKAZ : Promotrimo otvoren pokrivač $\mathcal{P}_A$ skupa A. Familija skupova $\mathcal{P} = \mathcal{P}_A \cup \{X - A\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog prostora X, pa postoji njegov konačan potpokrivač, $\widetilde{\mathcal{P}}$. Familija skupova $\widetilde{\mathcal{P}} - \{X - A\}$ je konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{P}_A$, odakle slijedi tvrdnja. □

Komentar 1.48. Kompaktan podskup kompaktnog prostora ne mora biti zatvoren. Promotrimo npr. skup $X = \{a, b\}$ s trivijalnom topologijom: ovo je kompaktan prostor, a njegov podskup $A = \{a\}$ je kompaktan, ali nije zatvoren! //

Teorem 1.49. *Kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.*

DOKAZ : Neka je X Hausdorffov prostor i $A \subseteq X$ njegov kompaktan podskup. Pokazat ćemo da je $X - A$ otvoren skup. Neka je $x \in X - A$. Za svaku točku $a \in A$ postoje otvorene disjunktne okoline $O_x^{(a)}$ i $U_a^{(x)}$. Familija skupova $\mathcal{P} = \{U_a^{(x)} \mid a \in A\}$ je jedan otvoren pokrivač kompaktnog skupa A, pa postoji i njegov konačan potpokrivač, $\widetilde{\mathcal{P}} = \{U_b^{(x)} \mid b \in B\}$, gdje je $B \subseteq A$ konačan podskup skupa A. Presjek

$$O_x \equiv \bigcap_{b \in B} O_x^{(b)}$$

je po konstrukciji neprazan (sadrži barem točku x) otvoren skup disjunktan sa svakim od skupova $\widetilde{\mathcal{P}}$, pa onda i s njihovom unijom. Odavde slijedi da je $O_x \cap A = \emptyset$, odnosno $O_x \subseteq (X - A)$. □

Komentar 1.50. Zatvoren podskup Hausdorffovog topološkog prostora ne mora biti kompaktan. Promotrimo skup $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom: ovo je Hausdorffov prostor, međutim, njegov podskup $[1, \infty\rangle$ je zatvoren, ali nije kompaktan jer njegov otvoren pokrivač

$$\mathcal{P} = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nema konačnog potpokrivača! //

Na sreću, u euklidskim prostorima $\mathbb{R}^n$ imamo jednostavan kriterij kompaktnosti skupova sažet u teoremu ispod, čiji dokaz iznosimo u Dodatku G.

Definicija 1.51. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **omeđen** ako je moguće obuhvatiti otvorenom kuglom konačnog radijusa, odnosno ako postoji $p \in \mathbb{R}^n$ i realan broj $r > 0$, takav da je $A \subseteq B(p, r)$.

Teorem 1.52 (Heine-Borel). *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan akko je zatvoren i omeđen.*

Primjer|i 1.53. Upotrebom Heine-Borelovog teorema odmah vidimo da su zatvoreni segmenti $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni dok, primjerice, intervali oblika $\langle a, b\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$ ili $[a, +\infty\rangle$ nisu. Također svaka n-sfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je kompaktan skup. //

1.8 Neprekidna preslikavanja

Motivacija. Želimo proširiti "ϵ-δ" definiciju neprekidnosti realnih funkcija na definiciju neprekidnosti općenitih funkcija među topološkim prostorima. Promotrimo za početak $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Kažemo da je f neprekidna ako vrijedi

$$(\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^m)(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \; : d_{\mathbb{R}^m}(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(x_0)) < \epsilon \,,$$

gdje su $d_{\mathbb{R}^m}$ i $d_{\mathbb{R}^n}$ euklidske udaljenosti na $\mathbb{R}^m$, odnosno $\mathbb{R}^n$. Definiciju možemo malo pojednostaviti skupovnim zapisom, korištenjem otvorenih kugli,

$$(\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^m)(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \; : B^m(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B^n(f(x_0), \epsilon)) \,.$$

Primjetimo, ova definicija nam govori kako je praslika $f^{-1}(B^n(s, r))$ svake otvorene kugle sa središtem u $s \in \mathbb{R}^n$ i radijusom $r > 0$ nužno otvoren skup. Naime, ako je $x_0 \in f^{-1}(B^n(s, r))$, tada je po definiciji $f(x_0) \in B^n(s, r)$, a to znači da postoji $\epsilon > 0$ za koji vrijedi $B^n(f(x_0), \epsilon) \subseteq B^n(s, r)$. Stoga, prema definiciji neprekidnosti, postoji $\delta > 0$, takav da je

$$B^m(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B^n(f(x_0), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(B^n(s, r)) \,.$$

Stoga, skup $f^{-1}(B^n(s, r))$ je otvoren u standardnoj topologiji euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$.

Nadalje, kako su otvorene kugle baza topologije u kodomeni, svaki otvoreni skup $O \subseteq \mathbb{R}^n$ možemo pisati u obliku

$$O = \bigcup_{y \in O} B^n(y, r_y) \,,$$

gdje je $r_y > 0$ takav radijus za koji vrijedi $B^n(y, r_y) \subseteq O$. Stoga, ako je f neprekidna funkcija, tada će skup

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{y \in O} f^{-1}(B(y, r_y))$$

nužno biti otvoren, jer je unija otvorenih skupova. Obrat vrijedi odmah: ako je $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takva funkcija da je za svaki otvoren skup $V \subseteq \mathbb{R}^n$ praslika $f^{-1}(V)$ opet otvoren skup, tada to specijalno vrijedi i za otvorene kugle, $V = B^n(f(x_0), \epsilon)$. Ponukani ovakvom reformulacijom početne definicije neprekidnosti, kod općenitih topoloških prostora imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.54. Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **neprekidno** ako je skup $f^{-1}(O)$ otvoren u X za svaki otvoren skup $O \subseteq Y$.

Komentar 1.55. Je li neko preslikavanje neprekidno ovisi o topologijama na domeni i kodomeni. Promotrimo, na primjer, slučaj kada je $Y = X$. Ako je $\mathscr{T}_X$ diskretna topologija, tada su *sva* preslikavanja $f : X \to X$ neprekidna. Nasuprot tome, ako je $\mathscr{T}_X$ trivijalna, a $\mathscr{T}_Y$ neka netrivijalna topologija (pretpostavimo da X ima više od jednog elementa), tada primjerice niti identitet $\mathrm{id} : X \to X$ nije neprekidno preslikavanje! //

Komentar 1.56. Možemo se zapitati zašto je u Definiciji 1.54 korišten *inverz* preslikavanja? Pretpostavimo da smo u Definiciji 1.54 zamjenili "$f^{-1}(O)$" s "$f(O)$" i promotrimo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Prema uobičajenoj definiciji ovo je neprekidno preslikavanje. Međutim, $f(\langle -1, 1\rangle) = [0, 1\rangle$ nije otvoren skup, pa prema "modificiranoj definiciji" ovo ne bi bilo neprekidno preslikavanje. Poanta je da inverz ima "bolje" ponašanje s obzirom na uniju i presjek skupova. //

Definicija 1.57. Neprekidnost je moguće definirati i *lokalno*: kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **neprekidno u točki** $a \in X$ ako za svaku okolinu $U_{f(a)} \subseteq Y$ postoji okolina $O_a \subseteq X$ za koju vrijedi $f(O_a) \subseteq U_{f(a)}$.

Možemo li povezati ovu, lokalnu, i početnu definiciju neprekidnosti?

Lema 1.58. *Neka su $(X, \mathscr{T}_X)$ i $(Y, \mathscr{T}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno akko je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.*

Dokaz : Pretpostavimo da je f neprekidno preslikavanje. Tada je za svaku točku $a \in X$ i svaku okolinu $O_{f(a)} \subseteq Y$ skup $f^{-1}(O_{f(a)}) \subseteq X$ okolina točke a. To znači da postoji okolina $O_a \subseteq f^{-1}(O_{f(a)})$, pa je $f(O_a) \subseteq O_{f(a)}$. Obratno, pretpostavimo da za svaku točku $a \in X$ i svaku okolinu $O_{f(a)} \subseteq Y$ postoji okolina $O_a \subseteq X$ za koju vrijedi $f(O_a) \subseteq O_{f(a)}$. Pitamo se da li je $f^{-1}(O_{f(a)})$ nužno otvoren skup? Za svaki $b \in f^{-1}(O_{f(a)})$ vrijedi $f(b) \in O_{f(a)}$, pa postoji okolina $O_{f(b)} \subseteq O_{f(a)}$. Nadalje, po pretpostavci postoji i okolina $O_b \subseteq X$, takva da je $f(O_b) \subseteq O_{f(b)}$, a onda i $f(O_b) \subseteq O_{f(a)}$. Odavde slijedi $O_b \subseteq f^{-1}(O_{f(a)})$, pa je $f^{-1}(O_{f(a)})$ otvoren skup. □

Teorem 1.59. *Ako su $f, g : X \to Y$ neprekidna preslikavanja iz nepraznog topološkog prostora X u neprazni Hausdorffov prostor Y, tada je skup*

$$A = \{a \in X \mid f(a) = g(a)\}$$

zatvoren u X. Nadalje, ako je $S \subseteq A$ gust podskup prostora X, tada vrijedi $f(x) = g(x)$ za sve $x \in X$.

Dokaz : (a) Ako je $A = X$, tada tvrdnja odmah slijedi. Pretpostavimo stoga da je $X - A$ neprazan skup, te promotrimo $b \in X - A$. Želimo pokazati da je $X - A$ otvoren skup, odnosno da svaka njegova točka ima okolinu disjunktnu sa skupom A. Kako je $f(b) \neq g(b)$, a Y je po pretpostavci Hausdorffov prostor, tada postoje disjunktne okoline $U_{f(b)}$ i $V_{g(b)}$. Preslikavanja f i g su neprekidna, pa su $O_b = f^{-1}(U_{f(b)})$ i $Q_b = g^{-1}(V_{g(b)})$ dvije okoline točke b. Konačno, njihov presjek $O_b \cap Q_b$ je okolina točke b disjunktna sa skupom A, jer za svaki $c \in O_b \cap Q_b$ vrijedi $f(c) \in U_{f(b)}$ i $g(c) \in V_{g(b)}$, te stoga $f(c) \neq g(c)$.

(b) Kako je A zatvoren skup, prema Teoremu 1.23 vrijedi i $\overline{S} \subseteq A$. Po pretpostavci je $\overline{S} = X$, odakle slijedi $A = X$. □

Na primjer, ako imamo dva neprekidna preslikavanja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja se preklapaju na skupu $\mathbb{Q}$, tada su ona nužno identična preslikavanja na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

U analizi se obično obrađuju dva klasična teorema, teorem o međuvrijednostima (engl. intermediate value theorem) i teorem o postojanju ekstrema (engl. maximum value theorem). Valjanost prvog ovisi o povezanosti, a valjanost drugog o kompaktnosti prostora.

Lema 1.60. *Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je*

(a) X povezan, tada je i $f(X)$ povezan prostor;

(b) $A \subseteq X$ kompaktan skup, tada je i $f(A)$ kompaktan skup.

Dokaz :

(a) Ako je $f(X)$ nepovezan prostor, tada ga možemo napisati kao uniju dva disjunktna otvorena skupa, $f(X) = A \cup B$. Nadalje, vrijedi i $X = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, gdje su $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ disjuktni neprazni skupovi. Kako je po pretpostavci f neprekidno preslikavanje, ovi skupovi su otvoreni, pa je X nepovezan prostor. Dakle, ako je X povezan prostor, prostor $f(X)$ ne može biti nepovezan.

(b) Pretpostavimo da je $A \subseteq X$ kompaktan skup i neka je $\mathcal{P}$ otvoren pokrivač skupa $f(A)$. Kako je f neprekidno preslikavanje, skup $f^{-1}(O)$ je otvoren za svaki $O \in \mathcal{P}$, pa je familija skupova $\{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{P}\}$ otvoren pokrivač skupa A. Po pretpostavci, A je kompaktan skup, pa postoji konačan potpokrivač $\{f^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{P}\}$. Time je konstruiran konačan potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}} = \{O_i\}$ pokrivača $\mathcal{P}$, čime smo dokazali da je $f(A)$ kompaktan skup. □

Teorem 1.61 (Teorem o međuvrijednostima). *Neka je X povezan prostor, a $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako su $a, b \in X$, te $s \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $f(a) < s < f(b)$, tada postoji $c \in X$, takav da je $f(c) = s$.*

Dokaz : Pretpostavimo da vrijede pretpostavke iz Teorema. Tada su skupovi

$$A = f(X) \cap \langle -\infty, s\rangle \quad \text{i} \quad B = f(X) \cap \langle s, \infty\rangle$$

disjunktni i neprazni jer jedan sadrži $f(a)$, a drugi $f(b)$. Nadalje, skupovi A i B su otvoreni u $f(X)$ jer su definirani presjekom sa zrakama. Kako je f neprekidno preslikavanje, a X povezan prostor, prema Lemi 1.60 slijedi da je i $f(X)$ povezan prostor. Ako ne bi postojala točka $c \in X$, takva da je $f(c) = s$ tada bi $f(X)$ bio unija skupova A i B, odnosno nepovezan prostor, što je u kontradikciji s pretpostavkama! □

Teorem 1.62 (Weierstraß; postojanje ekstrema na kompaktu). *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako je X kompaktan, onda postoje $a, b \in X$, takvi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za sve $x \in X$.*

Dokaz : Pretpostavimo da $f(X)$ nema maksimum. Tada je familija skupova

$$\mathcal{P} = \{\langle -\infty, f(x)\rangle \mid x \in X\}$$

otvoren pokrivač od $f(X)$, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{\langle -\infty, f(x_1)\rangle, \ldots, \langle -\infty, f(x_n)\rangle\}$$

Međutim, element $\max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ nije pokriven nijednim od skupova u ovom potpokrivaču, što kontradikcija s pretpostavkom da je posrijedi pokrivač! To znači da postoji $a \in X$, takav da je $f(a) \geq f(x)$ za svaki $x \in X$. Analogno se pokaže postojanje minimuma. □

Primjer|i 1.63.

Možemo se poslužiti sljedećim slikovitim primjerom: pretpostavimo da je temperatura na površini Zemlje Z zadana neprekidnim preslikavanjem $T : Z \to \mathbb{R}$. Neovisno o tome da li plohu Z aproksimiramo sferom, elipsoidom ili "krumpirolikim" geoidom, posrijedi je uvijek povezan kompaktan prostor. Prema Teoremu 1.62 znamo da na površini Zemlje u svakom trenutku postoji (barem jedna) točka s maksimalnom temperaturom $T_{\max}$ i (barem jedna) točka s minimalnom temperaturom $T_{\min}$. Nadalje, prema Teoremu 1.61, temperatura na površini Zemlje u svakom trenutku poprima sve vrijednosti iz intervala $[T_{\min}, T_{\max}]$. //

Primjer|i 1.64.

Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan povezan kompaktan podskup na kojem integriramo neprekidnu funkciju $f : K \to \mathbb{R}$, tada prema teoremu 1.62 znamo da postoji točka $x_0 \in K$ u kojoj funkcija f poprima minimalnu, odnosno točka $x_1 \in$

K u kojoj funkcija f poprima maksimalnu vrijednost na skupu K te, prema svojstvima integrala, vrijedi ograda

$$\mathrm{vol}(K) \cdot f(x_0) \leq \int_K f \, \mathrm{d}^n r \leq \mathrm{vol}(K) \cdot f(x_1)$$

Podijelimo li nejednakosti s $\mathrm{vol}(K)$ imamo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K f \, \mathrm{d}^n r \leq f(x_1)$$

Prema teoremu 1.61 funkcija f poprima sve vrijednosti na segmentu $[f(x_0), f(x_1)]$ pa postoji točka $a \in K$ za koju vrijedi

$$f(a) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K f \, \mathrm{d}^n r \,,$$

odnosno

$$\int_K f \, \mathrm{d}^n r = f(a) \cdot \mathrm{vol}(K) \,.$$

//

1.9 Homeomorfizmi

Motivacija. Osnovni alat za bilo koju klasu objekata je kriterij uspoređivanja tih objekata. Konkretno, moramo se odlučiti što to znači da su dva zadana objekta *jednaka*. Kada su posrijedi skupovi, reći ćemo da su jednaki (ekvipotentni) ako postoji bijekcija među njima. Ako je na skupu definirana i neka dodatna struktura, kod izjednačavanja objekata ćemo tražiti postojanje bijekcije koja *čuva* zadanu strukturu (u smislu da tu bijekciju možemo promatrati kao puko preimenovanje elemenata, pri čemu se u zadanoj strukturi ništa bitno ne mijenja). Kod algebarskih struktura (grupa, polja, vektorskih prostora) imamo razne izomorfizme. Kod topoloških prostora ćemo uz bijekciju tražiti da je ona i neprekidna jer neprekidne bijekcije čuvaju svojstvo otvorenosti skupova.

Definicija 1.65. Neka su X i Y topološki prostori. Za bijekciju $\phi : X \to Y$ kažemo da je **homeomorfizam** ako su ϕ i njen inverz, $\phi^{-1} : Y \to X$, neprekidna preslikavanja.

Komentar 1.66. Neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ ne mora nužno biti homeomorfizam. Jedan protuprimjer je bijekcija $f : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$, gdje je $\mathscr{T}_1$ neka netrivijalna, a $\mathscr{T}_2$ trivijalna topologija na nepraznom skupu X; preslikavanje f jest, ali f^{-1} nije neprekidno preslikavanje! Drugi, nešto opipljiviji primjer je neprekidna bijekcija $f : P \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, definirana na potprostoru $P = [0, 2\pi\rangle \subseteq \mathbb{R}$ preko $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Skup $[0, a\rangle$ je otvoren za svaki $a \in P$, ali $f([0, a\rangle)$ nije otvoren podskup jedinične kružnice $\mathbb{S}^1$, pa inverz f^{-1} nije neprekidno preslikavanje. //

Sljedeća tvrdnja odmah slijedi iz osnovnih svojstava bijekcija i neprekidnih preslikavanja.

Korolar 1.67. *"Biti homeomorfan" je relacija ekvivalencije.*

Definicija 1.68. Za neko svojstvo topološkog prostora $(X, \mathscr{T})$ kažemo da je **topološko** ako ga čuvaju homeomorfizmi. Drugim riječima, svojstva koja dijele homeomorfni topološki prostori zovemo *topološkim svojstvima* i njih koristimo za "obilježavanje" klasa ekvivalencije relacije homeomorfnosti.

Primjer|i 1.69. Niz svojstava topoloških prostora koje smo do sada sreli su topološka svojstva, npr. Hausdorffost, povezanost i kompaktnost. S druge strane, definiramo li udaljenost među točkama (po uzoru na euklidski prostor $\mathbb{R}^n$), ona općenito neće biti topološko svojstvo. //

Komentar 1.70. Pravac $\mathbb{R}$ i kružnica $\mathbb{S}^1$ sa standardnim topologijama *nisu* homeomorfni prostori (ovo vidimo jer je, primjerice, pravac nekompaktan, a kružnica kompaktan prostor), ali svejedno postoji bijekcija među njima. Ovu bijekciju možemo konstruirati narednim postupkom: stereografska projekcija uspostavlja bijekciju između pravca i kružnice bez točke $T \in \mathbb{S}^1$ iz koje vršimo projekciju; kako bi "oslobodili" jednu točku na pravcu u koju će se preslikati T, možemo se poslužiti preslikavanjem $n \mapsto n+1$ na $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$. //

1.10 Rekonstrukcija topoloških prostora

Jednostavno praktično pitanje jest kako konstruirati nove topološke prostore rastavljenjem i spajanjem ranije definiranih. Ovdje ćemo izložiti dva klasična, najčešće korištena postupka.

Kartezijev produkt

Definicija 1.71. Neka su $(X, \mathscr{T}_X)$ i $(Y, \mathscr{T}_Y)$ topološki prostori. Tada na njihovom Kartezijevom produktu $X \times Y$ definiramo tzv. **produktnu topologiju**, generiranu bazom

$$\mathcal{B}_{X\times Y} = \{O \times U \mid O \in \mathscr{T}_X \,,\, U \in \mathscr{T}_Y\} \ .$$

Primjer|i 1.72. Kartezijev produkt euklidskih prostora $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ homeomorfan je s euklidskim prostorom $\mathbb{R}^{m+n}$ preko bijekcije

$$((x^1, \dots, x^m), (y^1, \dots, y^n)) \leftrightarrow (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots y^n)$$

Kartezijev produkt dvije kružnice $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ homeomorfan je s torusom $\mathbb{T}^2$. //

Teorem 1.73. *Neka su X i Y topološki prostori. Prostor $X \times Y$ s produktnom topologijom je*

(a) povezan akko su X i Y povezani prostori,

(b) Hausdorffov akko su X i Y Hausdorffovi prostori,

(c) kompaktan akko su X i Y kompaktni prostori.

Kvocijentni prostori

Svaka relacija ekvivalencije $\sim$ na nekom nepraznom skupu X definira njegovu particiju, razdjeljivanje u klase ekvivalencije koje se sastoje od elemenata koji su međusobno u relaciji. Kvocijentni skup $X/\sim$ je skup klasa ekvivalencije

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}, \tag{1.9}$$

i intuitivno ga možemo predočiti kao skup nastao "stapanjem" elemenata klasa početnog skupa. Ovdje možemo definirati kanonsku projekciju $\pi : X \to X/\sim$ s $\pi(x) = [x]$. Ako je početni skup X topološki prostor, zanima nas kako na kvocijentnom skupu pronaći definiciju topologije koja je na određeni način naslijeđena od početne topologije. Prirodan odabir će biti onaj uz koju je projekcija π neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.74. Neka je $(X, \mathscr{T}_X)$ topološki prostor, $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu X te $X/\sim$ pripadni kvocijentni skup s projekcijom $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$. Tada definiramo **kvocijentni prostor** $(X/\sim, \mathscr{T}_{X/\sim})$ s topologijom

$$\mathscr{T}_{X/\sim} = \left\{ O \subseteq X/\sim \;\mid \pi^{-1}(O) \in \mathscr{T}_X \right\}$$

Provjera svojstava topologije temelji se na jednakostima

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} O_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} \pi^{-1}(O_\alpha), \quad \pi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}(O_i).$$

Primjer|i 1.75. **Projektivni prostori**. Ako na skupu $\mathbb{R}^n - \{0\}$ definiramo relaciju ekvivalencije $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ koja vrijedi akko je $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, tada kvocijentni prostor

$$\mathbb{RP}^{n-1} \equiv (\mathbb{R}^n - \{0\})/\sim$$

zovemo **realni projektivni prostor**. Ekvivalentno, na sferi $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ možemo definirati relaciju ekvivalencije $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ koja vrijedi akko je $\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{b}$ pa je rezultantni kvocijentni prostor $\mathbb{S}^n/\sim$ homeomorfan s $\mathbb{RP}^n$. Analogno definiramo **kompleksne projektivne prostore** $\mathbb{CP}^n$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, kao i **kvaternionske projektivne prostore** $\mathbb{HP}^n$ nad prstenom kvaterniona $\mathbb{H}$. //

Teorem 1.76. *Neka je X topološki prostor i $\sim$ neka relacija ekvivalencije na njemu. Ako je X kompaktan, tada je i $X/\sim$ kompaktan topološki prostor. Ako je X povezan, tada je i $X/\sim$ povezan topološki prostor.*

DOKAZ : Projekcija π je po konstrukciji neprekidno preslikavanje i vrijedi $\pi(X) = X/\sim$, pa su tvrdnje u teoremu direktne posljedice Leme 1.60. □

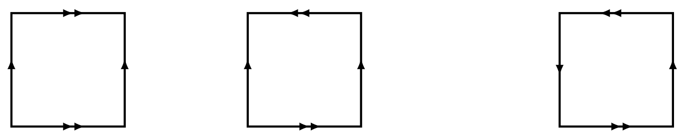
Komentar 1.77. Ako je X Hausdorffov prostor, tada kvocijentni prostor $X/\sim$ *ne mora* biti Hausdorffov prostor. Uzmemo li, na primjer, skup $X = \mathbb{R} \times \{-1, +1\}$ s produktnom topologijom, i na njemu definiramo realciju ekvivalencije $(x,t) \sim (x',t')$ akko $x = x' < 0$, tada kvocijentni prostor $X/\sim$ neće biti Hausdorffov (slikovito, imamo dvije realne linije koje smo "slijepili" na negativnim koordinatama). //

Primjer|i 1.78. Specijalno, ako želimo stopiti samo točke nekog odabranog nepraznog podskupa $A \subseteq X$, tada možemo upotrijebiti relaciju ekvivalencije $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x, y \in A$. U ovom slučaju kvocijentni skup obično obilježavamo s X/A, i on je ekvipotentan s unijom $(X - A) \cup \{[a]\}$, gdje je $a \in A$. Na primjer, slijepimo li točke ruba diska $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dobit ćemo topološki prostor homeomorfan 2-sferi $\mathbb{S}^2$. //

Komentar 1.79. Valja uočiti kako topološki kvocijent općenito označava nešto različito od, primjerice, kvocijenta grupa. Na primjer, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ u topologiji je "buket", dok je $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kao kvocijentna grupa homeomorfna kružnici $\mathbb{S}^1$. //

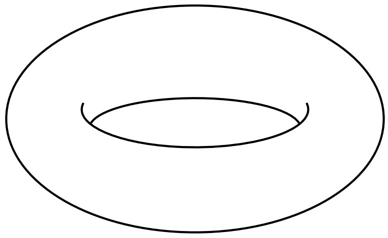
Primjer|i 1.80. Identifikacijom određenih bridova kvadrata možemo konstruirati standardne primjere topoloških prostora. Na crtežima ispod naznačeno je nekoliko takvih konstrukcija, gdje strelice sugeriraju postupak identificiranja točaka.

(a) plašt cilindra (b) Möbiusova vrpca

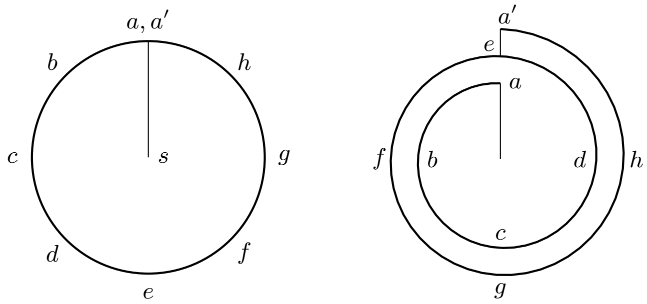


(c) torus $\mathbb{T}^2$ (d) Kleinova boca K (e) projektivna sfera $\mathbb{RP}^2$

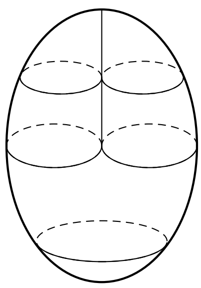
//



Ceci n'est pas un tore. Torus $\mathbb{T}^2$, smješten u euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ i projiciran na stranicu ove knjige.



Konstrukcija projektivne sfere $\mathbb{RP}^2$. Namjera nam je identificirati nasuprotne točke (na primjer, ae, bf, cg i dh) na obodu diska. Krug razrežemo duž jednog radijusa, potom jedan radijus (na primjer sa) držimo fiksnim dok drugi rotiramo dva puna kruga. Na kraju možemo izvršiti identifikaciju navedenih točaka, pri čemu će prilikom identifikacije točaka aea' doći do samopresjecanja plohe koju konstruiramo.



Projektivna sfera $\mathbb{RP}^2$ smještena u euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ (uz samopresejcanje) i projicirana na stranicu ove knjige.

1.11 Topološke grupe

Definicija 1.81. **Topološka grupa** je grupa $(G, \cdot)$ na kojoj je definirana topologija, takva da su operacije grupnog produkta $G \times G \to G$ (gdje je na skupu $G \times G$ definirana produktna topologija), $(g, h) \mapsto gh$, i inverz $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, neprekidna preslikavanja.

Primjer|i 1.82. Bilo koja grupa s diskretnom topologijom je topološka grupa. Svaka grupa $(\mathbb{R}^n, +)$, gdje je na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ zadana standardna topologija, je topološka grupa. //

Definicija 1.83. Neka su G i H topološke grupe. Kažemo da je preslikavanje $\phi : G \to H$

- **homomorfizam topoloških grupa** ako je neprekidno preslikavanje i grupni homomorfizam;
- **izomorfizam topoloških grupa** ako je homeomorfizam i grupni izomorfizam.

Definicija 1.84. Neka je $(G, \cdot)$ topološka grupa. Za svaki element $a \in G$ definiramo dva homomorfizma: **lijevu translaciju** $L_a : G \to G$, s $L_a(g) = a \cdot g$, i **desnu translaciju** $R_a : G \to G$, s $R_a(g) = g \cdot a$.

Definicija 1.85. Neka je $(G, \cdot)$ topološka grupa. Za sve podskupove $A, B \subseteq G$ i element $g \in G$ definiramo skupove

$$gA \equiv L_g A = \{g \cdot a \mid a \in A\}\,, \quad Ag \equiv R_g A = \{a \cdot g \mid a \in A\}\,, \tag{1.10}$$

$$A^{-1} \equiv \{a^{-1} \mid a \in A\}\,, \quad AB \equiv \{a \cdot b \mid a \in A\,,\ b \in B\}\,. \tag{1.11}$$

Dokaz narednog teorema je ostavljen za vježbu.

Teorem 1.86. *Neka je $(G, \cdot)$ topološka grupa, $g \in G$, $O \subseteq G$ otvoren podskup, $C \subseteq G$ zatvoren podskup, a $A, B \subseteq G$ bilo kakvi podskupovi. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $A^{-1} \subseteq B^{-1} \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; gA \subseteq gB$*;*

(b) AO*,* OA *i* O^{-1} *su otvoreni podskupovi;*

(c) gC*,* Cg *i* C^{-1} *su zatvoreni podskupovi.*

Dodatna literatura

- [Cro05], relativno kraći uvod u opću topologiju, s poglavljima o homotopiji i homologiji
- [Mun00], standardna referenca s opširnijim i detaljniji pregledom opće topologije u prvoj polovici udžbenika
- [HS88], stari klasik iz opće topologije

Zadaci

1. Koliko različitih topologija je moguće definirati na skupovima od 2 i 3 elementa?
2. Neka je $\{\mathscr{T}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ familija topologija na skupu X. Dokažite da je tada i njihov presjek $\bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ topologija na skupu X, ali njihova unija $\bigcup_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ to ne mora biti.
3. Ako je O otvoren, a C zatvoren skup, dokažite da je tada $O - C$ otvoren, a $C - O$ zatvoren skup.
4. Zadan je skup X s beskonačno mnogo elemenata i na njemu topologija u kojoj su otvoreni skupovi svi oni koji sadrže beskonačno mnogo elemenata. Dokažite da je ovo diskretna topologija.
5. Može li navesti primjer presjeka *beskonačno* mnogo međusobno različitih otvorenih skupova koji je otvoren skup?
6. Na nepraznom skupu X zadana je topologija $\mathscr{T}_\mathcal{B}$ generirana bazom $\mathcal{B}$. Ako je na skupu X definirana druga baza $\mathcal{B}'$ sa svojstvom da za svaki $a \in B \in \mathcal{B}$ postoji $B' \in \mathcal{B}'$, takav da je $a \in B' \subseteq B$ i, obratno, za svaki $a \in B' \in \mathcal{B}'$ postoji $B \in \mathcal{B}$, takav da je $a \in B \subseteq B'$, tada je $\mathscr{T}_{\mathcal{B}'} = \mathscr{T}_\mathcal{B}$. Navedite nekoliko različitih baza koje generiraju standardnu topologiju na $\mathbb{R}^n$.
7. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Kako izgledaju unutrašnjosti, rubovi i zatvarači skupova u X, ako je $\mathscr{T}$ (a) trivijalna ili (b) diskretna topologija?
8. Dokažite da skupovi racionalnih i iracionalnih brojeva nisu niti otvoreni niti zatvoreni podskupovi skupa realnih brojeva (sa standardnom topologijom).
9. Neka su A i B disjunktni, a B otvoren skup. Dokažite da je tada $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

10. Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$ njegovi podskupovi. U kakvom su odnosu skupovi $(A \cup B)^\circ$ i $A^\circ \cup B^\circ$? U kakvom su odnosu skupovi $(A - B)^\circ$ i $A^\circ - B^\circ$? U kakvom su odnosu skupovi $\overline{A \cap B}$ i $\overline{A} \cap \overline{B}$? U kakvom su odnosu skupovi $\overline{A - B}$ i $\overline{A} - \overline{B}$?

11. Ako dva skupa imaju jednake zatvarače, $\overline{A} = \overline{B}$, moraju li imati i jednake rubove, $\partial A = \partial B$?

12. Dokažite da $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ povlači $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$. Pokažite primjerom da obrat općenito ne vrijedi.

13. Neka je $\mathbb{Q} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Ako je A zatvoren skup, je li nužno $A = \mathbb{R}$? Ako je A otvoren skup, je li nužno $A = \mathbb{R}$?

14. Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Dokažite sljedeće tvrdnje,

    (a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

    (b) $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A' \subseteq B'$

    (c) $(\forall\, a \in A') :\ (A - \{a\})' = A'$

15. Kako izgledaju gusti skupovi u prostoru X s (a) trivijalnom ili (b) diskretnom topologijom?

16. Dokažite da je unija dva nigdje gusta skupa nigdje gust skup.

17. Dokažite da je zatvoren nigdje gust skup rub otvorenog skupa.

18. Ako je $A \subseteq Y \subseteq X$, gdje je Y potprostor topološkog prostora X, tada ćemo koristiti posebne oznake kako bi smo istaknuli na koji prostor, odnosno koju topologiju, se misli kada govorimo o nekom dijelu skupa: $\mathrm{Int}_X(A)$, odnosno $\mathrm{Int}_Y(A)$ za unutrašnjosti; $\partial_X(A)$, odnosno $\partial_Y(A)$ za rubove; $\mathrm{Cl}_X(A)$, odnosno $\mathrm{Cl}_Y(A)$ za zatvarače skupa A. Tada za unutrašnjost svakog skupa $A \subseteq Y \subseteq X$ s obzirom na ove topologije vrijedi $\mathrm{Int}_X(A) \subseteq \mathrm{Int}_Y(A)$. Navedite primjer u kojem je $\mathrm{Int}_X(A) \neq \mathrm{Int}_Y(A)$. Vrijedi $\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Cl}_X(A)$.

19. Dokažite da je topološki prostor povezan akko svaki njegov pravi neprazan podskup ima neprazan rub.

20. Neka je $(X, \mathscr{T})$ beskonačan Hausdorffov prostor. Dokažite da postoji beskonačna familija disjunktnih otvorenih skupova u X.

21. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je K kompaktan, a Z zatvoren skup, tada je $K \cap Z$ kompaktan skup.

22. Neka je A kompaktan podskup Hausdorffovog prostora X. Dokažite da je tada i A' kompaktan skup.

23. Dokažite da je skup $\mathbb{R}$ u topologiji Zariskog kompaktan prostor.

24. Neka su $A, B \subseteq X$ kompaktni podskupovi topološkog prostora X. Dokažite da je tada i $A \cup B$ kompaktan skup. Nadalje, ako je X Hausdorffov prostor, dokažite da je tada i $A \cap B$ kompaktan skup.

25. Dokažite da je preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno akko je skup $f^{-1}(C)$ zatvoren u X za svaki skup C zatvoren u Y.

26. Pronađite primjer preslikavanja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje je neprekidno samo u točkama $x \in \mathbb{Z}$.

27. Pretpostavimo da je preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno u točki $a \in X$. Da li je za svaku okolinu $O_{f(a)} \subseteq Y$ skup $f^{-1}(O_{f(a)})$ nužno otvoren u X?

28. Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje, te $a \in X$ gomilište skupa $A \subseteq X$. Da li je $f(a)$ nužno gomilište skupa $f(A)$? A što ako je f injektivno neprekidno preslikavanje?

29. Neka su X i Y topološki prostori, $f : X \to Y$ homeomorfizam, te $A \subseteq X$. Dokažite da su tada $f(A^\circ)$, $f(\partial A)$ i $f\big(\overline{A}\big)$, redom, unutrašnjost, rub i zatvarač skupa $f(A)$.

30. Neka je $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sfera koja predstavlja površinu Zemlje, a neprekidno preslikavanje $T : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ njena temperatura. Dokažite da u svakom trenutku postoji barem jedan par antipodalnih točaka koje imaju jednaku temperaturu. Možemo li poopćiti zaključak za plohe koje nisu "idealne" sfere?

31. Neka je X povezan topološki prostor. Za točku $p \in X$ kažemo da je *točka prerezišta* ("cut point") akko je $X - \{p\}$ nepovezan prostor. Ako je $f : X \to Y$ homeomorfizam, tada je $p \in X$ točka prerezišta akko je $f(p) \in Y$ točka prerezišta. Koristeći ovu informaciju usporedite $[0, 1]$, $\langle 0, 1]$ i $\langle 0, 1\rangle$.

32. Dokažite da su $\mathbb{RP}^n$ i $\mathbb{CP}^n$ kompaktni prostori.

33. Neka je $(G, \cdot)$ grupa na kojoj je definirana topologja, takva da je preslikavanje $G \times G \to G$, $gh \mapsto gh^{-1}$ neprekidno. Dokažite da je ovaj objekt topološka grupa.

34. Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Za podskup $S \subseteq G$ kažemo da je *simetričan* ako vrijedi $S = S^{-1}$. Dokažite da je za svaki neprazan otvoren skup $O \subseteq G$ skup OO^{-1} simetrična okolina jediničnog elementa e. Nadalje, dokažite da za svaku okolinu jediničnog elementa O_e postoji simetrična okolina V_e za koju vrijedi $V_eV_e \subseteq O_e$.

2

Mnogostrukosti

2.1 Topološke mnogostrukosti

Motivacija. Općeniti topološki prostori obiluju s patološkim primjerima. S druge strane, među topološkim prostorima možemo izdvojiti one s posebno "lijepim" svojstva, za koje će se pokazati da su iznmno korisni, kako u fizici tako i u matematici. Za početak, zanimaju nas topološki prostori koji *lokalno izgledaju* poput $\mathbb{R}^n$. S alatima koje smo razvili u prethodnom poglavlju sada ovo možemo precizno formulirati.

Definicija 2.1. Za topološki prostor X kažemo da je **lokalno euklidski prostor dimenzije** $m \in \mathbb{N}_0$ ako za svaki $x \in X$ postoji okolina $O_x \subseteq X$ homeomorfna s otvorenim podskupom prostora $\mathbb{R}^m$. **Karta** je uređen par (O, ϕ) otvorenog skupa $O \subseteq X$ i homeomorfizma $\phi : O \to U \subseteq \mathbb{R}^m$.

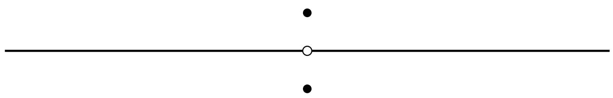
Drugim riječima, karta nam omogućuje "koordinatizaciju" u kojoj svakoj točki na otvorenom skupu prostora pridjeljujemo uređenu m-torku brojeva (koordinata).

Definicija 2.2. **Topološka m-mnogostrukost** M je Hausdorffov lokalno euklidski topološki prostor dimenzije $m \in \mathbb{N}_0$ s prebrojivom bazom.

Primjer|i 2.3. Euklidski prostor $\mathbb{R}^m$ je kanonski primjer m-mnogostrukosti (specijalno, 0-dimenzionalna mnogostrukost $\mathbb{R}^0$ sastoji se od jedne točke). Kao prebrojivu bazu možemo odabrati otvorene kugle čije su koordinate središta i radijusi racionalni brojevi. Kružnica $\mathbb{S}^1$ je 1-mnogostrukost, a sfera $\mathbb{S}^2$ 2-mnogostrukost. //

Komentar 2.4. Mnogostrukosti moraju imati konzistentnu dimenziju pa, primjerice, disjunktna unija euklidskih prostora $\mathbb{R}^1$ i $\mathbb{R}^2$ *nije* mnogostrukost. //

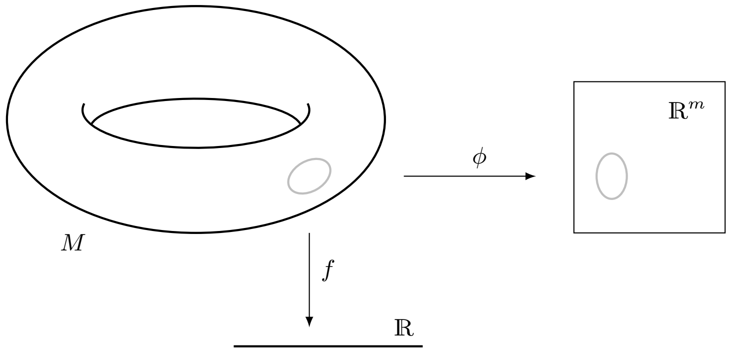
Komentar 2.5. Realna linija s dva ishodišta je primjer topološkog prostora koji zadovoljava sva svojstva mnogostrukosti osim Hausdorffovog. //



Komentar 2.6. Zahtjev prebrojivosti baze topologije je tehničke naravi, ali je neophodan kod definicija integrala na mnogostrukostima. //

2.2 Koordinate i parcijalne derivacije

Karte na mnogostrukostima nam omogućuju uvođenje pojmova koji su prethodno definirani na euklidskim prostorima. Jedna od osnovnih operacija je parcijalna derivacija funkcije $f : M \to \mathbb{R}$ s obzirom na neku koordinatu.



Neka je (O, ϕ) karta glatke m-mnogostrukosti M. Ako su $\{r^1, \dots, r^m\}$ standardne Kartezijeve koordinate na $\mathbb{R}^m$, tada komponente preslikavanja $\phi : O \to \mathbb{R}^m$ možemo definirati preko

$$x^\mu \equiv r^\mu \circ \phi \,. \tag{2.1}$$

U ovom slučaju kartu (O, ϕ) ponekad alternativno zapisujemo kao

$$(O, x^1, \dots, x^m) \quad \text{ili} \quad (O, \{x^\mu\}) \,.$$

Nadalje, za svaku funkciju $f : M \to \mathbb{R}$ definiramo njenu **koordinatnu reprezentaciju**, funkciju $f \circ \phi^{-1} : \phi(O) \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija $f \circ \phi^{-1}$ derivabilna u točki $\phi(p) \in \phi(O)$, tada u točki $p \in O$ definiramo parcijalne derivacije

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) \equiv \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^\mu}(\phi(p)) \,. \tag{2.2}$$

Kako je $p = \phi^{-1}(\phi(p))$, ovu jednadžbu možemo pisati i kao

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\phi^{-1}(\phi(p))) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^\mu}(\phi(p)) \,,$$

odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \circ \phi^{-1} = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^\mu} \ .$$

Teorem 2.7. *Neka je $(O, \phi) = (O, \{x^\mu\})$ karta na mnogostrukosti. Tada je*

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \ . \tag{2.3}$$

Dokaz : U svakoj točki $p \in O$ po definiciji parcijalne derivacije vrijedi

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}(p) = \frac{\partial (x^\mu \circ \phi^{-1})}{\partial r^\nu}(\phi(p)) = \frac{\partial (r^\mu \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial r^\nu}(\phi(p)) = \frac{\partial r^\mu}{\partial r^\nu}(\phi(p)) = \delta^\mu{}_\nu \ .$$

□

Općenitije, neka je M m-mnogostrukost, N n-mnogostrukost i $F : M \to N$ preslikavanje među njima. Uz svake dvije karte $(O, \phi) = (O, x^1, \dots, x^m)$ na M i $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ na N takve da je $F(O) \subseteq V$, uvodimo oznaku za ν-tu komponentu preslikavanja F u karti (V, ψ),

$$F^\nu \equiv y^\nu \circ F = r^\nu \circ \psi \circ F : O \to \mathbb{R} \ . \tag{2.4}$$

Koordinatna reprezentacija preslikavanja F s obzirom na navedene karte je funkcija $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$. Konačno, ako je funkcija $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ derivabilna u točki $\phi(p) \in \phi(O)$, tada u točki $p \in O$ definiramo parcijalne derivacije

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu}(p) \equiv \frac{\partial (\psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^\mu}(\phi(p)) \ , \tag{2.5}$$

odnosno, u skladu s ranijom definicijom, parcijalne derivacije pojedinih komponent preslikavanja F dane su s

$$\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p) \equiv \frac{\partial (F^\nu \circ \phi^{-1})}{\partial r^\mu}(\phi(p)) \ . \tag{2.6}$$

2.3 Diferencijabilne mnogostrukosti

Definicija 2.8. Neka je M topološka m-mnogostrukost i $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Kažemo da su dvije karte, (O, ϕ) i (V, ψ), $\boldsymbol{C^r}$**-kompatibilne** ako je $O \cap V = \emptyset$ ili ako su tzv. **funkcije prijelaza** $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ klase C^r.

Komentar 2.9. Kompatibilnost karata je refleksivna i simetrična relacija, ali općenito *nije* tranzitivna. Konkretnije, ako je karta (O_1, ϕ_1) kompatibilna s kartom (O_2, ϕ_2), koja je nadalje kompatibilna s kartom (O_3, ϕ_3), tada je kompozicija

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1} = (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_3^{-1})$$

preslikavanje klase C^r na skupu $\phi_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$, ali ona to ne mora biti na *cijelom* skupu $\phi_3(O_1 \cap O_3)$. Na primjer, promotrimo tri karte na $\mathbb{R}$:

$$(\langle -1,3 \rangle, x), \quad (\langle 1,4 \rangle, x), \quad (\langle -2,2 \rangle, x^3)$$

Preslikavanje $\phi_1 \circ \phi_3^{-1} = x^{1/3}$ nije derivabilno u $x = 0$! //

Definicija 2.10. ***C^r* atlas** $\mathcal{A} = \{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}$ na lokalno euklidskom prostoru M je familija u parovima C^r-kompatibilnih karata, takvih da je $\{O_\alpha\}$ otvoren pokrivač prostora M. Za kartu (V, ψ) kažemo da je C^r-kompatibilna s atlasom $\mathcal{A}$ ako je C^r-kompatibilna sa svakom kartom u tom atlasu.

Primjer|i 2.11.

Atlas na kružnici $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$.

$$O_1 = \left\{ e^{i\varphi} \mid 0 < \varphi < 2\pi \right\}, \quad O_2 = \left\{ e^{i\varphi} \mid -\pi < \varphi < \pi \right\}$$

Za $i = 1,2$

$$\psi_i : O_i \to \mathbb{R}, \quad \psi_i(e^{i\varphi}) = \varphi$$

gdje je vrijednost kuta dana prema zapisu otvorenih skupova O_1 i O_2 gore. Presjek $O_1 \cap O_2 = A \cup B$, gdje su A i B disjunktni otvoreni skupovi,

$$A = \left\{ e^{i\varphi} \mid -\pi < \varphi < 0 \right\}, \quad B = \left\{ e^{i\varphi} \mid 0 < \varphi < \pi \right\}$$

Lako se provjeri da su prijelazne funkcije,

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \langle -\pi, 0 \rangle \cup \langle 0, \pi \rangle \to \langle 0, \pi \rangle \cup \langle \pi, 2\pi \rangle$$

$$(\psi_1 \circ \psi_2^{-1})(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ x + 2\pi, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \end{cases}$$

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \langle 0, \pi \rangle \cup \langle \pi, 2\pi \rangle \to \langle -\pi, 0 \rangle \cup \langle 0, \pi \rangle$$

$$(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ x - 2\pi, & x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

//

Primjer|i 2.12. Standardni C^∞ atlas na $\mathbb{RP}^n$ (Tu, Ch.7.7) //

Lema 2.13. *Neka je $\mathcal{A} = \{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}$ C^r atlas. Ako su (V, ψ) i (W, χ) dvije karte C^r-kompatibilne s $\mathcal{A}$, tada su i međusobno C^r-kompatibilne.*

DOKAZ : Neka je $p \in V \cap W$. Kako je, po definiciji, $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač prostora M, postoji α takav da je $p \in O_\alpha$, i stoga $p \in Q_p \equiv O_\alpha \cap V \cap W$. Mi želimo dokazati da je preslikavanje $\chi \circ \psi^{-1}$ klase C^r u točki $\psi(p)$ te, analogno, da je preslikavanje $\psi \circ \chi^{-1}$ klase C^r u točki $\chi(p)$. Kako je $\chi \circ \psi^{-1}$ kompozicija dva C^r preslikavanja,

$$\chi \circ \psi^{-1} = (\chi \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$$

slijedi da je i ono klase C^r na skupu $\psi(Q_p)$. S obzirom da zaključak vrijedi na okolini $Q_p \subseteq (V \cap W)$ proizvoljne točke $p \in V \cap W$, slijedi da je preslikavanje $\chi \circ \psi^{-1}$ klase C^r na $\psi(V \cap W)$ i, analogno, $\psi \circ \chi^{-1}$ je klase C^r na $\chi(V \cap W)$. □

Definicija 2.14. Kažemo da su dva C^r atlasa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ **C^r-kompatibilna** ako im je unija opet C^r atlas.

