

Seminar iz DGF: Kerrova crna rupa

Dario Barišić

25. rujna 2017.

1 Sažetak

U ovom radu smo opisali kratak pregled događaja koji je motivirao nastanak Kerrove metrike. Zatim smo prošli kroz njezina najvažnija svojstva i neke od koordinatnih reprezentacija. Naposljetku smo dotaknuli horizonte i ergosfere u Kerrovom prostoru i ukratko opisali problematiku jedinstvenosti rješenja za rotirajuće crne rupe.

2 Uvod

Nakon otkrića Einstenovih jednadžbi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

(gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tensor, R Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ metrika, λ kozmološka konstanta, G gravitacijska konstanta, c brzina svjetlosti i $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-impulsa), koje opisuju gravitacijske interakcije kao posljedicu zakrivljenosti prostorvremena pod utjecajem mase i energije, Karl Schwarzschild dolazi do egzaktnog rješenja za geometriju induciranu nerotirajućom točkastom česticom¹

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m}{r} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)^2. \quad (2)$$

Primjenom Birkhoffovog teorema koji tvrdi da svako sfernosimetrično rješenje mora biti statično (ne mijenja se u vremenu i ne rotira) i asimptotski ravno (na velikim udaljenostima metrika postaje jednaka onoj u ravnom prostoru, tj. metrici Minkowskog) može se zaključiti da je i metrika u vakuumu izvan sfernosimetrične raspodjele materije Schwarzschildova. Očito je Schwarzschildovo rješenje dovoljno za nerotirajuće sfernosimetrične izvore, no kako znamo nebeska tijela obično rotiraju. U tom slučaju moguće je dobiti aproksimativno rješenje u režimu "slabog gravitacijskog polja". No, takve aproksimacije nisu zadovoljavajuće u slučaju jakog gravitacijskog polja, npr. u slučaju neutronske zvijezde. Stoga je krenula potraga za rješenjem geometrije izoliranog objekta koji posjeduje masu i angularni moment. Do rješenja je došao Roy Kerr, i ono u originalnim koordinatama glasi¹

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3)$$

3 Svojstva i reprezentacije Kerrove metrike

Prvo važno svojstvo Kerrove metrike je to da je Riccijev tenzor jednak nuli, što potvrđuje da Kerrovo rješenje zadovoljava Einsteinove jednačbe bez kozmološke konstante. Također, možemo zaključiti o postojanju dva Killingova vektora jer izraz (3) ne ovisi o koordinatama u i ϕ :

$$U^a = (1, 0, 0, 0), \quad R^a = (0, 0, 0, 1). \quad (4)$$

Killingovi vektori su infinitezimalni generatori izometrija na mnogostruksti.³

Kada promatramo limes $a \rightarrow 0$ metrika se svodi na Schwarzschildovu u Eddington-Finkelstein koordinatama¹

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m}{r} \right] du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5)$$

što je očekivano s obzirom da su članovi koji sadrže koeficijent a upravo oni koji su odgovorni za rotaciju izvora. U limesu $m \rightarrow 0$ rješenje se svodi na¹

$$\begin{aligned} ds_0^2 = & - (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Ovaj rezultat odgovara metrici Minkowskog, što se može i pokazati izračunavanjem Riemannovog tenzora.

Najjednostavnija netrivialna kvadratna invarijanta je¹

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)[(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}. \quad (7)$$

U slučaju kad je nazivnik jednak nuli dolazi do divergencije izraza, odnosno postoji singularnost za $r = 0$ i $\theta = \pi/2$.

