

# Fizikalna kozmologija

---

BILJEŠKE S VJEŽBI

Ivica Smolić

**radna verzija** 9. listopada 2012.

Ovo su radne, nedovršene bilješke s vježbi iz kolegija *Fizikalna kozmologija* koji se odražava na 4. godini fizike (istraživački smjer).

# Poglavlje 1

## Global Positioning System

**ZAD 1.** GPS sastoji se od 24 satelita u orbiti oko Zemlje, raspoređena u 6 orbitalnih ravnina, s periodom od 12h. Svaki satelit nosi precizan atomski sat i periodički odašilje svoje prostornovremenske koordinate (mikrovalnim) signalom. U načelu, 4 satelita su dovoljna za određivanje koordinata točke (opažača) na Zemlji, a ostali su tu zbog preciznosti, te zbog toga jer će dio satelita uvijek biti zaklonjen samom Zemljom. Odredite korekcije u vremenu koje je potrebno izvršiti zbog specijalnorelativističkih i općerelativističkih efekata!

**R.** Promotrimo prvo pojednostavljen, (1+1)-dimenzionalan sustav: dva satelita ( $A$  i  $B$ ) gibaju se konstantnom brzinom  $v$  duž pozitivnog smjera  $x$ -osi na konstantnom razmaku, a između njih se nalazi opažač  $O$ .

Opažač  $O$  prima u jednom trenutku prostornovremenske koordinate sa satelita,  $(ct_A, x_A)$  i  $(ct_B, x_B)$ . Na koji način on može izračunati svoje koordinate  $(ct_O, x_O)$  iz ovog skupa informacija?

$$x_O - x_A = (t_O - t_A)c$$

$$x_B - x_O = (t_B - t_O)c$$

Zbrajanjem i oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo

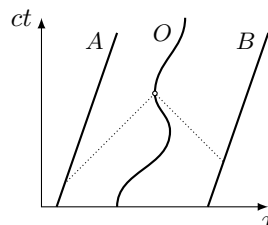
$$ct_O = \frac{1}{2} \left( (x_B - x_A) + (ct_B + ct_A) \right)$$

$$x_O = \frac{1}{2} \left( (x_B + x_A) + (ct_B - ct_A) \right)$$

Na analogan način postupamo u slučaju (1 + 3)-dimenzionalnog prostora koristeći, primjerice, sferni koordinatni sustav (ovdje to nećemo eksplicitno raspisivati). Sada ćemo razmotriti koji sve doprinose možemo očekivati u korekciji vremena. Okvirno,

STR :  $O$  vidi kako vrijeme na satelitu protječe **sporije** (jer satelit se giba u odnosu na njega nekom brzinom  $v$ )

OTR :  $O$  vidi kako vrijeme na satelitu protječe **brže** (jer je opažač *dublje* u gravitacijskom potencijalu od satelita)



Upotrebom zadanih parametara možemo kvalitativno procjeniti veličinu ovih korekcija. Vrijeme ophoda satelita je

$$T_s = 12h = 4.32 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Izjednačavanjem centripetalne i gravitacijske sile,

$$\frac{m_s v_s^2}{r_s} = G \frac{m_s M_z}{r_s^2}, \quad v_s = \frac{2\pi r_s}{T_s}$$

dobivamo radijus putanje satelita,

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{GM_z T_s^2}{4\pi^2}} = 2.66 \cdot 10^7 \text{ m} = 4.17 R_z$$

Brzina satelita jednaka je

$$v_s = 3.87 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

a) STR dilatacija vremena

$$\Delta t_O = \gamma_s \Delta t_s, \quad \gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} \quad (1.1)$$

Faktor relativne ispravke dan je s

$$\begin{aligned} \delta_{\text{STR}} &= \frac{\Delta t_O - \Delta t_s}{\Delta t_O} = 1 - \frac{\Delta t_s}{\Delta t_O} = 1 - \gamma_s^{-1} = 1 - \sqrt{1 - \beta_s^2} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\beta_s^2}{2} + \mathcal{O}(\beta_s^4)\right) \approx \frac{\beta_s^2}{2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

i u našem slučaju on iznosi

$$\delta_{\text{STR}} \approx 0.83 \cdot 10^{-10}$$

b) OTR dilatacija vremena. Pretpostavljajući da je Zemlja sfernog oblika, te da rotira zanemarivom (nerelativističkom) kutnom brzinom, prostorvrijeme u njenoj okolini možemo opisati Schwarzschildovom metrikom,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{f(r)}{dr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.3)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M_z G}{c^2 r} \equiv 1 - \frac{b}{r}$$

gdje je  $b$  tzv. *Schwarzschildov radijus*. Konkretno, za Zemlju on iznosi

$$b_z = 8.8 \cdot 10^{-3} \text{ m} \ll R_z$$

Vlastito vrijeme (vrijeme izmjereno u sustavu mirovanja danog promatrača) u Schwarzschildovom prostorvremenu dana je s

$$\Delta\tau = \sqrt{f(r)} c\Delta t$$

Valja uočiti da  $r_s > r_O$  povlači  $f(r_s) > f(r_O)$ . Faktor relativne ispravke je sada

$$\delta_{\text{OTR}} = \frac{\Delta\tau_s - \Delta\tau_O}{\Delta\tau_O} = \frac{\sqrt{f(r_s)}}{\sqrt{f(r_O)}} - 1 \quad (1.4)$$

Promotrimo omjer

$$\begin{aligned} \frac{f(r_s)}{f(r_O)} &= \frac{1 - \frac{b_z}{r_s}}{1 - \frac{b_z}{r_O}} = 1 + \frac{\frac{b_z}{r_O} - \frac{b_z}{r_s}}{1 - \frac{b_z}{r_O}} = 1 + b_z \left( \frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_s} \right) \left( 1 + \frac{b_z}{r_O} + \mathcal{O}(b_z^2) \right) = \\ &= 1 + b_z \left( \frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_s} \right) + \mathcal{O}(b_z^2) \end{aligned}$$

Stoga,

$$\delta_{\text{OTR}} \approx \frac{b_z}{2} \left( \frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_s} \right) = \frac{GM_z}{r_O c^2} - \frac{GM_z}{r_s c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2} = 0.52 \cdot 10^{-9}$$

gdje smo s  $\Delta\phi$  označili razliku u gravitacijskom potencijalu između satelita i točke na površini Zemlje. Uočimo, u slučaju GPS satelita općerelativistička popravka je veća od specijalnorelativističke,  $\delta_{\text{OTR}} > \delta_{\text{STR}}$ !

Da li su nam uoće bitne ovako male korekcije? Pretpostavimo da želimo preciznost od 1 m. Tome odgovara preciznost u vremenu od

$$\frac{1m}{c} = \frac{1m}{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}} \approx 0.3 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 3 \text{ ns}$$

Međutim, ako ne bismo uzimali u obzir gore procjenjene korekcije, pogreška od nekoliko nanosekundi bi se nagomilala u vremenu manjem od jedne minute!

## Poglavlje 2

# Olbersov paradoks

Njemački astronom Heinrich Wilhelm Mathias Olbers je 1826. godine primjetio kako bi u statičnom, beskonačno starom i beskonačno velikom svemiru noćno nebo bilo iznimno sjajno. Pitanje je stoga zašto je noćno nebo (uglavnom) tamno? Olbers je pokušao razriješiti paradoks pretpostavljajući da je svemir ispunjen međuzvezdanom materijom koja apsorbira svjetlost sa zvijezda. Međutim, ovo objašnjenje “ne drži vodu” jer bi se ta materija apsorpcijom fotona zagrijavala do temperature zvijezda.

Uobičajeno je s  $L$  označiti luminozitet (izračena snaga), a s  $I$  intezitet (izračena snaga po površini) nekog nebeskog tijela. Primjerice, luminozitet Sunca je  $L_{\odot} = 3.8 \cdot 10^{26}$  w, a naše galaksije  $L_{\text{gal}} = 3.6 \cdot 10^{10} L_{\odot}$ . Promotrimo sada Olbersov model svemira, homogeno ispunjen svjetlećim nebeskim tijelima koncentracije  $n$  (broj po jediničnom volumenu) i prosječnog luminoziteta  $L$ . Nadalje, postavimo promatrača u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Tada je intezitet izračen sa sferne ljuske debljine  $dr$  jednak

$$dI(r) = \frac{(4\pi r^2 dr)nL}{4\pi r^2} = nL dr$$

Realistično je za pretpostaviti da promatrač/ica opaža samo jedan dio noćnog neba, pa je dio inteziteta koji dopire do njega/nje jednak  $dI' = \beta nL dr$ , gdje je  $0 < \beta < 1$ . Odavde integracijom slijedi ukupni intezitet zračenja svih tijela u promatranom svemiru,

$$I' = \beta nL \int_0^{\infty} dr = \infty$$

Potrebno je razmotriti i ostale pretpostavke u ovom izvodu: da li se nebeska tijela međusobno zaklanjaju, da li je umnožak  $nL$  konstantan u cijelom svemiru, da li je svemir beskonačno velik i beskonačano star, te da li uistinu tok zračenja opada s kvadratom udaljenosti (vidi diskusiju u Ryden: *Introduction to Cosmology*, str. 7.–8.).

**ZAD 2.** Pretpostavite da se nalazite u ravnom (Euklidskom), beskonačno velikom, beskonačno starom svemiru u kojem je srednja gustoća zvijezda  $n_z =$

$10^9 \text{ Mpc}^{-3}$ , a prosječni radijus zvijezde jednak radijusu Sunca,  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8$  m. Koliko je prosjeku udaljena najbliža zvijezda od proizvoljno postavljenog promatrača? Kako se mijenja odgovor ako su zvijezde okupljene u galaksije prosječne veličine  $R_g = 2000 \text{ pc}$ , s gustoćom  $n_g = 1 \text{ Mpc}^{-3}$ ? Naputak: parsek (pc) je kozmološka jedinica za udaljenost koja iznosi 3.26 svjetlosnih godina.

**R.** Promotrimo cilindar duž pravca našeg gledanja. Ako je radijus njegove baze  $R_{\odot}$ , a visina jednaka prosječnoj udaljenosti najbliže zvijezde,  $\ell$ , tada se unutar tog valjka u prosjeku nalazi jedna zvijezda,

$$1 = (R_{\odot}^2 \pi \ell) n$$

Izraženo u Mpc,

$$R_{\odot} = 2.3 \cdot 10^{14} \text{ Mpc} ,$$

pa je

$$\ell = \frac{1}{R_{\odot}^2 \pi n} = 6.2 \cdot 10^{17} \text{ Mpc}$$

Ova udaljenost je mnogo veća od udaljenosti koju je svjetlost mogla prijeći u  $10^{10}$  godina (red veličine  $10^4 \text{ Mpc}$ ), što “na prste” objašnjava zašto je noćno nebo tamno.

U slučaju zvijezda okupljenih u galaksije, imamo

$$\ell = \frac{1}{R_g^2 \pi n} = 8.0 \cdot 10^4 \text{ Mpc}$$

Načelno, ovaj rezultat sugerira da bi noćno nebo sjalo prosječnim sjajem galaksije (ipak, potrebno je uzeti u obzir OTR, širenje svemira, ...).

