Termodinamika prostorvremena: Einsteinova jednadžba stanja

Kaja Krhač

Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32

19. rujna 2019.

Sažetak

U radu se iz zakona termodinamike prostorvremena i relacije $\delta Q = TdS$, koja vrijedi u termodinamičkoj ravnoteži, izvela Einsteinova jednadžba. Svakoj točki prostorvremena, gdje je zbog principa ekvivalencije ono ravno, pripada Rindlerov horizont. On je u lokalnoj ravnoteži jer ekspanzija svjetlosnih geodezika koji ga generiraju iščezava u prvoj aproksimaciji u okolini te točke. Tok topline δQ interpretiramo kao tok energije i impulsa određen Killingovim vektorom, a temperaturu T kao Unruhovu temperaturu koju mjeri opažač na horizontu. Promjena entropije dS proporcionalna je promjeni površine horizonta. Iz svega navedenog dolazi se do zaključka da Einsteinova jednadžba nije fundamentalna, nego jednadžba stanja.

Sadržaj

1 Opća relativnost

U Newtonovoj teoriji, gravitacija je opisana kao privlačna sila, proporcionalna masama tijela koja se privlače te joj iznos opada s kvadratom udaljenosti. Gravitacija je, kao i ostale sile, definirana na prostorvremenu.

U okviru opće relativnosti gravitaciju interpretiramo kao zakrivljenje prostorvremena — 4-mnogostrukosti s tri prostorne i jednom vremenskom dimenzijom te pripadnom metrikom.

1.1 Mnogostrukost u općoj relativnosti

Korištenje mnogostrukosti kao matematičkog modela za opis prostorvremena motivirano je principom ekvivalencije —zakoni fizike na dovoljno malim dijelovima prostorvremena se svode na one u specijalnoj relativnosti. Ona opisuje poseban slučaj prostorvremena —ravno prostorvrijeme, tzv. prostorvrijeme Minkowskog. Takvo prostorvrijeme nije zakrivljeno pa nema gravitacije.

U općoj relativnosti inercijalni sustav, koji opisuje specijalna relativnost, definiramo kao onaj u slobodnom padu u gravitacijskom polju. Kako gravitacijsko polje može biti nehomogeno nije moguće definirati globalni inercijalni sustav koji se proteže kroz cijelo prostorvrijeme, jer se zakrivljenost mijenja pa se ograničavamo na lokalni inercijalni sustav. Takav sustav možemo definirati u svakoj točki, a to postižemo zahtjevom da metrika ima kanonski oblik u toj točki, odnosno da sve prve derivacije metrike u toj točki iščezavaju. Ovo odgovara upravo konceptu mnogostrukosti, jer su mnogostrukosti lokalno Euklidski prostori.

1.2 Hiperplohe

Hiperplohe su definirane kao $(n-1)$-dimenzionalne podmnogostrukosti Σ, n-dimenzionalne mnogostrukosti M. Definiramo ih fiksiranjem neke funkcije $f(x)$. Vektorsko polje definirano kao: [1]

$$\zeta^\mu = g^{\mu\nu}\nabla_\nu f \quad , \tag{1}$$

ortogonalno je na sve vektore koji žive u tangentnom prostoru podmnogostrukosti. Norma vektora ζ^μ određuje tip hiperplohe. Normala vremenolike hiperplohe je prostornog tipa i obrnuto, dok je normala hiperplohe svjetlosnog tipa također svjetlosnog tipa.

1.3 Einsteinova jednadžba i statično sfernosimetrično rješenje u vakuumu

Jednadžba koja opisuje zakrivljenje prostorvremena kao posljedicu prisutnosti mase i energije je Einsteinova jednadžba:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad , \tag{2}$$

gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R je Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ je metrika, λ je kozmološka konstanta, G je gravitacijska konstanta, a $T_{\mu\nu}$ je tenzor energije i impulsa koji je u vakuumu jednak nuli, a inače obuhvaća sve što postoji u prostoru što nije gravitacija, dakle polja svih drugih sila i materiju. Lijeva strana opisuje zakrivljenost prostorvremena, a desna energiju i impuls materije u prostoru.

Einsteinova jednadžba (u četiri dimenzije) zapravo predstavlja deset diferencijalnih jednadžbi koje daju komponente metrike $g_{\mu\nu}$.

U vakuumu, jedino statično rješenje jednadžbe koje ima sfernu simetriju je Schwarzschildova metrika koja u Schwarzschildovim koordinatama glasi: [1]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad , \tag{3}$$

gdje je M masa tijela koje zakrivljuje prostorvrijeme. Jednadžba (3) je rješenje u praznom prostoru izvan tijela koje je izvor gravitacije. Uvjet statičnosti implicira da komponente metrike ne ovise o vremenu i da je metrika invarijantna na inverziju u vremenu.