Izraz za ds^2 može se razdijeliti na dva dijela, jedan koji ovisi o masi, i drugi koji ne ovisi o masi¹

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2. \quad (8)$$

Ovakva forma se naziva Kerr-Schildova, dio neovisan o masi je upravo onaj iz (5). U terminu metrika dekompozicija je oblika¹

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} l_a l_b, \quad (9)$$

gdje je¹

$$(g_0)_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & r^2 + a^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & a \sin^2 \theta & 0 & (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad l_a = (1, 0, 0, a \sin^2 \theta). \quad (10)$$

Determinanta metrike neovisna je o masi:

$$\det(g_{ab}) = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta. \quad (11)$$

Određenim transformacijama moguće je doći do Kerr-Schildove forme u Kartezijevim koordinatama¹

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right]^2, \quad (12)$$

gdje je r funkcija od x, y, z određena s:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left[1 - \frac{r^2}{z^2} \right]. \quad (13)$$

Sada je očito da u limesu $m \rightarrow 0$ metrika prelazi u metriku Minkowskog. Također, vrijedi¹

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l_a l_b, \quad (14)$$

gdje je :

$$l_a = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right). \quad (15)$$

Iz izraza za $R_{abcd}R^{abcd}$ u ovim koordinatama slijedi da postoji singularnost za:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (16)$$

Killingovi vektori glase:

$$K^a = (1, 0, 0, 0), \quad R^a = (0, 0, y, -x). \quad (17)$$

Vrlo zanimljive i od velike važnosti su Boyer-Lindquistove koordinate. Element ds^2 u njima ima oblik¹

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\ & \left[\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} \right] dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Kao i u drugim koordinatnim reprezentacijama, limesi $m \rightarrow 0$ i $a \rightarrow 0$ daju redom, Minkowski i Schwarzschildovu metriku. Usporedbom limesa $r \rightarrow \infty$ s aproksimativnim rješenjem Schwarzschildove metrike za rotacijske izvore u režimu slabog polja može se potvrditi da m stvarno predstavlja masu izvora, a $J = ma$ angularni moment izvora. Killingovi vektori u ovim koordinatama su očekivano:

$$K^a = (1, 0, 0, 0), \quad R^a = (0, 0, 0, 1). \quad (19)$$

Determinanta metrike i izraz $R_{abcd}R^{abcd}$ identični su onima u slučaju originalnih Kerrovih koordinata.

4 Horizonti i ergosfere

Iz jednadžbe (17) možemo uočiti singularnosti u metrici. Prva je ona o kojoj smo već raspravljali:

$$r = 0, \quad \theta = \pi/2, \quad (20)$$

isti izraz (ali u Kartezijevim koordinatama) predstavlja skup jednadžbi (15). Radi se o prstenu u x-y ravnini radijusa a . Druga singularnost je ona u radijalnom članu, predstavljena uvjetom:

$$r^2 - 2mr + a^2 = 0. \quad (21)$$

Rješenja su dana sa $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$. Razlika je u tome što se ovdje radi o koordinatnoj singularnosti. U slučaju $a \rightarrow 0$, rješenje se svodi na $r = 2m$ što predstavlja horizont za Schwarzschildov prostor, što ukazuje na to da su r_{\pm} unutarnji i vanjski horizont za Kerrov prostor.

Ako fiksiramo koordinatu r i pogledamo induciranu metriku (tj. izraz za ds^2), slijedi da je za $r = r_*$ ¹

$$ds_{3-ploha}^2 = -dt^2 + (r_*^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r_*^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2m[dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2}{r_*(1 - a^2 \cos^2 \theta / r_*^2)}. \quad (22)$$

Iz toga se onda lako izračuna determinanta metrike za 3-plohu:

$$\det(g_{ij})_{3-ploha} = -\sin^2 \theta (r_*^2 + a^2 \cos^2 \theta) (r_*^2 - 2mr_* + a^2). \quad (23)$$