Kompatibilnost atlasa je relacija ekvivalencije (refleksivnost i simetričnost odmah vidimo, a tranzitivnost slijedi iz gore dokazane leme). Uniju svih atlasa u jednoj klasi ekvivalencije zovemo **maksimalan atlas**. Stoga, svaki atlas je sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu. Maksimalan atlas neke mnogostrukosti zovemo **diferencijabilna struktura** (u slučaju C^∞ atlasa koristimo frazu **glatka struktura**).

Definicija 2.15. **C^r m-mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$ topološke mnogostrukosti M i maksimalnog C^r atlasa $\mathcal{A}$.

Specijalno, C^0 mnogostrukost je samo sinonim za topološku mnogostrukost, C^∞ mnogostrukost zovemo i **glatka mnogostrukost**. Sve gornje definicije je moguće proširiti i na analitičke funkcije, odnosno funkcije iz klase C^ω, u kom slučaju pričamo o *analitičkoj mnogostrukosti.*

Teorem 2.16 (Whitney). *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ maksimalan atlas C^k mnogostrukosti sadrži i C^∞ atlas.*

Dakle, relevantni su samo C^0, C^∞ i C^ω slučajevi. Kervaire je dokazao da postoji C^0 mnogostrukost koja ne dopušta C^1 diferencijabilnu strukturu [Kervaire: *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Coment. Math. Helv. 34 (1960) 257270] Dodatak: Morrey-Grauertov teorem.

2.4 Difeomorfizmi i egzotika

Definicija 2.17. Neka su M i N glatke mnogostrukosti. Za preslikavanje $F : M \to N$ kažemo da je glatko u točki $p \in M$ ako postoje karte (O_p, ϕ) i $(V_{F(p)}, \psi)$, takve da je $F(O_p) \subseteq V_{F(p)}$ i kompozicija $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ je glatko preslikavanje. Skupu svih glatkih preslikavanja $F : M \to \mathbb{R}$ označavamo s $C^\infty(M)$.

Definicija 2.18. **Difeomorfizam** među glatkim mnogostrukostima $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ je gladak homeomorfizam $f : M \to N$, čiji je inverz f^{-1} isto glatka funckija. Ako postoji difeomorfizam među mnogostrukostima $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ kažemo da su dvije glatke strukture zadane atlasima $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ekvivalentne, odnosno da su promatrane mnogostrukosti **difeomorfne** (pišemo $M \cong N$).

Komentar 2.19. Kako bi smo provjerili kompatibilnost dva glatka atlasa, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, na mnogostrukosti M, potrebno je provjeriti derivabilnost koordinatnih reprezentacija *identiteta* $\mathrm{id} : M \to M$,

$$\psi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = \psi_\alpha \circ \mathrm{id} \circ \phi_\beta^{-1} \, .$$

S druge strane, kako bi smo provjerili difeomorfnost između $(M, \mathcal{A})$ i $(M, \mathcal{A}')$ potrebno je pronaći *bilo koje* preslikavanje $f : M \to M$ koje je difeomorfizam. Dakle, u ovom smislu je kompatibilnost atlasa "snažnija" relacija od difeomorfizma: kompatibilni atlasi odmah impliciraju difeomorfizam (konkretno, identitet), dok postojanje difeomorfizma ne garantira kompatibilnost atlasa. //

Primjer nekompatibilnih atlasa na $\mathbb{R}^1$: $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ i $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$, gdje su $\phi(x) = x$, te $\psi(x) = x^{1/3}$. Odmah vidimo da $\psi \circ \phi^{-1}(x) = x^{1/3}$ nije C^∞ preslikavanje (nije derivabilno u $x = 0$). S druge strane, $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{A}')$ su difeomorfni preko preslikavanja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiranog s $f(x) = x^3$,

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) = x = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(x)$$

Valja uočiti kako imamo *dvije* relacije ekvivalencije: jednu među glatkim atlasima (kompatibilnost) i jednu među diferencijabilnim strukturama (difeomorfizam). Općenito je na mnogostrukosti moguće imati više nekompatibilnih (neekvivalentnih) maksimalnih atlasa, čak i u jednostavnom slučaju prostora $\mathbb{R}^1$. Međutim, svi maksimalni atlasi na $\mathbb{R}^1$ su ekvivalentni (difeomorfni), pa na $\mathbb{R}^1$ postoji samo jedna glatka diferencijabilna struktura.

Ipak, postoje i mnogostrukosti koje dopuštaju definiranje više različitih, neekvivalentnih (nedifeomorfnih) glatkih diferencijabilnih struktura. U slučaju kada imamo *homeomorfne* mnogostrukosti koje *nisu difeomorfne*, govorimo o **egzotičnoj glatkoći**. Milnor je 1956. godine dao prvi primjer egzotičnih mnogostrukosti, tzv. *egzotične sfere* (konkretnije, 7-dimenzionalne egzotične sfere). Nešto kasnije, 1963. godine su Milnor i Kervaire dokazali da sfere $\mathbb{S}^n$ za $n \geq 5$ dopuštaju najviše konačno mnogo egzotičnih diferencijabilnih struktura (znamo da su one jedinstvene za $n \leq 3$, do je pitanje postojanja egzotičnih 4-sfera do 2016. godine još otvoreno). Posebno je zanimljiv slučaj euklidskih prostora $\mathbb{R}^n$. Poznato je (Stallings, Zeeman 1962.) kako $\mathbb{R}^n$ za $n \neq 4$ ima *jedinstvenu* diferencijabilnu strukturu. S druge strane (Freedman 1982., Gompf 1983.–1985., Taubes 1987.), $\mathbb{R}^4$ ima *neprebrojivo beskonačno mnogo* egzotičnih diferencijabilnih struktura! Pitanje fizikalnog značaja ove slobode izbora i dalje je širom otvoreno pitanje …

Definicija 2.20. Neka je $(M, \mathcal{A})$ C^1 mnogostrukost. Za funkciju prijelaza $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$, načinjenu od homeomorfizama u atlasu $\mathcal{A}$, kažemo da *čuva orjentaciju* ako je determinanta pripadnog Jacobijana pozitivna u svim točkama domene. Za atlas $\mathcal{A}$ kažemo da je **orijentiran atlas** ako mu sve prijelazne funkcije čuvaju orijentaciju. Za C^1 mnogostrukost M kažemo da je **orijentabilna** ako dopušta definiranje orijentiranog atlasa. Ako je na orjentabilnoj mnogostrukosti napravljen izbor orjentacije kažemo da je dotična mnogostrukost **orijentirana**.

2.5 Mnogostrukosti s rubom

Motivacija. Iako za svaki topološki prostor X trivijalno vrijedi $\partial X = \emptyset$, mi bismo htjeli uvesti pojam koji opisuje "rub" mnogostrukosti u onom smislu u kojem, primjerice, kružnicu doživljavamo kao rub kruga, a sferu kao rub kugle. Slično kao što smo kod osnovnih mnogostrukosti kao prototip koristili otvorene podskupove euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$, tako u definiciji mnogostrukosti s rubom trebamo odgovarajući prototip. Tomu nam služi "polovica" euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$, preciznije

$$H^m \equiv \left\{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\right\} \tag{2.7}$$

s prototipom za rub mnogostrukosti,

$$\partial H^m \equiv \left\{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) \in \mathbb{R}^m\right\} \; . \tag{2.8}$$

Definicija 2.21. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^m$ proizvoljan skup. Kažemo da je preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^n$ glatko u točki $p \in S$ ako postoji okolina $O_p \subseteq \mathbb{R}^m$ i glatko preslikavanje $\tilde{f} : O_p \to \mathbb{R}^n$, takvo da je $\tilde{f} = f$ na presjeku $O_p \cap S$.

Definicija 2.22. **Topološka m-mnogostrukost s rubom** je Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom koji je lokalno homeomorfan s H^m. Diferencijalne mnogostrukosti s rubom definiramo zamjenom prostora $\mathbb{R}^m$ s H^m.

Primjer|i 2.23. Sam prostor H^m. Krug, kugla. //

Komentar 2.24. Ponekad se koristi fraza **zatvorena mnogostrukost** (eng. *closed manifold*) u značenju *kompaktna mnogostrukost bez ruba.* //

2.6 Spojena suma

Osnovna ideja: iz svake od dvije zadane m-mnogostrukosti X i Y izrežemo m-dimenzionalni disk, D_X odnosno D_Y, i zatim ih spojimo identificiranjem rubova diskova D_X i D_Y (može se pokazati da je ova operacija dobro definirana, odnosno da ne ovisi o izboru diska). Formalno ...

Definicija 2.25. Neka su M_1 i M_2 povezane glatke m-mnogostrukosti te za $i = 1, 2$ (O_i, ψ_i) koordinatne karte centrirane u točkama $p_i \in M_i$, takve da je $\psi_i(O_i) = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^m$. Nadalje, neka je $V_i \equiv \psi_i^{-1}(B(0, r/2)) \subseteq O_i$ i $M_i' \equiv M_i - V_i$. **Spojena suma** $M_1 \# M_2$ mnogostrukosti M_1 i M_2 je definirana kao kvocijentni prostor kojeg dobijemo na prostoru $M_1' \sqcup M_2'$ identificiranjem svake točke $q \in \partial V_1$ s točkom $\psi_2^{-1} \circ \psi_1(q) \in \partial V_2$.

Teorem 2.26. *Skup povezanih orjentabilnih zatvorenih m-mnogostrukosti $\mathfrak{M}_m$ s operacijom spojene sume $\#$ čini komutativni monoid, odnosno za sve $X, Y, Z \in \mathfrak{M}_m$ vrijedi*

(z) *zatvorenost na operaciju,* $X \# Y \in \mathfrak{M}_m$,

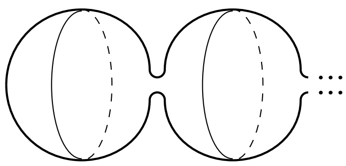
(a) *asocijativnost,* $(X \# Y) \# Z \simeq X \# (Y \# Z)$,

(n) *sfera* $\mathbb{S}^m$ *je neutralni element,* $X \# \mathbb{S}^m \simeq X$,

(k) *komutativnost,* $X \# Y \simeq Y \# X$.

Komentar 2.27. Što je s inverzom operacije spojene sume? Da li za svaki $X \in \mathfrak{M}_m$ postoji $Y \in \mathfrak{M}_m$, takav da je $X \# Y \simeq \mathbb{S}^m$? Barry Mazur: X je invertibilna akko je $X \simeq \mathbb{S}^m$ (za skicu formalnog dokaza vidi [Kos07], str. 95–95). Neformalan dokaz preko beskonačne spojene sume,

$$\mathbb{S}^m \# \mathbb{S}^m \# \ldots \simeq \mathbb{R}^m$$



$$(X\#Y)\#(X\#Y)\#\ldots \simeq X\#(Y\#X)\#(Y\#X)\#\ldots \simeq X\#\mathbb{R}^n \simeq X - \{p\}$$

Konačno, $X - \{p\} \simeq \mathbb{R}^m$ akko $X \simeq \mathbb{S}^m$. //

2.7 Klasifikacije mnogostrukosti

Komentar o dimenziji,

Teorem 2.28. *Ako su dva neprazana otvorena skupa $O \subseteq \mathbb{R}^m$ i $U \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni, tada je nužno $m = n$.*

1-mnogostrukosti

Teorem 2.29. *Povezana 1-mnogostrukost (bez ruba) je difeomorfna sa $\mathbb{S}^1$ (ako je kompaktna) ili s $\mathbb{R}^1$ (ako nije kompaktna). Povezana 1-mnogostrukost s nepraznim rubom je difeomorfna s $[0,1\rangle$ (ako rub ima jednu komponentu) ili s $[0,1]$ (ako rub ima dvije komponente).*

2-mnogostrukosti

Definicija 2.30. Uvodimo sustave oznake za standardne zatvorene povezane 2-mnogostrukosti.

- 2-sfera $\Sigma_0 = \mathbb{S}^2$;
- 2-torus $\Sigma_1 = \mathbb{T}^2$ te spojeni torusi $\Sigma_k = \Sigma_{k-1}\#\mathbb{T}^2$ za sve $k \geq 2$;
- projektivna sfera $\Xi_1 = \mathbb{RP}^2$ te $\Xi_h = \Xi_{h-1}\#\mathbb{RP}^2$ za sve $h \geq 2$.

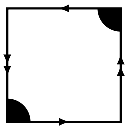
Teorem 2.31. *Neka je M zatvorena povezana 2-mnogostrukost. Ako je M orjentabilna, tada postoji $g \in \mathbb{N}_0$, takav da je M difeomorfna sa Σ_g. U protivnom, ako je M neorjentabilna, tada postoji $h \in \mathbb{N}$, takav da je M difeomorfna sa Ξ_h.*

Komentar 2.32. Broj g iz prethodnog teorema tradicionalno je poznat kao **genus** plohe. S njim je usko povezana tzv. **Euler-Poincaréova karakteristika** $\chi \in \mathbb{Z}$, koja je u slučaju zatvorenih 2-mnogostrukosti dana s $\chi = 2 - 2g$ (vidi također dodatak o Eulerovoj formuli za poliedre). Kasnije ćemo χ poopćiti za m-mnogostrukosti. //

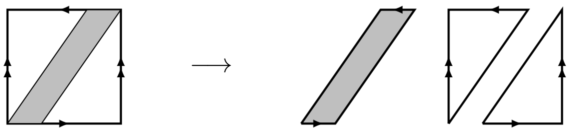
Nekoga bi moglo zanimati gdje se u gornjoj klasifikaciji kriju "miješane" mnogostrukosti poput npr. $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$? Naredna dva teorema odgovaraju na ovo pitanje.

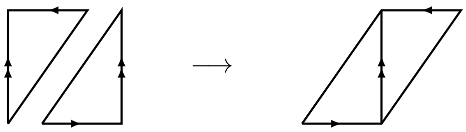
Teorem 2.33. $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ *je difeomorfna s Kleinovom bocom* K.

Prvo valja uočiti kako je projektivna sfera $\mathbb{RP}^2$ s izrezanim diskom difeomorfna s Möbiusovom trakom,



Nadalje, Kleinovu bocu možemo razrezati u dvije Möbiusove trake, kako je skicirano na crtežu ispod





Teorem 2.34 (Walter von Dyck 1888.).

$$\mathbb{RP}^2 \# K \cong \mathbb{RP}^2 \# T^2$$

Ploha $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ *poznata je i kao* **Dyckova ploha**.

Dokaz : Za vizualni dokaz vidi [Wee02], str. 79. □

Komentar oko nekompaktnih 2-mnogostrukosti i 2-mnogostrukosti s rubom ...

3-mnogostrukosti

William Thurston 1982., program uniformizacije: Every oriented prime closed 3-manifold can be cut along tori, so that the interior of each of the resulting manifolds has a geometric structure with finite volume. 8 modela:

$$\mathbb{E}^3\,,\quad \mathbb{H}^3\,,\quad \mathbb{S}^3\,,\quad \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}\,,\quad \mathbb{H}^2\times\mathbb{R}\,,\quad \widetilde{SL_2\mathbb{R}}\,,\quad \mathrm{Nil}\,,\quad \mathrm{Sol}$$

(prve tri su maksimalno simetrične, ostale ne). Hamilton. Perelman 2003.

Teorem 2.35. *m-mnogostrukosti za $m \geq 4$ nemaju opću klasifikaciju (Markov:* Insolubility of the problem of homeomorphy*).*

Dodatna literatura

- [Mil97], stari klasik o diferencijabilnim mnogostrukostima, kratka knjižica u kojoj je između ostalog skicirana klasifikacija 1-mnogostrukosti
- [GX15], vodič kroz klasifikacijski teorem kompaktnih 2-mnogostrukosti
- [Thu97], predavanja o topologiji 3-mnogostrukosti
- [Wee02], neformalni, lijepo ilustriran uvod u topologiju 2- i 3-mnogostrukosti s fokusom na primjenu u kozmologiji
- [Sco05], detaljan pregled topologije 4-mnogostrukosti
- [Kos07], stari klasik o diferencijabilnim mnogostrukostima

Zadaci

1. Uklonimo li iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ konačno mnogo točaka, je li dobiveni potprostor mnogostrukost?
2. Atlasi na sferi $\mathbb{S}^2$.
3. Ako je (O, ϕ) karta na glatkoj m-mnogostrukosti M, dokažite da je tada $\psi : O \to \psi(O) \subseteq \mathbb{R}^m$ difeomorfizam.
4. Grassmanian $G(k, n)$ je skup k-ravnina kroz ishodište euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ (vidi Tu, zadatak 7.8 na str.82)
5. Dokažite da na orjentabilnim mnogostrukostima postoje točno dvije orijentacije.

3

Tangentni vektori i 1-forme

Motivacija. Intuitivna predodžba tangentnog vektora obično je izgrađena na slici geometrijskog objekta, poput glatke krivulje ili glatke dvodimenzionalne plohe, koji je smješten u ambijentni euklidski prostor i kojem iz zadane točke tangentno izlazi strelica, protegnuta kroz ambijentni prostor. Uistinu, mi bismo mogli formalno uvesti tangentne vektore na mnogostrukostima polazeći od njihovog smještanja u euklidski prostor te koristeći kanonsku identifikaciju točaka u mnogostrukosti $\mathbb{R}^m$ s elementima vektorskog prostora $\mathbb{R}^m$ nad poljem realnih brojeva. Naravno, prvo moramo biti sigurni da je nekakvo "lijepo" smještanje mnogostrukosti uopće moguće (minimalnu dovoljnu dimenziju ambijentnog euklidskog prostora garantiraju netrivijalni teoremi poput Whitneyevog ili Nashovog). Konceptualno čišći put, ujedno onaj koji se ne oslanja na netrivijalne rezultate, jest *interna* definicija tangentnih vektora na mnogostrukosti koju ne moramo *a priori* smjestiti u nekakav kanonski ambijentni prostor. Glavni cilj jest definirati objekt u kojeg možemo pohraniti glavne informacije koje sadrži tangentni vektor: njegov *smjer* i njegov *iznos*.

Vratimo se na najjednostavniji slučaj vektora $\boldsymbol{V}$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^m$, čiji tradicionalni zapis po komponentama u kanonskoj bazi $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ glasi

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{m} V^i \, \boldsymbol{e}_i \; .$$

Prvo valja primjetiti kako operator derivacije u smjeru vektora $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \sum_{i=1}^{m} V^i \, \frac{\partial}{\partial x^i}$$

formalno sadrži sve informacije o ovom vektoru, njegove komponente V^i.

Drugo, sama derivacija djeluje na funkcije $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, objekte koje elementarno možemo definirati i na svakoj drugoj mnogostrukosti. Stoga, nameće se jednostavna ideja: tangentne vektore na mnogostrukosti M možemo uvesti kao *operatore* koji, poštujući pravila poput onih koje zadovoljavaju samo derivacije, djeluju na preslikavanja $f : M \to \mathbb{R}$. Prije svega moramo definirati kako uopće deriviramo funkcije na mnogostrukostima.

3.1 GERMOVI

Motivacija. Želimo li definirati djelovanje neke derivacije u točki, svejedno nam je potrebno poznavanje ponašanja funkcije koju deriviramo na okolini te točke. Nadalje, ako su dvije derivabile funkcije jednake na promatranoj okolini, tada će one imati jednaku derivaciju u toj točki. Stoga, možemo sve takve funkcije okupiti u jednu klasu.

Definicija 3.1. Neka je M glatka m-mnogostrukost i $p \in M$. Na skupu glatkih funkcija $C^\infty(M)$ uvodimo relaciju ekvivalencije $f \sim_p g$ akko postoji okolina O_p na kojoj je $f = g$. Svaku klasu ekvivalencije ove relacije zovemo **germ** (npr. germ funkcije f u točki p), a skup svih germova u točki p označavamo s $C_p^\infty(M)$ (ili samo C_p^∞).

Primjer|i 3.2. Funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1-x} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{i} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$$

pripadaju istom germu (imaju isti germ) na otvorenom intervalu $\langle -1, 1\rangle$. //

Skup $C_p^\infty(M)$ zajedno s operacijama zbrajanja i množenja funkcija tvori prsten (multiplikativni inverz ne mora postojati jer imamo funkcije koje iščezavaju u promatranoj točki p).

3.2 TANGENTNI VEKTORI

Definicija 3.3. Neka je M glatka m-mnogostrukost. **Tangentan vektor** u točki $p \in M$ je preslikavanje $X : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$, koje za sve $f, g \in C_p^\infty(M)$ i $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ zadovoljava

1. linearnost $X(\kappa f + \lambda g) = \kappa X(f) + \lambda X(g)$, i
2. Leibnizovo pravilo, $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

Skup svih tangentnih vektora u točki $p \in M$ označavamo s T_pM, a skup svih tangentnih vektora na mnogostrukosti M s TM.

Lako se provjeri da je skup tangentnih vektora T_pM s operacijama

(a) zbrajanja vektora,
$(\forall\, X, Y \in T_pM)(\forall\, f \in C_p^\infty) : \ (X+Y)(f) \equiv X(f) + Y(f)$,

(b) množenja skalarom, $(\forall\, X \in T_pM)(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}) : \ (\lambda X)(f) \equiv \lambda \cdot X(f)$, vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, poznat kao **tangentni prostor** u točki p.

Komentar 3.4. Ne postoji "prirodan" način kako dodavati tangentne vektore u *različitim* točkama mnogostrukosti, pa je unija TM zasad samo formalna oznaka. S pitanjem "pomicanja" tangentnih vektora iz jedne točke u drugu ćemo se pozabaviti malo kasnije. //

Komentar 3.5. Kada želimo naglastiti da je vektor X element tangentnog prostora T_pM u točki $p \in M$ koristit ćemo oznaku $X|_p$. //

Teorem 3.6. *Neka je M glatka mnogostrukost. Ako je $f : M \to \mathbb{R}$ konstantno preslikavanje, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ za sve $x \in M$, tada je $X(f) = 0$ za svaki tangentan vektor $X \in T_pM$.*

Dokaz : Koristeći redom Leibnizovo pravilo pa linearnost imamo

$$\begin{aligned} X(f^2) &= 2fX(f) = 2cX(f) \\ &= X(cf) = cX(f) \end{aligned}$$

odnosno $cX(f) = 0$. Ako je $c \neq 0$, odmah slijedi tvrdnja. Ako je $c = 0$, tada imamo

$$X(0) = X(0 + 0) = 2X(0)$$

pa je opet $X(0) = 0$. □

Primjer|i 3.7. U svakoj točki $p \in O$ koordinatne karte $(O, x^1, \dots, x^m)$ glatke mnogostrukosti M možemo definirati tangentne vektore

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p$$

za svaki $\mu \in \{1, \dots, m\}$. Primjetimo, parcijalne derivacije djeluju $\mathbb{R}$-linearno i poštuju Leibnizovo pravilo. //

3.3 1-forme

Motivacija za dualne vektore: postoji i drugi tip objekta, funkcional nad vektorima

$$\mathrm{d}f = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\,, \quad (\mathrm{d}f)(v) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu(v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\,v^\mu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$$

Definicija 3.8. Neka je M glatka mnogostrukost. **1-forma** ω u točki $p \in M$ je linearno preslikavanje $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$. Skup svih 1-formi u točki $p \in M$ označavamo s T_p^*M, a skup svih 1-formi na mnogostrukosti M s T^*M.

Drugim riječima, 1-forma je linearni funkcional na prostoru tangentnih vektora. Lako se provjeri da je skup dualnih vektora T_p^*M s operacijama

(a) zbrajanja dualnih vektora,

$$(\forall\, \alpha, \beta \in T_p^*M)(\forall\, X \in T_pM): \ (\alpha+\beta)(X) \equiv \alpha(X) + \beta(X)\ ,$$

(b) množenja skalarom, $(\forall\, \alpha \in T_p^*M)(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}): \ (\lambda\alpha)(X) = \lambda \cdot \alpha(X)$,

vektorski prostor dualan tangentnom vektorskom prostoru, poznat kao **kotangentan vektorski prostor** $T_p^*M = (T_pM)^* = \mathrm{Hom}\,(T_pM, \mathbb{R})$ u točki p.

Komentar 3.9. Kako i kod tangentnih vektora, kada želimo naglastiti da je 1-forma ω element kotangentnog prostora T_p^*M u točki $p \in M$ koristit ćemo oznaku $\omega|_p$. //

Primjer|i 3.10. Za svaku glatku funkciju $f \in C_p^\infty(M)$ možemo definirati 1-formu $\mathrm{d}f \in T_p^*M$ preko

$$\mathrm{d}f(X) \equiv X(f) \tag{3.1}$$

za svaki $X^a \in T_pM$. //

3.4 Povlačenja i guranja

Funkcije. Neka se M i N dvije mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje među njima i $f : N \to \mathbb{R}$ nekakva realna funkcija na N. Zanima nas kako *povući* funkciju f na mnogostrukost M pomoću preslikavanja F koje ih povezuje. Jednostavno, koristeći kompoziciju funkcija, uvodimo posebnu oznaku

$$(F^*f) \equiv f \circ F : M \to \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Iz definicije odmah možemo iščitati lančano pravilo povlačenja funkcija. Imamo li tri mnogostrukosti M, N i S te glatka preslikavanja među njima $F : M \to N$ i $G : N \to S$, tada je za svaku glatku funkciju $f : S \to \mathbb{R}$

$$(G \circ F)^* f = f \circ (G \circ F) = (f \circ G) \circ F = F^*(G^* f)$$

odnosno

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*\ . \tag{3.3}$$

Tangentni vektori. Nadalje, zadamo li tangentan vektor $X|_p \in T_pM$, zanima nas kako ga premjestiti (tj. "pogurati") s mnogostrukosti M na mnogostrukost N pomoću glatkog preslikavanja $F : M \to N$. Jedna specifična upotreba ovog postupka će biti pomicanje tangentnih vektora po mnogostrukosti, u slučaju kada je $N = M$.

Definicija 3.11. Neka su M i N glatke mnogostrukosti i $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Tada u svakoj točki $p \in M$ definiramo preslikavanje

$$F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$$

preko

$$(F_{*,p}(X|_p))(f) \equiv X|_p(F^*f) = X|_p(f \circ F) \tag{3.4}$$

za svaku $f \in C^\infty_{F(p)}(N)$.

Prvo valja provjeriti da je ovo dobro definirano preslikavanje, odnosno da je uistinu $F_{*,p}(X|_p) \in T_{F(p)}N$. Linearnost vidimo odmah, koristeći linearnost tangentnog vektora $X|_p$,

$$(F_{*,p}(X|_p))(\alpha f + \beta g) = X|_p((\alpha f + \beta g) \circ F) =$$

$$= \alpha X|_p(f \circ F) + \beta X|_p(g \circ F) = \alpha(F_{*,p}(X|_p))(f) + \beta(F_{*,p}(X|_p))(g) \ .$$

Prije provjere Leibnizovog pravila valja uočiti da je

$$((fg) \circ F)(p) = f(F(p))g(F(p)) = (f \circ F)(p) \cdot (g \circ F)(p) \ ,$$

odnosno $(fg) \circ F = (f \circ F)(g \circ F)$. Stoga,

$$(F_{*,p}(X|_p))(fg) = X|_p((fg) \circ F) = X|_p((f \circ F)(g \circ F)) =$$

$$= (f \circ F)(p)X|_p(g \circ F) + (g \circ F)(p)X|_p(f \circ F) \ .$$

Važno je uočiti i to da je $F_{*,p}$ linearno preslikavanje među vektorskim prostorima: za sve tangentne vektore $X|_p, Y|_p \in T_pM$ i konstante $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(F_{*,p}(aX|_p + bY|_p))(f) = (aX|_p + bY|_p)(f \circ F) =$$

$$= aX|_p(f \circ F) + bY|_p(f \circ F) = a(F_{*,p}(X|_p))(f) + b(F_{*,p}(Y|_p))(f)$$

Također, u slučaju kada je $N = M$ i $F = \mathrm{id}_M$ imamo

$$((\mathrm{id}_M)_{*,p}(X|_p))(f) = X|_p(f \circ \mathrm{id}_M) = X|_p(f)$$

odnosno,

$$(\mathrm{id}_M)_{*,p} = \mathrm{id}_{T_pM} \tag{3.5}$$

Komentar 3.12. Često ćemo koristiti skraćenu oznaku $F_*X|_p = F_{*,p}(X|_p)$. //

Lema 3.13 (Lančano pravilo za guranje vektora). *Ako su $F : M \to N$ i $G : N \to S$ glatka preslikavanja među mnogostrukostima M, N i S, te $p \in M$, tada je*

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p} \tag{3.6}$$

DOKAZ : Neka je $X|_p \in T_pM$ i $f \in C_s^\infty(S)$, gdje je $s = (G \circ F)(p)$. Tada vrijedi

$$((G \circ F)_* X|_p)(f) = X|_p(f \circ G \circ F)$$

$$((G_* \circ F_*)X|_p)(f) = (G_{*,F(p)}(F_* X|_p))(f) = (F_* X|_p)(f \circ G) = X|_p(f \circ G \circ F)$$

□

Dualni vektori. Konačno, zanima nas kako pomoću glatkog preslikavanja $F : M \to N$ "povući" dualni vektor iz kotangentnog prostora $T^*_{F(p)}N$ mnogostrukosti N u kotangentni prostor T^*_pM u zadanoj točki $p \in M$. Koristeći slične ideje kao i s povlačenjem funkcija i guranjem vektora definiramo povlačenje 1-formi.

Definicija 3.14. Neka su M i N glatke mnogostrukosti i $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svaku točku $p \in M$ definiramo preslikavanje

$$F^*_p : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$$

preko

$$(F^*_p(\omega|_{F(p)}))(X|_p) \equiv \omega|_{F(p)}(F_* X|_p) \tag{3.7}$$

za svaki $X|_p \in T_pM$.

Komentar 3.15. Valja uočiti jednu suptilnu ali važnu razliku između između vektora i dualnih vektora u ovom kontekstu. Naime, ako preslikavanje $F : M \to N$ *nije* injekcija tada postoji bar jedna točka $q \in F(M) \subseteq N$, takva da praslika $F^{-1}(\{q\})$ sadrži više od jednog elementa. No, tada ćemo guranjem vektora iz tangentnih prostora T_pM u svakoj od točaka $p \in F^{-1}(\{q\})$, općenito dobiti *različite* vektore u T_qN. S druge strane, takve ambivalentnosti nema kod dualnih vektora. U zadanu točku $p \in M$ povlačenjem iz kotangentnog prostora mnogostrukosti N uvijek dobivamo *jedinstveni* dualni vektor. U pozadini ove asimetrije krije se činjenica da je svaka točka iz domene uvijek preslikana u točno jednu točku u kodomeni dok, obratno, praslika točke iz kodomene može sadržavati više elemenata. //

Lema 3.16 (Lančano pravilo za povlačenje 1-formi). *Ako su $F : M \to N$ i $G : N \to S$ glatka preslikavanja među mnogostrukostima M, N i S, te $p \in M$, tada je*

$$(G \circ F)^*_p = F^*_p \circ G^*_{F(p)} \ . \tag{3.8}$$

DOKAZ : Označimo s $s = (G \circ F)(p)$. Tada je

$$((G \circ F)^*_p(\omega|_s))(X|_p) = \omega|_s((G \circ F)_* X|_p) = \omega|_s(G_{*,F(p)}(F_* X|_p)) =$$

$$= (G^*_{F(p)}\omega|_s)(F_* X|_p) = (F^*_p(G^*_{F(p)}\omega|_s))(X|_p) \ .$$

□

3.5 Baze i komponente

Sada nas zanima kako konstruirati *bazu* tangentnog vektorskog prostora T_pM (i analogno, bazu kotangentnog prostora T_p^*M). Ideja je uspostaviti izomorfizam s tangentnim prostorom $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$ na kojem imamo kanonsku bazu.

Teorem 3.17. *Neka je $\{r^1, \dots, r^m\}$ globalno definiran Kartezijev koordinatni sustav euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$. Tada je skup tangentnih vektora*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^m} \right\}$$

baza tangentnog prostora $T_p\mathbb{R}^m$ u svakoj točki $p \in \mathbb{R}^m$.

Dokaz : Treba dokazati dvije tvrdnje:

- Skup vektora naveden u teoremu je linearno nezavisan. Pretpostavimo da za neki skup konstanti $\{c^1, \dots, c^m\}$ vrijedi

$$c^\mu \, \frac{\partial}{\partial r^\mu} = 0$$

  Djelovanjem na koordinatu r^α za svaki α slijedi $c^\alpha = 0$ pa je linearna kombinacija nužno trivijalna, odakle slijedi linearna nezavisnost.

- Skup vektora naveden u teoremu razapinje tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^m$. Svaku glatku funkciju $f \in C_p^\infty(M)$ na nekoj okolinu točke $p(r_0^1, \dots, r_0^m)$ po Taylorovom teoremu možemo napisati u obliku

$$f(x) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial r^\mu}\Big|_p (r^\mu - r_0^\mu) + R_{\mu\nu}(r^\mu - r_0^\mu)(r^\nu - r_0^\nu) \; ,$$

  pri čemu je ostatak oblika

$$R_{\mu\nu} = \int_0^1 \mathrm{d}t \, (1-t) \, \frac{\partial^2 f}{\partial r^\mu \partial r^\nu} \Big|_{r_0 + (r - r_0)t}$$

  Stoga, kako za svaki tangentan vektor $V \in T_pM$ vrijedi $V(f(p)) = 0$ i $V(r_0^\mu) = 0$, imamo

$$V(f) = 0 + \frac{\partial f}{\partial r^\mu}\Big|_p V(r^\mu) + 0 = V(r^\mu) \, \frac{\partial}{\partial r^\mu}\Big|_p (f) \; .$$

  Drugim riječima, svaki tangentan vektor uvijek možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora iz promatranog skupa,

$$V|_p = V(r^\mu) \, \frac{\partial}{\partial r^\mu}\Big|_p \; .$$

□

Teorem 3.18. *Ako je $F : M \to N$ difeomorfizam među glatkim mnogostrukostima i $p \in M$, tada su $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ i $F_p^* : T_{F(p)}^* \to T_p^*M$ izomorfizmi vektorskih prostora.*

DOKAZ : Prema definiciji difeomorfizma postoji glatko preslikavanje $G : N \to M$, takvo da je $G \circ F = \mathrm{id}_M$ i $F \circ G = \mathrm{id}_N$. Stoga, u svakoj točki $p \in M$ imamo

$$G_{*,F(p)} \circ F_{*,p} = (G \circ F)_{*,p} = (\mathrm{id}_M)_{*,p} = \mathrm{id}_{T_pM}$$

$$F_{*,p} \circ G_{*,F(p)} = (F \circ G)_{*,F(p)} = (\mathrm{id}_N)_{*,F(p)} = \mathrm{id}_{T_{F(p)}N}$$

Dakle, $F_{*,p}$ i $G_{*,F(p)}$ su jedna drugoj inverzi pa stoga i bijekcije. Kako su posrijedi linearna preslikavanja, dokazali smo da je $F_{*,p}$ izomorfizam. Potpuno analogno se dokaže i da je F_p^* izomorfizam. □

Teorem 3.19. *Neka je $(O, \phi) = (O, x^1, \dots, x^m)$ karta na okolini točke $p \in M$ m-mnogostrukosti M. Tada je*

$$\phi_* \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial r^\mu}\Big|_{\phi(p)} \tag{3.9}$$

DOKAZ : Za svaku glatku $f : \phi(O) \to \mathbb{R}$ imamo

$$\left(\phi_* \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p (f \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial r^\mu}\Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial r^\mu}\Big|_{\phi(p)} (f)$$

□

Kao posljedica dva prethodna teorema slijedi da je

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$$

baza tangentnog prostora T_pM, poznata kao **koordinatna baza**, čije elemente ćemo skraćeno označavati poput parcijalnih derivacija, ∂_μ. Dakle, svaki tangentni vektor $A \in T_pM$ možemo zapisati u koordinatnoj bazi kao

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; . \tag{3.10}$$

Primjetimo, prema teoremu 2.7 odmah vrijedi i

$$A^\mu = A(x^\mu) \; . \tag{3.11}$$

Baza kotagentnog vektorskog prostora dualna bazi $\{\partial_\mu\}$ sastoji se od 1-formi

$$\{\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^m\}$$

definiranih tako da je

$$\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{3.12}$$

Primjetimo, ove oznake su konzistentne s definicijom (3.1) i teoremom 2.7. Slično kao i kod tangentnih vektora, svaku 1-formu $\omega \in T_p^*M$ možemo zapisati u koordinatnoj bazi kao

$$\omega = \omega_\nu \, \mathrm{d}x^\nu \; , \tag{3.13}$$

pri čemu je

$$\omega_\nu = \omega(\partial_\nu) \; . \tag{3.14}$$

Na primjer, $(\mathrm{d}f)(\partial_\nu) = \partial_\nu f$, pa je $\mathrm{d}f = (\partial_\nu f)\mathrm{d}x^\nu$. Iz prethodne diskusije odmah slijedi naredni teorem.

Teorem 3.20. *Neka je M glatka m-mnogostrukost. Tada je za svaki $p \in M$*

$$\dim T_pM = \dim T_p^*M = m\ .$$

Koristeći linearnost dualnih vektora i dualnost baza imamo

$$\omega(v) = \omega_\nu \, \mathrm{d}x^\nu(v^\mu \partial_\mu) = v^\mu \omega_\nu \, \mathrm{d}x^\nu(\partial_\mu) = v^\mu \omega_\nu \, \delta^\nu_\mu = v^\mu \omega_\mu\ .$$

Primjetimo, djelovanje dualnog vektora na vektor možemo shvatiti i obratno, kao djelovanje vektora na dualni vektor, pa se ponekad koristi simetričan zapis (unutrašnji produkt),

$$v(\omega) \equiv \omega(v) \equiv \langle \omega, v \rangle$$

Teorem 3.21 (koordinatne transformacije). *Neka je M glatka mnogostrukost, $(O, \{x^\alpha\})$ i $(V, \{y^{\mu'}\})$ dvije karte s nepraznim presjekom te $p \in O \cap V$. Tada su komponente nekog tangentnog vektora $A \in T_pM$ i 1-forme $\omega \in T_p^*M$ u ovim koordinatnim sustavima povezane preko*

$$A^{\mu'} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\, A^\alpha\ , \quad \omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\mu'}}\, \omega_\alpha\ . \tag{3.15}$$

Dokaz : Primjetimo za početak da su $x^\alpha : O \cap V \to \mathbb{R}$ i $y^{\mu'} : O \cap V \to \mathbb{R}$ glatke funkcije. Navedena transformacijska pravila koordinatnih komponenti (na presjeku $O \cap V$) odmah slijede iz gornje diskusije,

$$A^{\mu'} = A(y^{\mu'}) = \left(A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) (y^{\mu'}) = A^\alpha \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\ ,$$

$$\omega_{\mu'} = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial y^{\mu'}}\Big) = (\omega_\alpha \, \mathrm{d}x^\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu'}} \right) = \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\mu'}}\ .$$

□

Primjer|i 3.22. Promjena iz Kartezijevog u polarni sustav na $\mathbb{R}^2$;

$$A^r = \frac{\partial r}{\partial x} A^x + \frac{\partial r}{\partial y} A^y = (\cos\varphi) A^x + (\sin\varphi) A^y$$

$$A^\phi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} A^x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A^y = -\frac{\sin\varphi}{r} A^x + \frac{\cos\varphi}{r} A^y$$

//

Komentar 3.23. Valja biti oprezan u čitanju zapisa komponenti koje uvijek podrazumjevaju određeni koordinatni sustav u kojem su zapisane. Naime, može se dogoditi da dva koordinatna sustava imaju dio jednakih koordinata, pri čemu pripadne komponente ipak neće biti jednake. Malo konkretnije, usporedimo $(\mathbb{R}^2, \{x, y\})$ i $(\mathbb{R}^2, \{u, v\})$, gdje su $u = x$ i $v = x + y$, odnosno $x = u$ i $y = v - u$. Tada za neku 1-formu ω imamo

$$\omega_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\omega_x + \frac{\partial y}{\partial u}\,\omega_y = \omega_x - \omega_y \ .$$

Ako bi netko nesmotreno lijevu stranu jednakosti pisao kao ω_x, naivno bi mogli zaključiti da je ω_y uvijek nula?! Naravno, ovakvo rezoniranje je jednostavno pogrešno: iako je $u = x$, ne slijedi nužno $\omega_u = \omega_x$. Štoviše, gore imamo jednostavan primjer gdje ta veza *nije* identitet. //

Koordinatni prikaz povlačenja i guranja. Promatramo glatko preslikavanje $F : M \to N$ s lokalnim koordinatnim sustavima $(O, \{x^\mu\})$ na M i $(V, \{y^\nu\})$ na N.

$$A = A^\mu \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ , \quad Z = (F_* A) = Z^\mu \, \frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

$$Z^\nu = Z(y^\nu) = (F_* A)(y^\nu) = A(y^\nu \circ F) = A^\mu \, \frac{\partial (y^\nu \circ F)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \, A^\mu$$

$$\alpha = F^* \omega \ , \quad F_* \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(F_* \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\sigma} \, \delta^\sigma{}_\mu \, \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \, \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

$$\alpha_\mu = \alpha(\partial^x_\mu) = (F^* \omega)(\partial^x_\mu) = \omega(F_* \partial^x_\mu) = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \, \omega(\partial^y_\nu) = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} \, \omega_\nu$$

Primjer|i 3.24. Projekcija $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x, y)$. Tada je za svaki $V \in T_p\mathbb{R}^3$ guranje $F_{*,p}$ samo projekcija, $(F_* V)^\mu = (V^x, V^y)$. Nadalje, ako kružnicu $\mathbb{S}^1$ smjestimo u ravninu $\mathbb{R}^2$ pomoć u preslikavanja $F : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, $F(\varphi) = (a \cos\varphi, a \sin\varphi)$, tada povlačenjem elemenata baze kotangentnog prostora dobivamo $F^* \mathrm{d}x = -a \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$ i $F^* \mathrm{d}y = a \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi$. //

3.6 Krivulje na mnogostrukostima

Definicija 3.25. Neka je M glatka m-mnogostrukost, $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $\gamma : \langle a, b\rangle \to M$ glatko preslikavanje. U svakoj točki $p \in \gamma(\langle a, b\rangle) \subseteq M$ možemo definirati tangentan vektor $T \in T_pM$, preko njegovog djelovanja na funkciju $f \in C^\infty_p(M)$,

$$T(f) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} \ , \tag{3.16}$$

gdje je t standardna koordinata na intervalu $\langle a, b\rangle$. Često se koristi skraćeni zapis $T = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nije teško pronaći komponente ovako definiranog tangentnog vektora u lokalnom koordinatnom sustavu $(O_p, \{x^\mu\})$,

$$T^\mu = T(x^\mu) = \frac{\mathrm{d}(x^\mu \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.17}$$

Ponekad se kompozicija $(x^\mu \circ \gamma)(t)$ skraćeno zapisuje samo kao $x^\mu(t)$, pa je $T^\mu = \dot{x}^\mu$.

Primjer|i 3.26. Ako je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadana s $\gamma(t) = (t, t^2)$, tada za svaki $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$T = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \, \frac{\partial}{\partial y} \in T_{\gamma(t)} M \,.$$

//

Teorem 3.27 (postojanje integralne krivulje). *U svakoj točki $p \in M$ mnogostrukosti M i za svaki tangentan vektor $T \in T_p M$ postoji pozitivan realan broj $\epsilon > 0$ i gladak put $\gamma : \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \to M$, takva da je $\gamma(0) = p$, a T je tangentan na dotičnu krivulju u točki p.*

Dokaz : Vidi [Tu11], Proposition 8.16. □

Reparametrizacija krivulje. Uvodimo novi parametar $s = \beta(t)$ i definiramo vektor W paralelan s reparametriziranim putom $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \beta^{-1}$

$$T(f) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma \circ \beta^{-1})}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, \frac{\mathrm{d}(f \circ \widetilde{\gamma})}{\mathrm{d}s} \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, W(f)$$

Dodatna literatura

- [Tu11]
- [Lee03]
- [BG80]

Zadaci

1. Zadano je preslikavanje $F : M \to N$. Možemo li pomoću njega "povući" tangentan vektor $Y|_q \in T_q N$ natrag na mnogostrukost M? Zašto?

4

Tenzori

Pored temeljnih objekata na mnogostrukostima, funkcija, tangentnih vektora i 1-formi, moguće je definirati i složenije objekte koje i dalje zadržavaju linearna svojstva. Na primjer, skalarni produkt tangetnih vektora (metrika) je bilinearno preslikavanje $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

4.1 Tenzori

Definicija 4.1. Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Za preslikavanje

$$f : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{K}$$

kažemo da je $\mathbb{K}$-**multilinearno preslikavanje** ako je $\mathbb{K}$-linearno u svakoj varijabli.

Primjer|i 4.2. Ako su $L_i : V_i \to \mathbb{K}$ (za $i \in \{1, \ldots, n\}$) linearni funkcionali, tada je preslikavanje $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{K}$ definirano s

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(v_i) \ ,$$

gdje su $\lambda_i \in \mathbb{K}$ skalari, $\mathbb{K}$-multilinearno preslikavanje. //

Primjer|i 4.3. Determinantu kvadratnih matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ možemo interpretirati kao $\mathbb{R}$-linearno preslikavanje. Naime, ako stupce matrice A promatramo kao komponente vektora, tada možemo pisati

$$\det(A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) A_{\pi(1)1} \cdots A_{\pi(n)n}$$

//

Definicija 4.4. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i V^* njegov dual. **Tenzor** tipa (r, s) je $\mathbb{K}$-multilinearno preslikavanje

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \to \mathbb{K}$$

U kontekstu mnogostrukosti podrazumijevamo da su $V = T_pM$ i $V^* = T_p^*M$ nad poljem $\mathbb{R}$. Vektorski prostor tenzora tipa (r,s) u točki $p \in M$ označavamo s $\mathscr{T}_s^r|_p$. Tangentan vektor je tenzor tipa $(0,1)$, a dualni vektor tenzor tipa $(1,0)$.