1.4 Svojstva Schwarzschildove metrike

Možemo primijetiti da metrika (3) ima singularitete za $r = 0$ i $r = 2GM$ (ova udaljenost predstavlja Schwarzschildov radijus). Koeficijenti metrike ovise o koordinatnom sustavu, stoga ova singularnost nema nužno fizikalnog značaja i ne ukazuje na singularnost u stvarnom prostorvremenu. U to se možemo uvjeriti izborom drugog koordinatnog sustava ili promatranjem invarijantnih veličina (npr. Riccijevog skalara ili nekog drugog skalara kojeg možemo dobiti kontrakcijom Riccijevog ili Riemannovog tenzora). Ako neki od tih skalara divergira znamo da se radi o fizikalnoj singularnosti. Ovo je dovoljan, ali ne nužan kriterij.

Za Schwarzschildovu metriku $r = 0$ doista je singularnost, dok hiperploha određena s $r = 2GM$ nije, no ima neka posebna svojstva koja ćemo analizirati pomoću geodezika.

Geodezik je krivulja duž koje je paralelno transportiran tangentni vektor te krivulje i odgovara generalizaciji ravne linije u zakrivljenom prostorvremenu. Čestica koja slobodno pada giba se po geodeziku i zadovoljava geodetsku jednadžbu: [1]

$$X^b \nabla_b X^a = 0 \quad . \tag{4}$$

Odnosno njezina afino parametrizirana putanja $x^\mu(\lambda)$, gdje je $X^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}$ zadovoljava jednadžbu:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad , \tag{5}$$

sa standardnom oznakom Christoffelovih simbola $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$.

U ravnom prostorvremenu (u Kartezijevim koordinatama) Christoffelovi simboli jednaki su nuli i jednadžba se svodi na drugu derivaciju putanje po parametru što upravo odgovara jednadžbi koju očekujemo iz 2. Newtonovog zakona za česticu na koju ne djeluje sila —akceleracija joj je jednaka nuli i giba se pravocrtno.

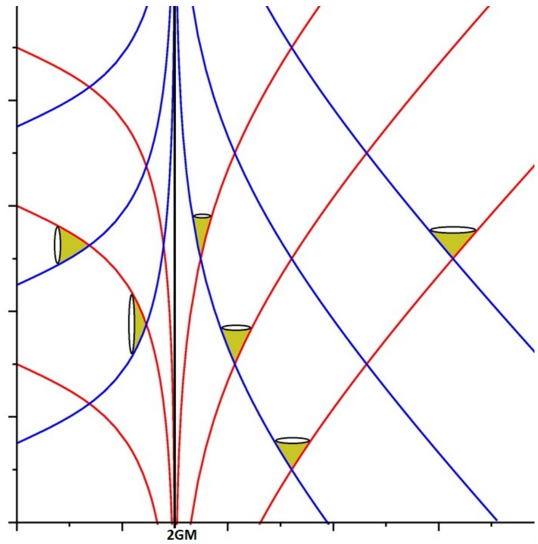
U Schwarzschildovoj nas metrici zanima radijalni ($d\theta = d\phi = 0$) svjetlosni geodezik (u (3) $ds^2 = 0$), što zapravo odgovara putanji fotona, tj. bezmasene čestice. Iz navedenih uvjeta dobivamo:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad . \tag{6}$$

Jednadžba (6) daje nagib svjetlosnih stožaca u $t - r$ dijagramu, a rješenja su joj:

$$t(r) = \pm r \pm 2\text{GM} \ln|r - 2\text{GM}| + C \quad , \tag{7}$$

gdje predznak plus odgovara izlaznim geodezicima, a minus ulaznim. Prikaz geodezika je na slici 1.



Slika 1: Radijalni svjetlosni tip geodezika u Schwarzscildovim koordinatama i svjetlosni stošci. Geodezici crvene boje odgovaraju izlaznim geodezicima, a plave ulaznim.

Svjetlosni stošci se sužavaju kako se približavamo radijusu $r = 2GM$ i konačno postanu singularni, tj. nijedan ulazni geodezik ne prelazi ovu plohu.

Transformiramo li koordinate tako da za ulazne geodezike vrijedi $t = -r$:

$$\bar{t} = t + 2\mathrm{GM}\ \ln|r - 2\mathrm{GM}| \quad , \tag{8}$$

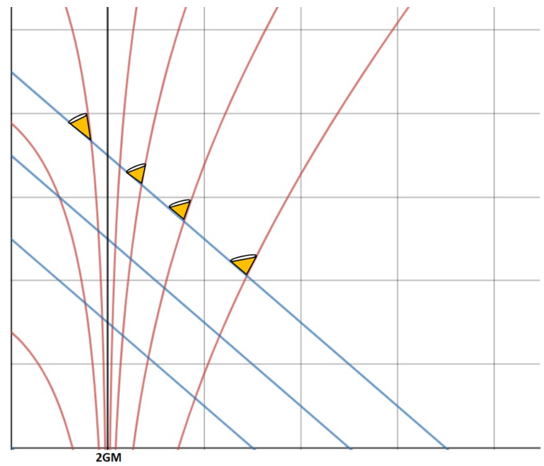
dobivamo geodezike prikazane na slici 2.