U slučajevima $r > r_+$ ili $r < r_-$ determinanta je negativna što je nužan uvjet za postojanje dvije prostorne i jedne vremenske dimenzije. U slučaju $r_- < r < r_+$ determinanta metrike je pozitivna što znači da je ovdje t prostorna, a ne vremenska koordinata. I naposljetku, u slučaju kada je $r = r_{\pm}$ matrica je singularna. To povlači postojanje 3-vektora na plohama $r = r_{\pm}$ za koje vrijedi:

$$[g_{ij}]L^i = 0 \quad (24)$$

Taj vektor možemo proširiti na 4-vektor L^a dodavanjem r -komponente vrijednosti nula. Slijedi:

$$[g_{ab}]L^a = 0 \quad \rightarrow \quad [g_{ab}]L^a L^b = 0. \quad (25)$$

Kako je vektor L^a definiran samo za $r = r_{\pm}$ ovo implicira postojanje skupa krivulja koje leže točno na plohama $r = r_{\pm}$ i ne napuštaju ih. To se može interpretirati fizikalno kao fotonske orbite koje su tu zarobljene, u smislu da fotoni ne mogu pobjeći u beskonačnost, niti "u drugu stranu".

Skup takvih krivulja je definiran sa:

$$X(t) = (t, r(t), \theta(t), \phi(t)) = (t, r_{\pm}, \theta_0, \phi_0 + \Omega_{\pm}t), \quad (26)$$

gdje Ω_{\pm} predstavlja "kutnu brzinu", vanjskog (unutranjeg) horizonta i iznosi¹

$$\Omega_{\pm} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}. \quad (27)$$

Kako bi dobili uvid u intrinzičnu geometriju horizonta, možemo pogledati metriku 2-dimenzionalne plohe za neki konstantan t :

$$ds_{2-ploha}^2 = (r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left[\frac{(r_{\pm}^2 + a^2)^2}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (28)$$

Riccijev skalar za intrinzičnu geometriju horizonta iznosi:

$$R_{2-ploha} = \frac{2(r_{\pm}^2 + a^2)(r_{\pm}^2 - 3a^2 \cos^2 \theta)}{(r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3}. \quad (29)$$

Vidimo da geometrija horizonta nije sfera jer Riccijev skalar nije konstantan. U blizini polova, ploha može imati i negativnu zakrivljenost, ako je ispunjen uvjet $a > (\sqrt{3}/2)m$. Za rotirajuće crne rupe postoji i koncept ergosfera. On je vezan uz "problem stajanja na mjestu", tj. zanima nas postoje li mjesta u prostorvremenu u kojima je nemoguće stajati.

Uvjet stajanja je nametnut praćenjem linije $X(t) = (t, r(t), \theta(t), \phi(t)) = (t, r_0, \theta_0, \phi_0)$.

Nužan uvjet stajanja u prostorvremenu je da je 4-trajektorija vremenskog tipa:

$$g(T, T) < 0 \quad \rightarrow \quad g_{ab}T^aT^b = g_{tt} < 0, \quad (30)$$

gdje je $T^a = (1, 0, 0, 0)$ tangentni vektor na putanju promatrača.

Iz (17) vidimo da je uvjet narušen kada je:

$$r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta < 0. \quad (31)$$

Rješenja za stacionarne plohe su dana sa:

$$r_E^{\pm}(m, a, \theta) = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (32)$$