Komentar 4.5. Neformalno, **skalarno polje** je tenzor tipa $(0,0)$, odnosno preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$. Međutim, sa tenzorskim *poljima* ćemo se podrobnije upoznati malo kasnije. //

Definicija 4.6. **Kroneckerov tenzor** ili samo kratko **Kronecker** je tenzor tipa $(1,1)$, definiran s

$$\delta(\omega, X) \equiv \omega(X) = \langle \omega, X \rangle \ . \tag{4.1}$$

Komentar 4.7. Primjetimo, fiksiramo li prvu varijablu u Kroneckerovom tenzoru, imamo preslikavanje $\delta(X, \ ) : T_p^*M \to \mathbb{R}$ koje ništa drugo doli sam vektor X. Naime, za svaki $\omega \in T_p^*M$ imamo

$$X(\omega) = \omega(X) = \delta(\omega, X)$$

Stoga, $\delta(\ , X) = X$ i, analogno, $\delta(\omega, \ ) = \omega$. Vezu Kroneckerovog tenzora s Kroneckerovim simbolom δ^μ_ν ćemo opravdati u narednom podpoglavlju. //

Primjer|i 4.8. Ovdje možemo spomenuti nekoliko fizikalno važnih tenzora s kojima ćemo se kasnije detaljnije pozabaviti. Tenzori tipa $(0,2)$ su sveprisutni: elektromagnetsko polje opisano je tenzorom F, svojstva različitih polja sažeta su u tzv. tenzoru energije i impulsa T, a geometrija prostorvremena opisana je prostornovremenskom metrikom g. Tenzor inercije I tipa $(1,1)$ povezuje tangentne vektore zamaha L i kutne brzine ω krutog tijela preko $L = I(\ , \omega)$. Nešto složeniji objekt je Riemannov tenzor R tipa $(1,3)$ koji opisuje zakrivljenost prostorvremena. //

Tenzorski produkt.

$$(u \otimes v)(\alpha, \beta) = u(\alpha) \cdot v(\beta) = (\alpha \otimes \beta)(u, v)$$
$$(u \otimes \omega)(\alpha, X) = u(\alpha) \cdot \omega(X)$$
$$(u \otimes v \otimes w)(\alpha, \beta, \gamma) = u(\alpha) \cdot v(\beta) \cdot w(\gamma)$$

i analogno za složenije produkte. Na primjer, za tenzorski produkt tenzora S tipa (i,j) i tenzora T tipa (k,ℓ) imamo

$$\begin{aligned}(S \otimes T)(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i+k)}, X_{(1)}, \dots, X_{(j+\ell)}) &= \\ = S(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}, X_{(1)}, \dots, X_{(k)}) &\cdot \\ \cdot\, T(\omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(i+k)}, X_{(j+1)}, \dots, X_{(j+\ell)})\end{aligned}$$

Komentar 4.9. Tenzorski produkt općenito *nije* simetričan, $S \otimes T \neq T \otimes S$. //

4.2 Komponente i koordinatne transformacije

Baze i komponente. Baza tenzora tipa (r, s)

$$\{\partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_s}\}$$

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \, \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_s}$$

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = T(\mathrm{d}x^{\mu_1}, \cdots, \mathrm{d}x^{\mu_r}, \partial_{\nu_1}, \cdots, \partial_{\nu_s})$$

Na primjer, Kroneckerov tenzor δ ima komponente

$$\delta^\mu{}_\nu = \delta(\mathrm{d}x^\mu, \partial_\nu) = \langle \mathrm{d}x^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$$

gdje je su s krajnje lijeve strane jednakosti komponente Kroneckerovog tenzora δ, a s krajnje desne strane standardni Kroneckerov simbol! Dakle, time je opravdan naziv tenzora, a ujedno smo i pokazali kako ovaj tenzor ima iste komponente u svim koordinatnim sustavima (naime, 1 kada je vrijednost indeksa jednaka i 0 kada su različiti).

Komentar 4.10. Tradicionalno, gornji indeksi su poznati kao *kontravarijantni*, a donji indeksi kao *kovarijantni* indeksi. //

Koordinatne transformacije.

$$\begin{aligned} T^{\alpha' \ldots}{}_{\mu' \ldots} &= T(\mathrm{d}x^{\alpha'}, \ldots, \partial_{\mu'}, \ldots) = \\ &= (T^{\alpha \ldots}{}_{\mu \ldots} \, \partial_\alpha \otimes \cdots \mathrm{d}x^\mu \otimes \cdots)(\mathrm{d}x^{\alpha'}, \ldots, \partial_{\mu'}, \ldots) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdots T^{\alpha \ldots}{}_{\mu \ldots} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Operacija **kontrahiranja** $\mathsf{C}^p_q : (r, s) \to (r-1, s-1)$ je sumiranje po p-toj kontravarijantnoj varijabli i q-toj kovarijantnoj varijabli, odnosno sumiranje p-tog gornjeg i q-tog donjeg indeksa u komponentama,

$$\mathsf{C}^p_q T = \sum_{n=1}^m T(\ldots, \mathrm{d}x^{\sigma_n}, \ldots, \partial_{\sigma_n}, \ldots) \tag{4.3}$$

Dokaz da je operacija tenzorska …

$$\sum_{n=1}^m T(\ldots, \mathrm{d}x^{\mu_{n-1}}, \mathrm{d}x^{\sigma'_n}, \mathrm{d}x^{\mu_{n+1}}, \ldots, \partial_{\nu_{n-1}}, \partial_{\sigma'_n}, \partial_{\nu_{n+1}}, \ldots) =$$

$$= \sum_{n=1}^m \frac{\partial x^{\sigma'_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\sigma'_n}} T(\ldots, \mathrm{d}x^{\mu_{n-1}}, \mathrm{d}x^{\alpha_n}, \mathrm{d}x^{\mu_{n+1}}, \ldots, \partial_{\mu_{n-1}}, \partial_{\beta_n}, \partial_{\mu_{n+1}}, \ldots) =$$

$$= \sum_{n=1}^m T(\ldots, \mathrm{d}x^{\mu_{n-1}}, \mathrm{d}x^{\alpha_n}, \mathrm{d}x^{\mu_{n+1}}, \ldots, \partial_{\mu_{n-1}}, \partial_{\alpha_n}, \partial_{\mu_{n+1}}, \ldots)$$

4.3 Apstraktni indeksi

Zapis **apstraktnim indeksima** (abstract index notation). Umjesto "bezindeksnog" zapisa koristimo mala slova latinske abecede kako bi naznačili *tip* tenzora, poput npr. $T^{ab}{}_{c}$, tenzora T tipa $(2,1)$. Valja posebno naglastiti da ovo *nisu* komponente tenzora. Kada želimo zapisati komponente promatranog tenzora u nekoj specifičnoj bazi, tada koristimo mala slova grčkog alfabeta, npr. $T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$.

Na primjer, kontrahiranje drugog i petog indeksa ćemo zapisati kao

$$T^{ab}{}_{c} \equiv T^{azb}{}_{cz}$$

Jednakost među komponentama dva matematička *objekta* u jednoj konkretnoj bazi, odnosno koordinatnom sustavu ne povlači nužno jednakost u ostalim bazama, osim ako posrijedi nije jednakost između tenzora istog tipa. Na primjer, ako su $A^a \in T_pM$ i $\omega_a \in T_p^*M$, takvi da su im komponente jednake u nekom specifičnom koordinatnom sustavu, $A^\mu = \omega_\mu$, tada to općenito neće više neće vrijediti u ostalim koordinatnim sustavima jer se komponente tangentnih vektora i 1-formi ne transformiraju na jednak način. S druge strane, ako su $A^a, B^a \in T_pM$, takvi da u jednom koordinatnom sustavu $(O, \{x^\mu\})$ vrijedi $A^\mu = B^\mu$, tada će jednakost među njihovim komponentama vrijediti i u svim ostalim koordinatnim sustavima $(V, \{y^\nu\})$, gdje je $V \subseteq O$. Štoviše, u tom slučaju možemo pisati tenzorsku jednakost (pomoću apstraktnih indeksa) $A^a = B^a$ koja vrijedi barem na skupu O.

4.4 Simetrije tenzora

Simetrizacija i **antisimetrizacija**.

$$T_{(a_1 \dots a_n)} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(n)}}$$

$$T_{[a_1 \dots a_n]} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi)\, T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(n)}}$$

gdje π označava redni broj permutacije indeksa, a $\pi(i)$ broj pridružen permutacijom broju i (sumacija ide po svim permutacijama indeksa tenzora T). Ako želimo anti/simetrizirati dio indeksa onda koristimo zapis poput

$$T^{(abc)}{}_{[d|e|f]}$$

u kojem su tri indeksa $\{a, b, c\}$ simetrizirani, dva indeksa $\{d, f\}$ antisimetrizirani, pri čemu je indeks e izostavljen (što je naglašeno upotrebom vertikalnih linija).

Rastav tenzora tipa $(0,2)$ na simetričan i antisimetričan dio,

$$T_{ab} = \frac{1}{2}\left(T_{ab} + T_{ba}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ab} - T_{ba}\right) = T_{(ab)} + T_{[ab]}$$

Definicija 4.11. Za tenzor tipa $(0,2)$ kažemo da je

(s) **simetričan** ako vrijedi $S_{ba} = S_{ab}$, odnosno $S_{(ab)} = S_{ab}$;

(a) **antisimetričan** ako vrijedi $A_{ab} = -A_{ba}$, odnosno $A_{[ab]} = A_{ab}$.

Moguća je situacija u kojoj je tenzor anti/simetričan samo u nekim posebnim podskupovima indeksa, poput npr. tenzora

$$T^{abc}{}_{de} = T^{(abc)}{}_{[de]}$$

koji je simetričan u prva tri indeksa, a antisimetričan u zadnja dva indeksa.

Teorem 4.12. *Ako je S_{ab} simetričan, a A^{ab} antisimetričan tenzor, tada je*

$$S_{ab} A^{ab} = 0\ . \tag{4.4}$$

Općenitije, rezultat kontrahiranja dva para tenzorskih indeksa, među kojima je jedan simetričan, a drugi antisimetričan, je nula.

DOKAZ : Koristeći pretpostavljene simetrije indeksa i preimenovanje indeksa po kojima se sumira, imamo

$$S_{ab} A^{ab} = S_{ba} A^{ab} = -S_{ba} A^{ba} = -S_{ab} A^{ab}$$

odakle slijedi tvrdnja. □

Generaliziran Kroneckerov tenzor δ definiramo antisimetriziranjem

$$\delta(\alpha, \beta, u, v) = \langle \alpha, u \rangle \langle \beta, v \rangle - \langle \beta, u \rangle \langle \alpha, v \rangle$$

i analogno za veći broj argumenata. Zapisano pomoću apstraktnih indeksa,

$$\delta^{a_1 \cdots a_n}_{b_1 \cdots b_n} = n!\, \delta^{a_1}{}_{[b_1} \cdots \delta^{a_n}{}_{b_n]} \tag{4.5}$$

Teorem 4.13. *Kontrakcijom indeksa u generaliziranom Kroneckerovom tenzoru dobijemo*

$$\delta^{a_1 \cdots a_k b_{k+1} \cdots b_n}_{a_1 \cdots a_k c_{k+1} \cdots c_n} = \binom{m-n+k}{k} k!\, \delta^{b_{k+1} \cdots b_n}_{c_{k+1} \cdots c_n} \tag{4.6}$$

DOKAZ : Ako $(b_{k+1}, \dots, b_n)$ nije permutacija od $(c_{k+1}, \dots, c_n)$, obje strane jednadžbe su nula. U protivnom vrijedi sljedećih nekoliko tvrdnji:

(1) svaki pojedinačni član u sumi s lijeve strane ima isti predznak kao i generaliziran Kroneckerov tenzor s desne strane;

(2) $\{a_1, \dots, a_k\}$ sadrži k indeksa koji poprimaju vrijednosti iz skupa od $m - n + k$ indeksa (u kojem su svi osim onih fiksiranih u skupu $\{b_{k+1}, \dots, b_n\}$);

(3) članovi sume s permutiranim indeksima iz skupa $\{a_1, \dots, a_k\}$ doprinose istim predznakom (jer se radi o istoj permutaciji gornjih i donjih indeksa), pa otuda faktor $k!$.

□

4.5 Povlačenje i guranje tenzora

Ako općeniti tenzor želimo povući, odnosno pogurati, s jedne u drugu točku tada će nam biti potrebno preslikavanje koje je bijekcija (jer je smjer premještanja suprotan ovisno o tipu indeksa).

Definicija 4.14. Neka su M i N glatke mnogostrukosti, a $F : M \to N$ difeomorfizam. Tada definiramo $F^* : \mathscr{T}^r_s|_{F(p)} \to \mathscr{T}^r_s|_p$ preko

$$(F^*_p(T|_{F(p)}))(\omega|_p, \dots, X|_p, \dots) \equiv \equiv T|_{F(p)}\big((F^{-1})^*_{F(p)}(\omega|_p), \dots, F_{*,p}(X|_p), \dots\big) . \tag{4.7}$$

Pretpostavimo da je točka p pokrivena koordinatnom kartom $(O, \{x^\alpha\})$, a točka $F(p)$ koordinatnom kartom $(V, \{y^\sigma\})$. Tada koordinatne komponente povučenog tenozora glase

$$(F^*T)^{\alpha_1 \cdots}{}_{\beta_1 \dots} = \frac{\partial (F^{-1})^{\alpha_1}}{\partial y^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial F^{\tau_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots T^{\sigma_1 \cdots}{}_{\tau_1 \dots} . \tag{4.8}$$

Dodatna literatura

- [Lee03]
- [Tu11]
- [BG80]

Zadaci

1. Dokažite da operacije simetrizacije i antisimetrizacije tenzora zadovoljavaju naredna svojstva:

   (a) dvostruka anti/simetrizacija nema učinka,

$$T_{[a_1 \cdots [a_{k_1} \cdots a_{k_p}] \cdots a_n]} = T_{[a_1 \cdots a_{k_1} \cdots a_{k_p} \cdots a_n]} \tag{4.9}$$

$$T_{(a_1 \cdots (a_{k_1} \cdots a_{k_p}) \cdots a_n)} = T_{(a_1 \cdots a_{k_1} \cdots a_{k_p} \cdots a_n)} \tag{4.10}$$

   (b) kombiniranje simetrizacije i antisimetrizacije daje nulu,

$$T_{[a_1 \cdots (a_{k_1} \cdots a_{k_p}) \cdots a_n]} = T_{(a_1 \cdots [a_{k_1} \cdots a_{k_p}] \cdots a_n)} = 0 \tag{4.11}$$

   (c) anti/simetrizacija kontrahiranih indeksa se može "seliti",

$$S_{(a_1 \cdots a_n)} T^{a_1 \cdots a_n} = S_{a_1 \cdots a_n} T^{(a_1 \cdots a_n)} \tag{4.12}$$

$$A_{[a_1 \cdots a_n]} T^{a_1 \cdots a_n} = A_{a_1 \cdots a_n} T^{[a_1 \cdots a_n]} \tag{4.13}$$

2.

5

Uvod u svežnjeve

Jednom kada smo definirali osnovne tenzorske strukture u točki mnogostrukosti, pitanje je kako ih proširiti na lokalne objekte, definirane na otvorenim skupovima. Malo konkretnije, kako definiramo *vektorsko polje*? Za početak, vektorsko polje na mnogostrukosti M podrazumjeva odabir vektora $X^a \in T_pM$ u svakoj točki $p \in M$. Na skupovnoj razini možemo jednostavno napraviti uniju ovih elemenata i nazvati ih vektorskim poljem. Međutim, mi želimo i nešto više od toga: zanima nas objedinjen geometrijski objekt u kojem "žive" sva vektorska polja koja možemo definirati na našoj mnogostrukosti. Ovo će nam omogućiti elegantno, geometrijsko uvođenje analize na vektorskim poljima (primjerice, definiciju glatkoće vektorskog polja), jednako kao što smo to radili i s funkcijama na početnoj mnogostrukosti. Dobra vijest je ta da je na uniji svih tangentih prostora $\bigcup_{p\in M} T_pM$ moguće na prirodan način definirati topologiju, tako da je konstruiran prostor glatka mnogostrukost.

5.1 Svežnjevi

Motivacija. Ponukani potragom za objedinjenim prostorom tangentnih prostora na mnogostrukosti možemo se osvrnuti i na nešto općenitiji problem: kako objediniti ultralokalno definirane prostore u globalno definiran objekt? Malo konkretnije, ako je u svakoj točki $b \in B$ nekog topološkog prostora B definiran prostor $F|_b$, tako da je svaki $F|_b$ izomorfan nekom "standardnom" prostoru F, kako sve to konzistentno pospojiti i izgraditi topološku strukturu na uniji $\bigcup_{b\in B} F|_b$?

Definicija 5.1. **Vlaknasti svežanj** je uređena četvorka (E, π, B, F) koju čine tri glatke mnogostrukosti, **totalni prostor** E, **bazni prostor** B i **vlakno** F, i neprekidna surjekcija (tzv. **projekcija**) $\pi : E \to B$, takva da svaka točka $b \in B$ ima okolinu O_b i homeomorfizam (tzv. **lokalna trivijalizacija**) $\psi_\beta : \pi^{-1}(O_b) \to O_b \times F$ za koji naredni dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(O_b) \arrow[r, "\psi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & O_b \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ O_b & \end{tikzcd}$$

pri čemu je $\pi_1 : O_b \times F \to O_b$ kanonska projekcija na prvi faktor, $\pi_1(a, f) = a$. U slučaju kada je projekcija π glatko preslikavanje, a sva preslikavanja ψ_β difeomorfizmi, govorimo o **glatkom vlaknastom svežnju**.

Komentar 5.2. Mi ćemo vlaknasti svežanj često oslovljavati skraćeno samo kao **svežanj**. Sastavni objekti koji tvore konstrukciju svežnja ponekad su zapisani u formi

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B\,,$$

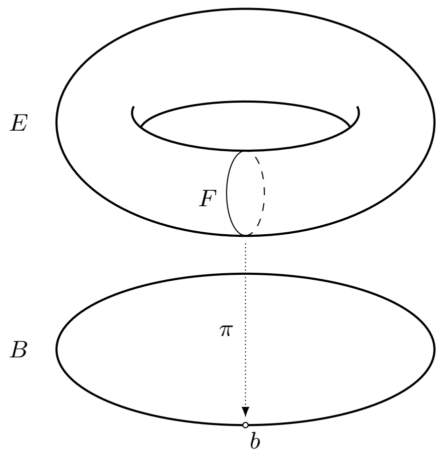
odnosno, ovisno o kontekstu, skraćeno kao $F \hookrightarrow E \to B$ ili $E \to B$. Za svaku točku $b \in B$ skup $E_b \equiv \pi^{-1}(\{b\})$ zovemo **vlakno nad točkom** b. //

Komentar 5.3. Literatura obiluje različitim inačicama definicija pojma svežnja. U najopćenitijoj verziji svežanj (eng. *bundle*) je uređena trojka (E, π, B) dva prostora E i B, i preslikavanja $\pi : E \to B$, gdje dodatna svojstva ovih objekata variraju ovisno o kontekstu gdje je struktura uvedena (vidi npr. [Ste99, Hus94]). //

Komentar 5.4. Kako bi izbjegli ponavljanje, podrazumjevamo da svim pojmovima uvedenima u kontekstu svežnjeva možemo dodati prefiks **glatki** (u pripadnom rodu) ako su sva preslikavanja koja se pojavljuju u definiciji dotičnog pojma glatka. //

Primjer|i 5.5. Kanonski primjer **trivijalnog svežnja** je onaj kod kojeg je totalni prostor direkti produkt baznog prostora i vlakna, $E = B \times F$, a projekcija je zadana s kanonskom projekcijom na prvi faktor u Kartezijevom produktu,

$\pi_1(b, f) = b$ za sve $(b, f) \in B \times F$. Na primjer, torus je Kartezijev produkt kružnica $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, a beskonačni plašt valjka Kartezijev produkt kružnice i pravca $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. //



Primjer|i 5.6. Kanonski primjer netrivijalnog svežnja je Möbiusova traka (vrpca) … //

Definicija 5.7. Neka je $F \hookrightarrow E \to B$ vlaknasti svežanj. **Lokalni prerez svežnja** je nekom otvorenom skupu $O \subseteq B$ je neprekidno preslikavanje $s : O \to E$ koje zadovoljava $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$. U slučaju kada je $O = B$, tada obično govorimo o **globalnom prerezu** ili samo kratko **prerezu svežnja**. Skup svih globalnih prereza nekog svežnja E označavamo s $\Gamma(E)$, dok skup svih lokalnih prereza na nekom otvorenom skupu $O \subseteq B$ označavamo s $\Gamma(O, E)$.

Komentar 5.8. Zahtjevom $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ garantiramo da prerez u svakoj točki $b \in B$ baznog prostora B odabire element totalnog prostora $s(b)$ "točno iznad" točke b. //

Definicija 5.9. **Vektorski svežanj** (E, π, B, V) **ranga** k je vlaknasti svežanj u kojem je vlakno V ujedno i k-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ te su restrikcije lokalnih trivijalizacija (O_b, ψ_β) na svaku točku $a \in O_b$, $\psi_\beta|_a : E_a \to \{a\} \times V$, izomorfizmi među vektorskim prostorima.

U slučaju kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ govorimo o *realnom* vektorskom svežnju, a u slučaju kada je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o *kompleksnom* vektorskom svežnju.

5.2 Strukturna grupa i glavni svežanj

Totalni prostor vlaknastog svežnja konstruiramo slično kao i sve ostale mnogostrukosti, lijepljenjem jednostavnih dijelova. U slučaju vlaknastih svežnjeva, elementarni dijelovi su Kartezijevi produkti $O_b \times F$ iz lokalne trivijalizacije koje nekako treba pospojiti u cijelinu, definiranjem preslikavanja koja lijepe takve dijelove "slagalice" na njihovim preklopima.

Definicija 5.10. Neka je $F \hookrightarrow E \to B$ vlaknasti svežanj te (O_α, ψ_α) i (O_β, ψ_β) dvije lokalne trivijalizacije s nepraznim presjekom $V_{\alpha\beta} = O_\alpha \cap O_\beta$. Homeomorfizmi $t_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : V_{\alpha\beta} \times F \to V_{\alpha\beta} \times F$ su poznate kao **prijelazne funkcije** svežnja.

Komentar 5.11. Iz definicije odmah slijedi da na nepraznim presjecima tri okoline lokalnih trivijalizacija, $O_\alpha \cap O_\beta \cap O_\gamma \neq \emptyset$, vrijedi

$$t_{\alpha\beta} \circ t_{\beta\gamma} = t_{\alpha\gamma}$$

odakle, promatrajući slučaj $\alpha = \gamma$, slijedi

$$t_{\beta\alpha} = t_{\alpha\beta}^{-1} \,.$$

//

Definicija 5.12. Za topološku grupu G kažemo da je **strukturna grupa** vlaknastog svežnja $F \hookrightarrow E \to B$ ako G djeluje, putem homomorfizma $\tau : G \to \mathrm{Bij}(F)$, efektivno na vlakno F te postoji familija lokalnih trivijalizacija $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$, takvih da je $\{O_\alpha\}$ otvoreni pokrivač baznog prostora B i za svaka dva skupa O_α i O_β s nepraznim presjekom postoji neprekidno preslikavanje $g_{\alpha\beta} : O_\alpha \cap O_\beta \to G$, takvo da je $(\tau \circ g_{\alpha\beta})(b) = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}|_b$ za svaki $b \in O_\alpha \cap O_\beta$.

Komentar 5.13. Pretpostavka o efektivnosti djelovanja garantira injektivnost homomorfizma τ, odakle slijedi da svakoj prijelaznoj funkciji $t_{\alpha\beta}|_b$ u točki $b \in O_\alpha \cap O_\beta$ odgovara *jedinstven* element strukturne grupe G. //

Komentar 5.14. Struktura (E, π, B, F, G) koja objedinjuje vlaknasti svežanj zajedno sa strukturnom grupom, u literaturi je ponekad poznata kao koordinatni svežanj (eng. *coordinate bundle*). //

Komentar 5.15. Vlaknati svežanj općenito ima puno različitih pripadnih strukturnih grupa. Naime, ako je strukturna grupa G podgrupa neke veće grupe K koja djeluje efektivno na vlakno, tada će i K biti strukturna grupa (jednostavno dodajemo nove grupne elemente, "neiskorištene" u prikazu lijepljenja lokalnih trivijalizacija). Obratno, početnu strukturnu grupu ponekad je moguće reducirati na manju podgrupu, iza čega se obično krije neka dodatna struktura na svežnju. //

Primjer|i 5.16. Strukturna grupa trivijalnog svežnja je trivijalna grupa $(\{e\}, \cdot)$. Strukturna grupa vektorskog svežnja (E, π, B, V) je podgrupa opće linearne grupe $\mathrm{GL}(V, \mathbb{K})$. //

Definicija 5.17. **Glavni svežanj** $P(B,G)$ baznog prostora B i strukturne topološke grupe G je vlaknasti svežanj u kojem je vlakno jednako strukturnoj grupi, $F = G$.

5.3 Uspoređivanje svežnjeva

Definicija 5.18. **Morfizam među vlaknastim svežnjevima** $E \to B$ i $E' \to B'$ je uređen par neprekidnih preslikavanja (Φ, φ), $\Phi : E \to E'$ i $\varphi : B \to B'$, takvih da naredni dijagram komutira,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow{\varphi} & B' \end{array}$$

Za morfizam među vlaknastim svežnjevima kažemo da je **izomorfizam** ako su preslikavanja Φ i φ homeomorfizmi.

Definicija 5.19. Za vlaknasti svežanj $F \hookrightarrow E \to B$ kažemo da je **trivijalan** ako je izomorfan s trivijalnim svežnjem $F \hookrightarrow B \times F \to B$.

Komentar 5.20. Možemo se pitati naredno pitanje: mogu li dva svežnja imati homeomorfne totalne prostore, ali svejedno ne biti izomorfni? Odgovor je afirmativan. Uzmimo bilo koje dvije nehomeomorfne mnogostrukosti M i N (na primjer, $M = \mathbb{R}^1$ i $N = \mathbb{S}^1$) i formirajmo dva trivijalna svežnja, $N \hookrightarrow E \to M$ i $M \hookrightarrow E' \to N$, s homeomorfnim totalnim prostorima, $E = M \times N$ i $E' = N \times M$. Očigledno, bazni prostori ovih svežnjeva, $B = M$ i $B' = N$, kao ni pripadna vlakna, $F = N$ i $F' = M$, *nisu* međusobno homeomorfni pa ovi svežnjevi ne mogu biti izomorfni. //

Definicija 5.21. **Homomorfizam među vektorskim svežnjevima** $E \to B$ i $E' \to B'$ je morfizam (Φ, φ), takav da je za svaku točku $b \in B$ restrikcija $\Phi|_{E_b} : E_b \to E'_{\varphi(b)}$ izomorfizam među vektorskim prostorima. Za homomorfizam među vektorskim svežnjevima kažemo da je **izomorfizam** ako je uređen par (Φ, φ) izomorfizam među vlaknastim svežnjevima.

Definicija 5.22. Za skup (glatkih) prereza $\{s_1, \dots, s_k\}$ vektorskog svežnja kažemo da je **linearno nezavisan** ako je u svakoj točki $b \in B$ bazne mnogostrukosti B skup vektora $\{s_1|_b, \dots, s_k|_b\}$ linearno nezavisan.

Teorem 5.23. *Glatki vektorski svežanj ranga n je trivijalan akko dopušta n linearno nezavisnih globalnih prereza.*

DOKAZ : Pretpostavimo da je vektorski svežanj $V \hookrightarrow E \to B$ trivijalan preko izomorfizma (Φ, φ). Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V. Tada možemo definirati n linearno nezavisnih prereza trivijalnog svežnja $\widetilde{s}_i : B \to B \times V$ preko $\widetilde{s}_i(b) = e_i$. Traženih n linearno nezavisnih globalnih prereza početnog vektorskog svežnja definiramo preko $s_i = \Phi^{-1} \circ \widetilde{s}_i \circ \varphi$, kompozicije glatkih preslikavanja. S obzirom da je $\Phi|_{E_b}$ izomorfizam vektorskih prostora u svakoj točki $b \in B$, konstruiran skup prereza je linearno nezavisan. Također, uz ovakvu definiciju imamo

$$\pi \circ s_i = \pi \circ \Phi^{-1} \circ \widetilde{s}_i \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \pi \circ \widetilde{s}_i \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ \varphi = \mathrm{id}_B \ .$$

Obratno, ako vektorski svežanj dopušta n linearno nezavisnih globalnih prereza $\{s_1, \dots, s_n\}$, tada nad svakom točkom $b \in B$ imamo bazu $\{s_1|_b, \dots, s_k|_b\}$ pa možemo konstruirati izomorfizam među vlaknima pridruživanjem elemenata baze e_i vrijednostima prereza $s_i|_b$. Konkretno, za svaki vektor $v = v^i s_i|_b$ definiramo preslikavanje $\Phi(b, v) = v^i e_i(b)$. Za provjeru glatkoće ovako konstruiranog izomorfizma vidi [Lee03], Proposition 10.19. □

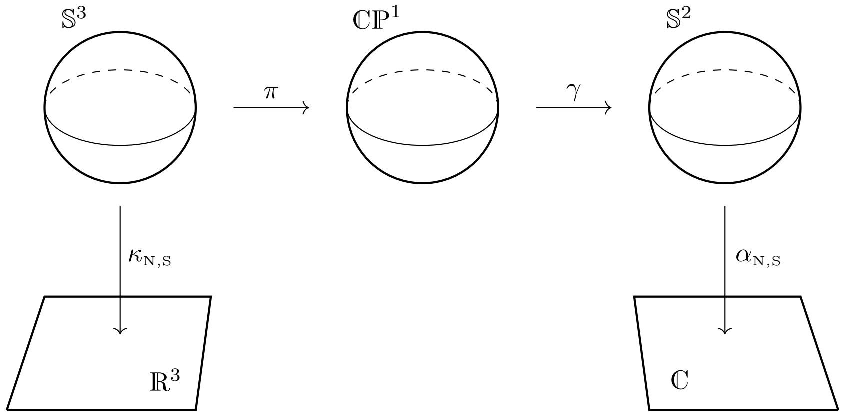
Teorem 5.24. *Vektorski svežanj je trivijalan akko mu je pripadni glavni svežanj trivijalan.*

5.4 HOPFOVI SVEŽNJEVI

Postoje samo četiri svežnja u kojima su vlakno, baza i totalni prostor sfere.

F	E	B
$\mathbb{S}^0$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{S}^1$
$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$
$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{HP}^1 \simeq \mathbb{S}^4$
$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{S}^{15}$	$\mathbb{OP}^1 \simeq \mathbb{S}^8$

Ovdje ćemo skicirati konstrukciju prvog netrivijalnog Hopfovog svežnja, otkrivenog 1931. godine. Totalni prostor je 3-sfera $\mathbb{S}^3$ s projekcijom π na bazni prostor $\mathbb{CP}^1$. Kako bi olakšali prikaz konstrukcije uvodimo pomoćna preslikavanja: stereografske projekcije $\kappa_\mathrm{N}, \kappa_\mathrm{S} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $\alpha_\mathrm{N}, \alpha_\mathrm{S} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ te identifikaciju Riemannove sfere sa 2-sferom $\gamma : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{S}^2$.



Ideja konstrukcije polazi od smještanja 3-sfere $\mathbb{S}^3$ u prostor $\mathbb{C}^2$, kao skupa označenog kompleksnim koordinatama $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ koje zadovoljavaju uvjet $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Projekcija

$$\pi(z, w) = [(z, w)] = \big\{(z', w') \mid (\exists\, \lambda \in \mathbb{C}^\times) :\ (z', w') = (\lambda z, \lambda w)\big\}$$

Nadalje,

- za $w \neq 0$ imamo $(\alpha_N \circ \gamma \circ \pi)(z, w) = z/w$,
- za $z \neq 0$ imamo $(\alpha_S \circ \gamma \circ \pi)(z, w) = w/z$.

Vlakna su kružnice $\mathbb{S}^1$ jer unutar jedne klase imamo $(z', w') = (\lambda z, \lambda w)$, pa je

$$1 = |z'|^2 + |w'|^2 = |\lambda z|^2 + |\lambda w|^2 = |\lambda|^2(|z|^2 + |w|^2) = |\lambda|^2 \ .$$

Dakle, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ koji obilježava elemente unutar jedne klase u $\mathbb{CP}^1$, dolazi s jedinične kružnice u kompleksnoj ravnini. Drugim riječima, totalni prostor $\mathbb{S}^3$ je parceliziran na disjunktne kružnice (vlakna).

5.5 Rekonstrukcija svežnjeva

Guranja i povlačenja, direktna suma, tenzorski produkt, …

5.6 Tangentni i kotangentni svežanj

Definicija. Skup $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ s kanonskom projekcijom $\pi : TM \to M$, definiranom s $\pi(X|_p) = p$. Priprema za topologiju: karte (O_α, ϕ_α) na m-mnogostrukosti M, skupovi $V_\alpha = \pi^{-1}(O_\alpha)$, uvodimo preslikavanja $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{2m}$, definirano s

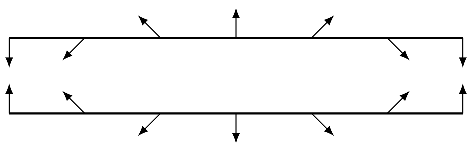
$$\psi_\alpha(X|_p) = \big(\phi_\alpha(p), (\phi_\alpha)_* X|_p\big)$$

tada su ψ_α karte i π je glatko preslikavanje. Topologija na TM je generirana otvorenim skupovima $O \subseteq V_\alpha$, takvima da je $\psi_\alpha(O)$ otvoren skup.

Usput, možemo pisati i kriptično

$$\psi_\alpha(X) = \big(\phi_\alpha(\pi(X)), (\phi_\alpha)_* X\big)$$

Primjer|i 5.25. Tangentni svežanj sfere $\mathbb{S}^2$ je netrivijalan. Naime, ako bi bio trivijalan postojala bi dva linearno nezavisna globalna prereza (dva linearno nezavisna vektorska polja). Međutim, ne postoji glatko neiščezavajuće tangentno vektorsko polje na sferi, tvrdnja poznata pod krilaticom kako je "sferu nemoguće počešljati". Stoga, u svakoj točki u kojoj jedno od vektorskih polja iščezava, ona neće biti linearno nezavisna. No, ako je tangentni svežanj $T\mathbb{S}^2$ netrivijalan, kako on uopće *izgleda*? S obzirom da je riječ o 4-mnogostrukosti, nije jednostavno nacrtati njegovu projekciju na dvodimenzionalnom papiru, pa ipak možemo se poslužiti nekim trikovima u prikazu. Prvo konstruiramo lokalne linearno nezavisne presjeke, na svakoj od polutki sfere, paralelnim pomicanjem početnog para ortogonalnih tangentnih vektora iz polova niz meridijane. Pri tom su prerezi na jednoj polutci zrcalni (s obzirom na ravninu ekvatora) u odnosu na prereze na drugoj polutci. Ključan korak imamo prilikom spajanja ova dva dijela tangentnog svežnja duž ekvatora.



//

Komentar 5.26. Kako intuitivno razumjeti činjenicu da nemaju sve mnogostrukosti trivijalne tangentne svežnjeve? Na primjer, netko bi mogao naivno rezonirati na sljedeći način: ako je tangentni svežanj *lokalno* trivijalan, zašto onda ne možemo spojiti sve ove lokalne Kartezijeve produkte identitetom na njihovim preklopima? Međutim, nitko nam ne garantira da tu "slagalicu" možemo *globalno* konzistentno složiti. //

Teorem 5.27 (Jedinstvenost tangentnog svežnja). *Ako su glatke mnogostrukosti $(M, \mathcal{A})$ i $(M', \mathcal{A}')$ difeomorfne, tada postoji glatki izomorfizam među pripadnim tangentnim svežnjevima TM i TM'.*

DOKAZ : Ako je $F : M \to N$ difeomorfizam, tada je i $F_* : TM \to TN$, uz $F_*(p, X|_p) = (F(p), F_* X|_p)$, difeomorfizam s inverzom $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$ (vidi [Lee03], Proposition 3.21, Corollary 3.22 i Example 10.28a). □

Definicija 5.28. **Vektorsko polje** na mnogostrukosti M je prerez tangentnog svežnja TM. Analogno definiramo i polja tenzora drugog tipa.

Definicija 5.29. Za glatku m-mnogostrukost M kažemo da je **paralelizabilna** ako njen tangentni svežanj TM dopušta m linearno nezavisnih globalnih prereza.

Kao specijalan slučaj teorema 5.23 imamo naredni korolar.

Teorem 5.30. *Glatka mnogostrukost je paralelizabilna akko joj je tangentni svežanj trivijalan.*

Dodatna literatura

- [Ste99], stari klasik o svežnjevima
- [MS74], uvod u svežnjeve s fokusom na njihovu klasifikaciju putem karakterističnih klasa
- [Hus94], detaljniji pregled svežnjeva s naglaskom na perspektivu iz teorije kategorija

Zadaci

1.

6

Tenzorska polja

6.1 Guranje vektorskih polja

Ranije smo uveli pojam "guranja" tangentnih vektora, iz jedne u drugu točku. Konkretno, svako *glatko* preslikavanje $F : M \to N$ među glatkim mnogostrukostima M i N u svakoj točki $p \in M$ inducira preslikavanje $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$. Možemo li istu konstrukciju upotrijebiti i na vektorskim *poljima*, jednostavno tako da upotrijebimo guranje F_* u svakoj točki domene? Načelno da, ali postoji jedna dodatna pretpostavka o preslikavanju F koju ćemo pri tom morati dodati. Naime, ako F nije injekcija, pa postoje dvije različite točke $p, q \in M$, takve da je $F(q) = F(p)$, tada nema garancije da će za svako vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(M)$ vrijediti $F_*X|_p = F_*X|_q$. Isto tako, ako F nije surjekcija, tada pogurano polje F_*X neće biti definirano u svim točkama mnogostrukosti N. Stoga, guranje vektorskih polja je u pravilu definirano samo s obzirom na *difeomorfizme* $F : M \to N$.

6.2 Liejeva zagrada

Definicija 6.1. **Komutator** (**Liejeva zagrada**) glatkih vektorskih polja X^a i Y^a je vektorsko polje $[X,Y]^a$, definirano preko

$$[X,Y](f) \equiv X(Y(f)) - Y(X(f)) \,. \tag{6.1}$$

Komentar 6.2. Naravno, prvo se treba uvjeriti da jednadžba (6.1) uistinu definira tangentno vektorsko polje. $\mathbb{R}$-linearnost odmah slijedi iz $\mathbb{R}$-linearnosti vektorskih polja X^a i Y^a. Stoga, valja provjeriti Leibnizovo pravilo: za sve $f, g \in C^\infty(M)$ u proizvoljnoj točki $p \in M$ imamo

$$[X,Y]|_p(fg) = X|_p(Y(fg)) - Y|_p(X(fg)) =$$

$$= X|_p(Y(f)g + fY(g)) - Y|_p(X(f)g + fX(g)) =$$

$$= X|_p(Y(f))g(p) + Y|_p(f)X|_p(g) + X|_p(f)Y|_p(g) + f(p)X|_p(Y(g)) -$$

$$-Y|_p(X(f))g(p) - X|_p(f)Y|_p(g) - Y|_p(f)X|_p(g) - f(p)Y|_p(X(g)) =$$
$$= [X,Y]|_p(f)g(p) + f(p)[X,Y]|_p(g) \ .$$

//

Komentar 6.3. Primjetimo, Liejeva zagrada općenito nije $C^\infty(M)$-bilinearna,

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X \ .$$

//

Teorem 6.4. $(\mathfrak{X}(M), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ *je Liejeva algebra nad poljem* $\mathbb{R}$.

Lema 6.5. *Neka je* $F : M \to N$ *difeomorfizam među glatkim mnogostrukostima* M *i* N, $X \in \mathfrak{X}(M)$ *i* $f \in C^\infty(N)$. *Tada je*

$$X(f \circ F) = (F_*X)(f) \circ F \ . \tag{6.2}$$

DOKAZ : U svakoj točki $p \in M$ imamo

$$(X(f \circ F))(p) = X|_p(f \circ F) = (F_*X)|_{F(p)}(f) =$$
$$= \big((F_*X)(f)\big)(F(p)) = \big((F_*X)(f) \circ F\big)(p) \ .$$

□

Teorem 6.6 (Liejeva zagrada komutira s guranjem). *Neka je* $F : M \to N$ *difeomorfizam među glatkim mnogostrukostima* M *i* N. *Tada za sva glatka vektorska polja* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *vrijedi*

$$F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y] \ . \tag{6.3}$$

DOKAZ : Koristeći prethodnu lemu u svakoj točki $p \in M$ te za svaku glatku funkciju $f \in C^\infty(M)$ imamo

$$(F_*[X,Y]|_p)(f) = [X,Y]|_p(f \circ F) = X|_p(Y(f \circ F)) - Y|_p(X(f \circ F)) =$$
$$= X|_p((F_*Y)(f) \circ F) - Y|_p((F_*X)(f) \circ F) =$$
$$= \big((F_*X)((F_*Y)(f) \circ F)\big)(p) - \big((F_*Y)((F_*X)(f) \circ F)\big)(p) =$$
$$= [F_*X, F_*Y]|_{F(p)}(f)$$

□

6.3 ČEŠLJANJE MNOGOSTRUKOSTI

Poincaré-Hopfov teorem …

6.4 Karakterizacija tenzora

Tenzorsko polje T je prerez tenzorskog svežnja $\mathscr{T}^r_s(M)$, odnosno element skupa prereza $\Gamma(\mathscr{T}^r_s(M))$. Dakle, tenzorsko polje svakoj točki $p \in M$ pridružuje tenzor ranga (r,s). Nadalje, svako tenzorsko polje inducira preslikavanje

$$\widetilde{T} : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{r} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \Gamma(TM)}_{s} \to C^\infty(M)$$

definirano po točkama preko

$$\widetilde{T}(\omega, \dots, X, \dots)(p) \equiv T|_p\,(\omega|_p, \dots, X|_p, \dots)\,. \tag{6.4}$$

Kako je u svakoj točki $p \in M$ tenzor $T|_p$ $\mathbb{R}$-multilinearno preslikavanje, isto vrijedi i za pridruženu funkciju $\widetilde{T}$. Međutim, vrijedi i puno jača tvrdnja: preslikavanje $\widetilde{T}$ je $C^\infty(M)$-multilinearno. Naime, za svaku $f \in C^\infty(M)$ imamo

$$\widetilde{T}(f\omega, \dots, X, \dots)(p) = T|_p\,((f\omega)|_p, \dots, X|_p, \dots) =$$

$$= T|_p\,(f(p)\omega|_p, \dots, X|_p, \dots) = f(p)\,T|_p\,(\omega|_p, \dots, X|_p, \dots) =$$

$$= (f\widetilde{T}(\omega, \dots, X, \dots))(p)\,,$$

gdje smo u prvom i zadnjem koraku koristili definiciju preslikavanja T, u drugom koraku definiciju množenja polja 1-forme s funkcijom, a u trećem $\mathbb{R}$-multilinearnost tenzora $T|_p$. Analogno zaključivanje vrijedi i za sve ostale argumente.

U praksi često nailazimo na obratnu situaciju: zadano je $C^\infty(M)$-multilinearno preslikavanje $\widetilde{T}$ i mi se pitamo postoji li pripadno tenzorsko polje koje ga inducira na način kako je to gore opisano. Afirmativni odgovor daje naredni rezultat.

Teorem 6.7. *Neka je M glatka mnogostrukost. Preslikavanje*

$$\widetilde{T} : (\Gamma(T^*M))^r \times (\Gamma(TM))^s \to C^\infty(M)$$

je inducirano s glatkim tenzorskim poljem akko je $C^\infty(M)$-multilinearno.

Dokaz : Ako je preslikavanje $\widetilde{T}$ inducirano s glatkim tenzorskim poljem, tada prema diskusiji iznad slijedi da je nužno $C^\infty(M)$-multilinearno.

Obratno, pretpostavimo da je preslikavanje $\widetilde{T}$ iz teorema $C^\infty(M)$-multilinearno. Želimo prvo dokazati da u svakoj točki $p \in M$ broj $\widetilde{T}(\omega, \dots, X, \dots)(p)$ ovisi samo o vrijednostima varijabli *u toj točki*. Drugim riječima, ako su primjerice Y i Z dva vektorska polja takva da je $Y|_p = Z|_p$, onda je $\widetilde{T}(\dots, Y, \dots)(p) = \widetilde{T}(\dots, Z, \dots)(p)$. Dokaz provodimo u dva koraka:

- $\widetilde{T}$ djeluje lokalno. Neka je X glatko vektorsko polje koje iščezava na nekoj okolini O_p, odnosno $X|_q = 0$ za sve $q \in O_p$. Odaberimo pomoćnu glatku funkciju ψ s kompaktnim nosačem $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq O_p$, takva da je $\psi(p) = 1$. Tada je $\psi(a) X|_a = 0$ za sve $a \in M$ te imamo

$$0 = \widetilde{T}(\ldots, \psi X, \ldots)(p) = \psi(p)\, \widetilde{T}(\ldots, X, \ldots)(p)$$

odnosno $\widetilde{T}(\ldots, X, \ldots)(p) = 0$ za sve $p \in M$. Analogno zaključivanje možemo ponoviti za svaku od varijabli preslikavanja $\widetilde{T}$.

- $\widetilde{T}$ djeluje po točkama. Ako je X vektorsko polje koje iščezava u točki p, $X|_p = 0$, tada u koordinatnom sustavu centriranom u točki p imamo $X = X^\mu \partial_\mu$ uz $X^\mu(0) = 0$. Prema lemama 2.26 i 10.12 u [Lee03] skup funkcija X^μ i skup vektorskih polja $\{\partial^a_\mu\}$ možemo glatko proširiti na cijeli M. Stoga, koristeći prvi dio ($\widetilde{T}$ djeluje lokalno, neovisno o navedenim proširenjima) i $C^\infty(M)$-multilinearnost, slijedi
$$\widetilde{T}(\ldots, X^\mu \partial_\mu, \ldots)(p) = X^\mu(p)\, \widetilde{T}(\ldots, \partial_\mu, \ldots)(p) = 0$$

Nadalje, preslikavanje $T|_p\,(\omega|_p, \ldots, X|_p, \ldots) = \widetilde{T}(\omega, \ldots, X, \ldots)(p)$ je $\mathbb{R}$-linearno, kao posljedica $C^\infty(M)$-multilinearnosti restringirane na točku p, te je stoga T tenzorsko polje. Konačno, glatkoća tenzorskog polja T slijedi iz propozicije 12.19 (d) u [Lee03]. □

Komentar 6.8. Valja imati na umu kako prisustvo derivacija u definiciji nekog tenzorskog polja čini zahtjev $C^\infty(M)$-multilinearnosti netrivijalnim. Na primjer, preslikavanje

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\,, \quad D(f)(x) = f'(x)$$

jest $\mathbb{R}$-linearno ali *nije* $C^\infty(M)$-linearno. //

Komentar 6.9. U slučaju kada imamo $C^\infty(M)$-multilinearno preslikavanje

$$\widetilde{T} : (\Gamma(T^*M))^r \times (\Gamma(TM))^s \to (\Gamma(T^*M))^{r'} \times (\Gamma(TM))^{s'}$$

mi ga odmah možemo reinterpretirati kao $C^\infty(M)$-multilinearno preslikavanje

$$\widehat{T} : (\Gamma(T^*M))^{r+r'} \times (\Gamma(TM))^{s+s'} \to C^\infty(M)$$

na njega primjeniti teorem 6.7 i zaključiti kako je i orginalno prelikavanje inducirano glatkim tenzorskim poljem. //

Dodatna literatura

-

Zadaci

1.

7

Liejeve grupe

7.1 Hibrid grupe i mnogostrukosti

Definicija 7.1. **Liejeva grupa** je grupa koja je ujedno i glatka mnogostrukost te su operacije grupnog množenja i grupni inverz glatka preslikavanja.

Definicija 7.2. Neka su G i H Liejeve grupe. Za preslikavanje $\Phi : G \to H$ kažemo da je **homomorfizam među Liejevim grupama** ako je glatki grupni homomorfizam, odnosno da je **izomorfizam među Liejevim grupama** ako je difeomorfizam i grupni izomorfizam.

Teorem 7.3 (Cartan). *Zatvorena podgrupa Liejeve grupe je Liejeva grupa.*

7.2 Matrične grupe

Liejeva grupa $GL(n; \mathbb{K})$. Topologija identifikacijom s $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Definicija 7.4. **Matrična grupa** je zatvorena podgrupa Liejeve grupe $GL(n; \mathbb{K})$.