Iz transformacije (8) vidimo da je ono što je u $t - r$ koordinatama bilo u beskonačnosti spušteno na konačnu vrijednost zbog drugog člana koji je za $r = 2GM$ jednak $-\infty$. Hiperploha $r = 2\mathrm{GM}$ nije ni po čemu specifična, ulazni geodezici su pravci nagiba -1 koji jednostavno prolaze kroz tu plohu, no nakon te plohe budućnost čestice je sigurno singularnost $r = 0$ u konačnom (vlastitom) vremenu. Ovo se vidi sa slike (2).

Hiperploha $r = 2\mathrm{GM}$ se stoga naziva horizont događaja (”event horizon”), a područje iza horizonta, jer čestice i svjetlost koji su ušli više ne mogu izaći, crna rupa.

1.5 Horizont događaja

Za proizvoljnu metriku nije jednostavno identificirati horizont događaja. U specijalnom slučaju, kad se radi o stacionarnoj (koeficijenti metrike ne ovise o vremenu, ali metrika nije invarijantna na inverziju u vremenu), asimptotski ravnoj metrici (metrika se svodi na metriku Minkowskog u prostornoj i (budućoj i prošloj) svjetlosnoj beskonačnosti), čiji horizont



Slika 2: Radijalni svjetlosni tip geodezika u novim koordinatama gdje ulazni geodezici imaju nagib -1 i svjetlosni stošci. Geodezici crvene boje odgovaraju izlaznim geodezicima, a plave ulaznim.

događaja ima sfernu topologiju, horizont događaja bit će površina za koju je zadovoljeno: [1]

$$g^{rr}(r_H) = 0 \quad . \tag{9}$$

Ovo je uvjet da norma vektora normale hiperplohe horizonta događaja iščezava, tj. da je horizont događaja hiperploha svjetlosnog tipa. Kad se radi o asimptotski ravnoj metrici hiperplohe konstantnog radijusa u beskonačnosti su vremenskog tipa. Pri prelasku horizonta mijenja se tip plohe iz vremenske u prostornu.

Osim horizonta događaja zanimljivi su i Killingovi horizonti o kojima je riječ u sljedećem poglavlju.

1.6 Izometrije

Difeomorfizam koji metriku ostavlja invarijantnom naziva se izometrija. Ako vektorsko polje $K^\mu(x)$ generira 1-parametarsku familiju izometrija, K^μ je Killingovo vektorsko polje i zadovoljava Killingovu jednadžbu:

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = 0 \quad . \tag{10}$$

Za svaku izometriju postoji Killingovo polje pa tako Schwarzschildova metrika ima četiri Killingova vektora (generatori vremenskih translacija i rotacija). Pri infinitezimalnoj translaciji u smjeru vektora K^μ ne mijenja se geometrija mnogostrukosti. Veličina očuvana duž trajektorije geodezika je:

$$K^\mu p_\mu|_{geodezik} = konst. \quad , \tag{11}$$

gdje vektor p zadovoljava jednadžbu geodezika i $p_\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Vektor p možemo skalirati za neki faktor bez utjecaja na rezultat (11).

Ako je Killingovo polje χ^μ svjetlosnog tipa duž neke svjetlosne hiperplohe Σ kažemo da je Σ Killingov horizont polja χ^μ i u slučaju Schwarzschildove metrike to je Killingovo polje ∂_t.

Općenito, svaki horizont događaja Σ u stacionarnom, asimptotski ravnom prostorvremenu predstavlja Kilingov horizont za neko Kilingovo polje χ^μ.

1.7 Rotirajuća (Kerrova) crna rupa

Još jedan primjer rješenja Einsteinove jednadžbe s crnom rupom je Kerrova metrika. Ovo rješenje više nije statičko nego samo stacionarno te aksijalno, a ne sferno simetrično, jer crna rupa rotira. Kerrova metrika u Boyer-Lindquist koordinatama je: [1]

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2GMr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt) + \\ &+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]d\phi^2, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 \quad , \tag{13}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad , \tag{14}$$

$$a = \frac{J}{M} \quad , \tag{15}$$

gdje je M masa, a J angularni moment.

Primijenimo li uvjet (9) na Kerrovu metriku dobivamo da je horizont događaja zadan s ($\rho^2 \geqslant 0$):

$$\Delta(r) = r^2 - 2\mathrm{GM}r + a^2 = 0 \rightarrow \tag{16}$$

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - a^2} \quad . \tag{17}$$

Mogućnosti su sljedeće:

1. GM $>$ a - postoje dva horizonta događaja (unutarnji r_- i vanjski r_+) ,
2. GM = a - nestabilno rješenje ,
3. GM $<$ a - singularnost bez horizonta događaja (gola singularnost) .