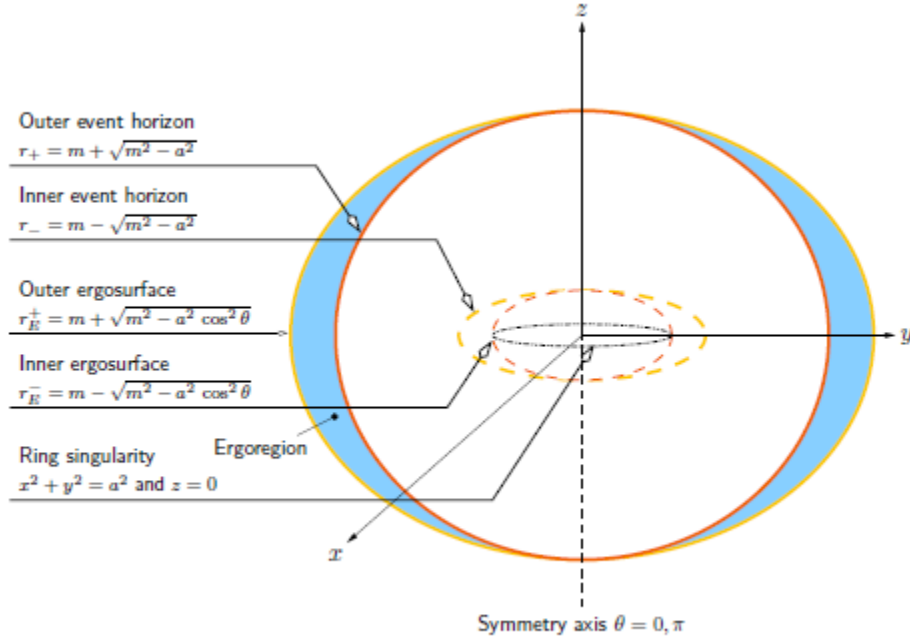
Područje u kojem je nemoguće stajati određeno je sa:

$$r_E^- < r < r_E^+ \quad (33)$$

Usporedbom sa rješenjima za vanjski i unutarnji horizont može se zaključiti da je:

$$r_E^+ \geq r_+ \geq r_- \geq r_E^- \quad (34)$$

U limesu $a \rightarrow 0$ vrijedi egzaktna jednakost u (33), tj. ergosfere ne postoje za nerotirajuće objekte.



Slika 1: Shematski prikaz horizonata i stacionarnih ploha za Kerrovu crnu rupu¹

5 "No hair" teorem

Vanjsko polje crne rupe koja rotira je u potpunosti određeno njezinom masom, angularnim momentom i nabojem. Intuitivno to možemo objasniti time da samo te tri veličine imaju sačuvan utisak u poljima koje stvara zvijezda na velikim udaljenostima, ovdje govorimo o Gaussovima zakonima, npr. za električno polje :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (35)$$

Za potpuno određivanje polja zvijezde potrebne su nam dodatne informacije, kao što su raspodjela mase, naboja i slično. No, nakon što zvijezda potpuno kolapsira unutar horizonta događaja ne postoji više nikakva poveznica između zvijezde i vanjskih polja osim mase, naboja i angularnog momenta. Problem izračuna vanjskog polja svodi se na rješavanje jednadžbi (1) uz uvjete konstantne mase, naboja i angularnog momenta i postojanja horizonta događaja.

Specijalno, za dokaz "no hair" teorema u slučaju Kerrove crne rupe dovoljna su nam dva rezultata⁴

I. Stephen Hawking (1971.) : stacionarna crna rupa ima horizont sa sfernom topologijom, i statična je ili aksijalno simetrična, ili oboje.

II. Brandon Carter (1970.) : Sve stacionarne, aksijalno simetrične crne rupe koje nemaju naboj i imaju horizont sa sfernom topologijom pripadaju disjunktним familijama između kojih ne postoji mogućnost prijelaza. U svakoj familiji vanjsko gravitacijsko polje crne rupe potpuno je određeno sa masom i angularnim momentom.

6 Penroseov proces

Postojanje ergosfere u Kerrovom rješenju omogućuje ekstrakciju energije iz crne rupe. Naime, u području između ergosfere i vanjskog horizonta događaja postoji mogućnost da čestica s 4-impulsom \mathbf{p} ima negativnu energiju $E = -\mathbf{p} \cdot \partial_t$. Time se mogu ostvariti procesi u kojima komad materije ulazi u ergosferu i dijeli se na dva dijela, jedan s negativnom energijom, a drugi s energijom većom od energije početne materije. Dio materije s negativnom energijom upada iza horizonta, a drugi dio izlazi van iz ergosfere. Zbog zakona sačuvanja energije crna rupa iz ovakvog procesa gubi svoju rotacijsku energiju. Postojanje ovakvih procesa usmjerilo je pozornost fizičara na dinamiku crne rupe. Hawking daje dokaz za tvrdnju da se površina crne rupe nikad ne smanjuje. Bekenstein pretpostavlja da je površina crne rupe proporcionalna njezinoj entropiji.