Važni primjeri:

- **specijalna linearna grupa**

$$SL(n; \mathbb{K}) = \{A \in GL(n; \mathbb{K}) \mid \det(A) = +1\}$$

- **ortogonalna grupa** nad poljem $\mathbb{K}$

$$\mathcal{O}(n;\mathbb{K}) = \{A \in GL(n;\mathbb{K}) \mid (\forall\, x,y \in \mathbb{K}^n) : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle\}$$

  gdje je $\langle\ ,\ \rangle$ euklidski skalarni produkt na $\mathbb{K}^n$, $\langle x,y\rangle = x_1 y_1^* + \cdots + x_n y_n^*$ $O(n)$ za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U(n)$ za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i $Sp(n)$ za $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

- **ortogonalna grupa** $O(n)$ i **specijalna ortogonalna grupa** $SO(n)$,

$$O(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid AA^\mathsf{T} = \mathbb{1}_n\}\ , \quad SO(n) = O(n) \cap SL(n;\mathbb{R})$$

- **unitarna grupa** $U(n)$ i **specijalna unitarna grupa** $SU(n)$

$$U(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}_n\}\ , \quad SU(n) = U(n) \cap SL(n;\mathbb{C})$$

  Pazi: $O(n;\mathbb{C}) \neq U(n)$

- **simplektička grupa** $Sp(n)$

$$Sp(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{H}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}_n\}$$

Primjer|i 7.5. Grupa rotacija $SO(3)$. Svaku rotaciju u 3D prostoru možemo predstaviti uređenim parom $(\mathbf{n}, \phi)$ osi oko koje se rotira $\mathbf{n}$ i kuta ϕ za koji se rotira. Za prikaz svih rotacija nam je dovoljno uzeti $\phi \in [0,\pi]$ jer rotacija za $\pi+\alpha$ oko osi $\mathbf{n}$ ekvivalentna rotaciji za $\pi - \alpha$ oko osi $-\mathbf{n}$. Dakle, svaka točka unutar zatvorene kugle radijusa π predstavlja jednu rotaciju u 3D prostoru. Štoviše, antipodalni parovi točaka na rubu kugle su redundantni jer je rotacija za kut π oko osi $\mathbf{n}$ ekvivalentna rotaciji za kut π oko osi $-\mathbf{n}$. Preostaje, dakle, identificirati antipodalne točke na rubu kugle, čime dobivamo prostor homeomorfan projektivnom prostoru $\mathbb{RP}^3$. Vrijedi stoga $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$. //

Teorem 7.6. *Liejeve grupe $SU(2)$ i $Sp(1)$ su izomorfne i homeomorfne sa $\mathbb{S}^3$.*

DOKAZ : Skica. Neka je $A \in SU(2)$ zapisana u obliku

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

gdje su $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$. Pomnožimo li uvjet $+1 = \det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma$ s α^* i iskoristimo uvjet $1 = (A^\dagger A)_{11} = |\alpha|^2 + |\gamma|^2$, slijedi $\delta = \alpha^*$. Uvrštavanjem ove relacije u uvjet $0 = (A^\dagger A)_{12} = \alpha^*\beta + \gamma^*\delta$ slijedi da $\alpha \neq 0$ povlači $\gamma = -\beta^*$. Ako je $\alpha = 0$, tada je nužno i $\delta = 0$ pa iz uvjeta $1 = (A^\dagger A)_{11}$, $1 = (A^\dagger A)_{22}$ i $+1 = \det(A)$ slijedi opet $\gamma = -\beta^*$. Zaključno, svaku matricu $A \in SU(2)$ moguće je zapisati u obliku

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}\ .$$

Nadalje, korištenjem zapisa $\alpha = x + iy$, $\beta = z + iw$, vidimo da je svaka matrica $A \in SU(2)$ jedinstveno je zadana četvorkom realnih brojeva $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ koji zadovoljavaju relaciju

$$+1 = \det(A) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \ ,$$

koja nije ništa drugo doli jednadžba 3-sfere $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$.

Nadalje, imamo izomorfizam $\Psi_1 : Sp(1) \to SU(2)$ definiran preko

$$(a + bi) + (c + di)j \overset{\Psi_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

□

Skica klasifikacije Liejevih grupa

- povezane Abelove Liejeve grupe su izomorfne s $\mathbb{R}^r \times (U(1))^s$
- povezane kompaktne proste Liejeve grupe: $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ i iznimne grupe G_2, F_4, E_6, E_7 i E_8
- potpuna klasifikacija nekompaktnih Liejevih grupa nije poznata

Djelovanja Liejevih grupa na mnogostrukosti. Djelovanje $O(n)$ na $\mathbb{R}^n$ nije tranzitivno (orbite točaka euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ u ovom primjeru su n-sfere sa središtem u ishodištu). S druge strane, djelovanje $O(n)$ na $\mathbb{S}^{n-1}$, kao i djelovanje $SU(n)$ na $\mathbb{S}^{2n-1}$ te djelovanje $Sp(n)$ na $\mathbb{S}^{4n-1}$ jest tranzitivno.

7.3 Lijevo-invarijantna polja

Definicija 7.7. Kažemo da je vektorsko polje X Liejeve grupe G **lijevo-invarijantno** vektorsko polje ako za sve $g, h \in G$ vrijedi $(L_g)_* X|_h = X|_{gh}$.

Izostavljajući oznaku za točku u kojoj promatramo navedena vektorska polja, možemo reći da je vektorsko polje X Liejeve grupe G lijevo-invarijantno ako vrijedi $(L_g)_* X = X$ za sve $g \in G$.

Definicija 7.8. Za sve $X|_e \in T_e G$ definiramo pripadno lijevo-invarijatno vektorsko polje

$$\widetilde{X}|_g \equiv (L_g)_* X|_e \ . \tag{7.1}$$

Vektorski prostor svih lijevo-invarijatno vektorskih polja na Liejevoj grupi G označavamo s $\mathrm{Lie}(G)$.

Nije se teško uvjeriti da su ovako uvedena vektorska polja uistinu lijevo-invarijantna,

$$(L_g)_* \widetilde{X}|_h = (L_g)_* (L_h)_* X|_e = (L_g \circ L_h)_* X|_e = (L_{gh})_* X|_e = \widetilde{X}|_{gh} \ .$$

Također, valja uočiti da je $\widetilde{X}|_e = X|_e$.

Koristeći lijevo-invarijantne baze …

Teorem 7.9. *Sve Liejeve grupe su paralelizabilne.*

Komentar 7.10. Raoul Bott i John Milnor su 1958. godine dokazali da su $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ i $\mathbb{S}^7$ jedine paralelizabilne sfere. Odavde slijedi da (izuzev trivijalne $\mathbb{S}^0$) na sferama u ostalim dimenzijama nije moguće definirati Liejeve grupe. Međutim, ovo vrijedi i za sferu $\mathbb{S}^7$, na kojoj isto tako nije moguće definirati Liejevu grupu (iako je paralelizabilna). //

7.4 LIEJEVA ALGEBRA

Definicija 7.11. **Liejeva algebra** $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G je tangentni prostor T_eG u jediničnom elementu e, s Liejevom zagradom definiranom sve $X, Y \in T_eG$ preko

$$[X, Y] \equiv [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]|_e \tag{7.2}$$

Komentar 7.12. Imena pripadnih Liejevih algebri tradicionalno se pišu malim gotičkim slovima (npr. $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, itd.) ili, radi jednostavnosti, mali latiničnim slovima (npr. $\mathsf{gl}(n)$, $\mathsf{sl}(n)$, $\mathsf{so}(n)$, itd.) //

Teorem 7.13. $(\mathrm{Lie}(G), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ *je Liejeva algebra (nad poljem* $\mathbb{R}$*), izomorfna s Liejevom algebrom* $\mathfrak{g}$*.*

DOKAZ : Izomorfizam je dan preslikavanjem $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(G)$, zadanim s $\phi(X) = \widetilde{X}$. Posrijedi je bijekcija s inverzom $\phi^{-1}(\widetilde{X}) = \widetilde{X}|_e$. Izomorfnost preslikavanja slijedi korištenjem teorema 6.6,

$$\phi([X, Y])|_g = (L_g)_*[X, Y] = (L_g)_*[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]|_e =$$

$$= [(L_g)_*\widetilde{X}, (L_g)_*\widetilde{Y}]|_g = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]|_g = [\phi(X), \phi(Y)]|_g$$

□

Dodatna literatura

- [Tap05] izvrstan uvod u Liejeve matrične grupe na dodiplomskoj razini
- [Hal03]

Zadaci

1. Ako je $G < GL(n;\mathbb{R})$ kompaktna podgrupa, tada svi njeni elementi imaju determinantu $+1$ ili -1.

8

Prostorvrijeme

8.1 Metrički tenzor

Na mnogostrukostima definiramo jedan specijalan tenzor tipa $(0,2)$ koji ima važno geometrijsko i fizikalno značenje.

Definicija 8.1. Neka je M diferencijabilna mnogostrukost. **Pseudo-Riemannova metrika** g_{ab} je tenzor tipa $(0,2)$, koji je u svakoj točki $p \in M$

1. simetričan, $g(X,Y) = g(Y,X)$ za sve $X,Y \in T_pM$, i
2. nedegeneriran, $g(X,Y) = 0$ za sve $Y \in T_pM$ akko je $X = 0$.

Specialno, ako je pseudo-Riemannova metrika g pozitivno definitna, odnosno ako u svakoj točki $p \in M$ za sve $0 \neq X \in T_pM$ vrijedi $g(X,X) > 0$, tada kažemo da je g **Riemannova metrika**.

Drugim riječima, Riemannova metrika g je skalarni produkt na tangentnom prostoru T_pM. S druge strane, u općenitijem slučaju pseudo-Riemannove metrike rezultat $g(X,X)$ može poprimati različite predznake.

Na lokalnoj koordinatnoj karti $(O,\{x^\mu\})$ imamo

$$g = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$$

Tradicionalni način pisanja

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

Metrika g_{ab} je orginalno definirana kao bilinearno preslikavanje $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Međutim, metrika nam omogućuje i definiranje "prirodnog" *izomorfizma* među prostorima T_pM i T_p^*M. Konkretno, svaki tangentan vektor $v \in T_pM$ inducira dualni vektor $\omega_{(v)} = g(\ ,v) \in T_p^*M$ preko $u \mapsto g(u,v)$ za svaki $u \in T_pM$. Ekplicitnije, u zapisu s apstraktnim indeksima,

$$(\omega_{(v)})_a = g_{ab}v^b \in T_p^*M$$

Lako se provjeri da je ovako definirano preslikavanje $g(\,\cdot\,, v) : T_pM \to T_p^*M$ linearno pa metriku možemo promatrati kao linearni operator među vektorskim prostorima. Štoviše, po pretpostavci nedegeneriranosti znamo da je ovo preslikavanje i injektivno,

$$g(\;, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, u \in T_pM : \, g(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$$

pa je, po teoremu o rangu i defektu (za linearna preslikavanja među konačno-dimenzionalnim prostorima), i surjektivno.

S obzirom da imamo izomorfizam $g : T_pM \to T_p^*M$, znamo da postoji i njegov inverz $g^{-1} : T_p^*M \to T_pM$, kojeg u zapisu apstraktnih indeksa pišemo kao metriku s “podignutim” indeksima g^{ab} (u zapisu bez indeksa ponekad kao $g^\sharp$). Konkretno, svaki dualni vektor $\omega \in T_p^*M$ inducira vektor $v_{(\omega)} = g^\sharp(\;, \omega) \in T_pM$ preko $\alpha \mapsto g^\sharp(\alpha, \omega)$ za svaki $\alpha \in T_p^*M$. Eksplicitnije, u zapisu s apstraktnim indeksima,

$$(v_{(\omega)})^a = g^{ab}\omega_b \in T_pM$$

Konvencija je ovako dobivene tenzore obilježiti s istim slovom, pa imamo vizualno lako pamtljivo “podizanje” i “spuštanje” indeksa,

$$g_{ab}v^b = v_a \;, \quad g^{ab}\omega_b = \omega^a \;, \quad g_{ac}g^{bd}\,T^c{}_d = T_a{}^b \;, \quad g^{ce}g_{ad}T^{db}{}_e = T_a{}^{bc} \;, \;\ldots$$

Konačno, valja uočiti kako inverzna metrika nije ništa drugo doli “matrični inverz”,

$$g^\sharp(\;, g(\;, v)) = v$$

odnosno, u preglednijem zapisu s apstraktnim indeksima,

$$g^{ac}g_{cb} = \delta^a{}_b \tag{8.1}$$

Napomena: kod potpisivanja indeksa valja biti jasan, kao što je naznačeno na skici ispod,

$$T^{a}{}_{bc}{}^{de}$$

Komentar 8.2. Ovdje bi netko mogao uputiti formalnu zamjerku kod tenzora poput $T_a{}^b{}_c$ koji je multilinearno preslikavanje

$$T : T_pM \times T_p^*M \times T_pM \to \mathbb{R} \,,$$

s “izmješanim” poretkom argumenata u odnosu na oni kojeg smo naveli u samoj definiciji tenzora! Međutim, mi uvijek možemo uvesti pomoćni tenzor

$$\widetilde{T} : T_p^*M \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \,,$$

definiranom jednostavno preko

$$\widetilde{T}(\omega, u, v) \equiv T(u, \omega, v) \;, \quad \forall\, u, v \in T_pM \,,\; \forall\, \omega \in T_p^*M$$

odnosno

$$\widetilde{T}^b{}_{ac} \equiv T_a{}^b{}_c$$

odakle vidimo kako se ovdje načelno nemamo posla s nekakvim "novim tipom" matematičkog objekta. //

Kao i kod simetričnih matrica, uvijek je moguć odabir (koordinatne) baze u kojem metrika poprima dijagonalnu formu. Dodatnim reskaliranjem elemenata baze možemo u svakoj točki $p \in M$ mnogostrukosti M komponente metrike dovesti u tzv. **kanonsku formu**,

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1) \ .$$

Kako je po pretpostavci metrika nedegenerirana, u kanonskoj formi nemamo nula na dijagonali. Valja naglasiti kako općenito *nije* moguć odabir koordinatnog sustava na nekoj *okolini* O_p promatrane točke p u kojem će komponente metrike biti svedene na kanonsku formu (iako to neovisno možemo postići u svakoj točki mnogostrukosti odabirom različitih koordinatnih sustava specifičnih za promatranu točku). Svaki koordinatni sustav u kojem komponente metrike g_{ab} poprimaju kanonsku formu (barem u promatranoj točki $p \in M$) zovemo **lokalni inercijalni Kartezijev sustav** (skraćeno, LIKS).

Indeks metrike s je broj negativnih svojstvenih vrijednosti metričkog tenzora, odnosno negativnih vrijednosti u kanonskoj formi metrike. Obično pretpostavljamo da je metrika na mnogostrukosti definirana tako da joj je indeks u svakoj točki jednak. Na m-mnogostrukostima Riemannova metrika ima indeks $s = 0$ ili $s = m$, dok među pseudo-Riemannovim metrikama posebno izdvajamo (fizikalno značajan) **Lorentzov tip metrike**, onu kojoj je indeks $s = 1$ ili $s = m - 1$.

Komentar 8.3. Valja naglasiti kako izbor lokalnog inercijalnog Kartezijevog sustava u zadanoj točki $p \in M$ *nije jedinstven*. Primjerice, kod metrika Riemannovog tipa koordinatni sustav uvijek možemo rotirati (ove rotacije su elementi grupe $SO(m)$) bez da utječemo na kanonsku formu metrike, dok kod metrika Lorentzovog tipa koordinatni sustav uvijek možemo rotirati u prostornovremenskom smislu (ove rotacije i potisci su elementi grupe $SO(1, m-1)$) bez da utječemo na kanonsku formu metrike. //

Primjer|i 8.4.

- **Euklidska metrika** na $\mathbb{R}^3$ (Riemannova metrika), koja je u standardnoj bazi vezanoj za Kartezijev koordinatni sustav zadana s

  $$g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$$

  s analognim poopćenjem na Euklidsku metriku za $\mathbb{R}^n$. U sfernom koordinatnom sustavu,

  $$g = \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \, \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi$$

- **metrika Minkowskog** na $\mathbb{R}^4$ (pseudo-Riemannova metrika Lorentzovog tipa), koja je u standardnoj bazi vezanoj za Kartezijev koordinatni sustav zadana s

$$\eta = -\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z \tag{8.2}$$

//

Komentar 8.5. Napomena oko konvencija: "gravitacijska" $(-,+,+,\dots)$ vs "čestičarska" $(+,-,-,\dots)$. Mi ćemo uglavnom koristiti gravitacijsku konvenciju. //

Duljina krivulje s tangentnim vektorom v, parametrizirane parametrom λ, između točaka s $\lambda = a$ i $\lambda = b \geq a$ iznosi

$$\ell \equiv \int_a^b \sqrt{|g(v,v)|}\, d\lambda \tag{8.3}$$

8.2 Kauzalna struktura

Teorem 8.6. *Svaka glatka m-mnogostrukost M dopušta definiranje metrike Riemannovog tipa. Svaka glatka nekompaktna m-mnogostrukost M dopušta definiranje metrike Lorentzovog tipa. Glatka kompaktna m-mnogostrukost M dopušta definiranje metrike Lorentzovog tipa akko je $\chi(M) = 0$.*

U svakom slučaju kada je moguće definiranje neke od metrika u gornjem teoremu, izbor je krajnje nejednoznačan (moguće je definirati beskonačno mnogo različitih metrika dotičnog tipa) pa nam je potreban neki dodatni kriterij odabira. U matematici to može biti jednostavno izbor one metrike koja omogućuje izučavanje zanimljivih svojstava mnogostrukosti (i drugih objekata na njoj). S druge strane, u fizici metrika Lorentzovog tipa ima svoju fizikalnu interpretaciju u okviru opće teorije relativnosti (i njenih poopćenja) te je ona povezana s ostalim fizikalnim poljima (polja materije, baždarna polja) kroz jednadžbe polja.

Uređen par (M, g_{ab}) glatke m-mnogostrukosti M (gdje je $m \geq 2$) i metrike g_{ab} Lorentzovog tipa ćemo oslovljavati kao **mnogostrukost Lorentzovog tipa**. Tangentne vektore $v \in T_pM$ dijelimo na one

- **vremenskog tipa** ako je $g(v,v) < 0$,
- **svjetlosnog tipa** ako je $g(v,v) = 0$,
- **prostornog tipa** ako je $g(v,v) > 0$.

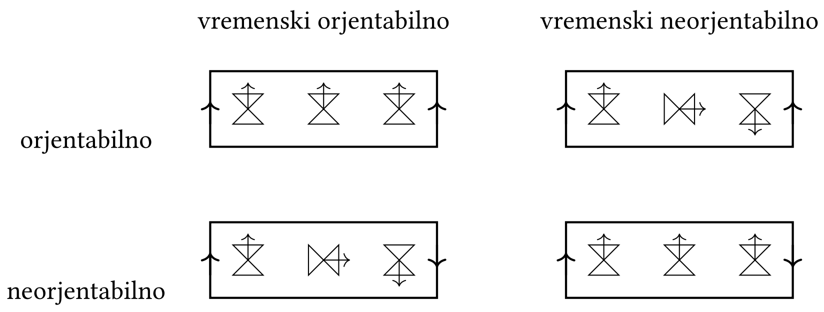
Za vektore kažemo da su **kauzalnog tipa** ako vrijedi $g(v,v) \le 0$, odnosno ako su vremenskog ili svjetlosnog tipa.

Teorem 8.7. *Neka je (M, g_{ab}) mnogostrukost Lorentzovog tipa. Relacija "$u \sim v$ akko $g(u,v) < 0$" među tangentnim vektorima vremenskog tipa u točki $p \in M$ je relacija ekvivalencije.*

Dakle, u svakoj točki $p \in M$ mnogostrukosti M Lorentzovog tipa skup tangentnih vektora vremenskog tipa je podijeljen u dvije klase ekvivalencije s obzirom na gore definiranu relaciju, $[u^a]$ i $[-u^a]$, koje zovemo **vremenski stošci**. Također, tangentne vektore $\ell^a \neq 0$ svjetlosnog tipa u svakoj točki $p \in M$ možemo razvrstati u dvije klase, ovisno o predznaku produkta $g(\ell, u)$. Dobivene klase zovu se **svjetlosni stošci**. Za mnogostrukost Lorentzovog tipa kažemo da je **izokrona** (**vremenski orijentabilna**) ako posjeduje neprekidno polje tangentnih vektora t^a vremenskog tipa. Ovo polje služi razlikovanju vremenskih stožaca, odnosno predstavlja "strijelu vremena" koja u svakoj točki razlikuje "budućnost" od "prošlosti". U slučaju kada je izokrona mnogostrukost vremenski orijentirana poljem t^a, u svakoj točki $p \in T_pM$ klasu tangentnih vektora $[t^a|_p]$ zovemo **budući vremenski stožac**, a klasu $[-t^a|_p]$ **prošli vremenski stožac**. Analogno, **budući svjetlosni stožac** i **prošli svjetlosni stožac** …

Neformalno, **prostorvrijeme** je uređen par (M, g_{ab}) povezane izokrone m-mnogostrukosti M Lorentzovog tipa i pripadne metrike g_{ab}. U ovoj definiciji se obično uključe i neke dodatne pretpostavke "tehničke naravi", poput glatkoći metrike i slično. Na primjer, specijalna teorija relativnosti definirana je na prostorvremenu Minkowskog $\mathbb{M}^4 = (\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ s metrikom Minkowskog η_{ab}.

Valja uočiti kako su orjentabilnost i vremenska orjentabilnost neovisni pojmovi, kao što je ilustrirano na crtežima ispod.



Komentar o zatvorenim vremenskim petljama (putovanje kroz vrijeme), kompaktno prostorvrijeme nužno sadrži zatvorene vremenske petlje, …

Zadaci

1. Ako je vektor t^a vremenskog tipa i vrijedi $t_a s^a = 0$, tada je s^a prostornog tipa.
2. Ako su u^a i v^a vektori vremenskog tipa i vrijedi $u_a v^a < 0$, tada su oba usmjereni u budućnost ili prošlost.
3. Ako su k^a i ℓ^a vektori svjetlosnog tipa i vrijedi $k_a \ell^a = 0$, tada su ova dva vektora proporcionalni (postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $\ell^a = \lambda k^a$). Ako je k^a vektor svjetlosnog tipa i za neki vektor v^a vrijedi $k_a v^a = 0$ tada je ili v^a prostornog tipa ili v^a svjetlosnog tipa i proporcionalan s k^a.

9

Kovarijantna derivacija i paralelni pomak

9.1 Kovarijantna derivacija

Motivacija. Jedan od temeljnih problema u izgradnji diferencijalne geometrije je definiranje operacije koja djeluje na tenzorska polja, kao rezultat izbacuje tenzorska polja i ponaša se poput derivacija s obzirom na zbrojene varijable (linearna je) i pomnožene varijable (poštuje Leibnizovo pravilo). U dijelu literature koja tenzorskom računu pristupa s fokusom na tenzorske komponente u koordinatnim sustavima i njihove transformacije, potreba za tenzorskom verzijom deriviranja motivira se polazeći od naredne opaske. Na primjer, ako dvije koordinatne karte, $(O, \{x^\mu\})$ i $(O', \{x^{\mu'}\})$ imaju neprazan presjek, tada su parcijalne derivacije komponenti vektorskog polja A^a u ova dva koordinatna sustava povezane preko

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} A^\beta \right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \partial_\nu A^\beta + \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} A^\beta \,.$$

Drugim riječima, ako za neki tenzor $T_a{}^b$ u početnom koordinatnom sustavu vrijedi $T_\mu{}^\alpha = \partial_\mu A^\alpha$, tada je općenito $T_{\mu'}{}^{\alpha'} \neq \partial_{\mu'} A^{\alpha'}$. Stoga, potrebna nam je neka poopćena derivacija tenzora koja se "ponaša tenzorski".

Definicija 9.1. Neka je M glatka mnogostrukost. **Usmjerena kovarijantna derivacija** je preslikavanje $\mathfrak{X}(M) \times \mathscr{T}^r_s(M) \to \mathscr{T}^r_s(M)$, $(X,T) \mapsto \nabla_X T$ (kovarijantna derivacija tenzorskog polja $T^{a\dots}{}_{b\dots}$ u smjeru vektorskog polja X^a), koje za sve $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $S, T \in \mathscr{T}^r_s(M)$ i $f \in C^\infty(M)$ zadovoljava

(ℓ1) $C^\infty(M)$-linearnost u prvoj varijabli,

$$\nabla_{X+Y} T = \nabla_X T + \nabla_Y T \ , \quad \nabla_{fX} T = f \nabla_X T$$

(ℓ2) linearnost u drugoj varijabli,

$$\nabla_X (S + T) = \nabla_X S + \nabla_X T$$

(L) Leibnizovo pravilo,

$$\nabla_X (S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes \nabla_X T$$

(s) derivacije skalara,

$$\nabla_X f = X(f)$$

(k) komutiranje s kontrakcijama,

$$\nabla_X (\mathsf{C}^p_q T) = \mathsf{C}^p_q \nabla_X T \ .$$

Komentar 9.2. Iz definicije odmah izlazi da je usmjerena kovarijantna derivacija $\mathbb{R}$-linearna u drugoj varijabli. Prvo, koristeći (ℓ2), (L) i (s), za svaku $f \in C^\infty(M)$ imamo

$$\nabla_X (f \otimes T) = (\nabla_X f) \otimes T + f \otimes \nabla_X T = X(f) T + f \nabla_X T \ .$$

Stoga, ako je f konstantna funkcija, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in M$, imamo $X(f) = 0$, odakle slijedi $\nabla_X (cT) = c \nabla_X T$. //

Lokalna egzistencija. Na području karte (O_α, ψ_α) možemo definirati diferencijalni operator

$$\nabla_X T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots} = X^\alpha \partial_\alpha T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots}$$

koji na promatranoj karti zadovoljava sva svojstva iz definicije usmjerene kovarijantne derivacije. Naravno, u skladu s opaskama iz motivacijskog uvoda, ovaj izraz u nekom drugom koordinatnom sustavu više neće imati formu parcijalne derivacije komponenti tenzora u novim koordinatama.

Jedinstvenost? Usmjerena kovarijantna derivacija, na način kako je definirana gore, općenito *nije* jedinstvena i potrebno je uključiti neka dodatne zahtijeve kako bi dobili jedinstven operator. S tim ciljem ćemo podrobnije pogledati neka dodatna svojstva …

Definicija 9.3. **Tenzor torzije** $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definiran je s

$$T(X,Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{9.1}$$

Torzija je $C^\infty(M)$-multilinearna,

$$T(fX,gY) = \nabla_{fX}(gY) - \nabla_{gY}(fX) - [fX,gY] =$$

$$= fX(g)Y + fg\nabla_X Y - gY(f)X + fg\nabla_Y X -$$

$$-fg[X,Y] - fX(g)Y + gY(f)X = fgT(X,Y)$$

pa je stoga $T_{ab}{}^c$ uistinu tenzorsko polje. Iz definicije odmah izlazi da je tenzor torzije antisimetričan u donja dva indeksa, $T_{(ab)}{}^c = 0$.

Komentar 9.4. S obzirom da eksperimentalne provjere daju stroge granice na postojanje neiščezavajuće torzije, u kontekstu gravitacijske fizike se najčešće pretpostavlja da je torzija identički nula. //

Definicija 9.5. Neka je $(O, \{x^\mu\})$ karta s pripadnom bazom koordinatnih vektora $\{\partial_\mu^a\}$. **Afina koneksija** $C^\alpha_{\mu\nu}$ kovarijantne derivacije ∇ je skup funkcija koje su koeficijenti u raspisu vektorskih polja $\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu$ u bazi $\{\partial_\mu^a\}$,

$$\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu = C^\alpha_{\mu\nu}\,\partial_\alpha\ . \tag{9.2}$$

Komentar 9.6. Koneksija je simetrična, $C^\alpha_{[\mu\nu]} = 0$, ako i samo ako torzija iščezava, $T_{ab}{}^c = 0$, jer vrijedi

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = (C^\alpha_{\mu\nu} - C^\alpha_{\nu\mu})\,\partial_\alpha\ .$$

//

Lema 9.7. *Neka je A^a glatko vektorsko polje i ω_a glatko polje 1-forme. Tada vrijedi*

$$\nabla_X A = X^\mu \left(\partial_\mu A^\sigma + C^\sigma_{\mu\nu} A^\nu\right) \partial_\sigma \tag{9.3}$$

$$\nabla_X \omega = X^\mu \left(\partial_\mu \omega_\sigma - C^\nu_{\mu\sigma} \omega_\nu\right) \mathrm{d}x^\sigma \tag{9.4}$$

Dokaz : Promatramo sve na nekoj koordinatnoj karti $(O, \{x^\mu\})$, $X^a = X^\mu \partial_\mu^a$

$$\nabla_X A = \nabla_{X^\mu \partial_\mu}(A^\nu \partial_\nu) = X^\mu \nabla_{\partial_\mu}(A^\nu \partial_\nu) = X^\mu \left((\partial_\mu A^\nu)\partial_\nu + A^\nu \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu\right) =$$

$$= X^\mu \left((\partial_\mu A^\nu)\partial_\nu + A^\nu C^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\right) = X^\mu \left(\partial_\mu A^\sigma + C^\sigma_{\mu\nu} A^\nu\right) \partial_\sigma\ .$$

Nadalje, kako je $\omega(A) = A^a \omega_a = \mathsf{C}^1_1(A \otimes \omega)$, imamo

$$\nabla_X \mathsf{C}^1_1(A \otimes \omega) = \mathsf{C}^1_1((\nabla_X A) \otimes \omega) + \mathsf{C}^1_1(A \otimes \nabla_X \omega)\ .$$

Primjetimo, vrijedi

$$\mathsf{C}^1_1\left((\partial_\mu)^a \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_b\right) = (\partial_\mu)^a \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_a = \delta^\nu_\mu \ , \quad \mathsf{C}^1_1\left((\partial_\mu)^a \otimes \alpha_b\right) = \alpha_\mu \ .$$

Specijalno, za $X^a = \partial^a_\mu$, $A^a = \partial^a_\sigma$ i $\omega_a = (\mathrm{d}x^\nu)_a$ imamo $\omega(A) = \delta^\nu_\sigma$ te

$$0 = \mathsf{C}^1_1\left(C^\alpha_{\mu\sigma}\,\partial_\alpha \otimes \mathrm{d}x^\nu + \partial_\sigma \otimes \nabla_{\partial_\mu}\mathrm{d}x^\nu\right) = C^\nu_{\mu\sigma} + (\nabla_{\partial_\mu}\mathrm{d}x^\nu)_\sigma \ ,$$

odakle odmah slijedi

$$\nabla_{\partial_\mu}\mathrm{d}x^\nu = -C^\nu_{\mu\sigma}\,\mathrm{d}x^\sigma \ .$$

Stoga, za općenite X^a i ω_a vrijedi

$$\nabla_X\omega = X^\mu\nabla_{\partial_\mu}(\omega_\nu\,\mathrm{d}x^\nu) = X^\mu\left((\partial_\mu\omega_\nu)\mathrm{d}x^\nu - \omega_\nu C^\nu_{\mu\sigma}\mathrm{d}x^\sigma\right) \ .$$

□

Analogno za općenito tenzorsko polje $T^{a_1\dots a_r}{}_{b_1\dots b_s}$ slijedi formula

$$\nabla_X T = X^\alpha\Bigg(\partial_\alpha T^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s} + \sum_{k=1}^{r} C^{\mu_k}_{\alpha\sigma}\,T^{\dots\sigma\dots}{}_{\nu_1\dots\nu_s} - \\ - \sum_{\ell=1}^{s} C^\tau_{\alpha\nu_\ell}\,T^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\dots\tau\dots}\Bigg)\,\partial_{\mu_1}\otimes\dots\otimes\partial_{\mu_r}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_s} \tag{9.5}$$

Definicija 9.8. Za svaku usmjerenu kovarijantnu derivaciju definiramo pripadnu **kovarijantnu derivaciju** $\nabla : \mathscr{T}^r_s(M) \to \mathscr{T}^r_{s+1}(M)$ preko

$$(\nabla T)(X,\omega,\dots,Y,\dots) \equiv (\nabla_X T)(\omega,\dots,Y,\dots) \ . \tag{9.6}$$

Komentar 9.9. U zapisu pomoću apstraktnih indeksa kovarijantnu derivaciju zapisujemo kao operator ∇_a (ovo je mala zloupotreba notacije jer kovarijantna derivacija sama za sebe nije nikakva 1-forma), te $\nabla_X = X^a\nabla_a$. //

Komentar 9.10. U literaturi se koriste i alternativne oznake za derivacije,

$$\partial_\mu T^\beta{}_\gamma = T^\beta{}_{\gamma,\mu} = T^\beta{}_{\gamma|\mu} \ , \quad \nabla_a T^b{}_c = T^b{}_{c;a} = T^b{}_{c\|a}$$

//

Teorem 9.11. *Kovarijantna derivacija zadovoljava naredna svojstva:*

$$[\nabla_a,\nabla_b]\,f = -T_{ab}{}^c\,\nabla_c f \tag{9.7}$$

$$[X,Y]^a = X^b\nabla_b Y^a - Y^b\,\nabla_b X^a - X^b Y^c\,T_{bc}{}^a \tag{9.8}$$

Dokaz : Komutator kovarijantnih derivacija na skalaru: za sve $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $f \in C^\infty(M)$ vrijedi

$$T(X,Y)(f) = T(X,Y)^b\nabla_b f = (X^a\nabla_a Y^b - Y^a\nabla_a X^b - [X,Y]^b)\nabla_b f =$$

$$= X(Y(f)) - Y^b X^a \nabla_a \nabla_b f - Y(X(f)) + Y^a X^b \nabla_a \nabla_b f - X(Y(f)) + Y(X(f)) =$$
$$= -X^a Y^b (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f$$

Druga jednadžba je samo definicija tenzora torzije zapisana pomoću kovarijantne derivacije ∇_a. □

Definicija 9.12. Za kovarijantnu derivaciju ∇_a kažemo da je kompatibilna s metrikom g_{ab} ako vrijedi $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Komentar 9.13. Algebarska posljedica ovog svojstva je ta da pod ovakvu kovarijantnu derivaciju možemo "uvući" metriku, npr.

$$g_{ab} \nabla_c X^b = \nabla_c (g_{ab} X^b) = \nabla_c X_a \; .$$

//

Teorem 9.14 (Koszulova formula). *Neka je ∇_a simetrična kovarijantna derivacija kompatibilna s metrikom g_{ab}. Tada za sve $X^a, Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(M)$ vrijedi*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \\ & - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{9.9}$$

Dokaz :

$$X(g(Y,Z)) = \nabla_X (g(Y,Z)) =$$
$$= (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Cikličnim zamjenama varijabli dobivamo

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) =$$
$$= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) =$$
$$= g(X,[Y,Z]) - g(Y,[Z,X]) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, \nabla_Y X) \; ,$$

odakle slijedi Koszulova formula. □

Teorem 9.15. *Kovarijantna derivacija s iščezavajućom torzijom i kompatibilna sa pseudo-Riemannovom metrikom g_{ab} je jedinstvena. Pripadnu koneksiju zovemo* **Christoffelov simbol** *(ili* **Levi-Civita koneksija***) i označavamo s $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Komponente Christoffelovog simbola su na svakoj koordinatnoj karti $(O, \{x^\mu\})$ dane s*

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \right) \; . \tag{9.10}$$

Dokaz : Pretpostavimo da su ∇_a i $\widetilde{\nabla}_a$ dvije kovarijantne derivacije s iščezavajućom torzijom i kompatibilne s pseudo-Riemannovom metrikom g_{ab}. Tada prema Koszulovoj formuli za sve $X^a, Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(M)$ vrijedi (primjetite da njena desna strana uopće ne ovisi o kovarijantnoj derivaciji)

$$g((\nabla_X - \widetilde{\nabla}_X) Y, Z) = 0 \; .$$

Nadalje, kako je metrika g_{ab} nedegenerirana, slijedi da je $(\nabla_X - \widetilde{\nabla}_X)Y = 0$ za sve $X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M)$. Drugim riječima, $\nabla_X = \widetilde{\nabla}_X$ za sve $X^a \in \mathfrak{X}(M)$.

Uvrštavanjem $X^a = \partial^a_\mu$, $Y^a = \partial^a_\nu$ i $Z^a = \partial^a_\beta$ u Koszulovu formulu dobivamo

$$2g_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \ .$$

Kontrahiranjem s inverznom metrikom $g^{\alpha\beta}$ i dijeljenjem s 2 dobivamo formulu (9.10). □

Komentar 9.16. Alternativna oznaka za Christoffelov simbol u starijoj literaturi je

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\}$$

//

Primjer|i 9.17. Komponente Christoffelovog simbola za Euklidsku metriku u različitim koordinatnim sustavima … //

Primjer|i 9.18. Izračunajmo komponente Christoffelovog simbola za metriku jedinične 2-sfere $\mathbb{S}^2$ u sfernom koordinatnom sustavu,

$$g = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$$

Komponente metrike i njenog inverza možemo zapisati u matričnom obliku,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \ , \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Primjenom formule (9.10) vidimo da je

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \ , \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \mathrm{ctg}\,\theta \ ,$$

dok sve ostale komponente iščezavaju. //

9.2 Paralelni transport

Definicija 9.19. Kažemo da je tenzorsko polje T paralelno transportirano duž vektorskog polja X ako zadovoljava **jednadžbu paralelnog transporta** vrijedi $\nabla_X T = 0$, odnosno, u zapisu s apstraktnim indeksima,

$$X^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}{}_{c_1 \dots c_\ell} = 0 \ . \tag{9.11}$$

Na primjer, ako želimo paralelno transportirati vektorsko polje V^a duž vektorskog polja X^a, moramo riješiti jednadžbu

$$X^a \nabla_a V^b = 0$$

odnosno

$$X^{\mu}\partial_{\mu}V^{\alpha} + X^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V^{\nu} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}V^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}X^{\mu}V^{\nu} = 0$$

Time možemo povezati tangentne vektore u različitim točkama mnogostrukosti. Promotrimo sada dva vektora, V^a i W^a, koji su paralelno transportirani duž integralne krivulje vektorskog polja X^a. Tada za kovarijantnu derivaciju kompatibilnu s metrikom vrijedi

$$\nabla_X(g(V,W)) = (\nabla_X g)(V,W) + g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W) = 0\,.$$

Drugim riječima, produkt među paralelno transportiranim vektorskim poljima je konstantan duž intergralnih krivulja polja X^a.

Primjer|i 9.20. Razmotrit ćemo paralelni transport tangentnih vektora na površini jedinične 2-sfere $\mathbb{S}^2$ po kružnici $\theta = \theta_0$.

Prirodan, najjednostavniji odabir parametra kružnice $\theta = \theta_0$ jest $\lambda = \varphi$. Tangentan vektor ove krivulje je stoga $X = \partial/\partial\varphi$. Jednadžba paralelnog pomaka za zadani vektor glasi

$$X^{\mu}\nabla_{\mu}A^{\alpha} = \nabla_{\varphi}A^{\alpha} = \partial_{\varphi}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\varphi}A^{\beta} = 0 \tag{9.12}$$

Podsjetimo se osnovnih podataka o metrici i komponentama pripadnog Christoffelovog simbola,

$$g = \mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi\,, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta\,, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \mathrm{ctg}\,\theta\,.$$

Jednadžba (9.12) rastavljena po komponentama svodi se na vezani sustav nelinearnih običnih diferencijalnih jednadžbi za funkcije $A^{\theta}(\varphi)$ i $A^{\varphi}(\varphi)$,

$$\alpha = \theta\ :\quad {A^{\theta}}_{,\varphi} - \sin\theta_0\cos\theta_0\,A^{\varphi} = 0 \tag{9.13}$$
$$\alpha = \varphi\ :\quad {A^{\varphi}}_{,\varphi} + \mathrm{ctg}\,\theta_0\,A^{\theta} = 0 \tag{9.14}$$

Primjetimo za početak kako jednadžba (9.14) *nije* dobro definirana na sjevernom polu ($\theta_0 = 0$) i južnom polu sfere ($\theta_0 = \pi$). Ovo i nije iznenađenje s obzirom da koordinata φ nije dobro definirana na polovima. Osim toga, kada je krivulja po kojoj vršimo paralelni transport svedena na točku, jednadžba paralelnog transporta prelazi u trivijalni identitet $0 = 0$. Analizu nastavljamo pod pretpostavkom $\theta_0 \in \langle 0, \pi\rangle$. Deriviranjem jednadžbe (9.13) i korištenjem jednadžbe (9.14) slijedi

$${A^{\theta}}_{,\varphi\varphi} = \sin\theta_0\cos\theta_0\,{A^{\varphi}}_{,\varphi} = -\cos^2\theta_0\,A^{\theta}\,. \tag{9.15}$$

Opće rješenje ove jednadžbe glasi

$$A^{\theta} = a\cdot\cos(\varphi\cos\theta_0) + b\cdot\sin(\varphi\cos\theta_0)\,,$$

gdje su a i b konstante. Uvrstimo li ovaj izraz natrag u (9.13) dobivamo

$$A^{\varphi} = -\frac{a}{\sin\theta_0}\,\sin(\varphi\cos\theta_0) + \frac{b}{\sin\theta_0}\,\cos(\varphi\cos\theta_0)\,.$$

Konstante a i b su dane početnim uvjetima,

$$A^\theta(0) = a\ , \quad A^\varphi(0) = \frac{b}{\sin\theta_0}$$

i stoga

$$A^\theta(\varphi) = A^\theta(0)\cos(\varphi\cos\theta_0) + A^\varphi(0)(\sin\theta_0)\sin(\varphi\cos\theta_0) \tag{9.16}$$

$$A^\varphi(\varphi) = -\frac{A^\theta(0)}{\sin\theta_0}\sin(\varphi\cos\theta_0) + A^\varphi(0)\cos(\varphi\cos\theta_0)\ . \tag{9.17}$$

U specijalnom slučaju $\theta_0 = \pi/2$, kada je krivulja duž koje vršimo paralelni transport *ekvator*, imamo vrlo jednostavno rješenje: tangentni vektor A^a ostaje nepromjenjen prilikom paralelnog transporta duž ekvatora.

Na kraju se možemo pitati kada sve vrijedi $A^\theta(2\pi) = A^\theta(0)$ i $A^\varphi(2\pi) = A^\varphi(0)$. Koristeći pokratu $\psi = 2\pi\cos\theta_0$, ovaj sustav možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\psi & -\sin\theta_0\sin\psi \\ \frac{\sin\psi}{\sin\theta_0} & 1-\cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^\theta(0) \\ A^\varphi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

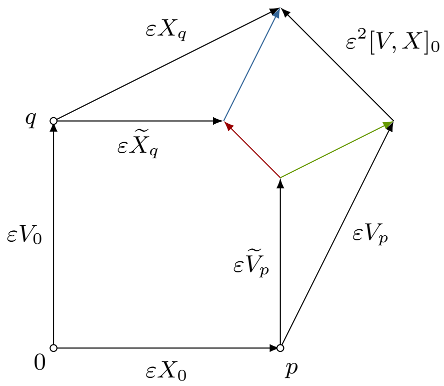
Dakako, uvijek imamo trivijalno rješenje $A^\theta(0) = A^\varphi(0) = 0$, međutim netrivijalna rješenja postoje samo ako determinanta sustava iščezava, odnosno ako je

$$\cos(2\pi\cos\theta_0) = 1\ .$$

Ovaj uvjet na intervalu $\theta_0 \in \langle 0,\pi\rangle$ ispunjava samo $\theta_0 = \pi/2$, slučaj koji smo ranije već prokomentirali. Općenito vektor paralelno translatiran po zatvorenoj krivulji neće biti jednak početnom vektoru, i upravo je ova *promjena* ugrađena u samu definiciju *zakrivljenosti* mnogostrukosti. //

Komentar 9.21. Komentar o Foucaultovom njihalu. //

Komentar 9.22. Geometrijski zor o značenju torzije. Shematski prikaz



Na crtežu su shematski prikazani mali pomaci duž naznačenih vektorskih polja. Nadalje, $\varepsilon(X_q - \widetilde{X}_q) = \varepsilon^2(\nabla_V X)_0$, $\varepsilon(V_p - \widetilde{V}_p) = \varepsilon^2(\nabla_X V)_0$, $\varepsilon^2 T(V,X)_0$.

Promatramo dva vektorska polja, X^a i V^a. Označimo radi preglednosti s donjim indeksom točku u kojoj promatramo dotično vektorsko polje, na primjer $V_0^a \in T_0M$, itd. Označimo s $\widetilde{V}^a$ vektorsko polje nastalo paralelnim transportom vektora V_0^a duž vektorskog polja X^a, a s $\widetilde{X}^a$ vektorsko polje nastalo paralelnim transportom vektora X_0^a duž vektorskog polja V^a.

Prvo, koristeći Taylorov razvoj duž integralne krivulje promatranog vektorskog polja imamo

$$x_p^\mu = x_0^\mu + \varepsilon X_0^\mu + \frac{1}{2!}\,\varepsilon^2 (X^\alpha \partial_\alpha X^\mu)_0 + O(\varepsilon^3)$$

Nadalje,

$$x_{p'}^\mu = x_p^\mu + \varepsilon V_p^\mu + \frac{1}{2!}\,\varepsilon^2 (V^\alpha \partial_\alpha V^\mu)_p + O(\varepsilon^3) =$$

$$= x_p^\mu + \varepsilon\big(V_0^\mu + \varepsilon (X^\alpha \partial_\alpha V^\mu)_0 + O(\varepsilon^2)\big) + \frac{1}{2!}\,\varepsilon^2 (V^\alpha \partial_\alpha V^\mu)_0 + O(\varepsilon^3) =$$

$$= x_0^\mu + \varepsilon (X_0^\mu + V_0^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\,\big(2(X^\alpha \partial_\alpha V^\mu)_0 + (X^\alpha \partial_\alpha X^\mu)_0 + (V^\alpha \partial_\alpha V^\mu)_0\big) + O(\varepsilon^3)$$

i analogno za $x_{q'}^\mu$. Sve skupa daje

$$x_{q'}^\mu - x_{p'}^\mu = \varepsilon^2 [V,X]_0^\mu + O(\varepsilon^3)$$

Drugi pomoćni rezultat vezan je za paralelno transportirane vektore,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} X^\alpha \widetilde{V}^\beta = 0$$

$$(X^\alpha \nabla_\alpha V^\mu)_0 = \frac{\mathrm{d}V^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0 + \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta} X^\alpha \widetilde{V}^\beta\right)_0 = \frac{\mathrm{d}V^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0 - \frac{\mathrm{d}\widetilde{V}^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V_\varepsilon^\mu - V_0^\mu}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\widetilde{V}_\varepsilon^\mu - V_0^\mu}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V_\varepsilon^\mu - \widetilde{V}_\varepsilon^\mu}{\varepsilon}$$

$$\widetilde{V}_\varepsilon^\mu = V_\varepsilon^\mu - (X^\alpha \nabla_\alpha V^\mu)_0\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

i analogno

$$\widetilde{X}_\varepsilon^\mu = X_\varepsilon^\mu - (V^\alpha \nabla_\alpha X^\mu)_0\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

//

9.3 Geodezici

Posebno nas zanimaju vektorska polja koja su paralelno transportirana duž vlastitih integralnih krivulja.

Definicija 9.23. Za vektorsko polje $X^a \in \mathfrak{X}(M)$ kažemo da je **geodetsko** ako zadovoljava **geodetsku jednadžbu** $\nabla_X X = 0$, odnosno, u zapisu s apstraktnim indeksima,

$$X^b \nabla_b X^a = 0 \tag{9.18}$$

Integralne krivulje geodetskih vektorskih polja poznate su kao **geodezici**.

Pišemo li

$$X^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$$

imamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{9.19}$$

Primjer|i 9.24. Geodezici u Euklidskim prostorima. //

Primjer|i 9.25. Geodezici na sferi $\mathbb{S}^2$. //

9.4 Riemannov tenzor

Definicija 9.26. **Riemannov tenzor** $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{9.20}$$

Ponekad se koristi i alternativna oznaka $R(X,Y)Z$.

Netrivijalni dio tvrdnje: gore definirani R je multilinearan nad glatkim funkcijama, tj. za sve $f, g, h \in C^\infty(M)$ vrijedi

$$R(fX, gY, hZ) = fghR(X,Y,Z) \, .$$

$$\nabla_{fX} \nabla_{gY} hZ = f\nabla_X (g\nabla_Y hZ) = f\nabla_X \left(gY(h)Z + gh\nabla_Y Z \right) =$$

$$= fX(g)Y(h)Z + fgX(Y(h))Z + fgY(h)\nabla_X Z +$$
$$+ fhX(g)\nabla_Y Z + fgX(h)\nabla_Y Z + fgh\nabla_X \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{[fX,gY]} hZ = [fX,gY](h)Z + h\nabla_{[fX,gY]} Z$$
$$[fX,gY](h) = fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - fgY(X(h))$$
$$\nabla_{[fX,gY]} Z = fX(g)\nabla_Y Z - gY(f)\nabla_X Z + fg\nabla_{[X,Y]} Z$$

Teorem 9.27. Prvi Bianchijev identitet *(u prisustvu torzije).*

$$R(X,Y,Z)+R(Y,Z,X)+R(Z,X,Y)= \\ = \nabla_X(T(Y,Z)) - T([X,Y],Z) + \text{cikl.} \tag{9.21}$$

Dokaz :

$$R(X,Y,Z)+R(Y,Z,X)+R(Z,X,Y)=$$
$$=\nabla_X(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y)+\nabla_Y(\nabla_Z X-\nabla_X Z)+\nabla_Z(\nabla_X Y-\nabla_Y X)-$$
$$-(\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_{[Z,X]}Y)=$$
$$=\nabla_X(T(Y,Z))-T([X,Y],Z)-[[X,Y],Z]+\text{cikl.}$$

□

Ostale simetrije Riemannovog tenzora.