Nas zanima slučaj kad postoje dva horizonta događaja.

Killingovi vektori su za stacionarne metrike vremenoliki u beskonačnosti, a za statičke još i ortogonalni na neki skup hiperploha (npr. Killingov vektor ∂_t ortogonalan je na hiperplohe određene s t=konst.). Norma Killingovog vektora $K = \partial_t$ na vanjskom horizontu događaja je:

$$K^\mu K_\mu = g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu \left(\partial_t\right)^\mu \left(\partial_t\right)^\nu = g_{tt} = \frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta \quad , \tag{18}$$

što je jednako nuli samo na polovima, a inače je veće od nule, tj. Killingov vektor je prostornog tipa pa horizont događaja ne može ujedno biti i Killingov horizont za Killingov vektor K.

Za statično prostorvrijeme Killingovo polje koje generira Killingov horizont je $\chi^\mu = (\partial_t)^\mu$, a ako se radi o stacionarnom prostorvremenu, χ^μ je linearna kombinacija $(\partial_t)^\mu + \Omega_H(\partial_\phi)^\mu$, gdje je Ω_H kutna brzina crne rupe. Umjesto Killingovog horizonta, točke za koje vrijedi $K^\mu K_\mu = 0$ čine stacionarnu graničnu plohu.

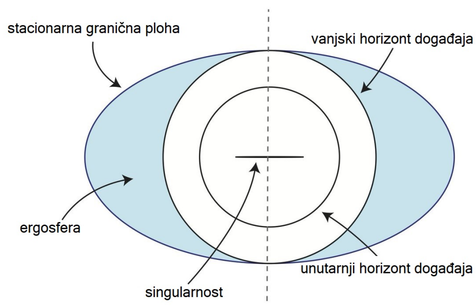
Iz (14) i (18) slijedi:

$$(r - GM)^2 = (GM)^2 - (a\cos\theta)^2 \quad , \tag{19}$$

dok za vanjski horizont iz (17) imamo:

$$(r_+ - GM)^2 = (GM)^2 - a^2 \quad . \tag{20}$$

Područje između vanjskog horizonta i stacionarne granične plohe zove se ergosfera. Unutar tog područja se svako tijelo giba u smjeru rotacije crne rupe (u ϕ smjeru) no moguće je izaći iz ergosfere. Prikaz horizonta Kerrove crne rupe je na slici 3.



Slika 3: Struktura horizonta Kerrovog rješenja. Područje između vanjskog horizonta i stacionarne granične plohe je ergosfera. Singularnost je prsten određen s $r = 0$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Kako je Killingov vektor prostornog tipa unutar ergosfere, Kerrovu crnu rupu možemo iskoristiti za dobivanje energije na način objašnjen u idućem poglavlju.

1.8 Penroseov proces

Promotrimo gibanje čestice s impulsom $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ po geodeziku u Kerrovoj metrici. Spomenuto je da su veličine oblika (11) očuvane duž gibanja po geodeziku. Tako za Killingove vektore K = ∂_t i R = ∂_ϕ imamo:

$$E = -K_\mu p^\mu \quad , \tag{21}$$

$$L = R_\mu p^\mu \quad . \tag{22}$$

O veličinama E i L će se dalje govoriti kao o energiji i angularnom momentu (po jedinici mase) jer prema Noetherinom teoremu infinitezimalne vremenske translacije vode na očuvanje energije, a rotacije na očuvanje angularnog momenta.

Energija ima predznak minus jer su oba vektora vremenolika u beskonačnosti gdje želimo da energija bude pozitivna veličina, jer je tamo prostorvrijeme ravno dok je unutar ergosfere vektor K^μ prostornog tipa pa energija čestice ispada negativna i možemo ju klasično "Newtonovski" interpretirati kao vezanje, tj. negativna energija čestice govori da ona u ergosferi ima zatvorenu orbitu. Da bi čestica izašla iz ergosfere mora akcelerirati dok joj energija ne postane pozitivna. Zapravo, kad je Killingov vektor K prostornog tipa nema smisla E definirati kao energiju jer je energija čestice koju mjeri opažač koji se giba brzinom U^μ jednaka $E = -U_\mu p^\mu$, a brzina opažača ne može biti prostornog tipa, stoga interpretacija veličine E kao energije nema smisla.

Veličina E definirana u (21) je očuvana neovisno o predznaku i nastavit ćemo se referirati na nju kao na energiju.

Penroseov proces jedan je od načina na koji možemo dobiti energiju koristeći činjenicu da crna rupa rotira.