## Poglavlje 3

# Dopplerov učinak

Za početak ćemo, radi jednostavnosti, promotriti  $(1 + 1)$ -dimenzionalan problem. Pretpostavimo da imamo mirujućeg opažača  $\mathcal{O}$  i emitera  $\mathcal{E}$  koji se *odmiče* konstantnom brzinom  $v$  duž  $x$ -osi od opažača i odašilje monokromatske elektromagnetske valove (fotone) prema njemu. Promotrimo dva uzastopna “brijega” elektromagnetskog vala (nazovimo ih  $A$  i  $B$ ) odaslana u vremenskom razmaku  $\Delta t_e = 1/\nu_e$  ( $\Delta t_e$  i  $\nu_e$  označavaju, redom, vrijeme i frekvenciju izmjerene u sustavu mirovanja emitera  $\mathcal{E}$ ). Do trenutka kada je brijeg  $B$  krenuo s  $\mathcal{E}$ , brijeg  $A$  je prešao udaljenost  $c\Delta t_e$ , a sâm  $\mathcal{E}$  udaljio se od opažača  $\mathcal{O}$  za dodatnu udaljenost  $v\Delta t_e$ . Prema tome, prostorni razmak među uzastopnim brijegovima  $A$  i  $B$  je

$$\Delta = c\Delta t_e + v\Delta t_e = (c + v)\Delta t_e$$

odakle zaključujemo da oni dolaze do  $\mathcal{O}$  u vremenskom razmaku

$$\Delta T = \frac{\Delta}{c} = (1 + \beta)\Delta t_e, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Potpuno analognim postupkom dobije se vremenski razmak u slučaju emitera koji se *približava* opažaču,

$$\Delta T = \frac{\Delta}{c} = (1 - \beta)\Delta t_e$$

Na kraju moramo uzeti u obzir relativističku dilataciju vremena: vrijeme  $\Delta t_e$  izmjereno u sustavu mirovanja emitera  $\mathcal{E}$  odgovara vremenu

$$\Delta t_o = \gamma\Delta t_e$$

izmjenom u sustavu mirovanja opažača  $\mathcal{O}$ . Koristeći sve ove formule možemo izraziti frekvenciju  $\nu_o$  koju mjeri opažač,

$$\nu_o = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \pm \beta} \nu_e = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} \nu_e \quad (3.1)$$

Konvencionalno, Dopplerov pomak izražava se pomoću veličine  $z$ ,

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 \quad (3.2)$$

Za slučaj relativističkog Dopplerovog pomaka imamo

$$z = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} - 1 \quad (3.3)$$

Podsjetnik: gornji predznak odnosi se na slučaj emitera koji se *udaljava*, a donji predznak na slučaj emitera koji se *približava* opažaču. Specijalno, ako funkciju  $z(\beta)$  razvijemo u Taylorov red,

$$z = \pm\beta + \mathcal{O}(\beta^2)$$

možemo isčitati približnu, nerelativističku formulu za Dopplerov pomak,

$$z_{\text{NR}} = \pm\beta$$

**ZAD 3.** Zračenje s nekog kvazara je usljed Dopplerovog učinka pomaknuto za  $z = 1.95$ . Kojom se brzinom kvazar udaljava od nas? Koliko je kvazar udaljen od nas?

**R.**

a) Očigledno, nerelativistički izraz nam daje besmislen rezultat  $\beta > 1$ . S druge strane, korištenjem relativističkog izraza imamo

$$\beta = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \approx 0.79$$

b) Hubbleov zakon povezuje brzine  $v$  i udaljenosti  $d$  kozmoloških objekata,

$$v = H_0 \cdot d$$

gdje je Hubbleova konstanta

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad h \approx 0.72$$

Imamo stoga

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{0.79 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{72 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \approx 3300 \text{ Mpc} \approx 10^{10} \text{ s.g.}$$



## Poglavlje 4

# Kozmološko prostorvrijeme

### 4.1 Simetrije i Killingovi vektori

Ako su komponente metrike  $g_{\mu\nu}$  u nekom koordinatnom sustavu neovisne o jednoj od koordinata, recimo  $w$ , tada pripadno vektorsko polje  $\xi^\mu = \delta^\mu_w$  zovemo **Killingovo vektorsko polje**. Za takav koordinatni sustav kažemo da je *adaptiran* na vektorsko polje  $\xi$ . Promotrimo nadalje kovarijantnu derivaciju

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = g_{\gamma\beta} \nabla_\alpha \xi^\gamma = g_{\gamma\beta} (\partial_\alpha \xi^\gamma + \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \xi^\sigma)$$

S obzirom da je koordinatni sustav adaptiran na vektorsko polje  $\xi$ , vrijedi  $\partial_\alpha \xi^\gamma = 0$ . Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} 2 \nabla_\alpha \xi_\beta &= 2 g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \xi^\sigma = g_{\gamma\beta} g^{\gamma\rho} (g_{\rho\alpha,\sigma} + g_{\rho\sigma,\alpha} - g_{\alpha\sigma,\rho}) \xi^\sigma = \\ &= \delta_\beta^\rho (g_{\rho\alpha,\sigma} + g_{\rho\sigma,\alpha} - g_{\alpha\sigma,\rho}) \xi^\sigma = (g_{\beta\alpha,\sigma} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\sigma,\beta}) \xi^\sigma = \\ &= g_{\alpha\beta,\sigma} \xi^\sigma + (g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\sigma\alpha,\beta}) \xi^\sigma = g_{\alpha\beta,\sigma} \xi^\sigma + 2 g_{\sigma[\beta,\alpha]} \xi^\sigma \end{aligned}$$

Sada simetriziramo indekse  $\alpha$  i  $\beta$  s obje strane,

$$2 \nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = g_{\alpha\beta,\sigma} \xi^\sigma = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial w} = 0$$

S obzirom da je posrijedi tenzorska jednadžba, ona ostaje valjana u svim koordinatnim sustavima i poznata je kao **Killingova jednadžba**,

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \tag{4.1}$$

Killingovi vektori generiraju koordinatne transformacije koje ne mijenjaju *formu* metrike. Takve koordinatne transformacije poznate su kao **izometrije**. Prostor dimenzije  $D$  može imati najviše  $D(D+1)/2$  Killingovih vektora i takvi prostori se onda nazivaju **maksimalno simetrični prostori** (nadalje u tekstu MSP).

Primjeri:

- Euklidska ravnina  $\mathbb{R}^2$ , s metrikom

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

ima tri linearno nezavisna Killingova vektora,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(x, -y)$ , pa je stoga primjer MSP-a. Prva dva Killingova vektora u ovom primjeru generiraju translacije (u  $x$  i  $y$  smjeru), a treći rotacije u ravnini. Općenito, svaki  $D$ -dimenzionalni Euklidski prostor  $\mathbb{R}^D$  (za  $D \geq 1$ ) je MSP jer ima  $D(D+1)/2$  Killingovih vektora (generatora translacija i rotacija).

- 4-dimenzionalni prostor Minkowskog ima  $4 + 6 = 10$  Killingovih vektora (generatori prostornovremenskih translacija i rotacija). Općenito,  $D$ -dimenzionalni Minkowski (za  $D \geq 2$ ) ima  $D(D+1)/2$  Killingovih vektora ( $D$  translacija +  $\binom{D}{2}$  rotacija/potisaka), pa je svaki od njih MSP.
- $D$ -dimenzionalna sfera  $S^D$  (za  $D \geq 1$ ) ima  $D(D+1)/2$  Killingovih vektora, pa je svaka od njih MSP.
- 4-dimenzionalno Schwarzschildovo prostorvrijeme ima 4 Killingova vektora: generator vremenske translacije  $(1, 0, 0, 0)$  i tri Killingova vektora sfere  $S^2$ .

## 4.2 Homogenost i izotropnost

Za prostorvrijeme  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  kažemo da je

- a) **homogeno** ako u svakoj točki “izgleda isto”, odnosno
- b) **izotropno** u točki  $p \in \mathcal{M}$  ako u svakom smjeru “izgleda isto”.

Preciznije, koristeći fizikalne opservable,

a) **homogeno** ako kroz svaku točku (dogadaaj) možemo provući hiperplohu *homogenosti* (takvu da su fizikalni uvjeti u svakoj od njenih točaka identični) prostornog tipa.

b) **izotropno** ako u svakoj točki *sugibajući* promatrač (onaj koji se giba s kozmološkim fluidom) ne može razlikovati prostorne smjerove pomoću lokalnog eksperimenta.

Apstraktnim, matematičkim riječnikom, za prostorvrijeme  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  kažemo da je

a) **homogeno** ako postoje infinitezimalne izometrije  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon \xi_{(i)}^\mu$  koje svaku točku  $p \in \mathcal{M}$  pomiču u bilo koju točku u njegovoj okolini. Drugim riječima, metrika dopušta postojanje Killingovih vektora koji u danoj točki  $p$  poprimaju sve moguće vrijednosti.

b) **izotropno** ako postoje infinitezimalne izometrije  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon \xi_{(i)}^\mu$  koje ostavljaju neku točku  $p \in \mathcal{M}$  fiksnom (tako da je  $\xi_{(i)}^\mu(p) = 0$ ) i za koje prve

derivacije  $\nabla_\nu \xi_{(i)}^\mu(p)$  poprimaju sve moguće vrijednosti, ograničene samo simetrijama Killingovih vektora.

Neki korisni teoremi:

- Prostor izotropan oko svake točke je nužno i homogen.
- Prostor je maksimalno simetričan ako i samo ako je homogen i izotropan oko barem jedne točke (zbog homogenosti odmah slijedi da je izotropan oko svake točke).
- Riemannov tenzor maksimalno simetričnog prostora dimenzije  $D \geq 2$  moguće je napisati u obliku

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{D(D-1)} (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})$$

- Riccijev skalar maksimalno simetričnog prostora je konstantan.

**ZAD 4.** Metriku homogene izotropne trodimenzionalne hiperplohe prostornog tipa moguće je u odgovarajućem koordinatnom sustavu zapisati u obliku

$$d\sigma^2 = a^2 \left( f^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

gdje je  $a$  neka neisčezavajuća konstanta. Pokažite da  $f^2(r)$  oblika  $(1 - kr^2)^{-1}$  gdje je  $k = \pm 1$  ili 0.