- Antisimetričan u prve dvije varijable, $R(Y,X,Z)=-R(X,Y,Z)$, slijedi odmah iz definicije.
- Antisimetričan u druge dvije varijable (za koneksiju adaptiranu na metriku)

$$0=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)g_{cd}=R_{abc}{}^k g_{kd}+R_{abc}{}^\ell g_{\ell d}=R_{abcd}+R_{abdc}$$

- simetričan na zamjenu prvog i drugog para indeksa: iz Bianchija i antisimetrije na prve dvije varijable

$$R_{abcd}+R_{bcad}+R_{cabd}=0$$

Ponovimo izraz sa preimenovanim indeksima $a\leftrightarrow d$,

$$R_{dbca}+R_{bcda}+R_{cdba}=0$$

Zbrojimo izraze,

$$R_{abcd}-R_{cdab}=R_{acbd}-R_{bdac}$$

Lijeva strana je simetrična na dvostruku zamjenu $\{a\leftrightarrow b,\, c\leftrightarrow d\}$, a desna antisimetrična pa su obje identički jednake nuli.

Teorem 9.28. Drugi Bianchijev identitet *(u prisustvu torzije).*

$$(\nabla_X R)(Y,Z,W)+(\nabla_Y R)(Z,X,W)+(\nabla_Z R)(X,Y,W)= \\ =-R(T(X,Y),Z,W)-R(T(Y,Z),X,W)-R(T(Z,X),Y,W) \tag{9.22}$$

DOKAZ :

$$(\nabla_X R)(Y,Z,W) = \nabla_X(R(Y,Z,W)) - R(\nabla_X Y,Z,W) - R(Y,\nabla_X Z,W) - R(Y,Z,\nabla_X W)$$

Promotrimo zasebne dijelove.

$$\begin{aligned}
\nabla_X(R(Y,Z,W)) &= \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W \\
-R(\nabla_X Y,Z,W) &= -\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z W + \nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}W + \nabla_{[\nabla_X Y,Z]}W \\
-R(Y,\nabla_X Z,W) &= -\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z}W + \nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y W + \nabla_{[Y,\nabla_X Z]}W \\
-R(Y,Z,\nabla_X W) &= -\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W + \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W
\end{aligned}$$

Prva dva člana s desne strane prve jednadžbe i prva člana s desne strane četvrte jednadžbe, zbrojena s cikličkim zamjenama propadnu. S druge strane,

$$-R(T(X,Y),Z,W) = -\nabla_{T(X,Y)}\nabla_Z W + \nabla_Z\nabla_{T(X,Y)}W + \nabla_{[T(X,Y),Z]}W$$

$$\begin{aligned}
-\nabla_{T(X,Y)}\nabla_Z W &= -\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z W + \nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W \\
\nabla_Z\nabla_{T(X,Y)}W &= \nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}W - \nabla_Z\nabla_{\nabla_Y X}W - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W \\
[T(X,Y),Z] &= [\nabla_X Y,Z] - [\nabla_Y X,Z] - [[X,Y],Z]
\end{aligned}$$

Treći član u posljednjem izrazu propadne u cikličkom zbrajanju zbog Jacobijevog identiteta. Preostale članove se može usporediti, uzimajući u obzir cikličke zamjene. □

Prebacivanje u zapis s apstraktnim indeksima

$$\nabla_X\nabla_Y Z^c = \nabla_X(Y^b\nabla_b Z^c) = X^a\nabla_a(Y^b\nabla_b Z^c) =$$

$$= (X^a\nabla_a Y^b)\nabla_b Z^c + X^a Y^b\nabla_a\nabla_b Z^c$$

$$\nabla_{[X,Y]}Z^c = [X,Y]^b\nabla_b Z^c =$$

$$= (X^a\nabla_a Y^b)\nabla_b Z^c - (Y^a\nabla_a X^b)\nabla_b Z^c - X^p Y^q T^b{}_{pq}\nabla_b Z^c$$

Stoga,

$$R(X,Y,Z)^c = X^a Y^b\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)Z^c + T(X,Y)^d\nabla_d Z^c \tag{9.23}$$

Riemannov tenzor $R \in \mathscr{T}^1_4(M)$

$$R(X,Y,\omega,Z) \equiv R(X,Y,Z)(\omega) \tag{9.24}$$

$$R_{ab}{}^c{}_d X^a Y^b \omega_c Z^d = X^a Y^b\left(\nabla_a\nabla_b Z^c - \nabla_b\nabla_a Z^c\right)\omega_c$$

Drugim riječima (u odsustvu torzije),

$$\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)Z^c = R_{ab}{}^c{}_d\,Z^d \tag{9.25}$$

$$\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)\omega_c = R_{abc}{}^d\,\omega_d \tag{9.26}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right)T^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_\ell} = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{k} R_{ab}{}^{c_i}{}_e\,T^{c_1\ldots e\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_\ell} + \sum_{j=1}^{\ell} R_{abd_j}{}^e\,T^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots e\ldots d_\ell}
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Riccijev tenzor

$$R_{ab} \equiv g^{cd} R_{acbd} \tag{9.28}$$

Riccijev skalar

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} \tag{9.29}$$

Weylov tenzor

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{m-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) + \frac{2}{(m-1)(m-2)}\, R\, g_{a[c}g_{d]b} \tag{9.30}$$

Simetrije Riemannovog tenzora i Bianchijev identiteti u apstraktnim indeksima.

$$R_{abcd} = R_{[ab]cd} = R_{ab[cd]} = R_{cdab}$$

$$R_{[abc]}{}^{d} = -R^{d}{}_{[abc]} = -\nabla_{[a} T_{bc]}{}^{d} + T_{[ab}{}^{p} T_{c]p}{}^{d}$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = T_{[ab}{}^{p} R_{c]pde}$$

Komentar:

$$\nabla_X (T(Y,Z))^c = (X^a \nabla_a T_{bd}{}^{c}) Y^b Z^d + T_{bd}{}^{c} (X^a \nabla_a Y^b) Z^d + T_{bd}{}^{c} Y^b (X^a \nabla_a Z^d)$$

$$-T([X,Y],Z)^c = -T_{bd}{}^{c} (X^a \nabla_a Y^b - Y^a \nabla_a X^b - X^p Y^q T_{pq}{}^{b}) Z^d$$

Riccijev tenzor u odsustvu torzije je simetričan,

$$R_{[ab]} = 0$$

Teorem 9.29. *Pseudo-Riemannova m-mnogostrukost s indeksom metrike s je ravna, $R_{abcd} = 0$, akko je lokalno izometrična sa pseudo-euklidskim prostorom $\mathbb{R}^m_s$.*

Dokaz : Vidi dodatak G. □

Niskodimenzionalni slučajevi.

Riemannov tenzor u 2D,

$$R_{abcd} = R\, g_{a[c} g_{d]b} \tag{9.31}$$

Dokaz. U dvodimenzionalnom slučaju komponente Riemannovog tenzora se svode na R_{1212}, dok ostale dobivamo pomoću simetrija indeksa Riemannovog tenzora. Kako je (9.31) jednakost među tenzorima koji imaju iste simetrije indeksa, dovoljno je provjeriti jednakost za komponentu R_{1212} u nekom koordinatnom sustavu. Promotrimo Riccijev skalar,

$$R = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 2R_{1212}\left(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}\right) . \tag{9.32}$$

Izraz u zagradi je determinanta inverzne metrike $g^{\mu\nu}$, koja je jednaka recipročnoj vrijednosti determinante metrike $g_{\mu\nu}$, pa je

$$R_{1212} = \frac{R}{2}\left(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}\right) = R\, g_{1[1}g_{2]2} . \tag{9.33}$$

Riemannov tenzor u 3D,

$$R_{abcd} = 2(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - R\, g_{a[c}g_{d]b} \tag{9.34}$$

Dokaz je analogan 2D slučaju.

Einsteinove mnogostrukosti (prostori), $R_{ab} = \lambda g_{ab}$.

Dodatna literatura

- [dC92], stari klasik o Riemannovoj geometriji
- [Lee97]

Zadaci

1. Geodetsku jednadžbu možemo poopćiti na uvjet $Y^b \nabla_b Y^a = \gamma Y^a$ s nekom glatkom funkcijom γ. Dokažite da se reparametrizacijom početna jednadžba može dovesti u oblik (9.18), za koju kažemo da je *afino parametrizirana.* Nadalje, dokažite da se svi afini paremetri istog geodezika razlikuju do na linearnu transformaciju s konstantnim koeficijentima.

2. Izvedite formulu za Riemannov tenzor u prisustvu torzije. Pronađite antisimetričan dio Riccijevog tenzora u prisustvu torzije.

3. Na torusu $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3$ s radijusima $b > a$ definiramo koordinatni sustav $\{\theta, \varphi\}$, takav da su njegove točke parametrizirane s

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi\ , \quad y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi\ , \quad z = a\sin\theta\ .$$

Pokažite da je pripadna metrika dana s

$$g = a^2 \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + (b + a\cos\theta)^2\, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$$

te da je Riccijev skalar

$$R = \frac{2\cos\theta}{a(b + a\cos\theta)}\ .$$

10

Liejeva derivacija i simetrije

10.1 Simetrije tenzorskih polja

Kada promatramo tenzorska polja na mnogostrukosti, posebno korisna i stoga uvijek istaknuta svojstva su njihove *simetrije*. Na primjer, važno nam je uočiti ako je neki problem invarijantan na (vremenski, prostorni) paritet, (vremenske, prostorne) translacije, rotacije ili neki drugi tip transformacija. Svaka od ovih simetrija vodi ka daljnjem pojednostavljenju razmatranja problema koji je zadan s takvim tenzorima. Ovdje nas prvo zanima kako pojam simetrije možemo definirati kovarijantno.

Definicija 10.1. Neka je T tenzorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M i $F : M \to M$ difeomorfizam. Tada kažemo da je T **invarijantan** na difeomorfizam F ako je $F^*T = T$, odnosno $F_p^*(T|_{F(p)}) = T|_p$ u svim točkama $p \in M$.

Među tenzorima nam je posebno zanimljiva metrika, koja definira samu geometriju prostora, i njene simetrije.

Definicija 10.2. Neka je (M, g_{ab}) glatka pseudo-Riemannova mnogostrukost. Za difeomorfizam $F : M \to M$ kažemo da je **izometrija** ako je $F^*g = g$.

Teorem 10.3. *Izometrije pseudo-Riemannove mnogostrukosti s operacijom kompozicije tvore grupu.*

Primjer|i 10.4. Izometrije n-sfere $\mathbb{S}^n$ tvore ortogonalnu grupu $O(n)$. Izometrije euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ tvore tzv. **euklidsku grupu** $E(n) = ISO(n)$, koja je semidirektni produkt grupe translacija $(\mathbb{R}^n, +)$ i grupe rotacija $O(n)$,

$$E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$$

Grupna operacija je dana s $(A, a)(B, b) = (AB, a + Ab)$ za sve $A, B \in O(n)$ i sve $a, b \in \mathbb{R}^n$. Djelovanje euklidske grupe $E(u)$ na euklidski prostor $\mathbb{R}^n$

definiran je preko $(A,a)(x) = Ax + a$ za sve $(A,a) \in E(n)$ i sve $x \in \mathbb{R}^n$. Kako je rezultat kompozicije djelovanja,

$$(A,a)((B,b)(x)) = (A,a)(Bx+b) = ABx + Ab + a = (AB, a + Ab)(x) ,$$

općenito različit od $ABx + a + b$, euklidska grupa $E(n)$ *nije* direktni produkt grupa $O(n)$ i $(\mathbb{R}^n, +)$. Slično tako, izometrije $(1+n)$-dimenzionalnog prostor-vremena Minkowskog $\mathbb{M}^{1+n}$ tvore **Poincaréovu grupu**

$$ISO(1,n) = O(1,n) \ltimes \mathbb{R}^n .$$

//

10.2 Liejeva derivacija

Neka je M glatka mnogostrukost. Za glatko preslikavanje $\phi_t : \mathbb{R} \times M \to M$ kažemo da je **1-parametarska grupa difeomorfizama** ako je

(a) za svaki $t \in \mathbb{R}$ preslikavanje $\phi_t : M \to M$ difeomorfizam,

(b) za svaki par $s, t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ te

(c) $\phi_0 = \mathrm{id}_M$.

Na primjer: translacije u Euklidskom prostoru ili rotacije na sferi.

Orbita točke $p \in M$ (s obzirom na ϕ_t) je krivulja $\phi_t(p) : \mathbb{R} \to M$, koja prolazi kroz točku p u $t = 0$. Svakom ϕ_t možemo pridružiti vektorsko polje preko vektora $X|_p \in T_pM$, tangentnih na orbitu u točki p. Obratno, svakom glatkom vektorskom polju X^a možemo pridružiti integralne krivulje koje su orbite 1-parametarske grupe difeomorfizama …

Definicija 10.5. Liejeva derivacija tenzorskog polja T s obzirom na glatko vektorsko polje X^a tangentno na orbite 1-parametarske grupe difeomorfizama ϕ_t definirana je s

$$\pounds_X T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\phi_\varepsilon^* - \phi_0^* \right) T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s} . \tag{10.1}$$

Konkretno, Liejeva derivacija skalara

$$(\pounds_X f)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\phi_\varepsilon^* f)(p) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f \circ \phi_\varepsilon)(p) - f(p)}{\varepsilon}$$

Uvedemo li oznaku $\gamma(t) \equiv \phi_t(p)$, gdje je $\gamma(0) = p$, imamo nadalje

$$(\pounds_X f)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f \circ \gamma)(\varepsilon) - (f \circ \gamma)(0)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = X|_p(f)$$

Odnosno, kraće pisano,

$$\pounds_X f = X(f) \tag{10.2}$$

Kod općenitih tenzora možemo se poslužiti “trikom”: odaberemo lokalni koordinatni sustav $\{x^1, x^2, \dots\}$ u kojem je $X^a = (\partial/\partial x^1)^a$. Pri tom preslikavanje ϕ_t odgovara koordinatnoj transformaciji $x^1 \mapsto x^1 + t$ (pri čemu su ostale koordinatne fiksne), odnosno

$$(\phi_t^* T|_{\phi_t(x^1,x^2,\dots,x^m)})^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s} = (T|_{(x^1+t,x^2,\dots,x^m)})^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s}$$

pa je

$$\pounds_X T^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s} = \frac{\partial T^{\mu_1\dots\mu_r}{}_{\nu_1\dots\nu_s}}{\partial x^1}$$

Na primjer,

$$(\pounds_X Y)^\mu = \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^1} \ ,$$

dok je, usporedbe radi, Liejeva zagrada ova dva vektorska polja dana s

$$[X,Y]^\mu = X^\alpha \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^1} \ .$$

Stoga, budući da je riječ o geometrijskim, koordinatno neovisnim objektima, jednakost vrijedi u svim sustavima,

$$(\pounds_X Y)^a = [X,Y]^a = X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a \ . \tag{10.3}$$

1-forme. Korištenjem Leibnizovog pravila

$$\pounds_X (Y^a \omega_a) = (\pounds_X Y^a)\omega_a + Y^a \pounds_X \omega_a =$$

$$= (X^b \nabla_b Y^a)\omega_a - (Y^b \nabla_b X^a)\omega_a + Y^a \pounds_X \omega_a$$

i Liejeve derivacije skalara,

$$\pounds_X (Y^a \omega_a) = X^b \nabla_b (Y^a \omega_a) = (X^b \nabla_b Y^a)\omega_a + Y^a X^b \nabla_b \omega_a$$

vidimo kako za svaki Y^a vrijedi

$$(\pounds_X \omega_a - \omega_b \nabla_a X^b - X^b \nabla_b \omega_a) Y^a = 0$$

Stoga,

$$\pounds_X \omega_a = X^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a X^b \ . \tag{10.4}$$

Općenito imamo

$$\begin{aligned}\pounds_X T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_\ell} &= X^c \nabla_c T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_\ell} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\ell} T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots c\dots b_\ell} \nabla_{b_i} X^c - \sum_{j=1}^{k} T^{a_1\dots c\dots a_k}{}_{b_1\dots b_\ell} \nabla_c X^{a_j}\end{aligned} \tag{10.5}$$

Valja uočiti kako formula za Liejevu derivaciju ima istu formu i s običnom derivacijom, u što se jednostavno uvjerimo raspisivanjem kovarijantnih derivacija pomoću Christoffelovih simbola u gornjem izrazu.

Usporedba paralelnog pomaka i (Liejevog) povlačenja s vektorskim poljem

$$X^a = \partial_\varphi^a = x\partial_y^a - y\partial_x^a$$

u euklidskom prostoru (orbite su kružnice). Paralelni pomak vektora V^a zadan je jednadžbom $X^b \nabla_b V^a = 0$, odakle raspisivanjem u Kartezijevom koordinatnom sustavu dobivamo

$$X^\alpha \partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} X^\alpha V^\beta = x \frac{\partial V^\mu}{\partial y} - y \frac{\partial V^\mu}{\partial x} = 0$$

Odnosno, prevedeno u derivaciju po polarnoj koordinati φ (koja je "prirodan" parametar orbita vektroskog polja X^a), pri čemu su komponente V^μ i dalje u Kartezijevom koordinatnom sustavu,

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial \varphi} = 0$$

S druge strane, guranje

$$(\phi_* V)^\mu = \frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\alpha} \, V^\alpha$$

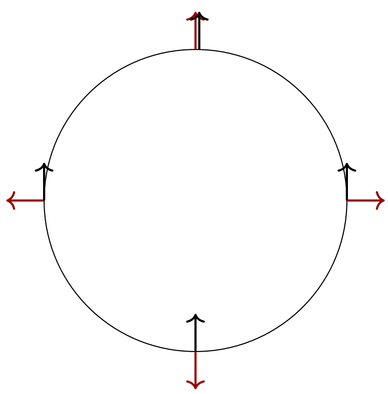
u polarnom koordinantom sustavu,

$$\phi_t(r, \varphi) = (r, \varphi + t)$$

$$(\phi_* V)^r = V^r \; , \quad (\phi_* V)^\varphi = V^\varphi$$

Drugim riječima, pišemo li komponente vektora V^a u polarnom koordinatnom sustavu, imamo

$$\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial \varphi} = 0$$



Paralelni pomak vs guranje

10.3 Killingovi vektori i tenzori

Definicija 10.6. Za vektorsko polje K^a kažemo da je **Killingovo vektorsko polje** ako zadovoljava **Killingovu jednadžbu**,

$$\pounds_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0 \,. \tag{10.6}$$

Zapišemo li Killingovu jednadžbu u koordinatnom sustavu adaptiranom na orbite Killingovog vektorskog polja K^a, ona nam govori da su komponente metrike $g_{\mu\nu}$ neovisne o Killingovoj koordinati. Primjetimo, tenzor $\nabla_a K_b$ je antisimetričan, $\nabla_{(a}K_{b)} = 0$.

Primjer|i 10.7. 2D Euklidski. Promatramo Killingovu jednadžbu u Kartezijevom koordinatnom sustavu,

$$\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu = 0$$

Jednadžbe $\mu = \nu = x$ i $\mu = \nu = y$ povlače $K_x = K_x(y)$ i $K_y = K_y(x)$. Preostalu jednadžbu,

$$\partial_x K_y + \partial_y K_x = 0$$

možemo separirati,

$$\frac{\mathrm{d}K_y(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}K_x(y)}{\mathrm{d}y} = a = \text{konst.}$$

odakle slijedi

$$K_x = -ay + b \,, \quad K_y = ax + c$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstante. Drugim riječima,

$$K_\mu = (-ay + b, ax + c) = K^\mu$$

Ovdje imamo tri neovisna izbora:

- $a = c = 0$, $b = 1$, $K = \partial_x$ (translacije u x-smjeru),
- $a = b = 0$, $c = 1$, $K = \partial_y$ (translacije u y-smjeru),
- $b = c = 0$, $a = 1$, $K = x\partial_y - y\partial_x = \partial_\varphi$ (rotacije).

Kod $(1 + 1)$-dimenzionalnog prostorvremena Minkowskog bismo dobili translacije u t-smjeru (vremenske translacije) generirane s $K = \partial_t$, translacije u x-smjeru (prostorne rotacije) generirane s $K = \partial_x$ i potiske (rotacije u t-x ravnini) generirane s $K = x\partial_t + t\partial_x = \partial_\phi$ (gdje je ϕ rapiditet). //

Prostor dimenzije n može imati najviše $n(n+1)/2$ linearno neovisnih Killingovih vektorskih polja. Ovo slijedi iz činjenice da su vektorska polja zadana početnim vrijednostima (n stupnjeva slobode) i početnim derivacijama (Killingova jednadžba ograničava n^2 derivacija na $n(n-1)/2$ neovisnih). Takvi prostori zovu se **maksimalno simetrični prostori**. Primjeri su

- euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ (n Killingovih vektora generira translacije, a $n(n-1)/2$ rotacije),
- n-sfera $\mathbb{S}^n$ ($n(n+1)/2$ Killingovih vektora generira rotacije),
- $(1+n)$-dimenzionalno prostorvrijeme Minkowskog $\mathbb{M}^{1+n}$ ($1+n$ Killingovih vektora generira prostornovremenske translacije, $n(n-1)/2$ prostorne rotacije, a n potiske).

Myers–Steenrodov teorem tvrdi da je grupa izometrija Riemannove mnogostrukosti Liejeva grupa (ista tvrdnja vrijedi i za pseudo-Riemannove mnogostrukosti, vidi Kobayashi: *Transformation Group in Differential Geometry*, theorem 4.1 page 16, and example 2.5 page 8).

Definicija 10.8. **Killingov tenzor** reda n je totalno simetričan tenzor ranga $(0,n)$, $K_{(a_1 \dots a_n)} = K_{a_1 \dots a_n}$, koji zadovoljava jednadžbu

$$\nabla_{(a_1} K_{a_2 \dots a_n)} = 0 \; . \tag{10.7}$$

Trivijalan primjer Killingovog tenzora ranga $(0,2)$ je sama metrika g_{ab}. Ako je $\{K^a_{(1)}, \dots, K^a_{(n)}\}$ skup Killingovih vektorskih polja, tada je njihov simetriziran produkt Killingov tenzor. S druge strane, ako se neki Killingov tenzor ne može prikazati kao simetriziran produkt Killingovih tenzora nižeg ranga, tada kažemo da je taj Killingov tenzor **ireducibilan**.

Dodatna literatura

- [Lee03]
- [Wal84]

Zadaci

1. Neka su X^a i Y^a glatka vektorska polja. Dokažite da je

$$[\pounds_X, \pounds_Y] = \pounds_{[X,Y]}$$

11

Relativistička kinematika

11.1 Svjetska linija

Ovdje ćemo pretpostaviti da je prostorvrijeme 4-dimenzionalno, iako je većinu razmatranja moguće direktno primjeniti na slučajeve s drugim brojem dimenzija.

Krivulja po kojoj se giba čestica u prostorvremenu (M, g_{ab}) zovemo **svjetska linija** i dijelimo ih na istoimene tipove prema tipu njihovog tangentnog vektora (obično su iz razmatranja izuzete krivulje koje mijenjaju tip tangentnog vektora). Fizikalno, masivne čestice (čestice mase mirovanja $m > 0$) gibaju se duž svjetskih linija vremenskog tipa, dok se bezmasene čestice ($m = 0$), poput fotona, gibaju duž svjetskih linija svjetlosnog tipa. Do danas nisu opažene čestice koje bi se gibale po svjetskim linijama prostornog tipa (poput hipotetičkih tahiona).

Ako je v^a vektor tangentan na svjetsku liniju γ vremenskog tipa (parametriziranu parametrom λ), tada definiramo pripadno **vlastito vrijeme**,

$$\tau \equiv \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{-g(v,v)}\,\mathrm{d}\lambda' \tag{11.1}$$

Nadalje, tangentan vektor na krivulju γ reparametriziranu s obzirom na vlastito vrijeme τ obično označavamo s u^a (neformalno, $u = \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$), a u kontekstu 4-dimenzionalnog prostorvremena ga zovemo **4-brzina**. Primjetimo, iz definicije vlastitog vremena slijedi

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = -g(v,v)$$

pa u slučaju kada je $\lambda = \tau$, odnosno $v^a = u^a$, imamo jednostavno

$$g(u,u) = g_{ab}u^a u^b = -1 \tag{11.2}$$

Na okolini svake točke svjetske linije moguće je odabrati tzv. **lokalni sustav mirovanja** (s obzirom na u^a) u kojem 4-brzina u^a poprima komponente $u^\mu = (1, \mathbf{0})$. Valja napomenuti kako na okolini svake točke $p \in \gamma$ svjetske linije

γ možemo odabrati LIKS koji je ujedno i lokalni sustav mirovanja u točki p. Naime, nakon odabira proizvoljnog LIKS-a u točki p, dodatnim rotacijama i potiscima uvijek možemo prijeći u lokalni sustav mirovanja. S druge strane, ovaj odabir općenito *nije* moguće napraviti duž konačnog segmenta svjetske linije.

Komentar 11.1. Fizikalna interpretacija vlastitog vremena. U lokalnom sustavu mirovanja $(t, \boldsymbol{x})$ u nekoj točki $p \in \gamma$ imamo $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, pa djelovanjem na proizvoljnu funkciju $f \in C_p^\infty(M)$ dobivamo zapis

$$u(f) = u^\mu \, \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial t} \ ,$$

kojeg valja usporediti s

$$u(f) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}\tau} \ .$$

Dakle, vlastito vrijeme τ možemo identificirati (do na irelevantnu konstantu) s koordinatnim vremenom t kojeg mjerimo u lokalnom sustavu mirovanja. Jednostavnijim rječnikom, vlastito vrijeme je upravo ono koje mjerimo na satu kojeg imamo uz sebe, bez obzira na naše gibanje. //

Promotrimo sada masivnu česticu koja se giba po proizvoljnoj C^1 krivulji vremenskog tipa. Komponente pripadnog 4-vektora u^a, zapisane u LIKS-u $(t, \boldsymbol{x})$, glase

$$u^\mu = u(x^\mu) = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \, , \, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} \right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \, , \, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \right)$$

Uvedemo li uobičajenu pokratu

$$\gamma_v \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \ , \quad u^\mu = (\gamma_v, \gamma_v \boldsymbol{v}) \ , \tag{11.3}$$

iz normalizacije $g_{ab} u^a u^b = -1$ slijedi

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}} \ , \quad \boldsymbol{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \ . \tag{11.4}$$

4-impuls čestice mase $m > 0$ definiran je s $p^a = m u^a$, odnosno

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p}) = (\gamma_v m, \gamma_v m \boldsymbol{v})$$

Fotoni putuju duž svjetskih linija svjetlosnog tipa s tangentnim vektorom k^a, takvim da je $k_a k^a = 0$. Komponente 4-impulsa fotona koji u LAB sustavu ima energiju $E = \hbar\omega$ i valni vektor $\mathbf{k}$, dane su s

$$p^\mu = (\hbar\omega, \hbar\mathbf{k})$$

Teorem 11.2. *U prostorvremenu Minkowskog vrijedi obrnuta nejednakost trokuta: ako su A, B i C kauzalno povezani događaji, tada je*

$$\Delta\tau_{AB} \geq \Delta\tau_{BC} + \Delta\tau_{AC}$$

Paradoks blizanaca. Mirko miruje (on je inercijalni promatrač), a Zvjezdana raketom odlazi do obližnje zvijezde i vraća se natrag. Koristeći globalni inercijalni sustav $(t, \boldsymbol{x})$ u kojem Mirko miruje možemo usporediti njihova vlastita vremena između dva susreta. Općenito imamo

$$\Delta\tau = \int \mathrm{d}\tau = \int \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\gamma_v}\,\mathrm{d}t$$

pa je

$$\Delta\tau_Z = \int \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}\,\mathrm{d}t \leq \int \mathrm{d}t = \Delta\tau_M \ .$$

Opažač/ica (koristimo pokratu op.). U prostorvremenu izdvajamo poseban 4-vektor brzine o^a koji nam "govori" *tko* vrši opažanje. Skalarne veličine su po konstrukciji *invarijantne* (neovisne o koordinatnim transformacijama). Međutim, potrebno je istaknuti razliku između onih koje su *opvarijantne* (neovisne o op.) od onih koje ovise o op.

Primjer|i 11.3.

- Ako op. ima 4-brzinu o^a a promatrana čestica 4-brzinu u^a, koji iznos brzine će pri tom biti izmjeren? Konkretnije, neka su u laboratorijskom sustavu (LIKS-u) zadani

  $$o^\mu = (\gamma_o, \gamma_o \boldsymbol{o}) \ , \quad u^\mu = (\gamma_u, \gamma_u \boldsymbol{u})$$

  Prebacimo se sada u drugi LIKS, sustav mirovanja op.,

  $$o^{\mu'} = (1, \boldsymbol{0}) \ , \quad u^{\mu'} = (\gamma_w, \gamma_w \boldsymbol{w})$$

  Nas zanima veličina γ_w iz koje možemo saznati iznos $|\boldsymbol{w}|$. Izvrijednimo li produkt $\eta_{ab} o^a u^b$ u gore navedena dva *različita* koordinanta sustava, imamo

  $$\eta_{ab} o^a u^b = \eta_{\mu'\nu'} o^{\mu'} u^{\nu'} = \eta_{\mu\nu} o^\mu u^\nu$$
  $$-\gamma_w = \gamma_o \gamma_u (-1 + \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{u})$$

  Odavde možemo izlučiti $|\boldsymbol{w}|$.

- Opažamo česticu s 4-impulsom p^a. Koju energiju mjeri o^a?

  $$E(o) = -g_{ab}\, p^a o^b \tag{11.5}$$

Energija je na ovaj način, očigledno, zadana invarijantno (kao skalar) ali nije opvarijantna! Naime, za $\tilde{o}^a \neq o^a$ općenito vrijedi

$$E(\tilde{o}) = -g_{ab}\, p^a \tilde{o}^b \neq -g_{ab}\, p^a o^b = E(o)$$

- Rastav na kinetički dio i ostatak. Pretpostavimo da opažamo slobodnu masivnu česticu mase m i 4-brzine u^a, tada možemo napraviti rastav

$$E(o) = m + T(o)$$

$$m = -g_{ab} p^a u^b \ , \quad T(o) = -g_{ab}\, p^a (o^b - u^b)$$

Primjetimo, masa (mirovanja) je invarijantna i opvarijantna veličina! S druge strane, kinetička energija $T(o)$, iako zapisana u invarijantnom obliku, *nije* opvarijantna jer ima ekplicitnu ovisnost o 4-vektoru o^a.

- Relativistički Dopplerov pomak z. 4-impuls p^a i valni 4-vektor k^a fotona,

$$p^\mu = (\hbar\omega, \hbar\boldsymbol{k}) \ , \quad k^a \equiv p^a/\hbar$$

Ako je ω_e frekvencija emitiranog fotona, a ω_o frekvencija opaženog fotona,

$$\omega_o \equiv \omega(o) = -g_{ab} k^a o^b \ , \quad \omega_e \equiv \omega(e) = -g_{ab} k^a e^b$$

tada opaženi **crveni pomak** $z(o)$ definiramo preko

$$z(o) + 1 \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{g_{ab} k^a e^b}{g_{cd} k^c o^d} \tag{11.6}$$

Dopplerov pomak u prostorvremenu Minkowskog. Promatrano u nekom LIKS-u, emiter se giba 3-brzinom $\boldsymbol{v}$ i s njega je emitiran foton frekvencije ω kojeg mirujući op. vidi kako dolazi iz prostornog smjera $-\hat{\mathbf{s}}$. Tada imamo

$$k^\mu = (\omega, \omega\hat{\mathbf{s}}) \ , \quad o^\mu = (1, \mathbf{0}) \ , \quad e^\mu = (\gamma_v, \gamma_v \boldsymbol{v})$$

$$z + 1 = \gamma_v (1 - \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{v})$$

Longitudinalni Dopplerov efekt. Foton je emitiran duž smjera gibanja emitera, $\hat{\mathbf{s}} = \mp\hat{\mathbf{v}}$ (gdje se gornji predznak odnosi na slučaj kada se emiter giba *od* op., a donji predznak na obratni slučaj),

$$z + 1 = \gamma_v (1 \pm |\boldsymbol{v}|) = \sqrt{\frac{1 \pm |\boldsymbol{v}|}{1 \mp |\boldsymbol{v}|}}$$

Transverzalni Dopplerov efekt.

(a) Emiter se giba po kružnici oko središta u kojem miruje (inercijalni/a) op., a foton je emitiran okomito na smjer gibanja emitera, $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$. Odmah imamo

$$z + 1 = \gamma_v$$

(b) Op. se giba po kružnici oko središta u kojem miruje emiter. U ovom slučaju je praktično prvo otići u sustav mirujućeg emitera (sustav mirovanja op. je neinercijalan!),

$$o^{\mu'} = (\gamma_o, \gamma_o \boldsymbol{o}) \ , \quad e^{\mu'} = (1, \mathbf{0})$$

gdje je $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{o}} = 0$ u trenutku opažanja fotona, odakle slijedi

$$z + 1 = \frac{1}{\gamma_o}$$

Dodatni primjeri: vidi Wald, poglavlja 5.3a i 6.3.

//

Raspršenja čestica, zakoni očuvanja.

$$\sum_i p^\mu_{(i)} = \sum_f p^\mu_{(f)} \tag{11.7}$$

Napomena: ako "kvadriramo" obje strane jednakosti dobivamo jednakost među *skalarima* i onda ih možemo izvrijedniti u različitim sustavima!

Tipični problemi:

1. Može li se masivna čestica raspasti na dvije bezmasene? Može li sudarom dvije čestice jednakih masa nastati *jedna bezmasena* čestica (npr. jedan foton nastao anihilacijom čestice i pripadne antičestice)?
2. Comptonovo raspršenje.
3. Raspad $A \to B\gamma$.
4. Čestica A (mase m_A) raspada se na čestice B (mase m_B) i C (mase m_C). Pronađite energije izlaznih čestica.
5. Čestica A (mase m_A) nalijeće na mirujuću česticu B (mase m_B) pri čemu nastaje $n \geq 2$ čestica C_i mase m_i. Pronađite *minimalnu* energiju koju mora posjedovati čestica A kako bi ova reakcija bila kinematički dozvoljena.

11.2 Geodetske konstante

Teorem 11.4 (Očuvane veličine). *Neka je u^a geodetsko vektorsko polje na mnogostrukosti (M, g_{ab}) koja posjeduje Killingovo vektorsko polje K^a. Tada je skalar $Q \equiv K^a u_a$ konstantan duž pripadnih geodezika. Općenitije, ako prostor posjeduje Killingov tenzor $K_{a_1 \dots a_n}$ tada je skalar $Q \equiv K_{a_1 \dots a_n} u^{a_1} \cdots u^{a_n}$ konstantan duž pripadnih geodezika.*

DOKAZ : Pod pretpostavkama teorema imamo odmah

$$u^a \nabla_a Q = u^a \nabla_a (K^b u_b) = u^a u^b \nabla_a K_b + u^a K^b \nabla_a u_b = 0$$

Prvi član iščezava jer se radi o kontrahiranju simetričnog tenzora $u^a u^b$ s antisimetričnim tenzorom $\nabla_a K_b$, a drugi član iščezava zbog geodezijske jednadžbe $u^a \nabla_a u^b = 0$. Općenitija tvrdnja za Killingov tenzor se dokaže potpuno analogno,

$$u^a \nabla_a Q = u^b \nabla_b (K_{a_1 \dots a_n} u^{a_1} \cdots u^{a_n}) = u^b u^{a_1} \cdots u^{a_n} \nabla_b K_{a_1 \dots a_n} +$$
$$+ (u^b \nabla_b u^{a_1}) u^{a_2} \cdots u^{a_n} \nabla_b K_{a_1 \dots a_n} + \dots = 0$$

□

Komentar 11.5. Trivijalan primjer Killingovog tenzora ranga $(0,2)$, metrika g_{ab}, vodi na trivijalnu očuvanu veličinu, konstantu $-c^2 = g_{ab} u^a u^b$. Sačuvana veličina pridružena Killingovom tenzoru koji je simetriziran produkt Killingovih vektorskih polja je samo produkt sačuvanih veličina pridruženih dotičnim Killingovim vektorima. Na primjer, ako su K^a i L^a Killingovi vektori te $Q_K = K^a u_a$ i $Q_L = L^a u_a$ pripadne sačuvane veličine, tada je

$$K_{(a} L_{b)} u^a u^b = Q_K Q_L \ .$$

Stoga, nova relevantna informacija o sustavu se krije u ireducibilnim Killingovim tenzorima. //

Primjer|i 11.6. Ako je prostor stacionaran s pripadnim Killingovim vektorskim poljem k^a, tada duž geodezika imamo pripadnu očuvanu veličinu

$$e = -k^a u_a \ .$$

U slučaju masivne čestice e možemo interpretirati kao energiju čestice po jediničnoj masi ($e = E/m = -k^a p_a / m$) mjerenu od statičnog/e promatrača/ice u beskonačnosti. Slično tome, u slučaju bezmasene čestice kako što je foton, produkt $\hbar e$ možemo interpretirati kao ukupnu energiju čestice.

Ako je prostor osno simetričan s pripadnim Killingovim vektorskim poljem m^a, tada duž geodezika imamo pripadnu očuvanu veličinu

$$\ell = m^a u_a \ .$$

U slučaju masivne čestice ℓ možemo interpretirati kao zamah po jediničnoj masi, dok u slučaju bezmasene čestice produkt $\hbar \ell$ možemo interpretirati kao zamah čestice. //

11.3 KEPLEROV PROBLEM U OPĆOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Sada ćemo razmotriti Keplerov problem na pozadini sferno simetričnog prostorvremena s metrikom oblika

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{h(r)} + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2 \right) \ . \tag{11.8}$$

Čestica ima 4-vektor brzine

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \ , \tag{11.9}$$

gdje je parametar λ vlastito vrijeme u slučaju masivne čestice, odnosno afini parametar u slučaju bezmasenih čestica. U ovom prostorvremenu imamo četiri Killingova vektorska polja, jedno koje generira vremensku invarijantnost,

$$k^a = \partial_t^a$$

i tri koja generiraju sfernu simetriju,

$$\begin{aligned} m_{(1)}^a &= \cos\varphi\,\partial_\theta^a - \cot\theta\,\sin\varphi\,\partial_\varphi^a \\ m_{(2)}^a &= -\sin\varphi\,\partial_\theta^a - \cot\theta\,\cos\varphi\,\partial_\varphi^a \\ m_{(3)}^a &= \partial_\varphi^a \end{aligned}$$

Kontrakcijom 4-vektora brzine u^a i Killingovih vektora dobivamo veličine konstantne duž geodezika. Promotrimo za početak naredne dvije,

$$c_1 = g_{ab} m_{(1)}^a u^b = r^2 \cos\varphi\,\dot{\theta} - r^2 \cos\theta\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$c_2 = g_{ab} m_{(2)}^a u^b = -r^2 \sin\varphi\,\dot{\theta} - r^2 \cos\theta\,\sin\theta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

S obzirom na sfernu simetriju uvijek možemo orjentirati koordinatni sustav tako da je početna točka trajektorije u ekvatorijalnoj ravnini, odnosno $\theta(0) = \pi/2$, te da u početnom trenutku vrijedi $\dot{\theta}(0) = 0$. No, ovo povlači onda da su $c_1 = c_2 = 0$. Nadalje, iz gornje dvije jednadžbe slijedi

$$r^2\dot{\theta} = c_1\,\cos\varphi - c_2\,\sin\varphi \ .$$

pa je $\dot{\theta} = 0$ u svim ostalim točkama svjetske linije. Ova informacija bitno pojednostavljuje daljnje integriranje jednadžbi.

Normiranje 4-vektora brzine daje

$$-\kappa = g_{ab} u^a u^b = -f(r)\,\dot{t}^2 + \frac{1}{h(r)}\,\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 \ , \tag{11.10}$$

gdje je parametar $\kappa = 1$ za geodezike vremenskog tipa (masivne čestice), a $\kappa = 0$ za putanje svjetlosnog tipa (bezmasene čestice). Preostale dvije očuvane veličine su

$$e = -g_{ab} k^a u^b = f(r)\dot{t} \qquad \text{i} \qquad \ell = g_{ab} m_{(3)}^a u^b = r^2 \dot{\varphi} \ , \tag{11.11}$$

pa je

$$-\kappa = -\frac{e^2}{f(r)} + \frac{\dot{r}^2}{h(r)} + \frac{\ell^2}{r^2} \ . \tag{11.12}$$

Nakon malo preuređivanja jednadžbu možemo dovesti u konvencionalni oblik

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,h(r)\left(\frac{\ell^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{h(r)}{2f(r)}\,e^2 \ . \tag{11.13}$$

Pretpostavimo li radi jednostavnosti $h(r) = f(r)$, kao što je to u statičnim sferno simetričnim rješenjima vakuumske Einsteinove gravitacijske jednadžbe, imamo jednadžbu

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,f(r)\left(\frac{\ell^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{e^2}{2} \tag{11.14}$$

koju možemo interpretirati kao jednodimenzionalni problem s česticom jedinične mase, energije $e^2/2$, koja se giba u efektivnom potencijalu V_{ef},

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{e^2}{2}\,. \tag{11.15}$$

Konkretno, za Schwarzschildovu metriku imamo $f(r) = 1 - 2Mr^{-1}$ pa je

$$V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}\,. \tag{11.16}$$

Prvi član je samo konstanta, drugi član je klasični nerelativistički njutnovski dio, treći član možemo prepoznati kao centrifugalnu barijeru, dok je posljednji član novi, općerelativistički doprinos. Upravo ovaj zadnji član je odgovoran za precesiju nekružnih orbita, onaj koji je objasnio anomaliju Merkurove precesije.

Komentar 11.7. Primjetimo, korištenjem očuvanih veličina izbjegavamo direktno rješavanje geodetske jednadžbe (koja "u pozadini" samo garantira da su e i ℓ uistinu konstante duž svjetske linije) već samo pazimo na normalizaciju 4-vektora. //

Daljnja analiza: vidi [Wal84].

Dodatna literatura

- [Wal84], standardna referenca za gravitacijsku fiziku

Zadaci

1. Na česticu mase m, smještene u $(1+1)$-dimenzionalno prostorvrijeme Minkowskog, djeluje *konstantna* sila $F > 0$, pri čemu čestica "osjeća" konstantnu akceleraciju $g = F/m$. Pronađite jednadžbu trajektorije čestice u inercijalnom (LAB) sustavu s koordinatama (t, x), slijedeći korake navedene ispod.

   (a) Dokažite da je vektor vlastite akceleracije $a^b = u^c \nabla_c u^b$ uvijek okomit na vektor vlastite brzine u^a, odnosno $a_b u^b = 0$.

   (b) Upotrebom gore izvedene jednadžbe, zadanog kvadrata vlastite akceleracije ($a_b a^b = g^2$) i normalizacije vlastite brzine ($u_a u^a = -c^2$), izvedite vezu među komponentama

   $$ca^t = gu^x \ , \quad ca^x = gu^t \ .$$

   (c) Deriviranjem jednadžbe $ca^x = gu^t$ po vlastitom vremenu τ izvedite diferencijalnu jednadžbu

   $$\frac{\mathrm{d}^2 u^x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{g^2}{c^2}\, u^x = 0$$

   Korištenjem početnih uvjeta

   $$u^x(\tau = 0) = 0 \ , \quad a^x(\tau = 0) = g$$

   izvedite komponente vlastite brzine

   $$u^\mu = (\sinh(g\tau/c), \cosh(g\tau/c))$$

   (d) Integriranjem jednadžbi $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau = u^\mu$ s početnim uvjetima

   $$t(\tau = 0) = 0 \ , \quad x(\tau = 0) = c^2/g$$

   dokažite da je oblik putanje dan jednadžbom

   $$x^2 - (ct)^2 = (c^2/g)^2$$

   Dokažite da je ovu krivulju razvojem po koordinati t moguće aproksimirati (nerelativističkom) parabolom.

   (e) Odaberemo li vrijednost $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$, kolika je udaljenost čestice od ishodišta u trenutku kada mu je ona najbliža? Ako je foton odaslan iz ishodišta prema čestici u trenutku (mjerenom iz LAB sustava) kada se ona nalazila najbliže ishodištu, koliko je potrebno vremena da je foton dostigne?

12

Diferencijalne forme

12.1 Što su diferencijalne forme?

Definicija 12.1. Diferencijalna forma reda p ili p-**forma** je totalno antisimetričan tenzor ranga $(0, p)$.

Na primjer, 0-forma je funkcija $M \to \mathbb{R}$, 1-forma je dualni vektor $\omega : TM \to \mathbb{R}, \ldots$ vanjski produkt

$$\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} = \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn}(\pi)\, \mathrm{d}x^{\mu_{\pi(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{\pi(p)}}$$

$$\omega = \frac{1}{p!}\, \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$$

Primjetimo kako su sve forme reda $p > m = \dim(M)$ trivijalne, odnosno jednake nuli. Ako s $\Omega^p(M)$ označimo prostor p-formi na mnogostrukosti M, tada je

$$\dim(\Omega^p(M)) = \binom{m}{p} = \binom{m}{m-p} = \dim(\Omega^{m-p}(M))$$

Formalno

$$\Omega^* = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \cdots \oplus \Omega^m$$

12.2 Osnovne operacije

Osnovna operacija kombiniranja diferencijalnih formi, ideja

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x$$

Definicija 12.2. **Vanjski produkt** (eng. *exterior product*), $\wedge : \Omega^p \times \Omega^q \to \Omega^{p+q}$

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p!q!} \sum \mathrm{sgn}\,(\pi)\, \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})$$

Jezikom apstraktnih indeksa

$$(\alpha \wedge \beta)_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!}\, \alpha_{[a_1 \dots a_p} \beta_{b_1 \dots b_q]}$$

Volumna forma. Jednostavan primjer imamo u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu,

$$\epsilon = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Općenito, na glatkoj m-mnogostrukosti (M, g_{ab}) s metrikom g_{ab} definiramo volumnu formu $\epsilon \in \Omega^m(M)$ preko normalizacije

$$\epsilon_{a_1 \dots a_m} \epsilon^{a_1 \dots a_m} = (-1)^s\, m! \tag{12.1}$$

Konkretno, u bazi vezanoj za neki koordinatni sustav $\{x^1, \dots, x^m\}$ imamo

$$\epsilon = \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge x^m \tag{12.2}$$

gdje je g determinanta metrike g_{ab}. Volumna forma je “kovarijantno konstantna”, odnosno vrijedi

$$\nabla_b \epsilon_{a_1 \dots a_m} = 0\ . \tag{12.3}$$

Ukratko, s obzirom na normalizaciju imamo

$$0 = \nabla_b (\epsilon^{a_1 \dots a_m} \epsilon_{a_1 \dots a_m}) = 2m! \epsilon^{1 \dots m} \nabla_b \epsilon_{1 \dots m}\ ,$$

a kako je $\epsilon^{1 \dots m} \neq 0$, slijedi tvrdnja.