Neka se čestica giba iz beskonačnosti po nekom geodeziku s impulsom $p^{(0)\mu}$ i energijom $E^{(0)} = -K_\mu p^{(0)\mu}$ koja je tada pozitivna. Kad čestica uđe u ergosferu raspadne se na dvije čestice impulsa $p^{(1)\mu}$ i $p^{(2)\mu}$, od kojih se jedna giba prema horizontu događaja, dok druga izađe iz egosfere i vrati se u beskonačnost. Penrose je pokazao da je takva putanja po geodeziku doista moguća. Impuls je lokalno, u trenutku raspada, očuvan: [1]

$$p^{(0)\mu} = p^{(1)\mu} + p^{(2)\mu} \quad . \tag{23}$$

Kontrakcija s Killingovim vektorom vodi na:

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)} \quad , \tag{24}$$

gdje je $E^{(2)} < 0$ pa vrijedi da je $E^{(1)} > E^{(0)}$ te na kraju procesa imamo više energije nego na početku. Energija je dobivena na račun smanjenja angularnog momenta crne rupe, što možemo vidjeti na sljedeći način.

Za Killingovo polje χ^μ:

$$\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu \quad , \tag{25}$$

Killingov horizont je ujedno horizont događaja (svjetlosna hiperploha određena s $r = r_+$).

Čestica s impulsom $p^{(2)\mu}$ prelazi horizont događaja i giba se prema singularnosti pa sigurno ima komponentu impulsa u smjeru normale na horizont, što je smjer Killingovog polja χ^μ. Da bi takva putanja bila moguća u stvarnosti, komponenta mora biti vremenolika:

$$p^{(2)\mu}\chi_\mu < 0 \quad . \tag{26}$$

Uvrstimo li definicije (21) i (22) u uvjet (26), slijedi:

$$L^{(2)} < \frac{E^{(2)}}{\Omega_H} \quad . \tag{27}$$

Kako je $E^{(2)}$ negativna, a Ω_H pozitivna, čestica ima negativni angularni moment što znači da čestica mora uletjeti u crnu rupu suprotno od smjera njezine rotacije kako bi ovakav proces bio moguć.

Promjene mase M i angularnog momenta crne rupe J zbog čestice koja je ušla u nju su:

$$\delta M = E^{(2)} \quad , \tag{28}$$

$$\delta J = L^{(2)} \quad , \tag{29}$$

te stoga nejednakost (27) možemo pisati kao:

$$\delta J < \frac{\delta M}{\Omega_H} \quad . \tag{30}$$

Zanima nas još površina vanjskog horizonta definiranog s izrazom (17). S obzirom na to da koeficijenti metrike ne ovise o vremenu, promotrimo hiperplohu fiksirane koordinate r u nekom trenutku t. Hiperploha je inducirani volumni element i metriku naslijedila od mnogostrukosti u koju je uronjena.

Induciranu metriku na podmnogostrukosti Σ s koordinatama y^i i mnogostrukosti M s koordinatama x^μ definiramo kao povlačenje metrike s M na Σ:

$$(\phi^* g)_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu} \quad , \tag{31}$$

gdje je $\phi : \Sigma \rightarrow M$. Volumni element na podmnogostrukosti je:

$$\epsilon = \sqrt{|\gamma|}\, dz \wedge dy^1 \wedge ... \wedge dy^{n-1} \quad , \tag{32}$$

gdje je prva koordinata okomita na hiperplohu, a $|\gamma|$ determinanta inducirane metrike.

Površinu vanjskog horizonta s induciranom metrikom:

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = ds^2(dt = 0, dr = 0, r = r_+) \quad , \tag{33}$$

računamo prema:

$$A = \int \sqrt{|\gamma|}\, d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad . \tag{34}$$

Može se pokazati da se površina horizonta A ne smanjuje. Ireducibilnu masu crne rupe definiramo kao:

$$M_{irr}^2 = \frac{A}{16\pi G^2} \quad , \tag{35}$$

Izrazimo li A iz (35) i diferenciramo izraz dobivamo:

$$\delta A = 16\pi G^2 \cdot 2 M_{irr} \delta M_{irr} \quad , \tag{36}$$

Zatim diferenciramo izraz (34) te ga zajedno s (17) uvrstimo u (36) iz čega slijedi:

$$\delta M_{irr} = \frac{a}{4 G M_{irr} \sqrt{G^2 M^2 - a^2}} \left(\frac{\delta M}{\Omega_H} - \delta J \right) \quad . \tag{37}$$

Uvrštavajući (37) u (36) dobivamo:

$$\delta A = 8\pi G \frac{a}{\Omega_H \sqrt{G^2 M^2 - a^2}} (\delta M - \Omega_H \delta J) \quad , \tag{38}$$

odnosno, ako izrazimo δM:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J \quad , \tag{39}$$

gdje je veličina κ tzv. površinska gravitacija ("surface gravity")

$$\kappa = \frac{\sqrt{G^2M^2 - a^2}}{2GM(GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2})} \quad , \tag{40}$$

o kojoj će više biti napisano u kasnijem poglavlju.