**R.**

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{f_{,r}}{f}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{f^2}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2} \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \text{ctg } \theta \\ {}^{(3)}R_{rr} &= \frac{2f_{,r}}{rf}, & {}^{(3)}R_{\theta\theta} &= \frac{{}^{(3)}R_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{f^2} + \frac{rf_{,r}}{f^3} \\ {}^{(3)}R &= \frac{2f_{,r}}{ra^2 f^3} + \frac{2}{a^2 r^2} \left( 1 - \frac{1}{f^2} + \frac{rf_{,r}}{f^3} \right) \end{aligned}$$

Sada koristimo činjenicu da je za maksimalno simetrične prostore  $R$  konstantan,

$$\begin{aligned} \frac{2f_{,r}}{ra^2 f^3} + \frac{2}{a^2 r^2} \left( 1 - \frac{1}{f^2} + \frac{rf_{,r}}{f^3} \right) &= \text{konst.} \equiv A \\ \frac{2rf_{,r}}{f^3} + 1 - \frac{1}{f^2} &= \frac{a^2 A}{2} r^2 \\ \partial_r \left( r \left( 1 - \frac{1}{f^2} \right) \right) &= \frac{a^2 A}{2} r^2 \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da zbog regularnosti metrike u ishodištu ( $r = 0$ ) imamo  $f(0) \neq 0$ , integriranjem dobivamo

$$r \left( 1 - \frac{1}{f^2} \right) = Br^3 + C$$

Uvrštavanjem  $r = 0$  dobivamo  $C = 0$ , pa je

$$1 - \frac{1}{f^2} = Br^2, \quad f^2(r) = \frac{1}{1 - Br^2}$$

Ako je  $B = 0$ , tvrdnja je dokazana; pretpostavimo stoga da je  $B \neq 0$ . Uvedemo li  $k \equiv \text{sgn}(B)$ , možemo napraviti reskaliranje

$$\tilde{r} = \sqrt{kB} r, \quad \tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{kB}}$$

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= kB \tilde{a}^2 \left( \frac{1}{1 - k\tilde{r}^2} \frac{d\tilde{r}^2}{kB} + \frac{\tilde{r}^2}{kB} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) = \\ &= \tilde{a}^2 \left( \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \end{aligned}$$

Drugim riječima, relevantan je samo predznak konstante  $B$ . Na kraju, valja uočiti kako je  $k$  ujedno predznak Riccijevog skalara  ${}^{(3)}R$  (zakrivljenosti) dotične hiperplohe.

### 4.3 Robertson-Walkerova metrika

Opažanja nam sugeriraju da je svemir na najvećim (kozмолоškim) skalama homogen i izotropan, pa ga možemo opisati prostorvremenom topologije  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , gdje  $\mathbb{R}$  predstavlja vremenski smjer, a  $\Sigma$  maksimalno simetričan trodimenzionalan potprostor. Metrika ovog prostora dana je stoga s

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2$$

odnosno, koristeći prethodan rezultat,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (4.2)$$

Ovo je tzv. **Robertson-Walkerova metrika** (RW metrika)<sup>1</sup>, izvedena samo na osnovi simetrija (Einsteinova jednadžba će nam dati ponašanje funkcije  $a(t)$ ). Koordinate hiperplohe  $\Sigma$ ,  $\{r, \theta, \phi\}$ , poznate su kao *sugibajuće koordinate* (engleski, *comoving coordinates*). Za opažača koji se giba na putanji s konstantnim sugibajućim koordinatama kažemo da je *sugibajući promatrač*. Samo sugibajući promatrači vide svemir izotropnim. Očito, zbog dipolne anizotropije u

<sup>1</sup>Ponekad se ova metrika oslovljava i složenijim imenom kao Friedmann-Lemaître-Robertson-Walkerova metrika (FLRW metrika)

pozadinskom mikrovalnim zračenju Zemlja *nije* sugibajući opažač. Robertson-Walkerovu metriku ponekad zapisujemo i u drugom koordinatnom sustavu,

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad r = S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi), & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \text{sh}(\chi), & k = -1 \end{cases}$$

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

**Napomena:** u dijelu literature koristi se konvencija  $a(t_0) = 1$ . U ovom slučaju je faktor skale  $a(t)$  bezdimenzionalan, a koordinata  $r$  ima dimenziju duljine, te stoga konstanta  $k$  u RW metrici stoga ima dimenziju  $L^{-2}$  i ne poprima isključivo vrijednosti iz skupa  $\{0, \pm 1\}$ .

Ovisno o tipu hiperplohe  $\Sigma$ , govorimo o **zatvorenom** (pozitivno zakrivljenom), **ravnom** ili **otvorenom** (negativno zakrivljenom) slučaju,

$$k = \begin{cases} +1 & \text{zatvoren} \\ 0 & \text{ravan} \\ -1 & \text{otvoren} \end{cases}$$

Međutim, valja biti oprezan oko značenja ovih riječi s obzirom da, primjerice, u matematici pojam *zatvorene mnogostrukosti* označava kompaktnu mnogostrukost bez ruba. Pretpostavimo li da svemir nema ruba gore navedene *lokalne* geometrije mogu imati različitu *globalnu strukturu*: pozitivno zakrivljena hiperploha ima nužno kompaktnu topologiju, dok ravna i negativno zakrivljena hiperploha može i ne mora imati kompaktnu topologiju. Na primjer,

kompaktna	$k = -1$	$k = 0$	$k = +1$
<b>da</b>	Seifert-Weber	$S^1 \times S^1 \times S^1$	$S^3, \mathbb{R}P^3$
<b>ne</b>	$H^3$	$\mathbb{R}^3$	

## Poglavlje 5

# Tenzor energije i impulsa

Mi ćemo materiju i energiju u svemiru opisati pomoću idealni fluid (kolokvijalno, “kozmički fluid”). Klasično, idealni fluid izgleda izotropno u sustavu mirovanja elementa fluida. Operativno nam je važno da je idealni fluid u potpunosti opisan tlakom i gustoćom. Tenzor energije i impulsa idealnog fluida ima oblik (vidi npr. Carroll, str. 333.)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

gdje su  $\rho$  i  $p$  gustoća i tlak fluida (kako je riječ o homogenom svemiru, ovo su funkcije samo vremenske koordinate  $t$ ), a  $u^\mu$  4-vektor brzine opažača koji fluid vidi izotropnim. Napomena: član  $p g_{\mu\nu}$  ima suprotan predznak u slučaju “čestičarske” signature  $(+, -, -, -)$ .

**Jednadžba stanja** je jednadžba koja povezuje  $\rho$  i  $p$ . Pokazat ćemo da je ta veza linearna u slučaju nerelativističke materije (prašine), elektromagnetskog polja i doprinosa kozmološke konstante (“tamne energije”),

$$p = w\rho \quad (5.2)$$

Promotrimo čemu je jednaka konstanta  $w$  u spomenutim slučajevima,

- **Nerelativistička materija** ( $E_{\text{kin}} \ll E_0$ ):  $p = 0$  povlači  $w_{\text{NR}} = 0$
- **Elektromagnetsko polje** (ujedno i UR materija,  $E_{\text{kin}} \gg E_0$ )

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$
$$g_{\mu\nu} T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\sigma} F_{\mu\sigma} - \frac{1}{4} \cdot 4 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0$$

S druge strane, trag tenzora energije i impulsa idealnog fluida jednak je

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -(\rho + p) + 4p = 3p - \rho$$

Odakle zaključujemo da za EM polje vrijedi

$$p = \frac{1}{3} \rho, \quad w_{\text{EM}} = \frac{1}{3}$$

Ista jednadžba stanja opisuje i ultrarelativističku materiju (utoliko što se masivne čestice ultrarelativističkih brzina *kinematički* ne razlikuju od fotona).

- **Kozmološka konstanta.** Einsteinovu jednadžbu možemo napisati u obliku u kojem je kozmološki član na desnoj strani,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Stoga,

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

Promotrimo pripadni tenzor energije i impulsa idealnog fluida,

$$(\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + p g^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

$$(\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} = -g^{\mu\nu} \left( p + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right)$$

Kontrahiramo li obje strane s  $g_{\mu\nu}$  dobivamo

$$-(\rho + p) = -4 \left( p + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right)$$

Kontrahiramo li obje strane s  $u_{\mu}u_{\nu}$  imamo sustav,

$$\rho + p = p + \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G} = -p, \quad w_{\Lambda} = -1$$

Napomena: u nekim kozmološkim modelima se promatraju i složeniji oblici jednadžbi stanja; najpoznatiji primjer je tzv. Čapljiginov plin (engleski, Chaplygin gas) kod kojeg je jednadžba stanja dana s  $\rho = -A\rho^{-\alpha}$  za neke konstante  $A > 0$  i  $0 < \alpha \leq 1$ .

**ZAD 5.** Koristeći kovarijantan zakon sačuvanja energije i impulsa,  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ , i linearnu jednadžbu stanja  $p = w\rho$ , pronađite kako se gustoća energije  $\rho$  mijenja sa skalom  $a$ . Nadalje, pokažite da vrijedi analogon prvog zakona termodinamike,

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3 \quad (5.3)$$

**R.**

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} = 0$$

Promotrit ćemo  $\nu = t$  komponentu jednadžbe,

$$\partial_{\mu} T^{\mu t} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} T^{\sigma t} + \Gamma_{\mu\rho}^t T^{\mu\rho} = 0$$

Nadalje sve promatramo u sustavu mirovanja elementa fluida u kojem je tenzor  $T^{\mu\nu}$  dijagonalan,

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, pg^{rr}, pg^{\theta\theta}, pg^{\phi\phi}) = \text{diag}\left(\rho, \frac{p(1-kr^2)}{a^2}, \frac{p}{r^2 a^2}, \frac{p}{r^2 a^2 \sin^2 \theta}\right)$$

pa vrijedi

$$\partial_{\mu} T^{\mu t} = \partial_t T^{tt} = \dot{\rho}, \quad \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} T^{\sigma t} = \Gamma_{\mu t}^{\mu} T^{tt} = 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho$$

Za treći član koristimo sljedeće komponente Christoffelovog simbola,

$$\Gamma_{tt}^t = 0, \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{\mu\rho}^t T^{\mu\rho} = 3 \frac{\dot{a}}{a} p$$

Sve skupa imamo

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} p = 0 \quad (5.4)$$

Uvrstimo li u ovu jednadžbu linearnu jednadžbu stanja  $p = w\rho$ , dobivamo

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (1+w)$$

odakle integriranjem slijedi

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} \quad (5.5)$$

S druge strane, pomnožimo li (5.4) s  $a^3$ , imamo

$$\dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} = -3p a^2 \dot{a}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3$$



## Poglavlje 6

# Friedmannove jednadžbe

Prvo ćemo Einsteinovu jednadžbu napisati u drugačijem obliku. Polazimo od zapisa,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

gdje se podrazumjeva da su svi doprinosi tenzoru energije i impulsa, uljučujući onaj kozmološke konstante, na desnoj strani jednakosti. Kontrahiranjem s  $g^{\mu\nu}$  dobivamo “trag” jednadžbe,

$$R - 2R = 8\pi G T, \quad \text{odnosno} \quad R = -8\pi G T$$

gdje je  $T \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ . Uvrštavanjem natrag u početnu jednadžbu dobivamo

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (6.1)$$

Konkretno, za tenzor energije i impulsa idealnog fluida jednadžba poprima oblik

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( (\rho + p) u_\mu u_\nu + \frac{1}{2} (\rho - p) g_{\mu\nu} \right) \quad (6.2)$$

U sustavu mirovanja elementa fluida imamo

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = (-1, 0, 0, 0)$$

$tt$  komponenta

$$\begin{aligned} -3 \frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G \frac{\rho + 3p}{2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$rr$ ,  $\theta\theta$  i  $\phi\phi$  komponente jednadžbe su ekvivalentne; konkretno, za  $rr$  imamo

$$(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)(1 - kr^2)^{-1} = 8\pi G g_{rr} \frac{\rho - p}{2} = 4\pi G a^2 (1 - kr^2)^{-1} (\rho - p)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} = 4\pi G (\rho - p)$$

Korištenjem  $tt$  jednadžbe kako bi smo eliminirali  $\ddot{a}$  član dobivamo

$$-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p)$$

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G\frac{4\rho}{3}$$

Odnosno,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (6.4)$$

Jednadžbe (6.3) i (6.4) poznate su kao **Friedmannove jednadžbe**.