Teorem 12.3.

$$\alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p \tag{12.4}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \tag{12.5}$$

DOKAZ : Kod prve relacije samo trebamo ispratiti “prebacivanje” indeksa s jedne na drugu stranu i predznake koji se pri tom pojave. Asocijativnost je posljedica jednakosti

$$[[a_1 \dots a_{p+q}] a_{p+q+1} \dots a_{p+q+r}] = [a_1 \dots a_{p+q+r}] = [a_1 \dots a_p [a_{p+1} \dots a_{p+q+r}]]$$

□

Posljedice. Ako je α forma neparnog reda, tada je $\alpha \wedge \alpha = -\alpha \wedge \alpha$, pa je $\alpha \wedge \alpha = 0$, ali općenito ova zadnja jednakost ne vrijedi za forme parnog reda; npr.

$$\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w\ , \quad \alpha \wedge \alpha = 2\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w$$

Definicija 12.4. Vanjska derivacija (eng. *exterior derivative*), $\mathrm{d} : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$

$$(\mathrm{d}\omega)_{a_1 \dots a_{p+1}} = (p+1)\nabla_{[a_1}\omega_{a_2 \dots a_{p+1}]}$$

U odsustvu torzije, kovarijantnu derivaciju je moguće zamjeniti s običnom u definiciji vanjske derivacije,

$$\nabla_{[a}\omega_{bc\dots]} = \partial_{[a}\omega_{bc\dots]} - \Gamma^z_{[ab}\,\omega_{|z|c\dots]} - \dots = \partial_{[a}\omega_{bc\dots]}$$

Teorem 12.5.

$$\mathrm{d}(\alpha_p \wedge \beta_q) = (\mathrm{d}\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge \mathrm{d}\beta_q$$

Dokaz :

$$(\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta))_{a_1 \dots a_{p+q+1}} = (p+q+1)\,\partial_{[a_1}(\alpha \wedge \beta)_{a_2 \dots a_{p+q+1}]} =$$

$$= (p+q+1)\,\frac{(p+q)!}{p!q!}\,\partial_{[a_1}\left(\alpha_{a_2 \dots a_{p+1}}\beta_{a_{p+2} \dots a_{p+q+1}]}\right)$$

S druge strane

$$(\mathrm{d}\alpha \wedge \beta)_{a_1 \dots a_{p+q+1}} = \frac{(p+1+q)!}{(p+1)!q!}\,(\mathrm{d}\alpha)_{[a_1 \dots a_{p+1}}\beta_{a_{p+2} \dots a_{p+q+1}]} =$$

$$= \frac{(p+1+q)!}{(p+1)!q!}\,(p+1)\,\partial_{[a_1}\alpha_{a_2 \dots a_{p+1}}\beta_{a_{p+2} \dots a_{p+q+1}]}$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}\beta)_{a_1 \dots a_{p+q+1}} = \frac{(p+1+q)!}{p!(q+1)!}\,(q+1)\,\alpha_{[a_1 \dots a_p}\partial_{a_{p+1}}\beta_{a_{p+2} \dots a_{p+q+1}]} =$$

$$= (-1)^p\,\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\,\alpha_{[a_2 \dots a_{p+1}}\partial_{a_1}\beta_{a_{p+2} \dots a_{p+q+1}]}$$

□

Teorem 12.6.

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0\,, \quad \mathrm{d}^2 = 0$$

Dokaz :

$$(\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega))_{a_1 \dots a_{p+2}} = (p+2)\,\partial_{[a_1}(\mathrm{d}\omega)_{a_2 \dots a_{p+2}]} =$$
$$= (p+2)(p+1)\,\partial_{[a_1}\partial_{a_2}\omega_{a_3 \dots a_{p+2}]} = 0$$

□

Definicija 12.7. Kontrahiranje s vektorom, $i_X : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$

$$i_X f = 0\ , \quad (i_X\omega)(v_1,\dots,v_{p-1}) = \omega(X,v_1,\dots,v_{p-1})$$

$$(i_X\omega)_{a_1\dots a_{p-1}} = X^b \omega_{ba_1\dots a_{p-1}}$$

Primjer: $X = \partial/\partial x, Y = \partial/\partial y$,

$$i_X \mathrm{d}x = 1\ , \quad i_Y \mathrm{d}y = 1\ , \quad i_X \mathrm{d}y = 0 = i_Y \mathrm{d}x$$

Teorem 12.8.

$$i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X\alpha_p)\wedge\beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge (i_X\beta_q)$$

DOKAZ :

$$(i_X(\alpha_p\wedge\beta_q))_{a_1\dots a_{p+q-1}} = X^c(\alpha\wedge\beta)_{ca_1\dots a_{p+q-1}} =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!}\, X^c \alpha_{[ca_1\dots a_{p-1}}\beta_{a_p\dots a_{p+q-1}]}$$

Korištenjem rastava

$$[ca_1\dots a_n] = \frac{1}{n+1}\big(c[a_1a_2\dots a_n] - [a_1|c|a_2\dots a_n] + \dots\big)$$

i antisimetričnosti formi imamo

$$(i_X(\alpha_p\wedge\beta_q))_{a_1\dots a_{p+q-1}} =$$

$$= \frac{(p+q-1)!}{p!q!}\, X^c \left(p\,\alpha_{c[a_1\dots a_{p-1}}\beta_{a_p\dots a_{p+q-1}]} + q\,\alpha_{[a_1\dots a_{p-1}}\beta_{|c|a_p\dots a_{p+q-1}]}\right)$$

S druge strane,

$$(i_X\alpha\wedge\beta)_{a_1\dots a_{p+q-1}} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!}\, X^c \alpha_{c[a_1\dots a_{p-1}}\beta_{a_p\dots a_{p+q-1}]}$$

$$(\alpha\wedge i_X\beta)_{a_1\dots a_{p+q-1}} = \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!}\, X^c \alpha_{[a_1\dots a_{p-1}}\beta_{|c|a_p\dots a_{p+q-1}]}$$

□

Primjer: $X = \partial/\partial x, Y = \partial/\partial y, Z = \partial/\partial z$,

$$i_X(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \mathrm{d}y\ , \quad i_X(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = 0\ , \quad i_X(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x) = -\mathrm{d}z$$

Teorem 12.9.

$$i_X(i_X\omega) = 0\ , \quad i_X^2 = 0$$

DOKAZ :
$$(i_X i_X \omega)_{a_1 \dots a_{p-2}} = X^b X^c \omega_{bca_1 \dots a_{p-2}} = 0$$

□

Teorem 12.10. *Neka je $\beta \in \Omega^1$, tada*

$$X(i_Y\beta) - Y(i_X\beta) = \mathrm{d}\beta(X,Y) + i_{[X,Y]}\beta \tag{12.6}$$

DOKAZ :
$$\begin{aligned} & X^a \nabla_a(\beta_b Y^b) - Y^a \nabla_a(\beta_b X^b) = \\ & = (X^a Y^b - Y^a X^b)\nabla_a \beta_b + \beta_b X^a \nabla_a Y^b - \beta_b Y^a \nabla_a X^b = \\ & = 2X^{[a}Y^{b]}\nabla_a \beta_b + \beta_b [X,Y]^b = X^a Y^b (\mathrm{d}\beta)_{ab} + \beta_b [X,Y]^b \end{aligned}$$

□

Definicija 12.11. **Hodgeov operator** $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{m-p}(M)$

$$(*\omega)_{a_{p+1}\dots a_m} = \frac{1}{p!}\,\omega_{a_1\dots a_p}\epsilon^{a_1\dots a_p}{}_{a_{p+1}\dots a_m} \tag{12.7}$$

Teorem 12.12.

$$**\alpha_p = (-1)^{p(m-p)+s}\alpha_p = (-1)^{p(m+1)+s}\alpha_p \tag{12.8}$$

$$*1 = \epsilon\,, \quad *\epsilon = (-1)^s\,, \quad i_X\epsilon = *X \tag{12.9}$$

Konkretnije, imamo li u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ 1-formu $\mathrm{d}x$, tada je

$$*\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2!}\,(*\mathrm{d}x)_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{1!2!}\,(\mathrm{d}x)_\alpha \epsilon^\alpha{}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu =$$

$$= \epsilon^1{}_{23}\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

i analogno

$$*\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x\,, \quad *(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) = \mathrm{d}y$$

$$*\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,, \quad *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}z$$

$$*1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,, \quad *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 1$$

Lema 12.13. *Za $\alpha, \beta \in \Omega^p$*

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha \,|\, \beta)\, \epsilon \tag{12.10}$$

gdje smo uveli pokratu

$$(\alpha \,|\, \beta) \equiv \frac{1}{p!}\, \alpha_{a_1 \dots a_p} \beta^{a_1 \dots a_p} \ . \tag{12.11}$$

Praktični recept u slučaju kada metriku možemo napisati u dijagonalnoj formi. Neka je $\alpha = \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$, odnosno $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} = 1$. Tada imamo

$$\alpha \wedge *\alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{g_{\mu_1\mu_1} \cdots g_{\mu_p\mu_p}}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \ . \tag{12.12}$$

Odavde možemo iščitati Hodgeov dual. Na primjer, ako je $\alpha = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^p$, tada imamo

$$*(\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^p) = \frac{\sqrt{|g|}}{g_{11} \cdots g_{pp}}\, \mathrm{d}x^{p+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \ .$$

Teorem 12.14. *Ta svaki tangentni vektor X^a i diferencijalnu formu $\omega \in \Omega^p(M)$ vrijedi*

$$i_X *\omega = *(\omega \wedge X) \tag{12.13}$$

gdje s desne strane jednakosti "X" označava 1-formu X_a pridruženu vektoru X^a.

Dokaz :

$$(*(\alpha \wedge X))_{b_1 \dots b_{m-p-1}} = \frac{1}{(p+1)!}\, \frac{(p+1)!}{p!\,1!}\, \alpha_{[a_1 \dots a_p} X_{a_{p+1}]}\, \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}}{}_{b_1 \dots b_{m-p-1}} =$$

$$= X^{a_{p+1}}\, (*\alpha)_{a_{p+1} b_1 \dots b_{m-p-1}}$$

□

Definicija 12.15. **Koderivacija** diferencijalne forme $\omega \in \Omega^p$ je preslikavanje $\delta : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ (alternativna oznaka u literaturi je $\mathrm{d}^\dagger$) definirano s

$$\delta\omega = (-1)^{m(p+1)+s} *\mathrm{d}*\omega \tag{12.14}$$

$$(\delta\omega)_{a_1 \dots a_{p-1}} = \nabla^b \omega_{b a_1 \dots a_{p-1}} \tag{12.15}$$

Primjetimo, specijalno za $f \in \Omega^0$ imamo $\delta f = 0$. Odmah vidimo da je općenito $\delta^2 = 0$,

$$\delta^2 = \pm * \mathrm{d} * *\mathrm{d}* = \pm * \mathrm{dd}* = 0$$

Definicija 12.16. **Laplasijan** (Laplace-Beltramijev operator) $\Delta : \Omega^p \to \Omega^p$,

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} = (\mathrm{d} + \delta)^2 \tag{12.16}$$

$$\Delta f = \mathrm{d}\delta f + \delta\mathrm{d} f = \nabla^a \nabla_a f$$

Primjer|i 12.17. Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$, $s = 0$, $m = 3$

$$**\alpha_p = (-1)^{p(3-p)} \alpha_p = \alpha_p$$

$$\delta\alpha_p = (-1)^{3(p+1)} *\mathrm{d}* \alpha = (-1)^{p+1} *\mathrm{d}* \alpha$$

$$\mathrm{d}f = \nabla_\mu f \, \mathrm{d}x^\mu \,, \qquad \boldsymbol{\nabla} f = \sum_i \partial_i f \, \hat{\mathbf{x}}^i$$

$$(*\mathrm{d}\alpha)_c = \frac{1}{2} (\mathrm{d}\alpha)_{ab} \epsilon^{ab}{}_c = \nabla_{[a} \alpha_{b]} \epsilon^{ab}{}_c = \nabla_a \alpha_b \epsilon^{ab}{}_c \,, \qquad (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j v^k$$

$$*\mathrm{d} * \alpha = \frac{1}{3!} (\mathrm{d} * \alpha)_{abc} \epsilon^{abc} = \frac{3}{3!} \nabla_{[a} (*\alpha)_{bc]} \epsilon^{abc} =$$

$$= \frac{1}{2} \nabla_a (\alpha_d \epsilon^d{}_{bc}) \epsilon^{abc} = \frac{1}{2} \nabla_a \alpha_d \, 2! g^{da} = \nabla_a \alpha^a \,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_i \partial_i v^i$$

$$*\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = *\mathrm{d}^2 f = 0 \,, \quad \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

$$*\mathrm{d} * (*\mathrm{d}\alpha) = *\mathrm{d}(**)\mathrm{d}\alpha = 0 \,, \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}) = 0$$

//

12.3 Liejeva derivacija diferencijalnih formi

Liejeva derivacija je, kao i na ostalim tenzorima, automatski definirana i za diferencijalne forme, $\pounds_X : \Omega^p \to \Omega^p$.

Teorem 12.18 (Cartan).

$$\pounds_X \omega = (\mathrm{d} i_X + i_X \mathrm{d}) \omega \tag{12.17}$$

DOKAZ :

$$\pounds_X \omega_{a_1\dots a_p} = X^b \nabla_b \omega_{a_1\dots a_p} + \sum_{i=1}^{p} \omega_{a_1\dots b\dots a_p} \nabla_{a_i} X^b$$

Druga strana,

$$(\mathrm{d}(i_X\omega))_{a_1\dots a_p} = p\nabla_{[a_1}(X^b \omega_{|b|a_2\dots a_p]}) =$$

$$= p(\nabla_{[a_1} X^b)\omega_{|b|a_2\dots a_p]} + pX^b \nabla_{[a_1}\omega_{|b|a_2\dots a_p]}$$

Prvi član,

$$p(\nabla_{[a_1} X^b)\omega_{|b|a_2\dots a_p]} =$$

$$= \frac{p}{p!}\Big((p-1)!(\nabla_{a_1} X^b)\omega_{ba_2\dots a_p} + (p-1)!(\nabla_{a_2} X^b)\omega_{a_1 b a_3\dots a_p} + \dots\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \omega_{a_1\dots b\dots a_p} \nabla_{a_i} X^b$$

Nadalje,

$$(i_X(\mathrm{d}\omega))_{a_1\dots a_p} = X^b(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\dots a_p} = (p+1)X^b \nabla_{[b}\omega_{a_1\dots a_p]} =$$

$$= X^b \nabla_b \omega_{[a_1\dots a_p]} - X^b \nabla_{[a_1}\omega_{|b|a_2\dots a_p]} + X^b \nabla_{[a_1}\omega_{a_2|b|a_3\dots a_p]} - \dots =$$

$$= X^b \nabla_b \omega_{a_1\dots a_p} - pX^b \nabla_{[a_1}\omega_{|b|a_2\dots a_p]}$$

Zbrajanjem se dobije traženi rezultat.

Skica za alternativni dokaz Cartanove formule.

$$\phi^* S \otimes T = (\phi^* S) \otimes (\phi^* T)$$

$$\pounds_X(S \otimes T) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\phi^* S \otimes \phi^* T - S \otimes \phi^* T + S \otimes \phi^* T - S \otimes T\right)$$

$$\pounds_X(S \otimes T) = (\pounds_X S) \otimes T + S \otimes (\pounds_X T)\,, \quad \pounds_X(\alpha \wedge \beta) = (\pounds_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \pounds_X \beta$$

$$(\pounds_X \mathrm{d}f)(Y) = \pounds_X(\mathrm{d}(Y)) - \mathrm{d}f(\pounds_X Y) =$$

$$= \pounds_X(Y(f)) - [X,Y](f) = Y(X(f)) = \mathrm{d}(X(f))(Y) = (\mathrm{d}\pounds_X f)(Y)$$

$$\pounds_X(\mathrm{d}u \wedge \beta) = (\pounds_X \mathrm{d}u) \wedge \beta + \mathrm{d}u \wedge \pounds_X \beta = \mathrm{d}(X(u)) \wedge \beta + \mathrm{d}u \wedge (i_X \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}i_X \beta)$$

$$(\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})(\mathrm{d}u \wedge \beta) = \mathrm{d}(X(u)\beta - \mathrm{d}u \wedge i_X \beta) + i_X(-\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta) =$$

$$= \mathrm{d}(X(u)) \wedge \beta + X(u)\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}i_X \beta - (i_X \mathrm{d}u)\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}u \wedge i_X \mathrm{d}\beta$$

□

Na primjer,

$$\pounds_X f = (\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})f = i_X \mathrm{d}f = X^a \nabla_a f = X(f)$$

Teorem 12.19. *Komutiranja. Liejeva derivacija i vanjska derivacija komutiraju,*

$$\pounds_X \mathrm{d} = \mathrm{d}\pounds_X \tag{12.18}$$

Ako imamo dva vektorska polja X^a i Y^a, tada vrijedi

$$\pounds_X i_y - i_Y \pounds_X = i_{[X,Y]} \tag{12.19}$$

Komutiranje Liejeve derivacije i Hodgeovog duala,

$$\pounds_X {*\alpha} - {*\,\pounds_X \alpha} = (\delta X)\,{*\alpha} + {*\widehat{\alpha}} \tag{12.20}$$

gdje je

$$\widehat{\alpha}_{a_1 \dots a_p} \equiv p(\pounds_X g^{bc}) g_{b[a_1} \alpha_{|c|a_2 \dots a_p]} \tag{12.21}$$

Dokaz : Prva relacija,

$$\pounds_X \mathrm{d} = (\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})\mathrm{d} = \mathrm{d}i_X \mathrm{d} = \mathrm{d}(\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d}) = \mathrm{d}\pounds_X$$

Druga relacija je direktna posljedica Leibnizovog pravila,

$$\pounds_X (Y^a \omega_{a\dots}) = (\pounds_X Y^a)\omega_{a\dots} + Y^a \pounds_X \omega_{a\dots}$$

$$\pounds_X (Y^a \omega_{a\dots}) - Y^a \pounds_X \omega_{a\dots} = [X,Y]^a \omega_{a\dots}$$

Treća relacija … □

Teorem 12.20.

$$\pounds_X(\alpha \wedge \beta) = (\pounds_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\pounds_X \beta) \tag{12.22}$$

Dokaz :

$$\begin{gathered}
\pounds_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}i_X + i_X \mathrm{d})(\alpha \wedge \beta) = \\
= \mathrm{d}(i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X \beta) + i_X(\mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta) = \\
= \mathrm{d}i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{p-1} i_X \alpha \wedge \mathrm{d}\beta + (-1)^p \mathrm{d}\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^{2p} \alpha \wedge \mathrm{d}i_X \beta + \\
+ i_X \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+1} \mathrm{d}\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^p i_X \alpha \wedge \mathrm{d}\beta + (-1)^{2p} \alpha \wedge i_X \mathrm{d}\beta = \\
= (\mathrm{d}i_X \alpha + i_X \mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathrm{d}i_X \beta + i_X \mathrm{d}\beta)
\end{gathered}$$

□

12.4 Integriranje diferencijalnih formi

Integral m-forme ω s kompaktnim nosačem na $\mathbb{R}^m$, $\omega = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge x^m$

$$\int_A \omega \equiv \int_A f\,\mathrm{d}x^1 \,\ldots\, \mathrm{d}x^m$$

Poopćenje za orjentiranu m-mnogostrukost M. Ako je (O, ϕ) karta na M i $\omega \in \Omega_c^m(O)$ (m-forma s kompaktnim nosačem), tada je $(\phi^{-1})^*\omega$ m-forma koja ima kompaktan nosač na skupu $\phi(O) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\int_O \omega \equiv \int_{\phi(O)} (\phi^{-1})^*\omega$$

…suma $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$ je konačna,

$$\int_M \omega \equiv \sum_{\alpha \in J} \int_{O_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

Postojanje particije jedinice $\{(\rho_\alpha, O_\alpha)\}$ …

Teorem 12.21 (Stokes). $\omega \in \Omega_c^p(M)$, $\imath : \partial M \to M$,

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \imath^*\omega \tag{12.23}$$

Primjer|i 12.22. Stokes u klasičnoj vektorskoj analizi … Za $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial\Omega} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

//

12.5 Povezivanje lokalnog i globalnog

Teorem 12.23 (Gauss-Bonnet). *2D*

$$\int_M R\,\epsilon = 4\pi\chi(M) \tag{12.24}$$

Sfera radijusa a,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{2}{a^2}\, a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = 8\pi = 4\pi\chi(\mathbb{S}^2)$$

Provjeriti za torus …

Dodatna literatura

- [Bac12]
- [Tu11]

Zadaci

1. Dokažite da vrijedi
$$*\Delta = \Delta * \,, \quad \mathrm{d}\Delta = \Delta \mathrm{d} \,, \quad \delta\Delta = \Delta\delta$$
2. Dokažite da vrijedi
$$\pounds_X(f\epsilon) = \delta(fX)\epsilon$$

13

Dinamika fizikalnih polja

13.1 Kovarijantizacija

Važna lekcija koju su nam donijele specijalna i opća teorija relativnosti jest da bi fundamentalna fizika trebala biti koordinatno neovisna, odnosno invarijantna na koordinatne transformacije. Smještamo li fiziku na mnogostrukost, tada bi fizikalne veličine i jednadžbe trebale biti tenzorske. Mnogostrukost i tenzori su definirani neovisno o koordinatama, koje se pojavljuju tek kao sekundarni alat.

Međutim, u praksi često nailazimo na obratnu situaciju. Relativistička veličina ili jednadžba su nam prvo dostupne samo u specijalnom obliku (npr. za prostorvrijeme Minkowskog, u inercijalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu). Naša zadaća je stoga pronaći odgovarajuću tenzorsku formulaciju problema. Postupak kojeg bi mogli nazvati **kovarijantizacija** ugrubo se sastoji od dva koraka:

(a) odabir tenzorskog zapisa koji se svodi na početni izraz (uz metriku i koordinatni sustav u kojem je on napisan), i

(b) poopćenje sa pseudo-euklidskog slučaja na općenitu pseudo-Riemannovu metriku.

Prva zadaća, između ostalog obično uključuje zamjenu parcijalne derivacije s kovarijantnom, $\partial \to \nabla$, dok druga primjerice uključuje zamjenu metrike Minkowskog s općenitom prostornovremenskom metrikom, $\eta_{ab} \to g_{ab}$. Ovaj postupak, međutim, općenito *nema* jedinstven rezultat.

Promotrimo sljedeći primjer: Klein-Gordonova jednadžba za skalarno polje ϕ mase m. U Kartezijevom inercijalom sustavu $\{t,x,y,z\}$, na prostorvremenu Minkowskog, ova jednadžba glasi

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - m^2\phi = 0\ . \tag{13.1}$$

Prvo, koristeći Einsteinovu sumacijsku konvenciju i metriku Minkowskog u ovom koordinatnom sustavu, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,+1,+1,+1) = \eta^{\mu\nu}$, jednadžbu prvo možemo prepisati u obliku

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2\phi = 0\ . \tag{13.2}$$

U prvom koraku kovarijantizacije zamjenjujemo parcijalne s kovarijantnim derivacijama,

$$\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - m^2\phi = 0 \ , \tag{13.3}$$

dok u drugom koraku metriku Minkowskog zamjenjujemo s općenitom prostornovremenskom metrikom,

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - m^2\phi = 0 \ . \tag{13.4}$$

Ovdje valja uočiti jedan od prešutnih odabira koje smo napravili tijekom postupka. Naime, s obzirom da Riccijev skalar R iščezava za metriku Minkowskog, jednako tako smo kao kovarijantnu verziju Klein-Gordonove jednadžbe mogli napisati i

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + \xi R\phi - m^2\phi = 0 \ , \tag{13.5}$$

s proizvoljnom realnom konstantom ξ. Matematički su obje ponuđene jednadžbe jednako dobre jer se obje svode na početni oblik jednadžbe. Stoga, potreban je fizikalni postupak, eksperiment, koji bi razlučio koja jednadžba uistinu opisuje ponašanje ovog polja u prirodi. U praksi se ponekad postuliraju principi (koje tek valja eksperimentalno potvrditi ili opovrgnuti) koji sužuju izbor pri kovarijantizaciji. Na primjer, *princip minimalnog vezanja* (ukupni lagranžijan nema mješanih "gravitacija-materija" članova) u Klein-Gordonovom slučaju nalaže da je $\xi = 0$, dok nametanje konformne simetrije nalaže da je $\xi = 1/6$.

13.2 Maxwellove jednadžbe

Dinamika elektromagnetskog polja opisana je Maxwellovim jednadžbama. Povijesno je zanimljivo da su ove jednadžbe, napisane nekih pola stoljeća prije formuliranja specijalne teorije relativnosti, prvi primjer fizikalnog zakona invarijantnog na Poincaréove transformacije. Pa ipak, i danas ih najčešće možemo vidjeti zapisane u formi koja *nije* manifestno invarijantna.

Pretpostavimo, radi simetrije u zapisu, da magnetski monopoli (bilo u obliku statične raspodjele ili pripadnih magnetskih struja magnetskih monopola) nisu nužno odsutni, kao što to ukazuju dosadašnji pokusi. Promatramo li električno polje $\mathbf{E}$ i magnetsko polje $\mathbf{B}$ u prostorvremenu Minkowskog, formirane raspodjelom električnih naboja (prostorne gustoće ρ_e), mangetskih naboja (opisanog prostornom gustoćom ρ_m), električnih struja (gustoće $\mathbf{j}_\mathrm{e}$) i magnetskih struja (gustoće $\mathbf{j}_\mathrm{m}$), tada su ona rješenja sustava jednadžbi

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho_\mathrm{e} \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 4\pi\rho_\mathrm{m} \tag{13.7}$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - 4\pi\,\mathbf{j}_\mathrm{e} \tag{13.8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} - 4\pi\,\mathbf{j}_\mathrm{m} \tag{13.9}$$

Naravno, u odsustvu magnetskih naboja, $\rho_\mathrm{m} = 0$ i $\mathbf{j}_\mathrm{m} = \mathbf{0}$, ove jednadžbe se svode na oblik koji se češće navodi u udžbenicima iz klasične elektrodinamike.

S obzirom da su Maxwellove jednadžbe (prešutno) napisane u Kartezijevom inercijalnom koordinatnom sustavu, prvo ih valja kovarijantizirati. Prvi korak se sastoji od odabira tenzora u koji će biti upisane sve neovisne komponente elektromagnetskog polja. Imamo ih ukupno šest, tri u električnom i tri u magnetskom polju. Vektorsko polje u 4-dimenzionalnom prostoru očigledno nije dostatno pa gledamo tenzore višeg ranga. Najjednostavniji odabir je antisimetričan tenzor ranga $(0,2)$, koji ima točno šest nezavisnih komponenti. Početni položaj indeksa nije bitan, kasnije ćemo ionako dizati i spuštati indekse ovisno o potrebi. Konvecionalna oznaka za elektromagnetski tenzor je F_{ab}. Gustoće i 3-struje možemo upisati kao komponente 4-struja, $J_{\mathrm{e}}^{\mu} = (\rho_{\mathrm{e}}, \mathbf{j}_{\mathrm{e}})$ i $J_{\mathrm{m}}^{\mu} = (\rho_{\mathrm{m}}, \mathbf{j}_{\mathrm{m}})$.

Komponente elektromagnetskog tenzora i pripadnog Hodgeovog duala, u početnom koordinatnom sustavu glase

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -F_{10} & -F_{20} & -F_{30} \\ F_{10} & 0 & -F_{21} & -F_{31} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & -F_{32} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} , \tag{13.10}$$

$$*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -F_{32} & F_{31} & -F_{21} \\ F_{32} & 0 & F_{30} & -F_{20} \\ -F_{31} & -F_{30} & 0 & F_{10} \\ F_{21} & F_{20} & -F_{10} & 0 \end{pmatrix} . \tag{13.11}$$

Sada imamo slobodu odabira koje točno komponente $F_{\mu\nu}$ ćemo povezati s komponentama vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Prije svega, kako ne bi uspoređivali "kruške i jabuke", uvodimo dvije 1-forme, s komponentama $E_\mu = (0, E_x, E_y, E_z)$ i $B_\mu = (0, B_x, B_y, B_z)$. Primjetimo, u ovom koordinatnom sustavu prostorne komponente imaju jednake vrijednosti neovisno o položaju indeksa, $E_i = E^i$, odnosno $B_i = B^i$. U literaturi postoji niz različitih odabira zapisa među kojima mi biramo sljedeći,

$$E_\mu = F_{\mu 0} \qquad \text{i} \qquad B_\mu = *F_{0\mu} \; .$$

Prve dvije Maxwellove jednadžbe sadrže divergencije koje možemo zapisati kao

$$\partial_\mu E^\mu = -\partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi J_e^0 \; , \tag{13.12}$$

$$\partial_\mu B^\mu = -\partial_\mu {*F}^{0\mu} = 4\pi J_m^0 \; . \tag{13.13}$$

Ovdje smo, radi konzistentnog zapisa lijeve i desne strane jednakosti, podigli oba indeksa na tenzorima F_{ab} i $*F_{ab}$, što je generiralo dodatne minuse. Nadalje, imamo

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})^i = {\epsilon_0}^{ijk} \partial_j E_k = {\epsilon_0}^{ijk} \partial_j F_{k0}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})^i = {\epsilon_0}^{ijk} \partial_j B_k = {\epsilon_0}^{ijk} \partial_j {*F}_{0k}$$

Sada se želimo riješiti Levi-Civita tenzora u gornjim izrazima. Koristeći rastav

$$F_{k0} = -{*}{*}F_{k0} = -\frac{1}{2} {*F}_{rs} \, {\epsilon^{rs}}_{k0} = \frac{1}{2} \epsilon_{rs0k} \, {*F}^{rs}$$

u prvoj jednadžbi i samu definiciju Hodgeovog duala u drugoj jednadžbi, imamo

$$(\nabla\times\mathbf{E})^i = \frac{1}{2}\,\epsilon_0{}^{ijk}\epsilon_{rs0k}\,\partial_j{*F}^{rs}$$
$$(\nabla\times\mathbf{B})^i = \frac{1}{2}\,\epsilon_0{}^{ijk}\epsilon_{rs0k}\,\partial_j F^{rs}$$

Nadalje, koristeći

$$\epsilon_0{}^{ijk}\epsilon_{rs0k} = -\epsilon^{k0ij}\epsilon_{k0rs} = \delta^i_r\delta^j_s - \delta^i_s\delta^j_r$$

imamo

$$(\nabla\times\mathbf{E})^i = \partial_s{*F}^{is}\ , \quad (\nabla\times\mathbf{B})^i = \partial_s F^{is}\ .$$

Stoga, preostale dvije Maxwellove jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$\partial_0 E^i = -\partial_0 F^{i0} = \partial_s F^{is} - 4\pi J^i_{\mathrm{e}}\ ,$$
$$\partial_0 B^i = -\partial_0{*F}^{0i} = -\partial_s{*F}^{is} - 4\pi J^i_{\mathrm{m}}\ .$$

obratite pažnju na položaj indeksa!

odnosno

$$\partial_\mu F^{\mu i} = -4\pi J^i_{\mathrm{e}}\ , \quad \partial_\mu{*F}^{\mu i} = 4\pi J^i_{\mathrm{m}}\ . \tag{13.14}$$

Time smo sve četiri Maxwellove jednadžbe sveli na zapis

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu_e\ , \quad \partial_\mu{*F}^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu_m\ . \tag{13.15}$$

Ovo nam sugerira pripadnu kovarijantnu formu Maxwellovih jednadžbi,

$$\nabla_a F^{ab} = -4\pi J^b_{\mathrm{e}}\ , \quad \nabla_a{*F}^{ab} = 4\pi J^b_{\mathrm{m}} \tag{13.16}$$

Ovaj zapis možemo prebaciti i u jezik diferencijalnih formi. Uz prikladno pomicanje indeksa imamo odmah

$$\delta F = -4\pi J_{\mathrm{e}}\ , \quad \delta{*F} = 4\pi J_{\mathrm{m}}\ , \tag{13.17}$$

odnosno, primjenom Hodgeovog duala,

$$\mathrm{d}{*F} = 4\pi{*J_{\mathrm{e}}}\ , \quad \mathrm{d}F = 4\pi{*J_{\mathrm{m}}}\ . \tag{13.18}$$

Odavde odmah vidimo, primjerice, da izvori zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta,

$$0 = \mathrm{dd}{*F} = 4\pi\,\mathrm{d}{*J_{\mathrm{e}}}\ , \quad 0 = \mathrm{dd}F = 4\pi\,\mathrm{d}{*J_{\mathrm{m}}}\ . \tag{13.19}$$

Naime, primjenom Hodgeovog duala slijedi $\delta J_{\mathrm{e}} = 0$ i $\delta J_{\mathrm{m}} = 0$, što se u Kartezijevom koordinatnom sustavu svodi na

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathrm{e}} = 0\ , \quad \frac{\partial\rho_{\mathrm{m}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathrm{m}} = 0\ . \tag{13.20}$$

Rastav na električnu i magnetsku komponentu s obzirom na općenito vektorsko polje X^a s normom $N \equiv X_a X^a$.

$$E \equiv -i_X F\ , \quad B \equiv i_X{*F} \tag{13.21}$$

Odavde imamo

$$-*(X\wedge B) = *(B\wedge X) = i_X *B = i_X * i_X *F =$$
$$= i_X **(F\wedge X) = i_X(F\wedge X) = -E\wedge X + NF$$

odnosno

$$-NF = X\wedge E + *(X\wedge B) \tag{13.22}$$

Specijalno, za $X^a = u^a$ imamo $u^a u_a = -1$ i

$$F = u\wedge E + *(u\wedge B) \tag{13.23}$$

Pripadni rastav 4-struja, $\rho_\mathrm{e} = -i_u J_\mathrm{e}$ i $\rho_\mathrm{m} = -i_u J_\mathrm{m}$.

Primjer|i 13.1. Magnetsko polje točkastog magnetskog monopola g u ishodištu.

$$u^\mu = (1,\mathbf{0})\,,\quad u = -\mathrm{d}t$$
$$B^a = \frac{g}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a\,,\quad B = \frac{g}{r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$F = *(u\wedge B) = -\frac{g}{r^2}\,*(\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r) = g\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$$

//

Lorentzova sila,

$$ma^a = qE^a\,, \tag{13.24}$$

gdje su m i q masa i naboj čestice na koju djeluje elektromagnetsko polje, a^a 4-akceleracija definirana s $a^a = u^b\nabla_b u^a$, a $E^a = u^b F^a{}_b$ električno polje definirano s obzirom na 4-brzinu u^a.

Korisna relacija. Promatramo 1-parametarsku grupu difeomorfizama $\phi_s : \mathbb{R}\times M\to M$ na orjentabilnoj m-mnogostrukosti M i pripadno vektorsko polje tangentno na krivulje $\phi_s(x_0):\mathbb{R}\to M$. Neka je N orjentabilna mnogostrukost dimenzije $n\le m$, zadana s inkluzijom $\imath : N\to M$, te $N(s) = \phi_s(N)$ i $\jmath_s = \phi_s\circ\imath$. Promatramo integrale

$$I(s) = \int_N \jmath_s^*\alpha\,. \tag{13.25}$$

Tada je

$$I'(s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_N \jmath_{s+\varepsilon}^*\alpha - \int_N \jmath_s^*\alpha\right) = \int_N \imath^*\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi_{s+\varepsilon}^*\alpha - \phi_s^*\alpha}{\varepsilon} \tag{13.26}$$

i stoga

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_N \jmath_s^*\alpha = \int_N \imath^*\pounds_X\alpha \tag{13.27}$$

U prostornovremenskom kontekstu $X^a = \partial_t^a + v^a$, pa imamo

$$\pounds_X\alpha = (\pounds_{\partial_t} + \pounds_v)\alpha = \partial_t\alpha + i_v\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}i_v\alpha \tag{13.28}$$

13.3 Tenzor energije i impulsa

Općenita definicija, idealni fluid, skalarno polje, EM polje, energijski uvjeti

13.4 Gravitacijske jednadžbe polja

Einsteinova jednadžba, Lovelockeov teorem

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{13.29}$$

Dodatna literatura

- [Wal84]

Zadaci

1.

14

De Rhamova kohomologija

Motivacija. Kada razmatramo fizikalni problem opisan vektorskim poljima, često nas zanima možemo li vektorska polja prikazati kao gradijent skalarnih polja. Razlog je jednostavan: jednostavnije je baratati sa skalarnim nego sa vektorskim poljima. Rotacija gradijenta je nula pa je *nužan* uvjet za uvođenje pomoćnog skalarnog polja iščezavanje rotacije promatranog vektorskog polja. Takvu situaciju imamo u elektrostatici jer je rotacija električnog polja nula (u odsustvu monopolnih struja) pa je uvođenje skalarnog potencijala rutinski postupak. S druge strane, u magnetostatici rotacija magnetskog polja također iščezava, bar u dijelu prostora bez električnih struja, pa ipak ovdje nas čekaju suptilni problemi pri uvođenju magnetskog skalarnog potencijala. Što se ovdje točno događa? Prevedeno u jezik diferencijalnih formi zanima nas odgovor na sljedeće pitanje: ako p-forma ω zadovoljava $\mathrm{d}\omega = 0$, pod kojim uvjetima postoji $(p-1)$-forma α, takva da je $\omega = \mathrm{d}\alpha$?

Definicija 14.1. Za p-formu ω kažemo da je

- **zatvorena** ako je $\mathrm{d}\omega = 0$, odnosno
- **egzaktna** ako postoji $(p-1)$-forma α, takva da je $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

Prirodni kontekst za odgovaranje na ovakva pitanja je klasifikacija pute relacija ekvivalencije. Naime, zanimaju nas diferencijalne forme razvrstane u klase čiji članovi se razlikuju do na egzaktnu formu. Stoga, prvo uvodimo oznake za zatvorene i egzaktne forme na mnogostrukosti,

$$Z^r(M) = \{\alpha \in \Omega^r(M) \mid \mathrm{d}\alpha = 0\}$$
$$B^r(M) = \{\beta \in \Omega^r(M) \mid (\exists\, \gamma \in \Omega^{r-1}(M)) :\ \beta = \mathrm{d}\gamma\}$$

Zajedno s operacijama zbrajanja diferencijalnih formi, strukture $(Z^r(M), +)$ i $(B^r(M), +)$ su Abelove grupe, ali su ujedno $(Z^r(M), +, \cdot\,)$ i $(B^r(M), +, \cdot\,)$ (uz uobičajeno množenje diferencijalnih formi skalarima iz $\mathbb{R}$) vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$. Z^r je poznata kao $\boldsymbol{r}$**-ta kociklična grupa**, B^r kao $\boldsymbol{r}$**-ta korubna grupa**. Svaka egzaktna forma je zatvorena (jer je $\mathrm{d}^2 = 0$) pa je $B^r \leq Z^r$.

Definicija 14.2. r**-ta de Rhamova grupa kohomologije**

$$H^r_{\mathrm{dR}}(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M) \tag{14.1}$$

Elementi skupa H^r_{dR} obično zovemo *klase kohomologije*. Uvijek imamo $B^0(M) = 0$ (jer ne postoje "minus prve" forme) pa je $H^0 \approx Z^0$, koji se sastoji od lokalno konstantnih funkcija (onih koje u svakoj točki mnogostrukosti zadovoljavaju $\mathrm{d}f = 0$) pa je $H^0(M) \approx \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$, gdje broj sumanada je jednak broju povezanih komponenti mnogostrukosti M. Također, $H^r_{\mathrm{dR}}(M) = 0$ za $r < 0$ i $r \geq m+1$.

Primjer|i 14.3. $M = \mathbb{R}$. Promotrimo $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, $\omega = f\,\mathrm{d}x$. Automatski je $\mathrm{d}\omega = 0$. Uvedemo li funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preko

$$F(x) \equiv \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\ ,$$

tada je $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x = \omega$ pa je svaka 1-forma ujedno i egzaktna i zatvorena, pa je $Z^1 \approx B^1$ i $H^1(\mathbb{R}) \approx 0$. //

Primjer|i 14.4. $M = \mathbb{S}^1 = \{\exp(i\theta) \,|\, \theta \in [0, 2\pi\rangle\}$. Promatramo 1-forme, $\omega = f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Uvedemo li funkciju $F : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ preko

$$F(\theta) \equiv \int_0^\theta f(\theta')\,\mathrm{d}\theta'\ ,$$

tada lokalno vrijedi $\omega = \mathrm{d}F$. Međutim, moramo zadovoljiti i uvijet konzistentnosti, $F(2\pi) = F(0) = 0$, odnosno

$$\int_0^{2\pi} f(\theta')\,\mathrm{d}\theta' = 0\ .$$

Promotrimo funkciju $\psi : \Omega^1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$, definiranu sa $\psi(\omega) = F(2\pi)$. Znamo da je $B^1(\mathbb{S}^1) = \ker\psi$ te da je ψ homomorfizam pa je prema teoremu o izomorfizmu

$$H^1(\mathbb{S}^1) = \Omega^1(\mathbb{S}^1)/\ker\psi \approx \operatorname{im}\psi = \mathbb{R}\ .$$

Nekoliko detalja: ako su $\omega, \omega' \in Z^1(\mathbb{S}^1) - B^1(\mathbb{S}^1)$, tada možemo definirati $a \equiv \psi(\omega')/\psi(\omega)$ pa je $\psi(\omega' - a\omega) = 0$ i stoga $\omega' - a\omega \in B^1(\mathbb{S}^1)$, odnosno $\omega' \in [a\omega]$. //

Lema 14.5 (Poincaré). *Ako je $O \subseteq M$ neprazan kontraktibilan otvoren skup, tada je svaka zatvorena r-forma na O također i egzaktna, odnosno $H^r_{\mathrm{dR}}(O) = 0$.*

Dokaz : Neka je $I = [0,1]$ i $F : O \times I \to O$ kontrakcija skupa O u točku $p \in O$, takva da je $F(x, 0) = x$ i $F(x, 1) = p$ za sve $x \in O$. Promatramo r-formu $\alpha \in \Omega^r(O \times I)$, zapisanu u koordinatnom sustavu $\{x^1, \ldots, x^m, t\}$,

$$\alpha = a_{\mu_1\ldots\mu_r}(x,t)\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} + b_{\nu_1\ldots\nu_r}(x,t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{r-1}}\ .$$

Uvodimo operator $P : \Omega^r(O \times I) \to \Omega^{r-1}(O)$ preko

$$P\alpha \equiv \left(\int_0^1 \mathrm{d}s \, b_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}}(x,s) \right) x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{r-1}}$$

te familiju preslikavanja $f_t : O \to O \times I$ preko $f_t(x) = (x,t)$. Tada je

$$f_t^* \alpha = a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,t) \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \; .$$

Tvrdimo da je

$$\mathrm{d}(P\alpha) + P(\mathrm{d}\alpha) = f_1^* \alpha - f_0^* \alpha \; .$$

Naime, imamo

$$\mathrm{d}P\alpha = \left(\int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{b_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}}(x,s)}{\partial x^{\nu_r}} \right) \mathrm{d}x^{\nu_r} \wedge x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{r-1}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha = \frac{a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,t)}{\partial x^\sigma} \, \mathrm{d}x^\sigma \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} + \frac{a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,t)}{\partial t} \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} + \\ + \frac{\partial b_{\nu_1 \dots \nu_r}(x,t)}{\partial x^{\nu_r}} \, \mathrm{d}x^{\nu_r} \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{r-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\mathrm{d}\alpha = \left(\int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,s)}{\partial s} \right) \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} - \\ - \left(\int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{b_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}}(x,s)}{\partial x^{\nu_r}} \right) \mathrm{d}x^{\nu_r} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{r-1}} \end{aligned}$$

Stoga je

$$\mathrm{d}P\alpha + P\mathrm{d}\alpha = (a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,1) - a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x,0)) \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} = f_1^* \alpha - f_0^* \alpha$$

Neka je $\omega \in \Omega^r(O)$ zatvorena r-forma, $\mathrm{d}\omega = 0$. Uvodimo $\alpha = F^* \omega$. Tada je

$$\mathrm{d}PF^*\omega + P\mathrm{d}F^*\omega = f_1^* \circ F^*\omega - f_0^* \circ F^*\omega = (F \circ f_1)^*\omega - (F \circ f_0)^*\omega = -\omega \; ,$$

pri čemu smo iskoristili činjenice da je kompozicija $F \circ f_1$ konstantna funkcija, a kompozicija $F \circ f_0$ identitet na skupu O. No, kako je $\mathrm{d}F^*\omega = F^*\mathrm{d}\omega = 0$ slijedi da je

$$\omega = -\mathrm{d}(PF^*\omega) \; .$$

$\square$

Dodatna literatura

- [Nak03]
- [Tu11]

Zadaci

1. Dokažite da nigdje iščezavajuća 1-forma na zatvorenoj mnogostrukosti ne može biti egzaktna.

2. Ako su $\alpha \in Z^r$ i $\beta \in Z^s$, dokažite da je $\alpha \wedge \beta \in Z^{r+s}$. Ako su $\alpha \in Z^r$ i $\beta \in B^s$, dokažite da je $\alpha \wedge \beta \in B^{r+s}$. Ako su $\alpha \in B^r$ i $\beta \in B^s$, dokažite da je $\alpha \wedge \beta \in B^{r+s}$.

15

Podmnogostrukosti

15.1 Kako smjestiti jednu mnogostrukost u drugu?

Definicija 15.1. Neka su M i S glatke mnogostrukosti, a $f : S \to M$ neprekidno preslikavanje. Kažemo da je f

- **imerzija** ako je $f_* : T_pS \to T_{f(p)}M$ injekcija u svakoj točki $p \in S$;
- **submerzija** ako je $f_* : T_pS \to T_{f(p)}M$ surjekcija u svakoj točki $p \in S$;
- **smještenje** ako je f injektivna imerzija koja je ujedno i homeomorfizam na $f(S) \subseteq M$ (u induciranoj topologiji).

U slučaju kada je preslikavanje f glatko, svim navedenim pojmovima dodajemo pridjev glatka/o.

Primjer|i 15.2. Neka su $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ euklidski prostori uz $m > n$.

- Prototip imerzije (i smještenja) je inkluzija $\imath : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, zadana s
$$\imath(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \, ;$$
- Prototip submerzije je projekcija $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, zadana s
$$\pi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n) \, .$$

//

Definicija 15.3. Neka su M i $S \subseteq M$ glatke mnogostrukosti. Ako je inkluzija $\imath : S \to M$ imerzija tada kažemo da je S **imerzirana podmnogostrukost** mnogostrukosti M. Ako je inkluzija $\imath : S \to M$ smještenje tada kažemo da je S **smještena podmnogostrukost** mnogostrukosti M. Razliku dimenzija $\dim(M) - \dim(S)$ zovemo **kodimenzija** S u M.

Primjer|i 15.4. Promotrimo kako realnu liniju možemo smjestiti u ravninu $\mathbb{R}^2$ pomoću preslikavanja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

- $f(t) = (t, |t|)$ nije derivabilna u $t = 0$.
- $f(t) = (t^3, t^2)$ je glatka ali nije imerzija jer
$$(f_* X)^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} X^\alpha = \frac{\mathrm{d} f^\mu}{\mathrm{d} t} X^t \ , \quad (f_* X|_{t=0})^\mu = 0$$
- $f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ je imerzija ali nije injekcija jer je $f(2) = f(-2)$ (slika preslikavanja f je krivulja koja presjeca samu sebe u $t = \pm 2$).

//

Postavlja se pitanje možemo li svaki mnogostrukost smjestiti u euklidski prostor dovoljno visoke dimenzije ...

Teorem 15.5 (Whitney). *Neka je M glatka m-mnogostrukost. Tada postoji glatko smještenje $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$.*

Vidi [Lee03], Chapter 6.

Primjer svjetlosne hiperplohe: svjetlosni stožac bez vrha.

$$f(t, x, y, z) = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
$$\mathrm{d}f = -2t\,\mathrm{d}t + 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z \neq 0$$
$$n_\mu = (-t, x, y, z) \ , \quad n^\mu = (t, x, y, z) \ , \quad n^2 = 0$$

Normala n^a je svjetlosna na svjetlosnom stošcu!

$$\mathrm{d}n = -\mathrm{d}t + \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \ , \quad n \wedge \mathrm{d}n = 0$$

15.2 NIVOI

Teorem 15.6. *Neka je M glatka m-mnogostrukost, $k \in \mathbb{N}$ prirodan broj takav da je $k < m$, $\{c_1, \dots, c_k\}$ realne konstante, $f_1, \dots, f_k : M \to \mathbb{R}$ glatka preslikavanja, i*

$$S = \{p \in M \mid f_1(p) = c_1, \ \dots, f_k(p) = c_k\} \ .$$

Ako je $\mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_k \neq 0$, tada je S smještena podmnogostrukost kodimenzije k.

DOKAZ : Neka je $F : M \to \mathbb{R}^k$, definirana s $F(p) = (f_1(p), \dots, f_k(p))$. Tada je $S = F^{-1}(\{(c_1, \dots, c_k)\})$. Nadalje, $F_{*,p} : T_p M \to T_{F(p)}\mathbb{R}^k$ je linearno preslikavanje predstavljeno matricom $(F_*)^r_\mu = \partial_\mu F^r = \partial_\mu f_r$. Uvijet $\mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_k \neq 0$ vrijedi akko je $\mathrm{rg}(F_*) = \dim(\mathrm{im}\, F_*) = k$. Prema Lee, TM 5.12 ... □

15.3 Induciranje struktura na podmnogostrukostima

Metrika sfere $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ radijusa a. Koristimo smještenje $\imath : O \to \mathbb{R}^3$ koje je definirano na otvorenom skupu $O = \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$ (gdje su izostavljeni sjeverni pol $N \in \mathbb{S}^2$ i južni pol $S \in \mathbb{S}^2$) u sfernom koordinatnom sustavu preko

$$\imath(\theta, \phi) = (a \sin\theta \cos\phi, a \sin\theta \sin\phi, a \cos\theta)$$

Povlačenjem euklidske metrike iz $\mathbb{R}^3$ induciramo metriku na sferi $\mathbb{S}^2$

$$\imath^* \mathrm{d}x = a \cos\theta \cos\phi \, \mathrm{d}\theta - a \sin\theta \sin\phi \, \mathrm{d}\phi$$

$$\imath^* \mathrm{d}y = a \cos\theta \sin\phi \, \mathrm{d}\theta + a \sin\theta \cos\phi \, \mathrm{d}\phi$$

$$\imath^* \mathrm{d}z = -a \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

...uvrštavanjem i sređivanjem dobijemo

$$g = \imath^* g_{\mathrm{E}} = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi \tag{15.1}$$

Primjetimo, ovako definirana metrika postaje degenerirana u točkama gdje je $\theta = 0$ (sjeverni pol) ili $\theta = \pi$ (južni pol).