Ako u (30) prebacimo sve na lijevu stranu dobivamo da je $\frac{\delta M}{\Omega_H} - \delta J > 0$ i iz (37) slijedi:

$$\delta M_{irr} > 0 \rightarrow \delta A > 0 \quad . \tag{41}$$

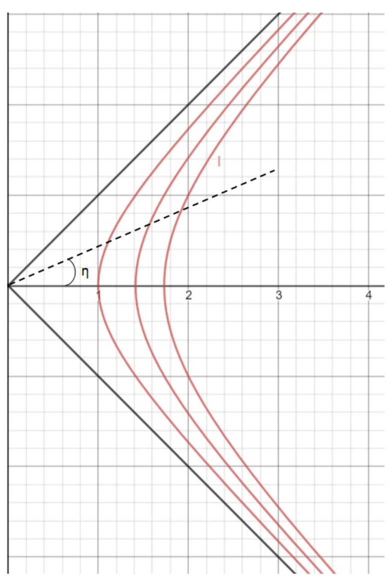
Ireducibilna masa ne može se smanjiti i odgovara energiji koju ne možemo dobiti iz crne rupe. Izgleda da ireducibilnost mase povlači da se površina horizonta ne može smanjiti, ali ovdje još nismo uključili kvantne efekte. U tu svrhu promotrimo najprije prostorvrijeme koje vidi čestica koja uniformno akcelerira.

2 Rindlerov opažač

Putanja čestice koja jednoliko ubrzava u (1 + 1)-dimenzionalnom prostorvremenu u inercijalnom koordinatnom sustavu s koordinatama (t, x) je: [1]

$$(t(\tau), x(\tau)) = \left(\frac{1}{a}\sinh(a\tau), \frac{1}{a}\cosh(a\tau) \right) \quad , \tag{42}$$

gdje je a akceleracija koju čestica osjeća, a τ njezino vlastito vrijeme. Putanja u ravnom prostorvremenu je hiperbola i prikazana na slici 4.



Slika 4: Putanja čestice koja uniformno akcelerira kako ju vidi inercijalni opažač. Pravac je Rindlerov horizont koji odgovara svjetlosnoj zraci koja krene iz ishodišta u t=τ=0.

Svjetlost koja u početnom trenutku krene iz ishodišta čini tzv. Rindlerov horizont jer ta svjetlost nikad neće doći do opažača.

Killingov vektor koji generira Rindlerov horizont je Lorentzov potisak $\chi = x\partial_t + t\partial_x$. Ovo je očitije u polarnim koordinatama l i η, gdje je metrika: [5]

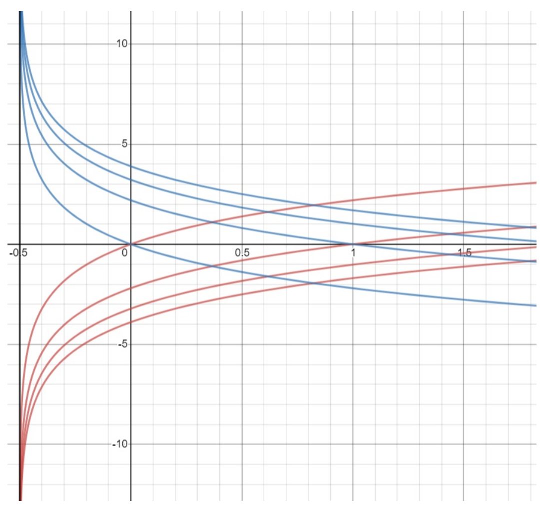
$$-dt^2 + dx^2 = -l^2 d\eta^2 + dl^2 \quad , \tag{43}$$

i ne ovisi o koordinati η pa je Killingovo polje jednostavno $\chi = \partial_\eta$.

Metrika u Rindlerovim koordinatama τ i ξ je:

$$ds^2 = -(1 + a\xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2 \quad , \tag{44}$$

a geodezici u Rindlerovim koordinatama prikazani su na slici 5.



Slika 5: Geodezici u Rindlerovim koordinatama.

Slično kao kod Schwarzschildove metrike, geodezici nikad ne prelaze plohu $\xi = -\frac{1}{a}$ i vidimo da u toj točki determinanta metrike (44) iščezava (metrika je dijagonalna, a za navedeni uvjet, $g_{\tau\tau}$ komponenta je nula). Ta ploha predstavlja horizont u Rindlerovih koordinatama i tamo svjetlosni geodezici miruju:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 1 + a\xi|_{\xi=-\frac{1}{a}} = 0 \quad . \tag{45}$$

2.1 Unruhov efekt

Rindlerov opažač koji se giba kroz vakuum Minkowskog opaža čestice čiji termalni spektar odgovara temperaturi:

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad , \tag{46}$$

Ovaj fenomen nazivamo Unruhov efekt. Opažač u inercijalnom sustavu bi to isto stanje definirao kao stanje bez čestica s očekivanom vrijednosti energije vakuuma jednakoj nuli. Rezultati nisu kontradiktorni jer vakuum definiramo kao stanje najniže energije, a opažač koji akcelerira vidi drukčiju najnižu energiju od one koju vidi opažač u inercijalnom sustavu.