**ZAD 6.** Razmotrite ponašanje skale  $a(t)$  u vremenu za ravan svemir ( $k = 0$ ) ispunjen nerelativističkom materijom ili elektromagnetskim zračenjem.

**R.** Ranije smo izveli ovisnost

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}$$

Friedmannove jednadžbe nam daju (do na konstantne faktore)

$$\ddot{a} \sim a^{-2-3w}, \quad \dot{a}^2 \sim a^{-1-3w}$$

Upotrebom ansatza  $a(t) = t^n$  imamo

$$n - 2 = (-2 - 3w)n, \quad 2(n - 1) = (-1 - 3w)n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2}{3(1 + w)}$$

Konkretno, za nerelativističku materiju  $w = 0$  imamo  $n = 2/3$ , za elektromagnetsko zračenje  $w = 1/3$  imamo  $n = 1/2$ .

**ZAD 7.** Razmotrite vakuumska rješenja Friedmannovih jednadžbi s kozmološkom konstantom  $\Lambda$ .

**R.** Za kozmološki član vrijedi

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = -p_\Lambda, \quad \rho_\Lambda + 3p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{4\pi G}$$

pa Friedmannove jednadžbe poprimaju oblik

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3}a, \quad \dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3}a^2 - k$$

Pretpostavimo za početak da je  $\Lambda > 0$ . Opće rješenje prve diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$a(t) = Ae^{Ht} + Be^{-Ht}, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

Uvrštavanjem u drugu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$H^2(Ae^{Ht} - Be^{-Ht})^2 = H^2(Ae^{Ht} + Be^{-Ht})^2 - k$$

odnosno

$$AB = \frac{k}{4H^2} = \frac{3k}{4\Lambda}$$

Ako pretpostavimo da smo u početnom trenutku imali  $\dot{a} > 0$ , tada slijedi  $A - B > 0$ , odnosno  $A > B$ . Imamo nekoliko posebnih slučajeva,

a)  $k = 0$  :  $AB = 0$ , pa je  $B = 0$ , a  $A > 0$ ; imamo eksponencijalno rješenje

$$a(t) = Ae^{Ht}$$

b)  $k = \pm 1$ ,  $B = \pm 1/(4AH^2)$

$$a(t) = Ae^{Ht} \pm \frac{1}{4AH^2} e^{-Ht}$$

U svakom slučaju, u kasnijem periodu razvoja ovakvog svemira dominira eksponencijalno širenje.

Razmotrimo sada slučaj negativne kozmološke konstante,  $\Lambda < 0$ . Rješenje prve diferencijalne jednadžbe je sada oblika

$$a(t) = A \sin(Ht) + B \cos(Ht), \quad H = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}$$

Uvrštavanjem u drugu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$H^2(A \sin(Ht) - B \cos(Ht))^2 = -H^2(A \sin(Ht) + B \cos(Ht))^2 - k$$

odnosno

$$A^2 + B^2 = -\frac{k}{H^2}$$

Opet imamo nekoliko slučajeva,

a)  $k = 0$  :  $A = B = 0$ , trivijalno rješenje

b)  $k = +1$  : ne postoji konzistentno rješenje

c)  $k = -1$  :  $B^2 = H^{-2} - A^2$ ; oscilatorno rješenje

**ZAD 8.** Pokažite da u de Sitterovom svemiru ( $\rho_m = 0 = \rho_r$ ,  $\Lambda > 0$ ,  $k = 0$ ) postoje područja koja ne mogu međusobno kauzalno komunicirati (drugim riječima, u ovakvom svemiru postoji *kozмолоški horizont*).

**R.** Korištenjem rezultata iz prethodnog zadatka znamo da je rješenje Friedmannovih jednadžbi za ovaj kozmološki model dano s eksponencijalnom funkcijom,

$$a(t) = a_0 e^{Ht}, \quad a_0 \equiv a(t_0)$$

Dakle, imamo metriku

$$ds^2 = -dt^2 + a_0^2 e^{2Ht} (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

Promotrimo sada fotone koji se gibaju radijalno iz ishodišta koordinatnog sustava,

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a_0^2 e^{2Ht} dr^2, \quad a_0 dr = \pm e^{-Ht} dt$$

Biramo predznak + jer se fotoni gibaju radijalno prema vani, pa integracijom imamo

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^R dr &= \int_0^T e^{-Ht} dt \\ a_0 R &= \frac{1 - e^{-HT}}{H} \end{aligned}$$

Zanima nas koliku radijalnu udaljenost proputuju fotoni u beskonačno mnogo vremena,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a_0 R = \frac{1}{H} < \infty$$

Prema tome, postoje dijelovi de Sitterovog svemira između kojih fotoni ne mogu doputovati, čak niti u beskonačnom vremenu ...

**ZAD 9.** Albert Einstein je pokušao dati model statičnog svemira uravnoteženjem privlačnog djelovanja materije sa suprotnim djelovanjem kozmološke konstante. Pretpostavljajući da je zadana *konstantna* gustoća (energije) materije u svemiru,  $\rho_m > 0$ , pronađite odgovarajuću vrijednost kozmološke konstante  $\Lambda$  s kojom je dotični svemir statičan. Nadalje, razmotrite da li je takvo rješenje stabilno?

**R.** Imamo

$$\rho = \rho_M + \rho_\Lambda, \quad p = p_\Lambda = -\rho_\Lambda$$

Statičnost znači da je svemir nepromjenjiv u vremenu,

$$\dot{a} = 0 = \ddot{a}$$

Uvrštavanjem ovog uvjeta u Friedmannove jednadžbe dobivamo sustav

$$\frac{4\pi G}{3} (\rho_M - 2\rho_\Lambda) = 0$$

$$\frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} = 0$$

Iz prve jednadžbe isčitavamo

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{\rho_M}{2}, \quad \Lambda = 4\pi G \rho_M$$

što uvrštavanjem u drugu jednadžbu daje

$$a_0^2 = \frac{k}{4\pi G \rho_M} = \frac{k}{\Lambda}$$

Kako je  $\rho_M > 0$ , zaključujemo da je  $\Lambda > 0$ , a onda i  $k > 0$ , dakle  $k = +1$ ,

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

Stabilnost:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & \rho_M &= 2\rho_\Lambda + \delta\rho_M \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho_M - 2\rho_\Lambda)a \\ \delta\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\delta\rho_M(a_0 + \delta a) = -\frac{4\pi G}{3}a_0\delta\rho_M + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

Za gustoću materije vrijedi  $\rho_M a^3 = \text{konst.}$ , pa je

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} &= -3\frac{\delta a}{a} \\ \delta\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(-3\rho_M\delta a) = \Lambda\delta a + \mathcal{O}(\delta^2) \\ \delta a(0) &= \varepsilon, & \delta\dot{a}(0) &= 0 \\ \delta a(t) &= Ae^{+\sqrt{\Lambda}t} + Be^{-\sqrt{\Lambda}t} \\ A + B &= \varepsilon, & A - B &= 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta a(t) &= \varepsilon \operatorname{ch}(\sqrt{\Lambda}t) \end{aligned}$$

Dakle, apsolutna vrijednost vrijednost perturbacije eksponencijalno divergira u vremenu — rješenje je nestabilno!

## Poglavlje 7

# Mjerenje prostornih i vremenskih udaljenosti u kozmologiji

### 7.1 Prije koliko vremena?

Na početku uvodimo niz konvencionalnih kozmoloških parametara. Kod svih parametara indeks “0” označava vrijednost tog parametra u sadašnjem trenutku (trenutnoj “epohi”)  $t_0$ .

**Hubbleov parametar,**

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (7.1)$$

**Hubbleova konstanta,**  $H_0 = H(t_0)$ . Drugu Friedmannovu jednadžbu (6.4) sada možemo napisati u obliku

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

Izvrjednimo li ovu jednadžbu u sadašnjem trenutku ( $t_0$ ) i podijelimo obje strane s  $H_0^2$ , imamo

$$1 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$

Nadalje, uvodimo **kritičnu gustoću**  $\rho_c$  i **parametar gustoće**  $\Omega$ ,

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad \Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (7.2)$$

Odmah uočavamo da postoje sljedeći slučajevi,

$$\frac{\rho > \rho_c \quad \Omega > 1 \quad k = +1}{\rho = \rho_c \quad \Omega = 1 \quad k = 0}$$

$$\frac{\rho < \rho_c \quad \Omega < 1 \quad k = -1}{\rho < \rho_c \quad \Omega < 1 \quad k = -1}$$

Sada rastavljamo parametar gustoće  $\Omega$  na doprinose,

$$\Omega = \frac{(\rho_\gamma)_0 + (\rho_M)_0 + (\rho_\Lambda)_0}{\rho_c} = \Omega_\gamma + \Omega_M + \Omega_\Lambda$$

$$\Omega_\gamma = \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_\gamma)_0, \quad \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_M)_0, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

Uvrštavanjem u drugu Friedmannovu jednadžbu (6.4) dobivamo

$$H^2 = H_0^2 \left( \frac{\rho_\gamma}{(\rho_\gamma)_0} \Omega_\gamma + \frac{\rho_M}{(\rho_M)_0} \Omega_M + \Omega_\Lambda + \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \Omega_K \right), \quad \Omega_K \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$

Važno je uočiti kako iz ove jednadžbe odmah slijedi (izvrijednjavanjem u  $t_0$ )

$$\Omega_\gamma + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (7.3)$$

U daljnjem raspisivanju ćemo koristiti relaciju

$$\frac{a_0}{a(t_e)} = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \quad (7.4)$$

Jedan način da se uvjerimo u njenu valjanost jest promatranjem promatranjem fotona koji radialno putuju prema opažaču u ishodištu koordinatnog sustava,

$$0 = ds^2 = -dt^2 + \frac{a(t)^2 dr^2}{1 - kr^2}, \quad \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Desna strana jednakosti je konstantna ako su izvor i opažatelj na konstantnim sugibajućim koordinatama, pa vrijedi

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

za dva fotona odaslana u vremenskom intervalu  $\delta t_e$  i opažena u vremenskom intervalu  $\delta t_0$ . Odavde slijedi

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

a ako je unutar promatranih vremenskih intervala skala  $a(t)$  približno konstantna funkcija, tada imamo

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a(t_e)}$$

odakle slijedi tražena tvrdnja<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>matematički precizniji izvod može se pronaći u Wald: *General Relativity*, str. 102.–104.