U slučaju Kerrove metrike površina je dana sa²

$$A = 8\pi Mr_+ \quad (36)$$

Deriviranjem se dobiva²

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J, \quad (37)$$

gdje je:

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{2Mr_+}, \quad \Omega = \frac{a^2}{2Mr_+}. \quad (38)$$

Izraz (37) podsjeća na prvi zakon termodinamike, a ako pretpostavimo da je površina horizonta proporcionalna entropiji onda je κ analogno temperaturi. Ubrzo je pokazano da vrijede i nulti i treći zakon termodinamike, tj. da je κ konstantan na plohi horizonta, i da se neekstremalna crna rupa ne može prevesti u ekstremalnu za konačan broj koraka. U klasičnom opisu crna rupa ne može zračiti pa je njezina temperatura jednaka nuli, što κ općenito nije. Dakle, klasično κ ne može biti temperatura crne rupe. No, kvantni efekti dopuštaju zračenje crne rupe, i to takvo da vrijedi²

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi} \quad (39)$$

Uvrštavanjem u (37) dolazimo do veze između entropije i površine horizonta :

$$S = \frac{A}{4\hbar}. \quad (40)$$

Kao što znamo, u termodinamici entropija je povezana s brojem mikrostanja u kojima se sustav može nalaziti. Ostaje otvoreno pitanje koja su to mikrostanja u pitanju kod crne rupe.

7 Važnost Kerrove metrike

U slučaju Kerrove metrike postoji direktna veza između različitih multipolnih momenta u vanjskom polju. Za polja realne zvijezde multipolni momenti su međusobno nezavisni. Zaključak je da ne postoji analogon Birkhoffovog teorema za Kerrovu metriku, tj. metrika izvan rotirajućeg sfernosimetričnog izvora u vakuumu nije egzaktna Kerrova. Za zvijezde Kerrova metrika dobiva na važnosti za daleka polja kada preostaje samo najniži multipolni član u razvoju. No, u slučaju rotirajućih crnih rupa Kerrovo

rješenje je potencijalno od jako velike važnosti.

Davne 1967. Werner Israel je pokazao da su jedine moguće statične crne rupe Schwarzschildove, a time su i sferno-simetrične. To je navelo fizičare da se pozabave problemom jedinstvenosti rotirajućih crnih rupa. Pitanje je jesu li sve rotirajuće crne rupe Kerrove. Osim već spomenutih rezultata Cartera i Hawkinga, Carter je pokazao da je Kerrovo rješenje jedino koje obuhvaća i slučaj kada nema angularnog momenta. Do onoga što većina fizičara smatra konačnim rješenjem problema dolazi Robinson. No, i dalje postoji dvojba oko nekih pretpostavki koje su korištene u dokazu.

8 Zaključak

Predstavili smo Kerrovu metriku u nekoliko različitih koordinatnih reprezentacija. U svakoj od njih kao što je i očekivano asimptotska ponašanja u parametrima m i a odgovaraju metrici Minkowskoj i Schwarzschildovoj metrici.

Naveli smo neka najvažnija svojstva Kerrove metrike: Riccijev tenzor je nula, Killingove vektore, prstenastu singularnost u (15), itd.

Utvdili smo postojanje vanjskog i unutarnjeg horizonta, te dviju stacionarnih ploha. Naposljetku smo spomenuli važnost Kerrove metrike kroz činjenicu da ona opisuje sve rotirajuće crne rupe.

Literatura

- [1] M. Visser: The Kerr spacetime: A brief introduction
- [2] S.A. Teukolsky: The Kerr Metric
- [3] Weinberg S. Gravitation and cosmology
- [4] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: Gravitation