Do ovog rezultata može se doći na sljedeći način.[1] [8] Neka u prostoru postoji realno skalarno polje ϕ čiji Lagrangian $\mathcal{L}$ ima oblik:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial\nu\phi \quad . \tag{47}$$

U ravnom prostovremenu je $-g = 1$ i $g^{\mu\nu}$ ima kanonski oblik pa se ovaj izraz svodi na tipični Lagrangian.

Transformiramo metriku Minkowskog tako da bude jednostavnije opisivati akcelererajućeg opažača pomoću transformacija:

$$\begin{aligned} t &= \pm\frac{e^{a\zeta}}{a}\sinh(a\eta) \quad , \\ x &= \pm\frac{e^{a\zeta}}{a}\cosh(a\eta) \quad , \end{aligned} \tag{48}$$

gdje se opažač s akceleracijom a giba po svjetskoj liniji konstantne koordinate $\zeta = 0$ i $\eta = \tau$ (iz (42)). Predznaci su namješteni tako da opišemo dijelove prostora gdje je $x > 0$ i $x < 0$ koje ćemo označavati s I i II. Metrika ima oblik:

$$ds^2 = e^{2a\zeta}(-d\eta^2 + d\zeta^2) \quad . \tag{49}$$

Determinanta metrike, jer je dijagonalna, je $\sqrt{-g} = e^{2a\zeta}$. Da bismo kvantizirali polje izračunamo kanonski impuls:

$$\pi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \quad , \tag{50}$$

i kanonske komutacijske relacije:

$$\begin{aligned} [\phi(\zeta,\eta), \phi(\zeta',\eta)] &= [\pi(\zeta,\eta), \pi(\zeta',\eta)] \quad , \\ [\phi(\zeta,\eta), \pi(\zeta',\eta)] &= \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta(\zeta-\zeta') \quad . \end{aligned} \tag{51}$$

Zatim definiramo operatore poništenja $b_I(k)$ i $b_{II}(k)$ s impulsom k i njihove hermitske konjugate tako da vrijedi:

$$\phi(\zeta,\eta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{4\pi|k|}\left[b_I(k)e^{ik\zeta-i|k|\eta} + b_{II}(k)e^{ik\zeta+i|k|\eta} + h.c.\right] \quad . \tag{52}$$

Ovo je kvantizacija u ζ i η koordinatama, a mi ju želimo povezati s kvantizacijom u koordinatama Minkowskog. Ovdje nailazimo na problem jer se modovi harmoničkog oscilatora protežu kroz cijeli prostor, a mod pobuđen u I odgovara području $x > 0$ koje ne možemo proširiti na cijeli prostor samo pomoću valova pozitivnih frekvencija. Stoga očekujemo da je operator poništenja u koordinatama Minkowskog superpozicija operatora b_I i b_{II} zbog čega vakuum Minkowskog neće biti isti kao Rindlerov vakuum. Odnosno, iako su vakuum Minkowskog i Rindlerov vakuum samo dvije različite reprezentacije istog Hilbertovog prostora interpretacija Fockovog prostora stanja je različita i vakuum Minkowskog će u Rindlerovoj reprezentaciji opisivati stanje u kojem postoje čestice.

Kako bismo pronašli operator koji poništava vakuum Minkowskog primjetimo da iz (48) i zapisa hiperbolnih funkcija u eksponencijalnom obliku vrijedi:

$$e^{a(\zeta-\eta)} = \begin{cases} a(x-t) & \mathrm{I} \\ -a(x-t) & \mathrm{II} \end{cases} , \quad e^{a(\zeta+\eta)} = \begin{cases} a(x+t) & \mathrm{I} \\ -a(x+t) & \mathrm{II} \end{cases} , \tag{53}$$

pa imamo vezu između koordinata. Za $k > 0$ i jer je $\omega = k$ slijedi (iz (53)):

$$\begin{aligned} e^{i\omega(\zeta-\eta)} &= a^{i\frac{\omega}{a}}(-t+x)^{i\frac{\omega}{a}} \quad , \\ e^{i\omega(\zeta+\eta)} &= a^{-i\frac{\omega}{a}}(-t-x)^{-i\frac{\omega}{a}} \quad , \end{aligned} \tag{54}$$

gdje je prvi izraz u području I, a drugi u II. Da bi se područje II poklapalo s I drugi izraz u prethodnoj relaciji moramo kompleksno konjugirati i okrenuti k pa imamo:

$$e^{i\omega(\zeta-\eta)} = a^{i\frac{\omega}{a}} e^{\pi\frac{\omega}{a}} (-t+x)^{-i\frac{\omega}{a}} \quad . \tag{55}$$