Koristeći ovu relaciju imamo nadalje

$$\frac{\rho_\gamma(t_e)}{(\rho_\gamma)_0} = \left(\frac{a(t_e)}{a_0}\right)^{-4} = (1+z)^4, \quad \frac{\rho_M(t_e)}{(\rho_M)_0} = \left(\frac{a(t_e)}{a_0}\right)^{-3} = (1+z)^3$$

pa je

$$H^2 = H_0^2 \left( (1+z)^4 \Omega_\gamma + (1+z)^3 \Omega_M + (1+z)^2 \Omega_K + \Omega_\Lambda \right) \quad (7.5)$$

Sada želimo odgovoriti na pitanje: koliko je vremena prošlo između događaja s crvenim pomakom  $z$  i sadašnje epohe  $t_0$ ?

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} \ln(a/a_0) = \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1+z} = -\frac{\dot{z}}{1+z}$$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H}$$

Promotrimo izraz pod korijenom u Hubbleovom parametru,

$$\begin{aligned} & (1+z)^4 \Omega_\gamma + (1+z)^3 \Omega_M + (1+z)^2 \Omega_K + \Omega_\Lambda = \\ & = (1+z)^4 \Omega_\gamma + (1+z)^3 \Omega_M + (1+z)^2 (1 - \Omega_\gamma - \Omega_M - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda = \\ & = (1+z)^2 ((1+z)^2 - 1) \Omega_\gamma + (1+z)^2 ((1+z) - 1) \Omega_M + (1+z)^2 + (1 - (1+z)^2) \Omega_\Lambda = \\ & = z(z+2)(1+z)^2 \Omega_\gamma + z(1+z)^2 \Omega_M + (1+z)^2 - z(z+2) \Omega_\Lambda \equiv f(z) \end{aligned}$$

Dakle,

$$t_0 - t_e = \frac{1}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{f(z)}} \quad (7.6)$$

**ZAD 10.** Izračunajte starost svemira pretpostavljajući da je opisan Einstein-de Sitterovim modelom ( $\Omega_M = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0 = \Omega_\gamma$ ,  $k = 0$ ).

**R.**

$$\tau = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(1+z)^3}} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty (1+z)^{-5/2} dz = \frac{2}{3H_0}$$

Korištenjem izmjerene vrijednosti  $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , dobivamo

$$\tau \approx 9 \cdot 10^9 \text{ god.}$$

**ZAD 11.** Pronađite kako se mijenja crveni pomak  $z$  nekog događaja iz *perspektive opažača* u ravnom svemiru ispunjenom samo jednom vrstom energije.

**R.** Crveni pomak  $z$  promatramo kao funkciju vremena opažanja ...

$$z(t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt_0} &= \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_e)} - \frac{a(t_0)\dot{a}(t_e)}{a(t_e)^2} \frac{dt_e}{dt_0} = \frac{a(t_0)H_0}{a(t_e)} - \frac{a(t_0)H(t_e)}{a(t_e)} \frac{dt_e}{dt_0} = \\ &= H_0(1+z) - H(t_e) \end{aligned}$$



Iz druge Friedmannove jednačbe slijedi

$$\frac{H(t_e)^2}{H_0^2} = \frac{\rho(t_e)}{\rho_0} = \left( \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \right)^{-3(1+w)} = (1+z)^{3(1+w)}$$

Dakle,

$$\frac{dz}{dt_0} = H_0(1+z) - H_0(1+z)^{3(1+w)/2}$$

Valja uočiti kako za  $w < -1/3$  mjereni crveni pomak raste, a za  $w > -1/3$  pada u vremenu.

## 7.2 Koliko daleko?

Definicija prostorne, *fizikalno mjerljive* udaljenosti među objektima u svemiru koji se širi donekle je problematično. Primjerice, ako stavimo  $t = t_0$  u RW metrik, te mjerimo radijalnu udaljenost između opažača u ishodištu i nekog opaženog objekta imamo

$$d = \int ds = a_0 \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Problem je, međutim, što je bi *načelno* mjerenje ove udaljenosti trebalo zamrznuti svemir u trenutnoj veličini ili, alternativno, izvršiti mjerenje beskonačno brzo. Iz praktičnih razloga definiramo **luminozitetnu udaljenost** (*luminosity distance*),

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi\Phi}} \quad (7.7)$$

gdje je  $L$  luminozitet promatranog izvora (energija izračena u jedinici vremena), a  $\Phi$  opaženi tok fotona (izračena energija po jedinici površine u jedinici vremena). Nadalje, omjer  $L/\Phi$  jednak je površini sfere sa središtem u izvoru, na kojoj se nalazi opažač. U ravnom svemiru ( $k = 0$ ) vrijedi  $A = 4\pi d^2 = 4\pi(a_0 r)^2$ . U ostalim slučajevima ova relacija je složenija (za  $k = +1$  vrijedi  $A < 4\pi(a_0 r)^2$ , a za  $k = -1$  vrijedi  $A > 4\pi(a_0 r)^2$ ). Konkretno, tok fotona  $\Phi$  bit će "korigiran" s 2 faktora  $(1+z)$ : jedan dolazi od kozmološkog crvenog pomaka, a drugi dolazi od toga što u širećem svemiru fotoni rijede udaraju u promatranu sferu (fotoni odaslani u vremenskom intervalu  $\Delta t$  dolaze na sferu u vremenskom razmaku  $(1+z)\Delta t$ )

$$\frac{\Phi}{L} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}, \quad d_L = a_0 r (1+z)$$

Promatramo jednačbu

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = S_k^{-1}(r) = r + \mathcal{O}(r^2)$$

Zanima nas razvoj integrala s lijeve strane ...

$$a(t) = a_0 + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) =$$

$$= a_0 \left( 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \right)$$

gdje smo uveli **parametar deceleracije**  $q_0$ ,

$$q_0 \equiv -\frac{a_0 \ddot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0 H_0^2}$$

Nas zanima recipročna vrijednost,  $1/a(t_1)$ , i u tu svrhu ćemo iskoristiti Taylorov razvoj

$$(1 + \alpha x + \beta x^2)^{-1} = 1 - \alpha x + (\alpha^2 - \beta)x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Kod nas su

$$\alpha = H_0, \quad \beta = -\frac{1}{2} q_0 H_0^2$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t)} &= \frac{1}{a_0} \left( 1 - H_0(t - t_0) + \left( H_0^2 + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \right) (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \right) = \\ &= \frac{1}{a_0} \left( 1 - H_0(t - t_0) + H_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2} q_0 \right) (t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \right) \end{aligned}$$

Korištenjem supstitucije  $u = t - t_0$  imamo

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \frac{1}{a_0} \int_{t_1-t_0}^0 \left( 1 - H_0 u + H_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2} q_0 \right) u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right) du = \\ &= \frac{1}{a_0} \left( u - H_0 \frac{u^2}{2} + H_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2} q_0 \right) \frac{u^3}{3} + \mathcal{O}(u^4) \right) \Big|_{t_1-t_0}^0 = \\ &= \frac{1}{a_0} \left( (t_0 - t_1) + \frac{H_0}{2} (t_0 - t_1)^2 + \frac{H_0^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} q_0 \right) (t_0 - t_1)^3 + \mathcal{O}((t_0 - t_1)^4) \right) \end{aligned}$$

Konačno, želimo  $(t_0 - t_1)$  zamjeniti s crvenim pomakom  $z$ . U tu svrhu ćemo iskoristiti relaciju

$$z = \frac{a_0}{a(t_1)} - 1 = H_0(t_0 - t_1) + H_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2} q_0 \right) (t_0 - t_1)^2 + \mathcal{O}((t_0 - t_1)^3)$$

koju je potrebno invertirati. Općenito, ako imamo razvoj

$$z = \alpha x + \beta x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

tada tražimo invertirani razvoj

$$x = az + bz^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad x^2 = a^2 z^2 + 2abz^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$z = \alpha az + (\alpha b + \beta a^2) z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

odakle usporedbom slijedi

$$\alpha a = 1, \quad \alpha b + \beta a^2 = 0$$

odnosno

$$a = \frac{1}{\alpha}, \quad b = -\frac{\beta}{\alpha^3}$$

Konkretno, u našem slučaju imamo

$$\alpha = H_0, \quad \beta = H_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right)$$

pa je

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0} \left( z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right)$$

To znači da imamo

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{a_0} \left( \frac{1}{H_0} \left( z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) + \frac{H_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2} + \mathcal{O}(z^3) \right) = \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \left( z - \frac{1+q_0}{2} z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} d_L = a_0 r (1+z) &= \frac{1}{H_0} (1+z) \left( z - \frac{1}{2} (1+q_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) = \\ &= \frac{1}{H_0} \left( z - \frac{1}{2} (1+q_0) z^2 + z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) = \\ &= \frac{1}{H_0} \left( z + \frac{1}{2} (1-q_0) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

### 7.3 Problem horizonta

Promotrimo fotone koji se gibaju radijalno,

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2}{1-kr^2}$$

$$\int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{\pm dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Ako tražimo fizikalnu udaljenost koju su fotoni prešli u vremenu između  $t_1$  i  $t_2$ , izmjerenu u sadašnjem trenutku  $t_0$ ,

$$d = a(t_2) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\pm dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t_0) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}$$

Razlikujemo dvije vrste horizonata,

**čestični horizont:** maksimalna udaljenost do koje su mogle doći čestice (fotoni) od “najranijeg” trenutka do sadašnjeg trenutka  $t_0$ ,

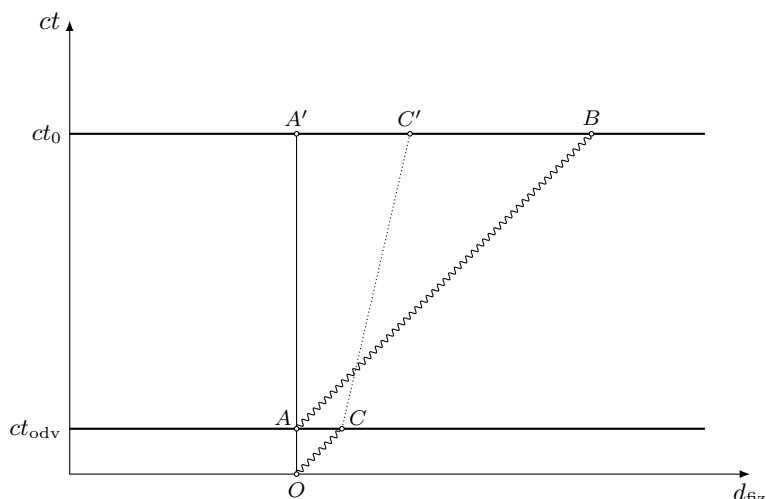
$$d_{\text{cest}} = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (7.10)$$

**horizont događaja:** maksimalna udaljenost u svemiru do koje čestice (fotoni) načelno mogu doći (od trenutka  $t_0$  do  $t_{\text{max}}$ , koje je beskonačno ako svemir nema trenutak Velikog sažimanja)

$$d_{\text{hor}} = a(t_0) \int_{t_0}^{t_{\text{max}}} \frac{dt}{a(t)} \quad (7.11)$$

S točkama (događajima) unutar ove udaljenosti načelno možemo komunicirati.