Konceptualna napomena. Ploha S unutar $\mathbb{R}^3$, zadana s $z = 0$,

$$\omega = *(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Volumna forma na S,

$$\omega|_S = i^*\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Konfuzija:

$$i^*\omega = i^*(*\mathrm{d}z) = *(i^*\mathrm{d}z) = *(\mathrm{d}i^*z) = 0 \;??$$

Očigledno, povlačenje i Hodgeov dual općenito *ne komutiraju*!

15.4 Frobeniusov teorem

Osnovna pitanja. Pod kojim uvjetima familija vektorskih polja formira podmnogostrukost svojim integralnim krivuljama? Na primjer, zadamo li (glatku) familiju ravnina u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$, pod kojim uvjetima će postojati familija glatkih disjunktnih ploha na koje su zadane ravnine tangentne u svakoj točki? Također, srodno pitanje je pod kojim uvjetima je familija vektorskih polja okomita na familiju podmnogostrukosti?

Definicija 15.7. Neka je E vektorski svežanj nad glatkom m-mnogostrukosti M s projekcijom $\pi : E \to M$. Za podskup $D \subseteq E$ kažemo da je **podsvežanj** svežnja E ako zadovoljava naredna svojstva,

(a) D je podmnogostrukost od E,

(b) za svaku točku $p \in M$ vlakno $D_p = D \cap \pi^{-1}(p)$ je vektorski potprostor vlakna $E_p = \pi^{-1}(p)$,

(c) zajedno s projekcijom $\pi|_D : D \to M$, D je glatki vlaknasti svežanj nad M.

Definicija 15.8. Neka je M glatka mnogostrukost. **Tangentna distribucija** $\mathcal{D}$ je podsvežanj tangentnog svežnja TM. Za imerziranu podmnogostrukost $N \subseteq M$ kažemo da je **integralna mnogostrukost** tangentne distribucije $\mathcal{D}$ ako je $\mathcal{D}_p = T_pN$ u svakoj točki $p \in N$.

Definicija 15.9. Za tangentnu distribuciju $\mathcal{D}$ kažemo da je

- **involutivna** ako je za svaki par lokalnih prereza distribucije $\mathcal{D}$ njihova Liejeva zagrada opet lokalni prerez distribucije $\mathcal{D}$;
- **integrabilna** ako u svakoj točki $p \in M$ postoji integralna mnogostrukost distribucije $\mathcal{D}$;
- **totalno integrabilna** ako u okolini svake točke postoji lokalni koordinatni sustav $\{x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^{m-n}\}$, takav da su nivoi definirani skupom uvjeta

$$y^1 = \text{konst.}\,,\ \dots\ ,\ y^{m-n} = \text{konst.}$$

  n-dimenzionalne integralne mnogostrukosti distribucije $\mathcal{D}$.

Komentar 15.10. Uvijet involutivnosti se ponekad simbolički zapisuje kao inkluzija $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}$, u značenju da je za sve $X^a, Y^a \in \mathcal{D}$ Liejeva zagrada $[X, Y]^a \in \mathcal{D}$. //

Primjer. Neka su plohe u $\mathbb{R}^3$ zadane s nekom funkcijom $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, preko uvjeta $f(\mathbf{r}) = \text{konst.}$. Tada je vektorsko polje okomito na ove plohe zadano s

$$n^a = \lambda \nabla^a f$$

uz neku proizvoljnu neiščezavajuću funkciju λ, odnosno u dualnoj formulaciji (spuštanjem indeksa),

$$n = \lambda\, \mathrm{d}f$$

Tada je

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}\lambda \wedge \mathrm{d}f = \mathrm{d}\lambda \wedge \left(\frac{1}{\lambda}\,n\right) = \mathrm{d}(\ln\lambda) \wedge n$$

odakle slijedi nužan uvjet

$$n \wedge \mathrm{d}n = 0\ .$$

Promotrimo naredan primjer,

$$n^a = y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a - x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a\ , \quad n = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}n = 2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

$$n \wedge \mathrm{d}n = 2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \neq 0$$

Dakle, za ovo vektorsko polje ne postoji familija ploha na koje bi ono bilo ortogonalno u svim točkama.

Nužan uvjet integrabilnosti tangentne distribucije je involutivnost. Pretpostavimo da je distribucija $\mathcal{D}$ totalno integrabilna, ta da su na integralnoj mnogostrukosti odabrani tangentna koordinatna vektorska polja $X^a_{(i)}$ za $i = 1, \dots, n$, uz

$$[X_{(i)}, X_{(j)}]^a = 0$$

Tada je

$$Y^a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^a_{(i)} \in \mathcal{D}\ , \quad Z^a = \sum_{j=1}^{n} \beta_j X^a_{(j)} \in \mathcal{D}$$

$$[Y, Z]^a = \sum_{i,j=1}^{n} [\alpha_i X_{(i)}, \beta_j X_{(j)}]^a =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i X^b_{(i)} \nabla_b(\beta_j X^a_j) - \beta_j X^b_{(j)} \nabla_b(\alpha_i X^a_{(i)}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i X^a_{(j)} X^b_{(i)} \nabla_b \beta_j - \beta_j X^a_{(i)} X^b_{(j)} \nabla_b \alpha_i \in \mathcal{D}$$

Primjer gdje ovo nije ispunjeno,

$$X^a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a\ , \quad Y = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\ , \quad [X, Y]^a = -\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$$

Frobenius je pokazao kako vrijedi obrat, involutivnost je i dovoljan uvjet!

Teorem 15.11 (Frobenius, vektorska formulacija)**.** *Tangentna distribucija $\mathcal{D}$ je totalno integrabilna akko je involutivna.*

Pomoćni pojam, **anihilator** $\mathcal{D}^\perp$ distribucije $\mathcal{D}$ definiran je kao skup

$$\mathcal{D}^\perp = \{\theta_a \in T^*M \mid \forall\, X^a \in \mathcal{D}\ :\ \theta_a X^a = 0\} \tag{15.2}$$

Teorem 15.12 (Frobenius, dualna formulacija). *Tangentna distribucija $\mathcal{D}$ je totalno integrabilna akko je za svaku 1-formu $\theta_a \in \mathcal{D}^\perp$ i svaki tangentni vektor $X^a \in \mathcal{D}$, 1-forma $i_X \mathrm{d}\theta \in \mathcal{D}^\perp$. Nadalje, ako 1-forme $\{\theta_a^{(1)}, \dots, \theta_a^{(m-n)}\}$ razapinju anihilator n-dimenzionalne tangentne distribucije $\mathcal{D}$, tada je $\mathcal{D}$ totalno integrabilna akko postoje 1-forme $\beta_a^{(ij)} \in T^*M$, takve da je*

$$\mathrm{d}\theta^{(i)} = \sum_{j=1}^{m-n} \theta^{(j)} \wedge \beta^{(ij)} \tag{15.3}$$

za sve $i = 1, \dots, m-n$.

DOKAZ : Neka su $X^a, Y^a \in \mathcal{D}$ i $\theta_a \in \mathcal{D}^\perp$. Tada vrijedi

$$\theta_a [X,Y]^a = \theta_a X^b \nabla_b Y^a - \theta_a Y^b \nabla_b X^a =$$

$$= -Y^a X^b \nabla_b \theta_a + X^a Y^b \nabla_b \theta_a = 2X^a Y^b \nabla_{[b}\theta_{a]}$$

Stoga, prema vektorskoj formulaciji Frobeniusovog teorema, $\mathcal{D}$ je totalno integrabilna akko je $i_X \mathrm{d}\theta \in \mathcal{D}^\perp$ za svaki $X^a \in \mathcal{D}$. Konačno, ako $i_X \mathrm{d}\theta^{(i)} \in \mathcal{D}^\perp$ vrijedi za svaki $X^a \in \mathcal{D}$, tada je 2-forma $\mathrm{d}\theta^{(i)}$ nužno oblika (15.3) i obratno, ako je $\mathrm{d}\theta^{(i)}$ oblika (15.3), tada je $i_X \mathrm{d}\theta^{(i)} \in \mathcal{D}^\perp$ za svaki $X^a \in \mathcal{D}$. □

Uvjet ekvivalentan relaciji (15.3) je skup relacija

$$\theta^{(1)} \wedge \ldots \wedge \theta^{(m-n)} \wedge \mathrm{d}\theta^{(i)} = 0 \tag{15.4}$$

Primjer. Holonomno ograničenje je integralna mnogostrukost totalno integrabilne distribucije $\mathcal{D}$, obično zadana pomoću 1-formi koje razapinju anihilator $\mathcal{D}^\perp$. Na primjer, familija sfera u $\mathbb{R}^3$ zadana je s

$$\theta = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

Nadalje, primjer s kotrljajućim novčićem (vidi Frankel, 6.2c).

Primjer. *Statično* prostorvrijeme je stacionarno prostorvrijeme s pripadnim Killingovim vektorskim poljem k^a koje je svudje ortogonalno na familiju hiperploha (podmnogostrukosti kodimenzije 1). Drugim riječima, 1-forma k_a prema Frobeniusovom teoremu nužno zadovoljava uvjet

$$k \wedge \mathrm{d}k = 0 \ .$$

Ako je X^a proizvoljni vektor tangentan na neku od ovih hiperploha, tada je

$$0 = k_a X^a = g_{ab} k^a X^b = g_{ti} \ .$$

Stoga, u adaptiranom koordinatnom sustavu $\{t, x^1, \dots\}$, u kojem je $k^a = (\partial/\partial t)^a$, metrika ima "blok-dijagonalnu" formu,

$$g = -N\,\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

Ciklično prostorvrijeme je stacionarno aksijalno simetrično prostorvrijeme, s pripadnim Killingovim vektorima k^a i m^a koji su svugdje ortogonalni na familiju ploha kodimenzije 2. Drugim riječima, njima pridružene 1-forme k_a i m_a zadovoljavaju uvjete iz Frobeniusovog teorema,

$$k \wedge m \wedge \mathrm{d}k = k \wedge m \wedge \mathrm{d}m = 0$$

pa je metrika g_{ab} opet "blok-dijagonalna" u adaptiranom koordinatnom sustavu.

Primjer|i 15.13. Sustavi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = A^\alpha_\mu(x,y)$$

$$A^\mu_\nu \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0$$

//

15.5 Integriranje na podmnogostrukostima

Inducirana volumna forma $\hat{\epsilon} = i_n \epsilon$ i pripadni Hodgeov dual $\hat{*}$.

Teorem 15.14. *m-mnogostrukost M, hiperploha S zadana normalom n^a, inkluzija $\imath : S \to M$, $\omega \in \Omega^p(M)$*

$$\hat{*}(\imath^*\omega) = (-1)^p \, \imath^*(i_n {*}\omega) \tag{15.5}$$

Dokaz : Koristimo $\imath^*\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}$, te $\imath^*(A \otimes B) = \imath^*A \otimes \imath^*B$,

$$(\hat{*}\imath^*\omega)_{a_{p+1}\dots a_{m-1}} = \frac{1}{p!}\,(\imath^*\omega)_{a_1\dots a_p}\hat{\epsilon}^{a_1\dots a_p}{}_{a_{p+1}\dots a_{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{p!}\,\imath^*\left(\omega_{a_1\dots a_p}\hat{\epsilon}^{a_1\dots a_p}{}_{a_{p+1}\dots a_{m-1}}\right) = \frac{1}{p!}\,\imath^*\left(\omega_{a_1\dots a_p}\epsilon_b{}^{a_1\dots a_p}{}_{a_{p+1}\dots a_{m-1}}n^b\right) =$$

$$= \frac{(-1)^p}{p!}\,\imath^*\left(\omega_{a_1\dots a_p}\epsilon^{a_1\dots a_p}{}_{b a_{p+1}\dots a_{m-1}}n^b\right) = (-1)^p\,\imath^*(i_n{*}\omega)_{a_{p+1}\dots a_{m-1}}$$

□

Primjer|i 15.15. $S \subseteq M = \mathbb{R}^3$, $\imath : S \to M$, $\jmath : \partial S \to S$. Koristeći ${*}(F\epsilon)\epsilon = (-1)^s F\epsilon$ i Stokesov teorem imamo

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_S \imath^*(i_n{*}\mathrm{d}v)\,\hat{\epsilon} = \int_S (-1)^2\,\hat{*}(\imath^*\mathrm{d}v)\,\hat{\epsilon} = \int_S \imath^*\mathrm{d}v =$$

$$= \int_S \mathrm{d}\imath^*v = \int_{\partial S} \jmath^*\imath^*v = \int_{\partial S} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

//

16

Geometrija termodinamike

16.1 Mnogostrukosti termodinamike

Geometrijski, pod ravnotežnom termodinamikom podrazumjevamo postojanje glatke mnogostrukosti čije točke predstavljaju stanja sustava. Kvazistatični termodinamički procesi su opisani krivuljama u ovoj mnogostrukosti. Termodinamičke varijable se pojavljuju kao koordinatni sustavi na ovoj mnogostrukosti. Na primjer, možemo imati 2-mnogostrukost s lokalnim koordinatnim sustavom $\{U, V\}$, čije koordinate su unutrašnja energija U i volumen V promatranog sustava. Sastavni dio termodinamičkih računa su parcijalne derivacije, koje se obično pišu u obliku

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)_{Y,Z,\dots}$$

u značenju: parcijalna derivacija funkcije A po koordinatni X u lokalnom koordinatnom sustavu $\{X, Y, Z, \dots\}$ termodinamičke mnogostrukosti. Koordinate u indeksu stoga služe kao podsjetnik na koordinatni sustav koji je odabran u tom konkretnom računu.

Kako nas u termodinamici zanimaju promjene stanja sustava, važnu ulogu imaju diferencijali termodinamičkih veličina. U tradicionalnom izlaganju termodinamike običaj je istaknuti razliku između “egzaktnih diferenecijala”, označenih slovom d, i “nepravih diferencijala” (Pfaffijana), označenih slovom đ ili δ. Prvi imaju svojstvo da integriranjem po zatvorenom putu uvijek daju nulu, dok potonji nemaju to svojstvo. O čemu je ovdje zapravo riječ? Korištenjem riječnika diferencijalne geometrije sada možemo jednostavno prevesti ono što se ovdje koristi:

- “egzaktni diferencijali” su egzaktne 1-forme, a
- “nepravi diferencijali” 1-forme koje nisu (nužno) egzaktne.

Stoga, zapis $\mathrm{d}U$ koji označava diferencijal unutrašnje energije U se zaista uklapa u ono što smo ranije izložili: unutrašnja energija je funkcija $U \in C^\infty(M)$, a njen diferencijal egzaktna 1-forma, $\mathrm{d}U \in T^*M$. S druge strane, “nepravi diferencijal” topline đQ je zastario način da se naglasi kako ne postoji funkcija $Q : M \to \mathbb{R}$ čiji bi diferencijal bio jednak 1-formi đQ. Ova razlika se ponekad ističe konstatacijom kako je unutrašnja energija *funkcija stanja sustava*, dok toplina to nije. Mi ćemo zadržati tradicionalne oznake kod 1-formi topline đQ i rada đW, imajući na umu sve napomene koje su ovdje izložene.

Kvantitativne promjene termodinamičkih veličina koje opisuju sustav računamo integralom pripadnih 1-formi duž krivulje s kojom je opisana taj proces (s orjentacijom koja ide od točke početnog stanja do točke konačnog stanja). Na primjer, ako je sustav prošao kroz proces kojim smo od stanja x došli u stanje y duž krivulje γ, tada je

- promjena unutrašnje energije sustava (neovisna o putu) dana s

$$\Delta U = \int_x^y \mathrm{d}U = U(y) - U(x)\ ;$$

- promjena topline sustava dana s

$$\Delta Q = \int_\gamma đQ\ ;$$

- rad koji je okolina izvršila na sustavu dan s

$$\Delta W = \int_\gamma đW\ ,$$

  pri čemu $\Delta W < 0$ znači da je sustav izvršio rad na okolini.

Komentar 16.1. Formalno, izrazi poput

$$\left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_V\ ,$$

koji se pojavljuju u, primjerice, definicijama toplinskih kapaciteta, nemaju smisla jer ovdje općenito nemamo funkcije Q koju bi derivirali po koordinati. S druge strane, ono što ima smisla jest, primjerice, odabrati koordinatni sustav poput $\{T, V\}$, u njemu izraziti 1-formu $đQ$,

$$đQ = (đQ)_T\,\mathrm{d}T + (đQ)_V\,\mathrm{d}V$$

i onda početni izraz definirati kao *pokratu*

$$\left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_V \equiv (đQ)_T\ . \tag{16.1}$$

//

16.2 Termodinamičke relacije

Teorem 16.2. *Neka je M glatka 2-mnogostrukost i $f : M \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada u svakoj točki koordinatne karte $(O, \{x, y\})$ gdje su $\partial_x f \neq 0$ i $\partial_y f \neq 0$, vrijedi*

- *recipročno pravilo*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_x = 1 \tag{16.2}$$

- *ciklično pravilo (pravilo trostrukog produkta)*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f \left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y = -1 \tag{16.3}$$

Dokaz :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

Prema teoremu o implicitnoj funkciji lokalna koordinatna transformacija $(x, y) \to (x, f)$ je dobro definirana, pa diferencijal $y = y(x, f)$ možemo zapisati kao

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_x \mathrm{d}f \ .$$

Sve skupa imamo

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_x \mathrm{d}f + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f\right) \mathrm{d}x \ ,$$

odakle slijedi

$$1 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_x \ , \qquad 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f \ .$$

Prva jednadžba dokazuje recipročno pravilo, uz pomoć kojeg imamo i relaciju

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y = 1 \ .$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu slijedi ciklično pravilo. □

Teorem 16.3. *Za $f = f(x, y)$ i $g = g(x, y)$ vrijedi*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x \tag{16.4}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_g \tag{16.5}$$

Dokaz :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

Koordinatna transformacija $(x, y) \to (x, g)$,

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_g \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_g\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x \mathrm{d}g =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x \mathrm{d}g$$

□

Definicija 16.4. Neka je $(\mathbb{R}^n)^\times \equiv \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. Kažemo da je funkcija $f : (\mathbb{R}^n)^\times \to \mathbb{R}$ **homogena funkcija reda** $k > 0$ ako za svaku $\lambda \in \mathbb{R}$ i svaki $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^n)^\times$ vrijedi

$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^k f(\boldsymbol{x}) \ . \tag{16.6}$$

Teorem 16.5 (Eulerov teorem o homogenim funkcijama)**.** *Neka je $f : (\mathbb{R}^n)^\times \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada je f homogena funkcija reda k akko za sve $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^n)^\times$ vrijedi*

$$kf(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) \ . \tag{16.7}$$

Nadalje, ako je f glatka homogena funkcija reda $k > 1$, tada je svaka parcijalna derivacija $\partial_i f$ homogena funkcija reda $k - 1$.

Dokaz : Pretpostavimo da relacija (16.7) vrijedi. Uvedemo li pomoćnu funkciju $g(\lambda, \boldsymbol{x}) \equiv f(\lambda \boldsymbol{x}) - \lambda^k f(\boldsymbol{x})$, tada je $g(1, \boldsymbol{x}) = 0$ i

$$\frac{\partial g(\lambda, \boldsymbol{x})}{\partial \lambda} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\lambda \boldsymbol{x}) - k\lambda^{k-1} f(\boldsymbol{x}) = \frac{k}{\lambda} f(\lambda \boldsymbol{x}) - k\lambda^{k-1} f(\boldsymbol{x}) = \frac{k}{\lambda} g(\lambda, \boldsymbol{x})$$

Ova parcijalna diferencijalna jednadžba ima opće rješenje oblika $g(\lambda, \boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x})\lambda$, ali kako je $0 = g(1, \boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x})$ imamo $g(\lambda, \boldsymbol{x}) = 0$ za sve $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^n)^\times$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$. Stoga, f je homogena funkcija reda k.

Obratno, ako je f is homogena funkcija reda k, tada je g identički nula i vrijedi

$$0 = \frac{\partial g(\lambda, \boldsymbol{x})}{\partial \lambda} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\lambda \boldsymbol{x}) - k\lambda^{k-1} f(\boldsymbol{x}) = 0 \ .$$

Uvrstimo li $\lambda = 1$ dobivamo relaciju (16.7).

Konačno, za svaku glatku homogenu funkciju reda $k > 1$, deriviranjem obje strane jednakosti (16.7), slijedi

$$k\partial_i f = \partial_i (x^j \partial_j f) = \partial_i f + x^j \partial_j \partial_i f \ ,$$

odnosno

$$(k-1)\partial_i f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} \partial_i f(\boldsymbol{x}) \ ,$$

pa je, prema prvom dijelu teorema, $\partial_i f$ homogena funkcija reda $k-1$. □

Termodinamičke parametre dijelimo na

- **intenzivne varijable** (neovisne o količini tvari): temperatura T, tlak p, kemijski potencijal μ, …
- **ekstenzivne varijable** (čiji je iznos u linearnoj vezi s količinom tvari): unutrašnja energija U, volumen V, entropija S, broj čestica N, …

U eksperimentu intenzivne varijable održavamo konstantnima spajanjem na veliki rezervoar, dok ekstenzivne varijable održavamo konstantnima hermetičkim izoliranjem sustava. Općenito, termodinamički potencijal Ψ želimo zapisati u formi

$$\mathrm{d}\Psi = \sum_k B_k \, \mathrm{d}A_k$$

gdje su A_k termodinamičke varijable koje u eksperimentu možemo kontrolirati (stoga je i koristimo u koordinatnom sustavu), dok je B_k termodinamička varijabla konjugirana varijabli A_k.

Prvi zakon termodinamike.

$$\mathrm{d}U = đQ + đW \tag{16.8}$$

Standardni termodinamički potencijali:

- unutrašnja energija U,
- Helmholtzova (slobodna) energija, $F = U - TS$,
- Gibbsova (slobodna) energija, $G = U - TS + pV$,
- velekanonski potencijal, $\Omega = U - TS - \mu N$.

Izotermalna kompresibilnost

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Volumeni koeficijent toplinskog istezanja

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Za kvazistatične procese imamo

$$đQ = T\mathrm{d}S \ , \quad đW = \pm X_i \, \mathrm{d}x^i$$

gdje se negativan predznak pojavljuje uz $p\,\mathrm{d}V$ član; X_i označava generalizirane sile, a $\mathrm{d}x_i$ generalizirani pomak. Primjeri:

X_i	x^i	$đW$
tlak p	volumen V	$-p\,\mathrm{d}V$
kemijski potencijal μ	broj čestica N	$\mu\,\mathrm{d}N$
električno polje $\mathbf{E}$	el. dip. moment $\mathbf{p}$	$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}$
magnetsko polje $\mathbf{B}$	mag. dip. moment $\mathbf{m}$	$\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{m}$

Valja uočiti razliku između momenata i pripadnih gustoća momenata,

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{P}\,\mathrm{d}V \ , \quad \mathbf{m} = \int \mathbf{M}\,\mathrm{d}V$$

16.3 Toplinski kapaciteti

Definicija 16.6. Ako je sustav opisan s termodinamičkim veličinama među kojima je i par (Y, x) ekstenzivne varijable Y i intenzivne varijable x, tada definiramo pripadne **toplinske kapacitete**

$$C_Y \equiv \left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_Y \ , \quad C_x \equiv \left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_x \ . \tag{16.9}$$

Ako je količina tvari u sustavu n mola, tada se uvode i specifični toplinski kapaciteti $c_i = C_i/n$. Najčešće imamo posla s toplinskim kapacitetom pri konstantnom volumenu C_V i toplinskim kapacitetom pri konstantnom tlaku C_p.

Lema 16.7.

$$C_Y = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Y \ , \quad C_x = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x - x\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x \tag{16.10}$$

Dokaz : U koordinatnom sustavu $\{T, Y\}$ imamo $U = U(T, Y)$ i

$$đQ = \mathrm{d}U - x\,\mathrm{d}Y = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Y \mathrm{d}T + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T - x\right)\mathrm{d}Y \ .$$

U koordinatnom sustavu $\{T, x\}$ imamo $U = U(T, x)$, $Y = Y(T, x)$ i

$$đQ = \mathrm{d}U - x\,\mathrm{d}Y = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x - x\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x\right)\mathrm{d}T + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T - x\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_T\right)\mathrm{d}x \ .$$

□

Komentar 16.8. U slučaju kada je konjugiran par varijabli tlak p i volumen V, moramo paziti na predznak. Formalno imamo $(x, Y) = (-p, V)$ pa je

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \,, \qquad C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \,.$$

//

Teorem 16.9.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T = \frac{C_x - C_Y}{\beta Y} + x \,, \qquad \beta \equiv \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x \,. \tag{16.11}$$

Dokaz : Izrazimo komponentu $(\mathrm{d}U)_T$ iz koordinatnog sustava $\{T, x\}$ pomoću komponenti u koordinatnom sustavu $\{T, Y\}$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x = (\mathrm{d}U)_T = \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_x (\mathrm{d}U)_T + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x (\mathrm{d}U)_Y =$$
$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Y + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Y + \beta Y \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T$$

Koristeći prethodnu lemu imamo

$$C_x - C_Y + \beta x Y = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_x - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_Y \,.$$

Kombinacijom ove dvije relacije dobivamo traženu tvrdnju. □

Komentar 16.10. Opet, specijalno u slučaju kada je $(x, Y) = (-p, V)$ imamo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{C_p - C_V}{\beta V} - p \,.$$

//

Lema 16.11.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T = x - T\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_Y \tag{16.12}$$

Dokaz : Prilikom koordinatne transformacije $\{T, Y\} \to \{S, Y\}$ imamo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_T = (\mathrm{d}U)_Y = \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)_T (\mathrm{d}U)_S + \left(\frac{\partial Y}{\partial Y}\right)_T (\mathrm{d}U)_Y =$$
$$= \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)_T \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_Y + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_S = \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)_T T + x$$

Nadalje, iz $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T + x\mathrm{d}Y$ imamo

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_Y \,, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial Y} = -\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_Y \,.$$

Odavde slijedi tvrdnja. □

Teorem 16.12.

$$C_x - C_Y = \frac{\beta^2}{\kappa}\, TY \ , \quad \kappa = \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_T \tag{16.13}$$

DOKAZ : Koristeći prethodnu lemu i teorem imamo

$$C_x - C_Y = -\beta TY \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_Y$$

Nadalje, iz

$$\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_Y \left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_x \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_T = -1$$

slijedi

$$\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_Y = -\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_x \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_T^{-1} = -\beta Y\, \frac{1}{\kappa Y} = -\frac{\beta}{\kappa} \ ,$$

a odavde i konačna tvrdnja. □

16.4 Termodinamički ciklusi

U svakoj točki ciklusa s tangentnim vektorskim poljem X^a,

$i_X đQ > 0$	toplinski rezervoar predaje toplinu sustavu
$i_X đQ < 0$	sustav predaje toplinu toplinskom rezervoaru
$i_X đQ = 0$	adijabatska točka

Primjer: idealni plin. U koordinatnom sustavu $\{T, V\}$ imamo

$$p(T,V) = \frac{nRT}{V} \ , \quad U(T) = \frac{\nu}{2}\, nRT \tag{16.14}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\nu}{2}\, nR \tag{16.15}$$

U koordinatnom sustavu $\{T, p\}$. Imamo

$$V(T,p) = \frac{nRT}{p} \ , \quad U(T) = \frac{\nu}{2}\, nRT \ , \tag{16.16}$$

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = C_V + nR \tag{16.17}$$

pa u koordinatnom sustavu $\{V, p\}$ slijedi

$$\begin{aligned} đQ &= \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{C_V}{nR}\,(p\,\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p) + p\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{C_p}{nR}\,p\,\mathrm{d}V + \frac{C_V}{nR}\,V\mathrm{d}p \end{aligned}$$

Stoga,

$$\begin{aligned} i_X đQ &= X^V \, \frac{C_p}{nR} \, p + X^p \, \frac{C_V}{nR} \, V \\ &= \frac{1}{nR} \, (pC_p X^V + VC_V X^p) \\ &= \frac{\nu}{2} \, (\gamma p X^V + V X^p) \end{aligned}$$

uz pokratu $\gamma \equiv C_p/C_V = (\nu + 2)/\nu$. Vektor A^a tangentan na adijabatsku krivulju zadovoljava $i_A đQ = 0$, odnosno

$$A^p = -\gamma \, \frac{p}{V} \, A^V \ . \tag{16.18}$$

16.5 Termodinamičke metrike

Ruppeinerova i Weinholdova metrika, …

16.6 Carathéodory i entropija

Neka je $đQ$ 1-forma topline. Za proces opisan krivuljom γ kažemo da je **adijabatski** ako pripadno tangentno vektorsko polje (čija je γ integralna krivulja) leži u $\ker(đQ)$. Drugim riječima, ako je proces geeneriran vektorskim poljem X^a takvim da je $i_X đQ = 0$, tada takav proces zovemo adijabatskim. Za stanje y kažemo da je **adijabatski dostupno** stanju x ako je ova dva stanja moguće povezati adijabatskim procesom.

Drugi zakon termodinamike [**Kelvin**]. Ne postoji kvazistatičan ciklički proces kojim bi neka količina topline bila u potpunosti pretvorena u mehanički rad.

Drugi zakon termodinamike [**Carathéodory**]. U okolini svakog stanja x postoji adijabatski nedostupno stanje y.

Zanima nas obrat: povlači li postojanje adijabatski nedostupnih stanja integrabilnost distribucije definirane 1-formom $đQ$?

Teorem 16.13 (Carathéodory). *Neka je M glatka mnogostrukost i $\theta_a \in T^*M$ glatko, nigdje iščezavajuće polje koje u točki $x \in M$ ne zadovoljava Frobeniusov uvjet integrabilnosti, $\theta \wedge \mathrm{d}\theta \neq 0$. Tada postoji okolina O_x u kojoj je sve točke $y \in O_x$ moguće povezati s točkom x sa po dijelovima glatkim krivuljama čiji tangentni vektori leže u jezgri θ_a.*

Za posljedicu imamo naredni teorem …

Teorem 16.14. *Ako vrijedi Carathéodoryjeva verzija drugog zakona termodinamike, tada je tangentna distribucija definirana s $\ker(đQ)$ integrabilna.*

Teorem 16.15. *Kelvinova verzija drugog zakona termodinamike povlači Carathéodoryjevu.*

DOKAZ : Neka je x bilo koje stanje sustava i y drugo stanje dobiveno izohornim procesom, odnosno krivuljom γ (od x do y) čiji tangentni vektor leži u $\ker(đW)$. Tvrdimo da Kelvinova verzija drugog zakona termodinamike povlači nepostojanje adijabatskog procesa koji povezuje stanja x i y. Pretpostavimo suprotno, postojanje takvog procesa definiranog krivuljom $\widetilde{\gamma}$ (od y do x). Tada vrijedi

$$\int_\gamma đQ = \int_\gamma \mathrm{d}U = \int_{\widetilde{\gamma}} (-\mathrm{d}U) = \int_{\widetilde{\gamma}} (đQ - \mathrm{d}U) = \int_{\widetilde{\gamma}} (-đW)$$

Međutim, time smo konstruirali proces u kojem je sustavu prvo predana toplina, koja je na kraju u potpunosti pretvorena u mehaničku energiju (koju sustav predaje okolini), u kontradikciji s Kelvinovom verzijom drugog zakona termodinamike. □

Entropija. Reverzibilni i ireverzibilni procesi …

$$\oint \frac{đQ}{T_{\mathrm{kupka}}} \le 0 \tag{16.19}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je proces reverzibilan. Kod reverzibilnih procesa imamo integrabilnost $đQ = T\,\mathrm{d}S$.

Dodatna literatura

- [Fer56], stari kratki klasik s lucidnim objašnjenjima nekih detalja koji su u novijoj literaturi gurnuti "pod tepih"
- [Boy72], sustavna revizija Carathéodorijevog programa geometrijske aksiomatizacije termodinamike
- [Fra04], poglavlje 6.3
- [LY98, LY99]

Zadaci

1. Idealni plin.

17

Simplektičke mnogostrukosti

Motivacija. U Hamiltonovoj formulaciji klasične mehanike ponašanje sustava je opisano rješenjem sustava Hamiltonovih jednadžbi. Temelj pripadne geometrijske slike je mnogostrukost (fazni prostor) na kojem je definirano skalarno polje (hamiltonijan). Evolucija našeg sustava kroz fazni prostor opisan je vektorskim poljma čije integralne krivulje su rješenja Hamiltonovih jednadžbi (parametrizirane fizikalnim vremenom). Stoga, potreban nam je objekt (tenzor) koji zadani skalar povezuje s vektorskim poljem evolucije našeg sustava. Naravno, ta veza mora biti takva da se komponente vektorskog polja povezane sa zadanim skalarom na isti način kako su derivacije koordinata faznog prostora povezane s hamiltonijanom u Hamiltonovim jednadžbama.

Definicija 17.1. **Simplektička mnogostrukost** (M, ω_{ab}) je uređen par glatke $2n$-mnogostrukosti M i nedegenerirare zatvorene 2-forme ω_{ab}. Ovu formu zovemo **simplektička forma**.

Komentar 17.2. Nedegeneriranost 2-forme ω_{ab} po definiciji znači da u svakoj točki $p \in M$ i za svaki $X^a \in T_pM$ jednakost $i_X\omega|_p = 0$ povlači $X^a = 0$. Važna posljedica ovog svojstva simplektičke forme je ta da ona u svakoj točki $p \in M$ inducira izomorfizam $\widehat{\omega} : T_pM \to T_p^*M$ preko $\widehat{\omega}(X) = \omega(X, \cdot)$. Naime, ovo preslikavanje je linearno (po definiciji tenzora) i injektivno (zbog nedegeneriranosti) pa je izomorfizam među konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. //

Komentar 17.3. Valja imati na umu da je nedegeneriranost simplektičke forme ekvivalentna zahtijevu da vrijedi

$$\omega^n \equiv \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ puta}} \neq 0 \,.$$

Ova $2n$-forma poznata je kao **Liouvilleova forma**. //

Teorem 17.4 (Darboux). *Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost i $z \in M$. Tada postoji karta $(O_z, \{x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n\})$ na kojoj simplektička forma ω_{ab} poprima kanonski oblik*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}x^i \ . \tag{17.1}$$

DOKAZ : Vidi [Woo92], poglavlje 1.4. □

Komentar 17.5. Primjetimo, za razliku od pseudo-Riemannovih mnogostrukosti, na kojima smo općenito metriku mogli dovesti u kanonsku, dijagonalnu formu samo *u točki*, simplektičku formu možemo dovesti u kanonsku formu *na okolini.* //

Simplektička mnogostrukost je fazni prostor klasične mehanike. Koordinate iz Darbouxovog teorema zovemo **kanonskim koordinatama** te ih tradicionalno označavamo s

$$\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\} \ ,$$

gdje prvih n koordinata q^i odgovara "generaliziranim koordinatama" konfiguracijskog prostora, a preostalih n koordinata p_i komponentama "generaliziranih impulsa". Motivacija za spušteno pisanje indeksa na p_i potiče od definicije generaliziranih impulsa pomoću lagranžijana, $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$. U kontekstu simplektičkih prostora kod Einsteinove sumacijske konvencije podrazumjevamo sumu od 1 do n po ponovljenim indeksima. Stoga, primjerice, simplektičku formu u kanonskom obliku zapisujemo kao

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \ . \tag{17.2}$$

Primjer|i 17.6. Dvostruko matematičko njihalo. Konfiguracijski prostor je 2-torus $Q = \mathbb{T}^2$, pokriven s lokalnim koordinatama $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Fazni prostor je $M = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. //

Definicija 17.7. Neka su (M, ω_{ab}) i (M', ω'_{ab}) simplektičke mnogostrukosti. Difeomorfizam $f : M \to M'$ zovemo **simplektomorfizam** ako je $f^*\omega' = \omega$.

Komentar 17.8. U kontekstu klasične mehanike, simplektomorfizmi su poznati kao kanonske transformacije. //

Na simplektičkoj mnogostrukosti M svaka glatka funkcija $f \in C^\infty(M)$ inducira pripadno vektorsko polje, definirano pomoću izomorfizma $\widehat{\omega}$ (minus uz d je konvencionalan),

$$X_f = \widehat{\omega}^{-1}(-\mathrm{d}f) \ . \tag{17.3}$$

Drugim riječima, za X_f vrijedi

$$i_{X_f}\omega = -\mathrm{d}f \ . \tag{17.4}$$

Stoga, koristeći kanonske koordinate i Darbouxov teorem imamo

$$X_f(\mathrm{d}p^i)\,\mathrm{d}q^i - X_f(\mathrm{d}q^i)\,\mathrm{d}p_i = -\frac{\partial f}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i - \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i \ , \tag{17.5}$$

pa je

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \ . \tag{17.6}$$

Nadalje, ako je integralna krivulja vektorskog polja X_f^a parametrizirana s λ, odnosno zadana skupom funkcija $\{q^1(\lambda), \dots, q^n(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)\}$, tada duž nje mora biti ispunjen sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi,

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \ , \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial f}{\partial q^i} \ . \tag{17.7}$$

Fizikalno, skalar f predstavlja nekakvu opservablu kojoj, kako smo sada vidjeli, možemo pridružiti (pomoću simplektičke strukture) vektorsko polje X_f^a. Ova opservabla je konstantna duž pripadnih integralnih krivulja u faznom prostoru,

$$\pounds_{X_f} f = i_{X_f}\mathrm{d}f = -i_{X_f} i_{X_f}\omega = 0 \ . \tag{17.8}$$

17.1 Poissonove zagrade

Sada možemo ustvrditi vezu između Poissonovih zagrada i simplektičke strukture ...

$$\omega(X_g, X_f) = i_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{X_f}\mathrm{d}g = -\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} = \{f, g\} \tag{17.9}$$

$$\pounds_{X_g} f = i_{X_g}\mathrm{d}f = \{f, g\} \tag{17.10}$$

Lema 17.9. *Za 2-formu ω_{ab} i vektorska polja $X^a, Y^a, Z^a \in TM$ vrijedi*

$$i_X i_Y i_Z \mathrm{d}\omega = (i_X i_{[Y,Z]} + \pounds_X i_Y i_Z)\,\omega + \text{cikl.} \tag{17.11}$$

Dokaz : Korištenjem Cartanove formule imamo

$$i_Y i_Z \mathrm{d}\omega = i_Y(\pounds_Z - \mathrm{d}i_Z)\omega = (\pounds_Z i_Y - i_{[Z,Y]} - \pounds_Y i_Z + \mathrm{d}i_Y i_Z)\omega$$

$$\begin{aligned} i_X i_Y i_Z \mathrm{d}\omega &= (\pounds_Z i_X i_Y - i_{[Z,X]} i_Y - i_X i_{[Z,Y]} - \pounds_Y i_X i_Z + i_{[Y,X]} i_Z + i_X \mathrm{d} i_Y i_Z)\omega = \\ &= (i_X i_{[Y,Z]} + i_Y i_{[Z,X]} + i_Z i_{[X,Y]})\omega + (\pounds_X i_Y i_Z + \pounds_Y i_Z i_X + \pounds_Z i_X i_Y)\omega \end{aligned}$$

□

Teorem 17.10 (Ekvivalentnost zatvorenosti i Jacobija). *Neka je ω_{ab} nedegenerirana 2-forma. Tada za sve $f, g, h \in C^1(M)$ vrijedi*

$$i_{X_f} i_{X_g} i_{X_h} \mathrm{d}\omega = J(f,g,h) \equiv \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \,. \tag{17.12}$$

Stoga, ω_{ab} je zatvorena akko vrijedi Jacobijev identitet za Poissonovu zagradu, induciranu sa $\{f,g\} = -\omega(X_f, X_g)$.

DOKAZ : Vrijedi

$$i_{X_f} i_{[X_g,X_h]}\omega = -i_{[X_g,X_h]} i_{X_f}\omega =$$
$$= i_{[X_g,X_h]}\mathrm{d}f = \pounds_{[X_g,X_h]}f = (\pounds_{X_g}\pounds_{X_h} - \pounds_{X_h}\pounds_{X_g})f =$$
$$= \{g,\{h,f\}\} - \{h,\{g,f\}\} = \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$$
$$\pounds_{X_f} i_{X_g} i_{X_h}\omega = \pounds_{X_f}\{g,h\} = -\{f,\{g,h\}\}$$

Stoga, uvrštavanjem $X = X_f$, $Y = X_g$ i $Z = X_h$ u prethodnu lemu dobijamo

$$i_{X_f} i_{X_g} i_{X_h}\mathrm{d}\omega = (i_{X_f} i_{[X_g,X_h]} + \pounds_{X_f} i_{X_g} i_{X_h})\omega + \mathrm{cycl.} =$$

$$= \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} - \{f,\{g,h\}\} + \mathrm{cycl.} = 2J(f,g,h) - J(f,g,h)$$

□

Korolar 17.11. *Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost i $\{\ ,\ \}$ inducirana Poissonova zagrada. Tada je $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ Liejeva algebra.*

17.2 HAMILTONOVE JEDNADŽBE

Definicija 17.12. Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost. Tada za vektorsko polje $X^a \in TM$ kažemo da je **hamiltonijansko** ili **simplektičko** ako vrijedi $\pounds_X\omega = 0$.

Teorem 17.13. *Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost. Tada je X^a lokalno hamiltonijansko vektorsko polje akko postoji (lokalno definirana) funkcija f za koju je $X^a = X_f^a$. Za funkciju f kažemo da je generator 1-parametarske familije kanonskih transformacija.*

DOKAZ : Kako je ω_{ab} zatvorena forma, upotrebom Cartanove formule imamo

$$\pounds_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega = \mathrm{d}i_X\omega \,.$$

Stoga, ako je X^a lokalno hamiltonijansko polje, tada Poincaréova lema povlači da je $i_X\omega$ lokalno egzaktna forma, odnosno postoji lokalna funkcija f, takva da je $i_X\omega = -\mathrm{d}f$.

Obratno, ako postoji lokalna funkcija f za koju je $X^a = X_f^a$, tada je $i_X\omega$ lokalno egzaktna forma pa gornja relacija povlači da je $\pounds_X\omega = 0$. □

Teorem 17.14. *Ako su X^a i Y^a lokalna hamiltonijanska polja, tada je $[X,Y]^a$ globalno hamiltonijansko polje.*

Dokaz : Prvo imamo

$$i_{[X,Y]}\omega = [\pounds_X, i_Y]\omega = \pounds_X i_Y\omega - i_Y\pounds_X\omega$$

i, kako je X^a lokalno hamiltonijansko polje, $\pounds_X\omega = 0$. Stoga,

$$i_{[X,Y]}\omega = i_X \mathrm{d} i_Y\omega + \mathrm{d} i_X i_Y\omega = i_X\pounds_Y\omega - i_X i_Y \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}(\omega(X,Y))$$

Konačno, kako je $\pounds_Y\omega = 0$ i $\mathrm{d}\omega = 0$, imamo $i_{[X,Y]}\omega = -\mathrm{d}(\omega(X,Y))$, odnosno $[X,Y] = X_f$ za $f = \omega(X,Y)$. Također,

$$\pounds_{[X,Y]}\omega = \mathrm{d} i_{[X,Y]}\omega = -\mathrm{d}\mathrm{d}(\omega(X,Y)) = 0\ .$$

□

Hamiltonijan $H : M \to \mathbb{R}$ je funkcija koja definira dinamiku fizikalnog sustava u smislu da integralne krivulje pripadnog hamiltonijanskog vektorskog polja X_H predstavljaju vremensku evoluciju našeg sustava (obično kažemo da hamiltonijan generira vremensku evoluciju sustava). Pripadni parametar integralne krivulje (određen do na konstantu) označavamo s t i interpretiramo kao fizikalno vrijeme. Derivacije po vremenu su označene s točkom iznad funkcije koju se derivira. Stoga, imamo

$$X_H = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i\,\frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i\,\frac{\partial}{\partial p_i}\ , \tag{17.13}$$

a jednadžbe (17.7) postaju tzv. **Hamiltonove jednadžbe**,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\ . \tag{17.14}$$

Također, za svaku funkciju $f \in C^\infty(M)$ imamo

$$\dot{f} = \pounds_{X_H} f = X_H(f) = \{f,H\} = -\{H,f\} = -X_f(H) = -\pounds_{X_f} H\ . \tag{17.15}$$

Svaka funkcija f koja zadovoljava $\pounds_{X_H} f = 0$ zovemo **konstanta gibanja**.

Definicija 17.15. **Hamiltonov sustav** je uređena trojka (M,ω_{ab},H) simplektičke mnogostrukosti (M,ω_{ab}) i hamiltonijana $H \in C^\infty(M)$. Za vektorsko polje X^a kažemo da **generira simetriju** Hamiltonovog sustava ako čuva i simplektičku strukturu, $\pounds_X\omega = 0$, i hamiltonijan, $\pounds_X H = 0$.

Primjer|i 17.16. Matematičko njihalo.

$$L(\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\,m(\ell\dot\varphi)^2 - mg\ell(1-\cos\varphi)\ , \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m\ell^2\dot\varphi$$

$$H(\varphi,p_\varphi) = p_\varphi\dot\varphi - L = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2} + mg\ell(1-\cos\varphi)$$

//

Teorem 17.17 (Noether). *Ako je X^a vektorsko polje koje generira simetriju Hamiltonovog sustava (M, ω_{ab}, H) tada lokalno vrijedi $X^a = X_f^a$, gdje je f konstanta gibanja. Obratno, ako je $f \in C^\infty(M)$ konstanta gibanja, tada je X_f^a simetrija promatranog Hamiltonovog sustava.*

Dokaz : Ako X^a generira simetriju, tada $\pounds_X \omega = 0$ po teoremu 17.13 povlači da je bar lokalno $X^a = X_f^a$ za neku funkciju f. Nadalje, slijedi iz (17.15) da je $0 = -\pounds_{X_f} H = \pounds_{X_H} f$ pa je f konstanta gibanja.

Obratno, ako je f konstanta gibanja, tada po definiciji vrijedi $\pounds_{X_H} f = 0$ te, prema (17.15), imamo $\pounds_{X_f} H = 0$. Konačno, X_f^a je uvijek hamiltonijansko polje, $\pounds_{X_f} \omega = 0$. Stoga, X_f generira simetriju. □

17.3 Klasična mehanika u kotangentnom svežnju

Konfiguracijski prostor je glatka mnogostrukost Q. Impulsi su 1-forme …

Tautološka (Liouvilleova) 1-forma $\theta_a \in T^*(T^*Q)$. Koristeći projekciju $\pi : T^*Q \to Q$, definiranu s $\pi(q,p) = q$, imamo povlačenje $\pi^*_{(q,p)} : T^*_q Q \to T^*_{(q,p)}(T^*Q)$ s kojim definiramo

$$\theta|_{(q,p)} \equiv \pi^*_{(q,p)} p \tag{17.16}$$

Valja primjetiti kako se impuls $p_a \in T^*_{(q,p)}Q$ ovdje pojavljuje u dvije različite uloge: kao dio koordinate (q,p) i kao objekt kojeg se povlači. U lokalnom koordinatnom sustavu $\{w^\mu\} = \{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ na kotagentnom svežnju T^*Q tautološka 1-forma ima komponente

$$(\theta|_{(q,p)})_\mu = \frac{\partial \pi^\sigma}{\partial w^\mu}\, p_\sigma \ ,$$

no kako projekcija π ima samo q-komponente, imamo

$$(\theta|_{(q,p)})_i = \frac{\partial \pi^k}{\partial w^i}\, p_k = p_i$$

za $i \in \{1, \dots, n\}$, odnosno

$$\theta = p_i \, \mathrm{d}q^i \ . \tag{17.17}$$

Kanonska 2-forma $\omega = \mathrm{d}\theta \in \Omega^2(T^*Q)$ je prirodna simplektička struktura na kotengentnom svežnju T^*Q.