**ZAD 12.** Izračunajte veličinu kauzalnih domena u pozadinskom mikrovalnom zračenju, pretpostavljajući jednostavan model evolucije svemira, koji se sastoji od ere dominacije zračenja i ere dominacije materije.



Na dijagramu iznad prikazane su svjetske linije relevantnih čestica u problemu:  $t_{\text{odv}}$  je vrijeme odvezivanja fotona od materije (rekombinacija),  $t_0$  trenutno vrijeme, a  $x$ -os predstavlja početno vrijeme (Veliki prasak). U periodu do  $t_{\text{odv}}$  imamo eru dominacije zračenja, a od  $t_{\text{odv}}$  do  $t_0$  eru dominacije materije. Linija  $OAA'$  predstavlja svjetsku liniju opažača/ice. Fotoni (valovite linije) su do vremena  $t_{\text{odv}}$  stigli prevaliti udaljenost  $|AC|$  i ona predstavlja veličinu čestičnog horizonta u trenutku  $t_{\text{odv}}$ . Zbog širenja svemira, ta udaljenost je u današnjem trenutku  $t_0$  narasla na  $|A'C'|$  (veličina kauzalno povezanih domena koje danas vidimo u pozadinskom mikrovalnom zračenju). S druge strane, od trenutka odvezivanja  $t_{\text{odv}}$ , kada su fotoni počeli slobodno putovati prostorvremenom, oni su do današnjeg trenutka  $t_0$  stigli prevaliti udaljenost  $|A'B| > |A'C'|$ .

Mi načelno znamo temperaturu termalne kupke u vremenu odvezivanja fotona ( $T_{\text{odv}}$ ), kao i temperaturu fotona u današnjem pozadinskom zračenju ( $T_0$ ),

$$T_{\text{odv}} = 3000 \text{ K} , \quad T_0 = 2.73 \text{ K}$$

Koristeći činjenicu da temperatura opada obrnuto proporcionalno s faktorom skale  $a(t)$  (vidi naredno poglavlje), te ono što znamo o eri dominacije materije,

$$\frac{T_0}{T_{\text{odv}}} = \frac{a(t_{\text{odv}})}{a_0} = \left( \frac{t_{\text{odv}}}{t_0} \right)^{2/3}$$

slijedi

$$t_{\text{odv}} = t_0 \left( \frac{2.73}{3000} \right)^{2/3} = \frac{2}{3H_0} \left( \frac{2.73}{3000} \right)^{2/3} \approx 183000 h^{-1} \text{ god.}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} d_1 &= a_0 \int_{t_{\text{odv}}}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_{\text{odv}}}^{t_0} \left( \frac{t_0}{t} \right)^{2/3} c dt = c t_0^{2/3} 3t^{1/3} \Big|_{t_{\text{odv}}}^{t_0} = \\ &= 3t_0 c \left( 1 - \left( \frac{t_{\text{odv}}}{t_0} \right)^{1/3} \right) \approx 3t_0 c = \frac{2c}{H_0} = 6 \cdot 10^3 h^{-1} \text{ Mpc} \end{aligned}$$

U razdoblju do  $t_{\text{odv}}$  imamo eru dominacije zračenja,

$$d_2 = \int_0^{t_{\text{odv}}} \left( \frac{t_{\text{odv}}}{t} \right)^{1/2} c dt = c t_{\text{odv}}^{1/2} 2t^{1/2} \Big|_0^{t_{\text{odv}}} = 2t_{\text{odv}} c \approx 0.112 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Ov udaljenost je do današnjeg trenutka narasla na

$$d'_2 = \frac{a_0}{a(t_{\text{odv}})} d_2 = \frac{3000}{2.73} d_2 \approx 1098 d_2 = 123 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Odavde možemo zaključiti kolika je kutna veličina kauzalno povezanih domena u pozadinskom mirkovalnom zračenju,

$$\theta = \frac{d'_2}{d_1} \approx 0.021 \text{ rad} \approx 1.2^\circ$$

Ovaj rezultat je u koliziji s opaženom približnom izotropijom svemira na velikim (kozмолоškim) skalama. Naime, u ovako pojednostavljenom modelu, dijelovi svemira u disjunktним domenama se ne bi stigli termalizirati do vremena trenutne epohe. Jedno rješenje je uvođenje ranije epohe ubrzanog širenja, tzv. *inflacije* ...

## Poglavlje 8

# Termodinamika ranog svemira

### 8.1 Efektivni broj stupnjeva slobode

Razmotrit ćemo posljedice modela vrućeg Velikog praska, opisanog RW metrikom. Neka je  $\Gamma$  broj interakcija u jedinici vremena po čestici, konkretno

$$\Gamma = n\sigma v \quad (8.1)$$

gdje je  $v$  prosječna (“tipična”) relativna brzina među česticama,  $\sigma$  udarni presjek (za danu interakciju u modelu), a  $n$  koncentracija čestica (broj čestica po jediničnom volumenu). Kažemo da je uspostavljena *termodinamička ravnoteža* ako vrijedi

$$\Gamma \gg H \quad (8.2)$$

odnosno, ako se “interakcije događaju brže od širenja svemira” (ovu frazu, naravno, treba uzeti *cum grano salis*). Tijekom evolucije svemira okolnosti će se mijenjati, pa će neke vrste čestica izaći iz termodinamičke ravnoteže s ostalim česticama. Nas zanimaju detalji na koji način se odvijaju ovi procesi, te možemo li opaziti njihove posljedice i iz njih zaključiti nešto o ranom svemiru.

Ovdje ćemo općenito razmatrati slabo interagirajući plin čestica u svemiru koji se širi. Najvažnije statističke raspodjele dane su s

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu_i)} + \kappa}, \quad \kappa = \begin{cases} 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ +1 & \text{Fermi-Dirac} \\ -1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases} \quad (8.3)$$

gdje je indeks  $i$  označava vrstu čestice,  $E_i$  energiju svake čestice,

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_i^2 c^4},$$

$\mu_i$  kemijski potencijal, te  $\beta = 1/(k_B T)$ , gdje je  $T$  temperatura. Mi ćemo ovdje pretpostaviti da je u veoma ranom stadiju razvoja svemira kemijski potencijal zanemariv,  $\mu_i \approx 0$ .

Još jedna važna veličina je broj (internih) stupnjeva slobode svake vrste čestica  $g_i$ . U tablici ispod prebrajamo stupnjeve slobode elementarnih čestica u Standardnom modelu (SM),

	č./antič.	spin	boja	ukupno
<b>bozoni</b>				<b>28</b>
$\gamma$	1	2	1	2
$W$	2	3	1	6
$Z$	1	3	1	3
gluoni	1	2	8	16
Higgs	1	1	1	1
<b>fermioni</b>				<b>3×30</b>
$e$	2	2	1	4
$\nu_e$	2	1	1	2
$u$	2	2	3	12
$d$	2	2	3	12
<b>SM</b>				<b>28+90</b>

Pomoću  $g_i$  možemo zapisati gustoću broja čestica  $n_i$  i gustoću energije  $\rho_i$ ,

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p, \quad \rho_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int E_i(\mathbf{p}) f_i(\mathbf{p}) d^3p$$

**ZAD 13.** Pronađite nerelativistički ( $k_B T \ll mc^2$ ) i relativistički ( $k_B T \gg mc^2$ ) limes koncentracije čestica  $n$  i gustoće energije  $\rho$ .

**R.** Radi jednostavnijeg zapisa u narednom računu izostavljamo indeks  $i$ . Pro-  
motrimo prvo nerelativistički limes,

$$E \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad f(\mathbf{p}) \approx e^{-E/k_B T}$$

Uvođenjem integracijske varijable  $r = |\mathbf{p}|$  imamo

$$\begin{aligned} n_{\text{NR}} &= \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mc^2 + \frac{r^2}{2m}}{k_B T}\right) r^2 dr = \left| u = \frac{r}{\sqrt{2mk_B T}} \right| = \\ &= \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right) (2mk_B T)^{3/2} \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du \\ \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du &= \left| v = u^2 \right| = \frac{1}{2} \int_0^\infty v^{1/2} e^{-v} dv = \frac{1}{2} \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

Stoga,

$$n_{\text{NR}} = g \left( \frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right)$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\rho_{\text{NR}} &= \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_{\text{B}}T}\right) \int_0^\infty \left(mc^2 + \frac{x^2}{2m}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2mk_{\text{B}}T}\right) x^2 dx = \\ &= \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_{\text{B}}T}\right) \left(mc^2(2mk_{\text{B}}T)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(3/2)}{2} + \frac{1}{2m}(2mk_{\text{B}}T)^{\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(5/2)}{2}\right) = \\ &= \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_{\text{B}}T}\right) (2mk_{\text{B}}T)^{3/2} \left(mc^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4} + k_{\text{B}}T \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right)\end{aligned}$$

Drugi član je u nerelativističkom limesu zanemariv u odnosu na prvi, pa je

$$\rho_{\text{NR}} = mc^2 \cdot n_{\text{NR}}$$

Promotrimo sada ultrarelativistički limes,

$$E \approx |\mathbf{p}|c$$

$$n_{\text{R}} = \frac{g}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{E/k_{\text{B}}T} \pm 1}, \quad \rho_{\text{R}} = \frac{g}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{E^3 dE}{e^{E/k_{\text{B}}T} \pm 1}$$

Potrebni integrali,

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{e^x - 1} = \zeta(n)\Gamma(n), \quad \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{e^x + 1} = (1 - 2^{1-n})\zeta(n)\Gamma(n)$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2, \quad \Gamma(4) = 3! = 6, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$1 - 2^{1-3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad 1 - 2^{1-4} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Uvrštavanjem imamo

$$n_{\text{R}} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2(\hbar c)^3} (k_{\text{B}}T)^3 g_i \cdot \begin{cases} 1, & \text{BE} \\ \frac{3}{4}, & \text{FD} \end{cases}, \quad \rho_{\text{R}} = \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} (k_{\text{B}}T)^4 g_i \cdot \begin{cases} 1, & \text{BE} \\ \frac{7}{8}, & \text{FD} \end{cases}$$

S obzirom da su nerelativistički izrazi  $n_{\text{NR}}$  i  $\rho_{\text{NR}}$  potisnuti s eksponencijalnim faktorom, prilikom zbrajanja doprinosa različitih vrsta čestica, zanemarit ćemo one čija je temperatura nerelativistička. Pišemo stoga

$$\rho_{\text{R}} = \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} g_*(T) (k_{\text{B}}T)^4 \quad (8.4)$$

Ovdje smo uveli  $g_*(T)$ , **efektivni broj stupnjeva slobode** koji broji ukupni broj internih stupnjeva slobode čestica koje su relativističke ( $m_i \ll T$ ) i u termičkoj ravnoteži pri temperaturi  $T$ ; pri tome je u definiciju implicitno uključen i faktor  $7/8$  ako su posrijedi fermioni. Tijekom evolucije svemira dio čestica s relativističkim energijama će imati različitu temperaturu od ostatka kupelji (na primjer, usljed širenja svemira će neutrini imati nižu temperaturu od fotona). Ovo obično pratimo uvođenjem *specifične temperature*  $T_i$  za svaku vrstu (relativističkih) čestica, pa pišemo

$$g_*(T) \equiv \sum_{i=\text{boz}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fer}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \quad (8.5)$$



**ZAD 14.** Izračunajte efektivni broj stupnjeva slobode termalne kupke na 1TeV, u kojoj su prisutne sve standardnomodelske čestice (i njihova energija je relativistička). Nadalje, pronađite vezu između starosti svemira i temperature u eri dominacije zračenja.

**R.** Koristeći gore pobrojane stupnjeve slobode imamo

$$g_*(1\text{TeV}) = 28 + \frac{7}{8} \cdot 90 = 106.75$$

Izraz za Hubbleov parametar iz Friedmannovih jednadžbi, s eksplicitnim  $c$ -faktorima,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_R = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} g_*(k_B T)^4$$

U eri dominacije zračenja imamo

$$a \sim \sqrt{t}, \quad H = \frac{1}{2t}$$

pa je

$$t = \frac{1}{2H} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{90\hbar^3 c^5}{8\pi^3 G}} \frac{1}{\sqrt{g_*}} (k_B T)^{-2} = \frac{3\sqrt{5}}{4\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_P c^2}{k_B T}\right)^2 \frac{t_P}{\sqrt{g_*}}$$

gdje smo uveli Plackovu masu  $m_P$  i Planckovo vrijeme  $t_P$ ,

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{22} \text{ MeV}, \quad t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \approx 5 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

Uvrštavajući ove veličine, dobivamo pojednostavljen lako pamtljiv izraz

$$t \approx \left(\frac{1\text{MeV}}{k_B T}\right)^2 \text{ s} \quad (8.6)$$

## 8.2 Entropija i odvezivanje čestica

Promjena unutrašnje energije  $U$  općenito je dana izrazom

$$dU = d(\rho V) = T dS - p dV \quad (8.7)$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} dS(V, T) &= \frac{1}{T} \left( d(\rho(T)V) + p(T)dV \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left( (\rho(T) + p(T))dV + V d\rho(T) \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Kako je općenito

$$dS(V, T) = \frac{\partial S(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} dT$$

zaključujemo

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{\rho + p}{T}, \quad \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}$$

Iz jednakosti miješanih derivacija,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

slijedi

$$\frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} = -\frac{\rho + p}{T^2} + \frac{1}{T} \left( \frac{dp}{dT} + \frac{d\rho}{dT} \right)$$

Odavde množenjem s  $T$  i sređivanjem dobivamo

$$\frac{dp(T)}{dT} = \frac{\rho(T) + p(T)}{T} \quad (8.9)$$

Iskoristimo li dobiveni izraz u daljnjem raspisivanju jednadžbe (8.8) dobivamo

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} \left( (\rho + p)dV + Vd\rho + Vdp - Vdp \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left( d((\rho + p)V) - \frac{V}{T} (\rho + p)dT \right) = \\ &= \frac{1}{T} d((\rho + p)V) - \frac{V}{T^2} (\rho + p)dT = d \left( \frac{(\rho + p)V}{T} \right) \end{aligned}$$

Integriranjem slijedi

$$S(V, T) = \frac{V}{T} (\rho(T) + p(T)) \quad (8.10)$$

Nadalje, znamo od ranije da vrijedi

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3)$$

Dodamo li  $a^3 \dot{p}$  s obje strane jednakosti imamo

$$a^3 \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( a^3 (\rho(T) + p(T)) \right)$$

Lijevu stranu ove jednakosti možemo uz pomoć jednadžbe (8.9) raspisati u sljedeći oblik,

$$a^3 \frac{dp}{dt} = a^3 \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dt} = a^3 \frac{\rho + p}{T} \frac{dT}{dt}$$

pa sve skupa imamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a^3}{T} (\rho + p) \right) = 0 \quad (8.11)$$

Stavimo li  $a^3 = V$  dobivamo

$$\frac{dS(a^3, T)}{dt} = 0 \quad (8.12)$$

Drugim riječima, entropija je konstantna unutar volumena  $a^3(t)$  koji se, općenito, mijenja u vremenu. Konvencionalno se uvodi *gustoća entropije*  $s$ ,

$$s(T) \equiv \frac{S(V, T)}{V} = \frac{\rho(T) + p(T)}{T}$$

$$s(T) = \sum_i \frac{\rho_i + p_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i} \frac{4}{3} \rho_i = \sum_i \frac{1}{T_i} \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 \equiv \frac{2\pi^2}{45} g_*^s T^3$$

Ovdje smo uveli *entropijski efektivni broj stupnjeva slobode*  $g_*^s$ ,

$$g_*^s(T) \equiv \sum_{i=\text{boz}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fer}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^3$$

Zaključak je stoga da vrijedi

$$\frac{d}{dt} \left( g_*^s (aT)^3 \right) = 0 \quad (8.13)$$

Odavde odmah zaključujemo kako se temperatura mijenja s promjenom faktora skale  $a(t)$ ,

$$T \sim \frac{1}{a(g_*^s)^{1/3}}$$

Promotrimo primjer neutrina koji s ostalim česticama u standardnom modelu interagiraju samo putem slabe sile. Na nekim dovoljno visokim temperaturama ( $k_B T \gg 1 \text{ MeV}$ ) neutriini su u termodinamičkoj ravnoteži s “kupelji” koju čine ostale čestice poput fotona, elektrona i pozitrona. Ravnoteža je ostvarena kroz procese poput

$$\nu_e e^+ \leftrightarrow \nu_\mu \mu^+, \quad \bar{\nu}_e e^- \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-, \quad e^- e^+ \leftrightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \quad \text{itd.}$$

Širenjem se svemir hladi, konkretno, relativističke čestice gube energiju kozmološkim crvenim pomakom. U jednom “trenutku” (kozmoškoj epohi) ta energija postaje toliko mala da su neki procesi

- *prerijetki*, ako je  $\Gamma \ll H$ : čestice koje su termodinamičku ravnotežu s ostatkom kupelji održavale kroz dotične procese se *odvezuju*, odnosno, prestaju pratiti daljnje temperaturne promjene u termalnoj kupelji;

ili

- *kinematički zabranjeni*, npr. ako je tipična energija fotona u termalnoj kupelji  $k_B T$  postala manja od energije mirovanja  $mc^2$  neke čestice  $A$ , proces  $\gamma\gamma \rightarrow A\bar{A}$  će postati kinematički zabranjen, pa će parovi  $A$  i  $\bar{A}$  izanihilirati kroz proces  $A\bar{A} \rightarrow \gamma\gamma$ . Pri tome čestice  $A$  ulaze u nerelativistički režim (njihov broj je umanjen eksponencijalnim faktorom), a entropija se raspodjeljuje u ostatku kupelji (ovaj proces se obično naziva **podgrijavaње**, engleski *reheating*, iako se pri tome ne događa nikakav porast temperature, već samo usporavanje brzine njenog pada).

Procijenimo sada energiju na kojoj se događa odvezivanje neutrina. Udarni presjek za tipičnoj reakciji sa slabom interakcijom, poput  $\nu_e e^+ \rightarrow \nu_\mu \mu^+$  dan je (za  $E < m_W$ ) sa

$$\sigma_w \sim \alpha_w^2 \frac{s}{m_W^4}$$

gdje je  $s$  Mandelstamova varijabla (kvadrat ukupne energije u sustavu centra mase). S obzirom da promatramo čestice relativističkih energija, imamo  $v \approx c$  i  $n \sim (k_B T)^3$ , pa je

$$\Gamma_w \sim \frac{\alpha_w^2 (k_B T)^5}{m_W^4}$$

Znamo od ranije

$$H \sim \frac{(k_B T)^2}{m_{\text{P}}^2 t_{\text{P}}}$$

pa je

$$\frac{\Gamma_w}{H} \sim \frac{\alpha_w^2 (k_B T)^3 m_{\text{P}}^2 t_{\text{P}}}{m_W^4}$$

Odvezivanje nastupa pri  $\Gamma_w \sim H$ , pa je

$$k_B T_{\text{odv}} \sim \left( \frac{m_W^4}{\alpha_w^2 m_{\text{P}}^2 t_{\text{P}}} \right)^{1/3} \sim \left( \frac{m_W^4}{\alpha_w^2 m_{\text{P}}^2} \right)^{1/3} \sim 1 \text{ MeV}$$

gdje je korišteno  $\alpha_w = 1/29$ , te  $m_W \approx 80 \text{ GeV}$ . Preciznije, elektronski neutrino  $\nu_e$  odvezuje se na  $2.3 \text{ MeV}$ , a mionski i tau neutrino,  $\nu_\mu$  i  $\nu_\tau$ , na  $3.5 \text{ MeV}$ . Nakon odvezivanja neutriini ostaju na istoj temperaturi kao i fotoni sve dok se efektivni broj stupnjeva slobode  $g_*^s$  ne promjeni. Naime, pri energijama od  $\sim 1 \text{ MeV}$  neutriini i dalje imaju relativističke energije, pa se njihova temperatura, usljed širenja svemira, mijenja kao i temperatura fotona,  $T \sim a^{-1}$ . Sljedeći prijelaz u kojem dolazi do promjene  $g_*^s$  događa se na nešto nižoj temperaturi od oko  $1 \text{ MeV}$ , ispod koje postaje kinematički zabranjen proces  $\gamma\gamma \rightarrow e^- e^+$  (čime elektroni i pozitroni ulaze u nerelativistički režim). Promotrimo koja se pri tom promjena dogodi u efektivnom broju stupnjeva slobode,

$$(g_*^s)_{\gtrsim 1 \text{ MeV}} = 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{7}{8}}_{e^- e^+} + \underbrace{2}_{\gamma} = \frac{11}{2}, \quad (g_*^s)_{\lesssim 1 \text{ MeV}} = 2$$

Korištenjem gore izvedenog sačuvanja gustoće entropije,

$$(g_*^s (aT)^3)_{\gtrsim 1 \text{ MeV}} = (g_*^s (aT)^3)_{\lesssim 1 \text{ MeV}}$$

možemo povezati temperaturu fotona prije i nakon ovog prijelaza (ovdje se podrazumijeva kako je faktor skale  $a(t)$  približno konstantan jer je posrijedi relativno kratak vremenski interval),

$$\begin{aligned} \left( \frac{11}{2} (aT_\gamma)^3 \right)_{T \gtrsim 1 \text{ MeV}} &= \left( 2 (aT_\gamma)^3 \right)_{T \lesssim 1 \text{ MeV}} \\ (T_\gamma)_{\gtrsim 1 \text{ MeV}} &= \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} (T_\gamma)_{\lesssim 1 \text{ MeV}} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Neutrini, koji su ranije izašli iz termodinamičke ravnoteže, do ove promjene su još bili na istoj temperaturi kao i fotoni,

$$(T_\nu)_{\gtrsim 1\text{MeV}} = (T_\gamma)_{\gtrsim 1\text{MeV}} ,$$

ali sada više “ne prate” novu promjenu u termalnoj kupelji,

$$(T_\nu)_{\lesssim 1\text{MeV}} = (T_\nu)_{\gtrsim 1\text{MeV}} ,$$

odakle slijedi veza

$$(T_\nu)_{\lesssim 1\text{MeV}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} (T_\gamma)_{\lesssim 1\text{MeV}} \quad (8.15)$$

Konkretno, danas opažamo fotone u pozadinskom mikrovalnom zračenju na temperaturi od  $T_\gamma = 2.73\text{ K}$ , pa je  $T_\nu = 1.95\text{ K}$ .