17.4 Vremenski ovisni hamiltonijani

Ako je hamiltonijan vremenski ovisan, moramo uključiti i vrijeme kao jednu od koordinata. Drugim riječima, treba nam neparno dimenzionalna mnogostrukost, na kojoj ne možemo više automatski definirati simplektičku strukturu.

Naime, svaka 2-forma na neparno dimenzionalnoj mnogostrukosti je nužno degenerirana: ako su komponente 2-forme ω_{ab} zapisane u metricu A, tada imamo

$$\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}}) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$$

pa je $\det(A) = 0$. Degenerirana: postoji X^a, takav da je $i_X\omega = 0$.

$$\theta = -H\,\mathrm{d}t + p_i\,\mathrm{d}q^i$$
$$\mathrm{d}\theta = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$
$$\overline{X}_H = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$$
$$i_{\overline{X}}\mathrm{d}\theta = 0\,, \quad i_{\overline{X}}\theta = \dot{q}^i p_i - H = L$$

Definicija 17.18. Neka je M glatka $(2n+1)$-mnogostrukost. Za 1-formu $\theta_a \in \Omega^1(M)$ kažemo da je **kontaktna forma** ako u svim točkama zadovoljava uvjet $\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^n \neq 0$.

Teorem 17.19. **Reebovo polje** $T^a \in \mathfrak{X}(M)$, *takvo da je* $i_T\mathrm{d}\theta = 0$ *i* $\theta(T) = 1$.

Teorem 17.20. *Kontaktni Darbouxov teorem* $\theta = \mathrm{d}z + \sum y_i \mathrm{d}x^i$.

Dodatna literatura

- [Woo92]

Zadaci

1. Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost i $f \in C^\infty(M)$. Dokažite da $i_X \omega = -\mathrm{d}f$ povlači $X^a = X^a_f$.
2. Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost. Dokažite da inducirana Poissonova zagrada poštuje Leibnizovo pravilo, $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.
3. Dokažite da hamiltonijansko vektorsko polje čuva volumnu formu ω^n. Vrijedi li obrat, mora li vektorsko polje X^a, takvo da je $\pounds_X(\omega^n) = 0$ nužno biti hamiltonijansko?
4. Dokažite da egzaktne simplektičke forme ne postoje na kompaktnim mnogostrukostima bez ruba. Što nam to govori o postojanju simplektičkih struktura na sferama parne dimenzije, $\mathbb{S}^{2n}$?

18

Rječnik i tablice

18.1 Mali englesko-hrvatski rječnik pojmova

action djelovanje
boundary rub
boost potisak
chart karta
closure zatvarač
embedding smještenje
energy-momentum tensor tenzor energije i impulsa
exterior derivative vanjska derivacija
fibre vlakno
fibre bundle vlaknasti svežanj
group action djelovanje grupe
Hamiltonian hamiltonijan
hypersurface hiperploha
immersion imerzija
interior unutrašnjost
Lagrangian lagranžijan
limit point gomilište
manifold mnogostrukost
neighbourhood okolina
null vector vektor svjetlosnog tipa
principal bundle glavni svežanj
section prerez
spacetime prostorvrijeme
structure group strukturna grupa
submanifold podmnogostrukost
submersion submerzija
tangent vector tangentni vektor
total space totalni prostor
wedge product vanjski produkt

18.2 Mali hrvatsko-engleski rječnik pojmova

djelovanje action
djelovanje grupe group action
glavni svežanj principal bundle
gomilište limit point
hamiltonijan Hamiltonian
hiperploha hypersurface
imerzija immersion
karta chart
lagranžijan Lagrangian
mnogostrukost manifold
okolina neighbourhood
podmnogostrukost submanifold
potisak boost
prerez section
prostorvrijeme spacetime
rub boundary

smještenje embedding
strukturna grupa structure group
submerzija submersion
tangentni vektor tangent vector
tenzor energije i impulsa energy-momentum tensor
totalni prostor total space
unutrašnjost interior
vanjska derivacija exterior derivative
vanjski produkt wedge product
vektor svjetlosnog tipa null vector
vlaknasti svežanj fibre bundle
vlakno fibre
zatvarač closure

18.3 Konvencije

Signatura metrike Minkowskog

$$s_1\,\eta = -\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z \tag{18.1}$$

U gravitacijskoj zajednici prevladava konvencija $s_1 = +1$, dok u čestičarskoj zajednici prevladava konvencija $s_1 = -1$. Bezindeksna definicija Riemannovog tensora

$$s_2\,R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{18.2}$$

Definicija Riemannovog tenzora zapisana pomoću apstraktnih indeksa

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,Z^c = s_3\,R_{ab}{}^c{}_d\,Z^d \tag{18.3}$$

Također,

$$R(X,Y,Z,W) = -s_2 s_3\,g(R(X,Y,Z),W) \tag{18.4}$$

Komponente Riemannovog tenzora u odsustvu torzije

$$s_3\,R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\tau}\Gamma^\tau_{\alpha\beta} \tag{18.5}$$

Einsteinova gravitacijska jednadžba

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa\,T_{ab} \tag{18.6}$$

izvor	s_1	s_2	s_3	κ
[MTW70, HE73, LPPT75]	$+$	$+$	$+$	8π
[O'N83]	$+$	$-$	$-$	8π
[Wal84]	$+$		$+$	8π
[dC92]	$+$	$-$	$+$	
[Sze04]	$\pm$	$+$	$+$	$8\pi G c^{-4}$
[Fra04]	$+$	$+$	$+$	
[Nak03]	$+$	$+$	$+$	$8\pi G$

U ovoj skripti koristimo konvencije $s_1 = s_2 = s_3 = +1$ i sustav jedinica u kojem je $\kappa = 8\pi$.

18.4 Popis simbola

$A - B$	razlika skupova A i B
O_x	okolina točke x
∂	rub (skupa, mnogostrukosti)
A°	unutrašnjost skupa A
$\overline{A}$	zatvarač skupa A
A'	skup gomilišta skupa A
$\simeq$	homeomorfizam
$\cong$	difeomorfizam
$\times$	Kartezijev produkt
$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva (bez nule)
$\mathbb{N}_0$	skup nenegativnih cijelih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\otimes$	tenzorski produkt
C^p_q	kontrakcija p-tog kontravarijantnog i q-tog kovarijantnog indeksa
$\wedge$	vanjski produkt
d	vanjska derivacija
i_X	kontrakcija s vektorom X^a
∇_X	kovarijantna derivacija u smjeru vektora X^a
∇_a	kovarijantna derivacija
$\pounds_X$	Liejeva derivacija s obzirom na vektorsko polje X^a
$*\omega$	Hodgeov dual p-forme ω
T_pM	tangentni prostor u točki $p \in M$
T^*_pM	kotangentni prostor u točki $p \in M$
$\mathscr{T}^r_s(M)$	svežanj tenzora ranga (r, s) na mnogostrukosti M
$C^\infty_p(M)$	germ glatkih funkcija u točki $p \in M$
$C^\infty(M)$	prsten glatkih funkcija na mnogostrukosti M
$\mathfrak{X}(M)$	skup glatkih vektorskih polja na mnogostrukosti M
$\Gamma(E)$	skup glatkih globalnih prereza svežnja E
$\mathbb{R}^m_s$	pseudo-Euklidski prostor

Dodaci

A

FRAKTALI

Cantorov skup

Cantorov skup (Georg Cantor: *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V*, Mathematische Annalen, (1883) vol.21, 545 – 591.) dobije se sljedećim iterativnim postupkom. Neka je

$$C_0 = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

Iz ovog zatvorenog intervala izbacimo srednju (otvorenu) trećinu, $\langle 1/3, 2/3 \rangle$. Rezultat je unija dva zatvorena intervala,

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

U sljedećem koraku iz svakog od dva zatvorena intervala u C_1 izbacimo srednje trećine, $\langle 1/9, 2/9 \rangle$ i $\langle 7/9, 8/9 \rangle$. Rezultat je unija četiri zatvorena intervala,

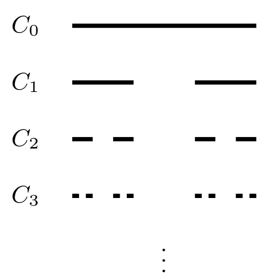
$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Ponavljanjem ovog postupka u n-tom koraku ćemo imati 2^n zatvorenih intervala ukupne duljine $(2/3)^n$. Možemo zapisati formalnu rekurzivnu relaciju,

$$C_n = C_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right\rangle$$

Konačno, Cantorov skup C definiramo kao presjek (ovdje namjerno izbjegavamo upotrebu "limesa" jer taj pojam zasad još nismo definirali)

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \tag{A.1}$$



Prvo uočavamo da su sve rubne točke izbačenih otvorenih intervala elementi Cantorovog skupa C. Naime, te točke imaju koordinate oblika $(p + 3k)3^{-n}$, gdje su $k, n \in \mathbb{N}$, a $p \in \{1, 2\}$. Pretpostavimo suprotno, da je takva jedna rubna točka izbačena jednim od narednih otvorenih intervala,

$$\frac{1+3l}{3^m} < \frac{p+3k}{3^n} < \frac{2+3l}{3^m}$$

gdje je $m > n$. Pomnožimo li ove nejednakosti s 3^m, te oduzmemo $3l$, dobivamo očiglednu kontradikciju

$$1 < 3s < 2 \,, \quad s = 3^{m-n-1}(p+3k) - l \in \mathbb{Z}$$

Osnovna svojstva Cantorovog skupa sažeta su sljedećim teoremom.

Teorem A.1. *Cantorov skup C je zatvoren, nigdje gust i vrijedi $C' = C$.*

DOKAZ : Kako je riječ o presjeku zatvorenih skupova, Cantorov skup je zatvoren na skupu realnih brojeva sa standardnom topologijom. To nam odmah govori da C sadrži sva svoja gomilišta. Nadalje, dokazat ćemo da svaki element baze (standarnde topologije na $\mathbb{R}$) koji sadrži $x \in C$, mora sadržavati bar još jedan element iz C, te sjeći komplement $X - C$. Neka je $x \in B_\epsilon = \langle a, a+\epsilon \rangle$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$. Znamo da postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $3^{-n} < \epsilon$. Nadalje, $x \in C_n$, pa je x element zatvorenog intervala duljine 3^{-n}, čije su obje rubne točke $y_1, y_2 \in C$, te vrijedi

$$|x - y_i| < 3^{-n} < \epsilon$$

pa je $y_1 \in B_\epsilon$ ili $y_2 \in B_\epsilon$. Također, zatvoreni intervali u C_n su *kraći* od ϵ, pa B_ϵ nužno siječe $X - C_n$, a onda i $X - C$.

Odavde slijedi da $C = \overline{C}$ nema "unutrašnjih" točaka, $C^\circ = \left(\overline{C}\right)^\circ = \emptyset$, pa je C nigdje gust skup, ali nema niti izoliranih točaka (drugim riječima, sve točke su mu gomilišta). □

Postoje li točke Cantorovog skupa koje *nisu* rubne točke izbačenih intervala? Odgovor je da. Na primjer, ako promotrimo niz točka koji se sastoji od alternirajućih lijevih i desnih rubnih točaka,

$$x_0 = 0 \,, \quad x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1} 3^{-n}$$

Tada u limesu dobivamo točku čija koordinata *nije* oblika $(p + 3k)3^{-m}$,

$$x_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 3^{-n} = 1 - \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{1}{4}$$

Nije teško dokazati da je x_∞ gomilište Cantorovog skupa, pa je prema gore dokazanom teoremu sadržana u njemu.

Mandelbrotov skup

Mandelbrotov skup je ikonografski primjer u svijetu fraktala, beskonačno složen objekt generiran upotrebom krajnje jednostavnog algoritma. Ukratko, za svaki kompleksan broj $c \in \mathbb{C}$ promatramo rekurziju

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \,, \quad z_0 = 0$$

Svi oni brojevi c kod kojih ovaj rekurzivni postupak *ne divergira* pripadaju Mandelbrotovom skupu M. Znamo da je M neprazan jer je, primjerice $0 \in M$. Nadalje, koristeći funkciju $f_c(z) = z^2 + c$, možemo pisati

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f_c^n(0)| \leq 2\}$$

Zašto smo ovdje upotrijebili granicu 2? Označimo opet s $z_n = f_c^n(0)$ i pretpostavimo da je $|z_n| > 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo dva moguća slučaja,

(a) $|c| \leq 2$. Koristeći nejednakost trokuta imamo

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| \geq 2|z_n| - 2$$

odnosno

$$|z_{n+1}| - 2 \geq 2(|z_n| - 2)\ .$$

Drugim riječima, iteracijom se apsolutna vrijednost članova niza progresivno udaljava od iznosa 2 pa takav niz stoga divergira.

(b) $|c| > 2$. Za početak, znamo da je $|z_1| = |c|$ te

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| > |c|$$

Pretpostavimo, kao korak indukcije, da je $|z_n| > |c|$. Tada imamo

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| \geq |c| \cdot |z_n| - |c| = |z_n| - |c| + (|c| - 1)|z_n| >$$

$$> |z_n| - |c| + (|c| - 1)|c| = |z_n| + (|c| - 2)|c|$$

Odavde slijedi da je $|z_{n+k}| > |c|$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, te da je razlika $|z_{n+1}| - |z_n|$ omeđena odozdo s pozitivnom *konstantom* $(|c| - 2)|c|$. Stoga, i u ovom slučaju niz $|z_n|$ divergira.

Usput, znamo da je $M \cap \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 2\}$ neprazan skup jer je, primjerice, $f_{-2}^n(0) = 2$ za svaki $n \geq 2$ i stoga $-2 \in M$.

Iz gornje diskusije vidimo da je M omeđen skup (omeđen s otvorenim diskom radijusa $2 + \epsilon$). Nadalje, u svakom koraku rekurzije imamo polinom f_c^n, za koje znamo iz kompleksne analize da su uvijek neprekidna preslikavanja. Stoga, M je i zatvoren skup jer ga možemo zapisati kao presjek zatvorenih skupova,

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_c^n)^{-1}\left(\overline{B(0,2)}\right)$$

Konačno, koristeći Heine-Borelov teorem, slijedi da je M kompaktan skup!

B

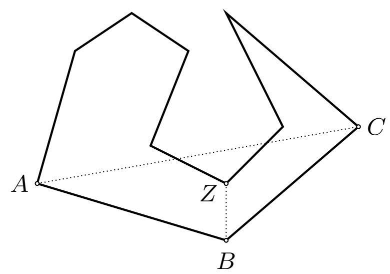
Eulerova formula za poliedre

Poligon je zatvorena Jordanova krivulja koja se sastoji od konačnog niza dužina (konačne duljine). Poliedar je povezana zatvorena ploha koja je unija konačno mnogo poligona, takvih da je svaki brid svakog poligona granica između točno dva poligona. Euler je pokušao dokazati klasifikaciju poliedara …

Lema B.1. *Svaki poligon s $n \geq 3$ stranica je moguće podijeliti na $n-2$ trokuta (kažemo da je svaki poligon moguće* triangularizirati*).*

Dokaz : Oba dijela tvrdnje, egzistenciju triangularizacije, kao i broj trokuta u podijeli dokazujemo indukcijom.

Egzistencija. Baza indukcije je trivijalan slučaj $n = 3$. Pretpostavimo da svaki poligon s $n-1$ stranica dopušta triangularizaciju, te promotrimo poligon s n stranica. Odaberimo vrh B s konveksnim kutom, te označimo njegove susjedne vrhove s A i C. Ako je dužina $\overline{AC}$ sadržana u poligonu, tada smo poligon podijelili na dva manja poligona koji, po pretpostavci dopuštaju triangularizaciju. Ako dužina $\overline{AC}$ nije sadržana u poligonu, označimo sa Z vrh unutar trokuta $\triangle ABC$ najudaljeniji od stranice $\overline{AC}$. Tada je dužina $\overline{BZ}$ sadržana u poligonu i dijeli ga na dva manja poligona koji, po pretpostaci dopuštaju triangularizaciju.



Broj trokuta. Baza indukcije je opet trivijalan slučaj $n = 3$. Neka je $t(P)$ broj trokuta na koji je podijeljen poligon P u nekoj triangularizaciji. Odaberimo bilo koju dijagonalu u promatranoj triangularizaciji, koja poligon P dijeli na dva manja poligona P_1 i P_2 s, redom, n_1 i n_2 vrhova. Tada je, po pretpostavci, $t(P_1) = n_1 - 2$ i $t(P_2) = n_2 - 2$. Imamo

$$t(P) = t(P_1) + t(P_2) = n_1 + n_2 - 4$$

Kako je $n_1 + n_2 = n + 2$ slijedi $t(P) = n - 2$. □

Lema B.2. *Površina sfernog trokuta (na sferi jediničnog radijusa)*

$$P_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{B.1}$$

DOKAZ :

$$P_{\text{mjesec}} = \frac{\alpha}{\pi} 2\pi = 2\alpha$$

Zbrojimo površine svih "mjeseca", čime dobijemo površinu sfere i još 4 površine promatranog sfernog trokuta (zato što svi "mjeseci" prebrišu 3 puta trokut i 3 puta njegov antipod, a 2 površine su već u onih 4π),

$$4(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi + 4P_\Delta$$

odakle slijedi tvrdnja. □

Teorem B.3. *Eulerova formula za poliedre (homeomorfne sa sferom),*

$$V - B + S = 2 \tag{B.2}$$

gdje je V broj vrhova, B broj bridova, a S broj stranica poliedra.

DOKAZ : Prema Lemi B.1, svaki poligon s n stranica je moguće razdijeliti na $n-2$ trokuta. Neka je i-ta stranica promatranog poliedra n_i-terokut. Ako sada sve stranice promatranog poliedra razdijelimo na trokute, tada tih trokuta ima ukupno

$$\Delta = \sum_{i=1}^{S}(n_i - 2) = \sum_{i=1}^{S} n_i - 2\sum_{i=1}^{S} 1 = 2B - 2S$$

Prilikom zbrajanja broja trokuta smo iskoristili činjenicu da svaki brid poliedra pripada *točno dvjema* stranicama. Iskoristimo sada pretpostavku da je poliedar homeomorfan sa sferom, pa preslikajmo ovu mrežu trokuta na jediničnu sferu. Zbroj površina pritom dobivenih sfernih trokuta jednak je površini sfere,

$$\sum_{i=1}^{\Delta} P_{\Delta_i} = 4\pi$$

S druge strane, koristeći Lemu B.2 imamo

$$\sum_{i=1}^{\Delta} P_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^{\Delta} \big(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi\big) = 2\pi V - \pi\Delta$$

Iz ove dvije jednakosti slijedi

$$\Delta = 2V - 4$$

Imamo stoga

$$2B - 2S = 2V - 4$$

odakle odmah slijedi tražena tvrdnja. □

Teorem B.4. *Postoji samo 5 pravilnih poliedara i to su upravo Platonska tijela.*

DOKAZ : Prema definiciji pravilnog poliedra, njegove stranice su pravilni n-terokuti, pa imamo $nS = 2B$ (svaki brid je sadržan u točno dvije stranice). Nadalje, iz svakog vrha izlazi jednak broj, recimo m bridova, pa vrijedi $mV = 2B$ (svaki brid spaja 2 vrha). Koristeći B.2 imamo

$$\frac{2}{m}B - B + \frac{2}{n}B = 2$$

odnosno

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{B}$$

Kako je $B > 0$ imamo nejednakost

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

Svi poliedri imaju $n \geq 3$ i $m \geq 3$, pa preostaje samo konačan broj parova (n, m) koji zadovoljavaju gornju nejednakost,

n	m	B	S	V	ime poliedra
3	3	6	4	4	tetraedar
3	4	12	8	6	oktaedar
4	3	12	6	8	heksaedar
5	3	30	12	20	dodekaedar
3	5	30	20	12	ikozaedar

□

Korolar B.5. *Nogometne lopte i fulereni imaju* točno *12 pentagona (peterokuta).*

DOKAZ : Kako je unutrašnji kut pravilnog pentagona $3\pi/5$, a unutrašnji kut pravilnog heksagona $2\pi/3$, brzo vidimo da se u svakom vrhu ne može susresti više od 3 stranice. Neka je p broj pentagona, a h broj heksagona,

$$p + h = S\,, \quad 5p + 6h = 2B\,, \quad 5p + 6h = 3V$$

Uvrštavanjem u (B.2) dobijemo

$$p = 12$$

□

Problem 4 boje. Povijesni pregled. Primjer na političkoj karti Europe: za bojanje Luxembourga, Belgije, Francuske i Njemačke su poterbne barem 4 različite boje. Smatrat ćemo da je "područje" putevima povezan otvoren podskup ravnine $\mathbb{R}^2$ (+pretpostavke o rubu). Mi ćemo pomoću Eulerove formule dokazati nešto skromniji rezultat. Osnovna ideja: pretvaranje karata u grafove. Grafove uspoređujemo po broju vrhova. Nadalje, cijelu ravninu možemo stereografskom projekcijom preslikati na sferu, čime graf postaje "poliedar" na sferi.

Teorem B.6. *Nemoguće je ravninu podijeliti na 5 područja, tako da svi međusobno graniče.*

Dokaz : Želimo dokazati da ne postoji graf s 5 vrhova koji su svi međusobno povezani bridovima (koji se ne presjecaju).

$$V = 5\,, \quad B = \binom{5}{2} = 10\,, \quad S = 2 - V + B = 2 - 5 + 10 = 7$$

Kako je svaki par vrhova u grafu povezan samo jednom linijom (bridom) grafa, slijedi da je svaka stranica omeđena s najmanje 3 brida grafa. To znači da za broj bridova vrijedi

$$B \geq \frac{3S}{2} = \frac{21}{2} = 10\,\frac{1}{2}$$

što je kontradikcija. Napomena: ovo *nije* dokaz teorema o 4 boje jer i dalje ostavlja mogućnost podjele ravnine na više od 5 područja, takvih da ih nije moguće obojati sa samo 4 boje. □

Teorem B.7. *6 različitih boja je dovoljno za propisno bojanje svake planarne karte.*

Dokaz : Kako je $B \geq 3S/2$, vrijedi i $2B/3 \geq S$, pa je

$$\frac{2B}{3} + V - B \geq 2$$

$$6V - 2B \geq 12$$

Neka je V_m broj vrhova iz kojih izlazi m linija grafa. Pretpostavimo prvo da iz svakog vrha pridruženog grafa izlazi 6 ili više bridova, odnosno da vrijedi

$$V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 0$$

Odavde odmah slijedi

$$V = V_6 + V_7 + V_8 + \ldots$$

Svaki brid spaja dva vrha,

$$2B = 6V_6 + 7V_7 + 8V_8 + \ldots$$

Iz ove dvije jednakosti i gornje nejednakosti slijedi

$$6V_6 + 6V_7 + 6V_8 + \cdots - 6V_6 - 7V_7 - 8V_8 - \cdots \geq 12$$

$$0 \geq 12 + V_7 + 2V_8 + 3V_9 + \cdots > 0$$

što je kontradikcija. Dakle, neki vrhovi mogu imati 5 ili manje susjeda. Pretpostavimo sada da postoji tzv. minimalan graf, odnosno onaj koji se *ne može* obojati sa 6 boja, a svaki manji od njega može. Neka je T vrh ovog grafa iz kojeg izlazi 5 ili manje bridova. Privremeno izbrišemo taj vrh i bridove koji izlaze iz njega. Novi graf se može obojati sa 6 boja. Vratimo vrh T i bridove koji izlaze iz njega. On ima najviše 5 susjednih vrhova, pa ga obojamo sa 6. bojom. Dakle, graf nije minimalan, a to je u kontradikciji s pretpostavkom. Drugim riječima, svaki graf je moguće obojati sa 6 boja. □

C

Particija jedinice

Definicija C.1. Neka je X topološki prostor. Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova prostora X kažemo da je **lokalno konačna** ako svaka točka $x \in X$ ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo elemenata familije $\mathcal{A}$. Za indeksiranu familiju $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ podskupova prostora X kažemo da je lokalno konačna ako svaka točka $x \in X$ ima okolinu koja siječe elemente ove familije samo za konačno mnogo vrijednosti indeksa α.

Komentar C.2. Valja uočiti suptilnu razliku kod definicija lokalne konačnosti za neindeksiranu i indeksiranu familiju skupova. Naime, kod potonje se može dogoditi da se isti skup višestruko pojavljuje (za različite vrijednosti indeksa α) u indeksiranoj familiji. //

Primjer|i C.3. Na primjer, $\mathcal{A} = \{\langle n, n+2\rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je lokalno konačna familija na topološkom prostoru $\mathbb{R}$, dok je $\mathcal{B} = \{\langle 0, 1/n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ lokalno konačna na prostoru $\langle 0, 1\rangle$, ali nije lokalno konačna na $\mathbb{R}$. //

Teorem C.4. *Neka je $\mathcal{A}$ lokalno konačna familija podskupova topološkog prostora X. Tada je i $\mathcal{C} = \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ lokalno konačna familija te vrijedi*

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \tag{C.1}$$

Dokaz :

(a) Svaka okolina koja siječe skup $\overline{A}$ nužno siječe i skup A. Stoga, ako je O_x okolina točke $x \in X$ koja siječe konačno mnogo elemenata familije $\mathcal{A}$ tada užno siječe i konačno mnogo elemenata familije $\mathcal{C}$. Odavde slijedi da je i $\mathcal{C}$ lokalno konačna familija skupova.

(b) Neka je $B = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Tada je nužno $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{B}$. Obratno, neka je $b \in \overline{B}$. Neka je O_b okolina točke b koja siječe familiju $\mathcal{A}$ u konačno mnogo elemenata, $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Ako bi vrijedilo $b \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$, tada bi otvoren skup $O_b - (\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n})$ bio okolina točke b, disjunktna sa skupom B, što je u kontradikciji s pretpostavkom $b \in \overline{B}$. Stoga, vrijedi i $\overline{B} \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$, odakle slijedi tvrdnja iz teorema.

□

Definicija C.5. Neka je X topološki prostor i $\{O_\alpha \mid \alpha \in J\}$ lokalno konačan otvoren pokrivač prostora X. Za indeksiranu familiju (glatkih) preslikavanja $\psi_\alpha : X \to [0,1]$ kažemo da je (**glatka**) **particija jedinice** na X podređena pokrivaču $\{O_\alpha\}$ ako je

(a) $(\forall\, \alpha \in J) : \ \operatorname{supp} \psi_\alpha \subseteq O_\alpha\,,$

(b) familija $\{\operatorname{supp} \psi_\alpha \mid \alpha \in J\}$ lokalno konačna, i

(c) $(\forall\, x \in X) : \ \sum_{\alpha \in J} \psi_\alpha(x) = 1\,.$

Teorem C.6 (postojanje glatke particije jedinice). *Lee, p.43*

Teorem C.7 (Postojanje glatkih grba). *Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki zatvoren skup $Z \subseteq M$ i otvoren skup $O \supseteq Z$ postoji glatka funkcija $\psi : M \to [0,1]$, takva da je $\psi(z) = 1$ za sve $z \in Z$ te $\operatorname{supp} \psi \subseteq O$.*

DOKAZ : Neka je $\{\psi_0, \psi_1\}$ glatka particija jedinice podređena otvorenom pokrivaču $\{O, M - Z\}$ mnogostrukosti M. Kako je $\psi_1(z) = 0$ za sve $z \in Z$, slijedi $\psi_0(z) = 1 - \psi_1(z) = 1$. Stoga, funkcija ψ_0 ima tražena svojstva. $\square$

Derivabilnost funkcija je isprva definirana za funkcije s domenama koje su otvoreni skupovi. Želimo li tu definiciju proširiti na funkcije čije su domene nekakvi općenitiji skupovi problem se javlja s derivacijama na rubu domene.

Definicija C.8. Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subseteq M$ njen podskup i $k \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $F : S \to \mathbb{R}^k$ glatko preslikavanje ako svaka točka $a \in S$ ima okolinu O_a na kojoj postoji glatka funkcija $\widetilde{F} : O_a \to \mathbb{R}^k$, takva da je $\widetilde{F}|_{O_a \cap S} = F$.

Lema C.9 (Lema o proširenju glatkih funkcija). *Neka je M glatka mnogostrukost, $Z \subseteq M$ zatvoreni podskup i $f : Z \to \mathbb{R}^k$ glatka funkcija. Za svaki otvoreni skup $O \supseteq Z$ postoji glatka funkcija $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$, takva da je $\widetilde{f}|_Z = f$ i $\operatorname{supp} \widetilde{f} \subseteq O$.*

DOKAZ : Prema prethodnoj definiciji, svaka točka $z \in Z$ ima okolinu O_z na kojoj postoji glatka funkcija $\widetilde{f}_z : O_z \to \mathbb{R}^k$, takva da je $\widetilde{f}_z = f$ na presjeku $O_z \cap Z$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $O_z \subseteq O$ jednostavno jer početni skup O_z uvijek možemo zamjeniti s $O_z \cap O$.

Familija skupova $\{O_z \mid z \in Z\} \cup \{M - Z\}$ je otvoren pokrivač mnogostrukosti M. Neka je $\{\psi_z \mid z \in Z\} \cup \{\psi_0\}$ glatka particija jedinice podređena ovom pokrivaču, uz $\operatorname{supp} \psi_z \subseteq O_z$ i $\operatorname{supp} \psi_0 \subseteq M - Z$. Za svaki $z \in Z$ produkt $\psi_z \widetilde{f}_z$ je glatka funkcija čiju domenu možemo proširiti s O_z na cijelu M ako za proširenu funkciju definiramo da je identički nula na komplementu $M - \operatorname{supp} \psi_z$.

Definiramo preslikavanje $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ preko

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{z \in Z} \psi_z(x) \widetilde{f}_z(x) \ .$$

Kako je familija nosača $\{\mathrm{supp}\, \psi_z\}$ lokalno konačna, ova suma sadrži u okolini svake točke sadrži samo konačno mnogo neiščezavajućih članova. Konačna suma glatkih funkcija na otvorenom skupu pa je i $\widetilde{f}$ glatka funkcija. Nadalje, za svaki $w \in Z$ imamo $\widetilde{f}_z(w) = f(w)$ i $\psi_0(w) = 0$ pa je

$$\widetilde{f}(w) = \sum_{z \in Z} \psi_z(w) \widetilde{f}_z(w) = \left(\psi_0(w) + \sum_{z \in Z} \psi_z(w) \right) f(w) = f(w) \ ,$$

odnosno $\widetilde{f}|_Z = f$. Konačno,

$$\mathrm{supp}\, \widetilde{f} \subseteq \overline{\bigcup_{z \in Z} \mathrm{supp}\, \psi_z} = \bigcup_{z \in Z} \mathrm{supp}\, \psi_z \subseteq O \ .$$

□

Lema C.10 (Lema o proširenju glatkih vektorskih polja). *Neka je M glatka mnogostrukost, $Z \subseteq M$ zatvoreni podskup i X^a glatko vektorsko polje definirano na skupu Z. Za svaki otvoreni skup $O \supseteq Z$ postoji globalno definirano vektorsko polje $\widetilde{X}^a$, takvo da je $\widetilde{X}^a|_Z = X^a$ i $\mathrm{supp}\, \widetilde{X}^a \subseteq O$.*

D

Tenzorske gustoće

U računima se ponekad susrećemo s netenzorskim veličinama čija svojstva prilikom promjene koordinatnog sustava ipak donekle podsjećaju na transformacije komponenti tenzora. Promotrimo, na primjer, determinantu metrike na preklopu neke dvije koordinatnoj karte, $(O, \{x^\mu\})$ i $(O', \{x^{\mu'}\})$. Same komponente metričkog tenzora se transformiraju prema

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} \; . \tag{D.1}$$

Ovu relaciju možemo zapisati matrično u obliku

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{\Lambda}^\mathsf{T} \boldsymbol{g} \, \boldsymbol{\Lambda} \; , \tag{D.2}$$

gdje je $\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\mu'} = \partial x^\alpha / \partial x^{\mu'}$. Stoga, uzimanjem determinante obje strane dobivamo

$$g' = (\det \boldsymbol{\Lambda})^2 \, g \; , \tag{D.3}$$

gdje su $g' = \det \boldsymbol{g}'$ i $g = \det \boldsymbol{g}$. Prvo valja uočiti kako determinanta g, iako "nema indekse", *nije* skalar! Naime, skalarna veličina ostaje nepromjenjena prilikom promjene koordinatnog sustava, što ovdje očigledno nije slučaj jer je općenito $\det \boldsymbol{\Lambda} \neq \pm 1$. Nadalje, valja učiti da je matrica $\boldsymbol{\Lambda}$ inverz Jacobijana $\boldsymbol{J}$ koordinatne transformacije $x \to x'$, pa možemo pisati

$$g' = (\det \boldsymbol{J})^{-2} \, g \tag{D.4}$$

Sve ovo motivira narednu definiciju.

Definicija D.1. Neka je T tenzorsko polje tipa (r, s) na pseudo-Riemannovoj glatkoj mnogostrukosti (M, g_{ab}). Tada je **tenzorska gustoća** $\mathfrak{T}$ **težine** $W \neq 0$ skup funkcija definiran na svakoj koordinatnoj karti $(O, \{x^\mu\})$ s

$$\mathfrak{T}^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = |g|^{-W/2} \, T^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \; , \tag{D.5}$$

gdje je g determinanta metrike g_{ab} izvrjednjena u tom koordinatnom sustavu.

Odmah iz defincije i gornje diskusije slijedi da na preklopu koordinatih karata $(O, \{x^\mu\})$ i $(O', \{x^{\mu'}\})$ imamo

$$\mathfrak{T}^{\mu'_1\cdots\mu'_r}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_s} = |g'|^{-W/2}\, T^{\mu'_1\cdots\mu'_r}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_s} = \\ = |\det \boldsymbol{J}|^W \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x^{\nu'_s}}\, \mathfrak{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s} \,. \qquad \text{(D.6)}$$

Ova jednakost se ponekad interpretira na način da se tenzorska gustoća $\mathfrak{T}$ transformira nalik na komponente tenzora, ali modificirana s faktorom $|\det \boldsymbol{J}|^W$.

Primjer|i D.2. Dakako, ogledan primjer tenzorske gustoće je determinanta metrike, koja je skalarna gustoća težine $W = -2$. Nadalje, imamo li neku sačuvanu struju J^a, tada pripadnu jednadžbu kontinuiteta možemo zapisati u obliku

$$0 = \nabla_a J^a = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} J^\mu \right) \,. \qquad \text{(D.7)}$$

Stoga, ponekad se uvodi pripadna tenzorska gustoća $\mathfrak{j}^\mu = |g|^{1/2}\, J^\mu$ težine $W = -1$, koja zadovoljava jednakost $\partial_\mu \mathfrak{j}^\mu = 0$. //

Primjer|i D.3. U kontekstu integriranja na mnogostrukostima često se uvodi tenzorska gustoća (težine $W = 1$)

$$\varepsilon_{\mu\nu\ldots} \equiv |g|^{-1/2}\, \epsilon_{\mu\nu\ldots} \qquad \text{(D.8)}$$

preko Levi-Civita tenzora $\epsilon_{\mu\nu\ldots}$. Analogno imamo i tenzorsku gustoću (težine $W = -1$) $\varepsilon^{\mu\nu\cdots} \equiv |g|^{1/2}\, \epsilon^{\mu\nu\cdots}$. Učestalo pitanje u diskusijama koje se dotiču Levi-Civita tenzora glasi: sadrži li Vaša definicija "epsilona" u sebi korijen iz determinante metrike? Stoga, uputno je naglasiti govorite li o *tenzoru* $\epsilon_{ab\ldots}$ (čije komponente *sadrže* korijen determinante metrike) ili *tenzorskoj gustoći* $\varepsilon_{\mu\nu\ldots}$ (čije komponente *ne sadrže* korijen determinante metrike). //

Komentar D.4. Riječ "gustoća" u pojmu tenzorske gustoće valja uzeti sa zrnom soli. Primjerice, *gustoća* naboja ρ, koja se pojavljuje u definiciji 4-struje naboja $J^a = \rho u^a$, je skalar (to je odmah razvidno iz toga što je $\rho = -u_a J^a$). Terminologiju dodatno kompliciraju konvencije na koje nailazimo u teoriji polja. Tamo susrećemo djelovanje S, koje je kovarijantno zapisano kao integral

$$S = \int_M \mathscr{L} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \,.$$

U ovom kontekstu se koristi pojam *gustoća lagranžijana*, s kojim se ponekad [LPPT75] oslovljava veličina $\mathscr{L}$ (koja je skalar), a ponekad [MTW70, Wal84] produkt $\mathscr{L}\sqrt{-g}$ (koji je skalarna gustoća težine $W = -1$). Da stvar bude gora, korijen iz determinante metrike je u literaturi posvećenoj fizici elementarnih čestica u pravilu "nevidljiv" (jer se prešutno koristi inercijalni Kartezijev koordinatni sustav na prostorvremenu Minkowskog) pa ova ambivalentnost ostaje nedorečena. Sama fraza motivirana je fizikalnim dimenzijama veličina $\mathscr{L}$ i $\mathscr{L}\sqrt{-g}$, koje su jednake fizikalnim dimenzijama lagranžijana podijeljenog s volumenom. //

Komentar D.5. Možemo se pitati kako sve možemo derivirati tenzorske gustoće. Naravno, parcijalne derivacije $\partial_\alpha \mathfrak{T}^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ su definirane kao i parcijalne derivacije funkcija na mnogostrukosti. No, što je s kovarijantnom i Liejevom derivacijom? S obzirom da su tenzorske gustoće definicijom vezane za koordinatne sustave, nema smisla govoriti o kovarijantnim pojmovima deriviranja. Pa ipak, ponekad se u literaturi koriste i *analogoni* ovih derivacija, adaptirani na tenzorske gustoće (vidi npr. [MTW70], poglavlje 21.2) //

E

Fermijev transport

Bla bla

F

Varijacijski račun

$$\delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd}\, \delta g^{bd} \tag{F.1}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\, \delta g^{ab} \tag{F.2}$$

Palatini identity

$$\delta R_{ab} = \nabla_c\, \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b\, \delta\Gamma^c_{ca} \tag{F.3}$$

$$\delta(\sqrt{-g}\, R) = \sqrt{-g}\,\big(G_{ab}\, \delta g^{ab} + \nabla^a v_a\big)\ , \quad v_a = \nabla^b \delta g_{ab} - g^{cd} \nabla_a \delta g_{cd} \tag{F.4}$$

Scalar section

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}\, \frac{\delta\big((X-V)\sqrt{-g}\big)}{\delta g^{ab}} = \nabla_a\phi\, \nabla_b\phi + (X-V) g_{ab} \tag{F.5}$$

$$\delta_\phi(X-V) = \big(\Box\phi - V'(\phi)\big)\delta\phi - \nabla_a(\delta\phi\, \nabla^a\phi) \tag{F.6}$$

Electromagnetic section

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\delta(\mathcal{F}\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}} = 2\left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4}\,\mathcal{F} g_{ab}\right) \tag{F.7}$$

G

Odgođeni dokazi

Heine-Borelov teorem

Lema G.1. *Neka su $b > a > 0$ realni brojevi i $n \in \mathbb{N}$. Hiperkocka $[a,b]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan potprostor topološkog prostora $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz : Označimo s $K_0 = [a,b]^n$ i pretpostavimo da ovo *nije* kompaktan prostor. Neka je $\mathcal{P} = \{O_\alpha\}$ otvoren pokrivač skupa K_0. Prepolovimo li sve stranice (duž koordinatnih osi) hiperkocke K_0, dobit ćemo 2^n hiperkocaka. Barem jedna od njih nema konačnog potpokrivača (u protivnom bi postojao konačan potpokrivač, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom). Označimo tu hiperkocku s K_1, te nastavimo iterativno s ovim postupkom. Time dobivamo beskonačnu familiju ugnježđenih hiperkocaka, $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$.

Sada tvrdimo da je presjek $Q = \bigcap_i K_i$ neprazan i sadrži *točno jednu* točku. Promotrimo bridove duž jedne od koordinatnih osi,

$$[a,b] \supseteq [c_1,d_1] \supseteq [c_2,d_2] \supseteq \ldots$$

Kako za sve $i,j \in \mathbb{N}$ vrijedi $c_i \leq d_j$, niz $\{c_i\}$ ima supremum $c \equiv \sup\{c_i\}$, a niz $\{d_i\}$ infimum $d \equiv \inf\{d_i\}$ (prema jednom od aksioma skupa realnih brojeva svaki odozgo ograničen skup $A \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$), te vrijedi $c \leq d$ i stoga $J \equiv [c,d] \neq \emptyset$. Nadalje, vrijedi $J \subseteq [c_i,d_i]$ za sve $i \in \mathbb{N}$, pa je $\bigcap_i [c_i,d_i]$ neprazan skup. Ponavljanjem analognog postupka za sve koordinatne osi dokaže se da je i presjek Q neprazan skup. Konačno, kako su intervali $[c_i,d_i]$ proizvoljno malene duljine (konkretno, ona iznosi $2^{-i}|b-a|$), interval J ne može biti konačne duljine, pa je $c = d$, odakle slijedi da je se presjek Q sastoji od točno jedne točke, na primjer $Q = \{x\}$.

Neka je $O_\beta \in \mathcal{P}$ element pokrivača koji sadrži točku x. Kako je O_β otvoren skup, tada postoji otvorena kugla $B(y,r) \subseteq O_\beta$, takva da je $x \in B(y,r)$. Ova kugla sadrži sve osim konačno mnogo hiperkocaka iz gornje familije (preciznije, postoji $m \in \mathbb{N}$, takav da su $K_i \subseteq B(y,r)$ za sve $i \geq m$). No, tada je jednočlana familija $\{O_\beta\}$ konačan potpokrivač svake hiperkocke K_i za $i \geq m$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da niti jedna od njih nema konačnog potpokrivača. Dakle, K_0 je kompaktan potprostor. □

Dokaz : Pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan skup. Kako je $\mathbb{R}^n$ Hausdorffov prostor, iz Teorema 1.49 slijedi da je A zatvoren skup. Nadalje, odaberimo proizvoljnu točku $x \in \mathbb{R}^n$, te promotrimo familiju skupova

$$\mathcal{P} = \{B(x,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

koja je pokrivač prostora $\mathbb{R}^n$, a onda ujedno i pokrivač skupa A. Ako bi A bio neomeđen skup, tada ga bi ga bilo nemoguće pokriti s konačno mnogo elemenata ovog pokrivača, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je A kompaktan. Dakle, A je nužno i omeđen skup.

Obratno, pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren i omeđen skup. Tada postoji otvorena kugla $B(p,r) \supseteq A$, a onda i hiperkocka $[a,b]^n \supseteq B(p,r) \supseteq A$. Prema Lemi G.1 hiperkocka je kompaktan prostor, a prema Teoremu 1.47 zatvoren podskup kompaktnog prostora je kompaktan, odakle slijedi da je A kompaktan skup. □

Iščezavajući Riemann povlači lokalnu ravnost

Dokaz : Ako postoji lokalna izometrija $\phi : O \to \mathbb{R}^m_s$, tada koristimo $\phi^* R$ itd.

Ako je $R_{abcd} = 0$ tada konstruiramo lokalni sustav u kojem su komponente metrike konstante.

Karta (O, ψ), komponente funkcije V^α, 1-forme Γ^α_β, uvodimo 1-forme $\theta^{(\alpha)}$ (i sve radimo u tangentnom svežnju TM)

$$\theta^{(\alpha)} = \mathrm{d}V^\alpha + V^\beta \Gamma^\alpha{}_\beta$$

$$\theta^{(1)} \wedge \ldots \wedge \theta^{(m)} \neq 0$$

$$\mathrm{d}\theta^{(\alpha)} = \mathrm{d}V^\beta \wedge \Gamma^\alpha{}_\beta + V^\beta \mathrm{d}\Gamma^\alpha{}_\beta = \mathrm{d}V^\beta \wedge \Gamma^\alpha{}_\beta + V^\beta \left(R^\alpha{}_\beta - \Gamma^\alpha{}_\sigma \wedge \Gamma^\sigma{}_\beta \right) =$$

$$= V^\beta R^\alpha{}_\beta - \Gamma^\alpha{}_\sigma \left(\mathrm{d}V^\sigma + V^\beta \Gamma^\sigma{}_\beta \right) = V^\beta R^\alpha{}_\beta - \Gamma^\alpha{}_\sigma \wedge \theta^{(\sigma)}$$

$$\theta^{(1)} \wedge \ldots \wedge \theta^{(m)} \wedge \mathrm{d}\theta^{(\alpha)} = \theta^{(1)} \wedge \ldots \wedge \theta^{(m)} \wedge V^\beta R^\alpha{}_\beta$$

Frobenius, integrabilnost …Na kraju imamo sustav kovarijantno konstantnih vektora $\nabla V_{(i)} = 0$ s koordinatnim sustavom u kojem su $V_{(\mu)} = \partial/\partial x^\mu$. Nadalje, komponente

$$g_{\alpha\beta} = g(V_{(\alpha)}, V_{(\beta)})$$

su konstantne na toj karti, $\nabla g(V_{(\alpha)}, V_{(\beta)}) = 0$, te je s dodatnom linearnom transformacijom (konstantnom na toj karti) i reskaliranjem (svođenje na kanonsku formu) moguće postići $g_{\alpha\beta} = \pm\delta_{\alpha\beta}$. □

Bibliografija

[Ada94] C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W.H. Freeman, New York, 1994.

[Arn73] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, 1973.

[Bac12] D. Bachman, *A geometric approach to differential forms*, Birkhaäuser, New York, 2012.

[Bal94] A.P. Balachandran, *Topology in physics: A Perspective*, Found. Phys. **24** (1994), 455–466.

[BG80] L. R. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor analysis on manifolds*, Dover Publications, New York, 1980.

[BM94] J. C. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots, and Gravity*, World Scientific, Singapore River Edge, N.J, 1994.

[Boy72] J. B. Boyling, *An Axiomatic Approach to Classical Thermodynamics*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A **329** (1972), 35–70.

[Bre93] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, New York, 1993.

[Cro05] M. D. Crossley, *Essential Topology*, Springer, London, 2005.

[dC92] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[EGH80] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rept. **66** (1980), 213.

[Fer56] E. Fermi, *Thermodynamics*, Dover Publications, New York, 1956.

[Fra04] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*, Cambridge University Press, New York, 2004.

[Für55] H. Fürstenberg, *On the infinitude of primes*, The American Mathematical Monthly **62** (1955), 353.

[GF00] I.M. Gel'fand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Mineola, N.Y, 2000.

[GPS02] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[GX15] J. Gallier and D. Xu, *Guide to the classification theorem for compact surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 2015.

[Hal03] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, New York, 2003.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge New York, 2002.

[HE73] S .W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[Heu96] M. Heusler, *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge New York, 1996.

[HS88] J. G. Hocking and Young G. S., *Topology*, Dover Publications, New York, 1988.

[Hus94] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Jac99] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1999.

[Kos07] A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Dover Publications, Mineola, 2007.

[Lak90] I. Lakatos, *Dokazi i opovrgavanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[Lee97] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, New York, 1997.

[Lee03] ______, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2003.

[LPPT75] A. P. Lightman, W H. Press, R. H. Price, and S. A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1975.

[LY98] E. H. Lieb and J. Yngvason, *A Guide to Entropy and the Second Law of Thermodynamics*, Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), 571–581.

[LY99] ______, *The physics and mathematics of the second law of thermodynamics*, Phys. Rept. **310** (1999), 1–96.

[Mil97] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1997.

[MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1974.

[MTW70] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman & Co., San Francisco, 1970.

[Mun00] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[Nab11] G. Naber, *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*, Springer, New York, 2011.

[Nak03] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol Philadelphia, 2003.

[Nas97] C. Nash, *Topology and Physics — a historical essay*, arXiv: hep-th/9709135, 1997.

[O'N83] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[Pen72] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1972.

[Sco05] A. Scorpan, *The Wild World of 4-Manifolds*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[Ste99] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, N.J, 1999.

[Sze04] P. Szekeres, *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert space, and Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Tap05] K. Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[Thu97] W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[Tu11] L. Tu, *An introduction to manifolds*, Springer, New York, 2011.

[Wal84] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[Wee02] J. Weeks, *The shape of space*, Marcel Dekker, New York, 2002.

[Woo92] N. M. J. Woodhouse, *Geometric quantization*, Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1992.