**ZAD 15.** Procjenite koncentraciju pozadinskih neutrina u svemiru.

**R.** Koristeći ranije izvedene formule za koncentraciju čestica s relativističkim energijama,

$$n_\nu = \frac{3}{4} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)^3 n_\gamma = \frac{3}{4} \frac{4}{11} n_\gamma = \frac{3}{11} n_\gamma$$

Za fotone imamo

$$n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2(\hbar c)^3} (k_B \cdot 2.73\text{ K})^3 \cdot 2 \approx 410\text{ cm}^{-3}$$

odakle zaključujemo da za svaku familiju neutrina imamo  $n_\nu \approx 110\text{ cm}^{-3}$ .

## Dodatak A

# Kovarijantan izraz za Dopplerov pomak

Zanima nas kako poopćiti ranije izveden izraz za Dopplerov pomak u slučaju kada se i opažač i emiter gibaju u proizvoljnim smjerovima, te ako prostor nije ravan (Minkowski), već zakrivljen. Pretpostavimo da opažač ima 4-brzinu  $u^a$ , a emiter 4-brzinu  $w^a$ , te neka je valni 4-vektor fotona  $k^a$ . Tada je frekvencija  $\omega$  koju mjeri svaki od njih moguće zapisati u manifestno kovarijantnom obliku,

$$\omega_e = -(k_a w^a)_e, \quad \omega_o = -(k_a u^a)_o \quad (\text{A.1})$$

a odavde slijedi traženi kovarijantni, poopćen izraz za Dopplerov pomak

$$z = \frac{(k_a w^a)_e}{(k_b u^b)_o} - 1 \quad (\text{A.2})$$

Uzmimo za primjer foton odaslanog u smjeru jediničnog vektora  $\hat{\mathbf{s}}$  u prostoru Minkowskog,

$$k^\mu = (\omega, \hat{\mathbf{s}}\omega), \quad k^2 = -\omega^2 + \omega^2 = 0$$

U sustavu mirovanja opažača imamo

$$u^\mu = (c, \mathbf{0}), \quad w^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{w})$$

Uvrštavanjem u opću formulu (A.2) dobivamo

$$z = \frac{-\omega\gamma c + \omega\gamma \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{-\omega c} - 1 = \gamma(1 - \beta(w) \cdot \hat{\mathbf{s}}) - 1, \quad \beta(w) \equiv \frac{\mathbf{w}}{c}$$

Dva slučaja su posebno zanimljivi,

- *longitudinalni Dopplerov učinak*: foton je odaslan duž pravca gibanja emitera,  $\hat{\mathbf{s}} = \mp \hat{\mathbf{w}}$  (gornji predznak odgovara slučaju kada se emiter udaljava od opažača, te odašilje foton suprotno od svog smjera gibanja; donji predznak odgovara suprotnom slučaju), pa je

$$z = \gamma(w)(1 \pm \beta(w)^2) - 1 = \sqrt{\frac{1 \pm \beta(w)^2}{1 \mp \beta(w)^2}} - 1$$

u slaganju s ranije izvedenom relacijom.

- *transverzalni Dopplerov učinak*: foton je odaslan okomito smjer gibanja emitera. Na primjer, ako emiter kruži konstantnom brzinom na konstantnom radijusu  $r$  oko opažača, imamo  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} = 0$ , pa je

$$z = \gamma(v) - 1 \quad (\text{A.3})$$

Napomena: u slučaju kada opažatelj kruži konstantnom brzinom na konstantnom radijusu  $r$  oko emitera, imamo  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} = 0$ , pa je

$$z = \frac{1}{\gamma(u)} - 1 \quad (\text{A.4})$$

Promotrimo primjer *gravitacijskog crvenog pomaka* u Schwarzschildovom prostorvremenu,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

Neka su emiter i opažatelj statični, s istim kutnim, ali različitim radijalnim koordinatama ( $r_e$  i  $r_o$ ). Tada su njihove 4-brzine (normirane tako da vrijedi  $w^2 = -1 = u^2$ ), dane s

$$u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^2}} \Big|_{r_o}, \quad w^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^2}} \Big|_{r_e}$$

gdje je  $\xi^a$  vremenski Killingov vektor,

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad -\xi^2 = f$$

Imamo stoga

$$z = \frac{(k_a \xi^a)_e}{(k_a \xi^a)_o} \frac{\sqrt{f(r_o)}}{\sqrt{f(r_e)}} - 1$$

S obzirom da je produkt geodetskog vektora (fotoni u slobodnom padu slijede geodetsku trajektoriju u prostorvremenu) i Killingovog vektora konstantan duž geodetske putanje,

$$k^b \nabla_b (k^a \xi_a) = \xi_a k^b \nabla_b k^a + k^a k^b \nabla_b \xi_a = 0 \quad (\text{A.5})$$

slijedi  $(k_a \xi^a)_e = (k_a \xi^a)_o$ , pa je

$$z = \frac{\sqrt{f(r_o)}}{\sqrt{f(r_e)}} - 1 \quad (\text{A.6})$$

## Dodatak B

# Raste li širenjem svemira i de Broglieva valna duljina?

U dosadašnjim razmatranjima promatrali smo kozmološki crveni pomak bezmasenih čestica, primjerice fotona: ako se svemir širi, njihova valna duljina se povećava i obratno, u svemiru koji se skuplja, njihova valna duljina se smanjuje. Isti zaključak je *donekle* primjenjiv za ultrarelativističke čestice, ako je njihova energija mirovanja zanemariva spram kinetičke energije. No, što se događa s masivnim česticama ako ne vrijedi ovakva aproksimacija, odnosno, što se *točno* događa s masivnim česticama na *svim*, malim ili velikim energijama?

Svakoj čestici s impulsom iznosa  $p$  možemo definirati tzv. de Broglievu valnu duljinu,

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{B.1})$$

Pitanje koje nas zanima jest što se događa s  $\lambda$  kada se svemir širi ili skuplja? Diskusija o ovom pitanju se može pronaći u Weinbergovom udžbeniku *Cosmology* (str. 5.-6.), kao i članku

H. Zhang: *Note on the thermal history of decoupled massive particles*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 208001 [arXiv:0808.1552]

Pretpostavimo da se čestica mase  $m$ , s 4-brzinom  $u^a$ , giba po geodetskoj putanji,

$$u^b \nabla_b u^a = 0, \quad u^2 = -1$$

Neka je dana familija stacionarnih promatrača/ica  $\mathcal{O}$  s 4-brzinama  $w^a$ : u RW prostorvremenu imamo

$$w^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

Energija čestice koju mjeri  $\mathcal{O}$  dana je s

$$E = -mu^a w_a = m \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{B.2})$$

Promotrimo sada kako se mijenja ova energija duž putanje čestice,

$$\frac{dE}{d\tau} = -mu^a \nabla_a (u^b w_b) = -mu^a u^b \nabla_a w_b \quad (\text{B.3})$$



Direktnim računom se provjeri da vrijede sljedeće jednakosti,

$$\nabla_a w_b = \Gamma_{ab}^c w_c = \frac{\dot{a}}{a} (g_{ab} + w_a w_b) \quad (\text{B.4})$$

Koristeći  $u^a w_a = E/m$ , odavde je

$$\frac{dE}{d\tau} = -m \frac{\dot{a}}{a} (-1 + (u^a w_a)^2) = -\frac{E^2 - m^2}{m} \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{B.5})$$

odakle, korištenjem disperzijske relacije  $E^2 = p^2 + m^2$ , slijedi

$$-\frac{da}{a} = m \frac{dt}{d\tau} \frac{dE}{E^2 - m^2} = \frac{EdE}{E^2 - m^2} = \frac{1}{2} \frac{d(E^2 - m^2)}{E^2 - m^2} = \frac{dp}{p} \quad (\text{B.6})$$

Stoga, iznos impulsa masivne čestice koja slobodno putuje prostorvremenom, obratno je proporcionalan faktoru skale,

$$p \sim \frac{1}{a} \quad (\text{B.7})$$

što znači da se de Broglieva valna duljina ponaša poput valne duljine fotona: u svemiru koji se širi ona se produljuje, a u svemiru koji se skuplja ona se skraćuje.

Utječe li ikako ovaj zaključak na sva prethodna razmatranja o termodinamici svemira? U principu ne jer materiju promatramo u nerelativističkom limesu (kada je kinetički dio zanemariv u odnosu na energiju mirovanja, pa je promjena impulsa sa skalom  $a$  nevažna) ili ultrarelativističkom limesu (kada se energija čestice približno proporcionalna impulsu, pa se stoga ponaša poput energije bezmasene čestice).

## Dodatak C

# Pregled gradiva

Robertson-Walkerova metrika

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad k \in \{-1, 0, +1\}$$

Komponente Christoffelovog simbola,

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{\phi\phi}^t &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1 - kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \text{ctg } \theta \end{aligned}$$

Friedmannove jednađbe

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

Tenzor energije i impulsa idealnog fluida

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

Ponašanje faktora skale  $a(t)$  (za ravan svemir,  $k = 0$ ) i gustoće energije  $\rho(t)$  (za općeniti  $k$ ) za tipične jednađbe stanja ( $\rho = wp$ ),

	$w$	$a$	$\rho$
M	0	$\sim t^{2/3}$	$\sim a^{-3} \sim t^{-2}$
$\gamma$	1/3	$\sim t^{1/2}$	$\sim a^{-4} \sim t^{-2}$
$\Lambda$	-1	$\sim e^{\pm Ht}$	konst.

Hubbleova konstanta ( $h \approx 0.72$ )

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Recipročna Hubbleova konstanta

$$1/H_0 = 9.778 \cdot 10^9 h^{-1} \text{ god.}$$

Konverzija energija-temperatura,

$$\text{MeV}/k_B \approx 1.1605 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

	NR	BE	FD
$n_i$	$g_i \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right)$	$g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2(\hbar c)^3} (k_B T)^3$	$g_i \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2(\hbar c)^3} (k_B T)^3$
$\rho_i$	$mc^2 n_i$	$g_i \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} (k_B T)^4$	$g_i \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} (k_B T)^4$