Kombinacija $b_I(k) + e^{-\pi\frac{\omega}{a}} b_{II}(-k)^\dagger$ će opisivati mod s pozitivnom frekvencijom te se može pokazati da je operator poništenja vakuuma Minkowskog $c_I(k)$:

$$c_I(k) = \left(2\sinh\frac{\pi|k|}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{\pi|k|}{2a}} b_I(k) + e^{-\frac{\pi|k|}{a}} b_{II}(-k)^\dagger\right) \quad , \tag{56}$$

gdje je faktor ispred zagrade normalizacija i vrijedi:

$$c_I(k)|0_M >= 0 \quad . \tag{57}$$

Očekivani broj čestica koje vidi Rindlerov opažač u vakuumu Minkowskog je:

$$< 0_M|b_I(k)^\dagger b_I(k)|0_M > \sim \frac{1}{e^{\frac{|k|2\pi}{a}} - 1} \quad , \tag{58}$$

Ovaj oblik odgovara očekivanom broju čestica u Bose-Einsteinovoj raspodjeli n_i:

$$n_i(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{T}} - 1} \quad , \tag{59}$$

gdje je ϵ_i energija i-tog nivoa, μ je kemijski potencijal, a T temperatura. Usporedbom eksponenata slijedi gore navedeni rezultat (46):

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad .$$

2.2 Površinska gravitacija Rindlerovog horizonta

Površinska gravitacija stacionarne crne rupe definirana je na različite načine, no ovdje ćemo se koristiti izrazom: [3]

$$\kappa\chi_\mu = -\frac{1}{2}\partial_\mu\chi^2 \quad , \tag{60}$$

izvrijednjenim na Killingovom horizontu Σ. Potrebno je još specificirati normalizaciju Killingovog vektora kako bi bio jedinstveno određen, jer će Killingov vektor skalirani za neki faktor dati drugačiju vrijednost površinske gravitacije.

Svaki Killingov horizont ima neku površinsku gravitaciju. U statičkom prostorvremenu površinska gravitacija je akceleracija opažača koji miruje tik izvan horizonta kako ju mjeri opažač u beskonačnosti. Drugim riječima, to je sila po jedinici mase kojom moramo djelovati na česticu iz beskonačnosti, da bi čestica ostala na horizontu.

Zapravo se radi samo o renormalizaciji akceleracije tijela koje je blizu horizonta, jer akceleracija tijela koje je na rubu horizonta divergira. Znamo da je na horizontu Killingov vektor svjetlosnog tipa pa njegova norma V iščezava, stoga na horizontu definiramo površinsku gravitaciju $\kappa = Va|_{horizont} = 0 \cdot \infty$ koja ima konačnu vrijednost.

Da bismo izračunali površinsku gravitaciju Rindlerovog horizonta koristimo izraz (60). U Kartezijevim koordinatama norma Killingovog vektora je $-x^2 + t^2$ pa za x komponentu vrijedi:

$$\partial_x \chi^2 = 2x \quad . \tag{61}$$

iz čega slijedi da je površinska gravitacija:

$$\kappa \chi_x = \kappa t = x \quad , \tag{62}$$

stoga je $\kappa = \frac{x}{t}$ što je na horizontu jednako jedan (zanima nas apsolutna vrijednost).

Može se još pokazati da je akceleracija opažača u prostovremenu Minkowskog jednaka površinskoj gravitaciji.[1][3] Promotrimo hiperbolu zadanu s $l = l_0$, tj.

$$-t^2 + x^2 = l_0^2 \quad , \tag{63}$$

Vlastito vrijeme je $d\tau = l_0 d\eta$ pa za metriku Minkowskog možemo pisati:

$$ds^2 = -\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 d\tau^2 + dl^2 \quad . \tag{64}$$

Usporedbom izraza (43) i (64) vidimo da je Killingovo polje skalirano i vrijedi $\partial_\tau = \frac{1}{l_0}\partial_\eta$ pa je $\kappa = \frac{1}{l_0}$. Zatim još iz relativističkog izraza za akceleraciju a i brzine $u = \frac{1}{l_0}(t, x, 0, 0)$ normirane tako da bude jednaka -1 i iz (63) imamo:

$$a = (u \cdot \nabla)\, u = \frac{1}{l_0^2}(x\partial_t + t\partial_x)(t, x, 0, 0) = \frac{1}{l_0^2}(x, t, 0, 0) \quad . \tag{65}$$

Iz (63) vidimo da je norma vektora $(t, x, 0, 0)$ jednaka l_0 pa je stoga akceleracija $a = \frac{1}{l_0}$. Dakle površinska gravitacija Rindlerovog horizonta jednaka je akceleraciji opažača.

3 Hawkingov efekt

Iz kvantne teorije polja znamo da vakuum nije statičan, već postoje fluktuacije koje pomoću Feynmanovih dijagrama predstavljamo kao virtualne čestice i antičestice koje nastaju i poništavaju se. Ako virtualni par nastane blizu horizonta crne rupe, može se dogoditi da jedna čestica prijeđe horizont događaja, a druga otputuje u beskonačnost. Takve čestice opažamo kao zračenje crne rupe i nazivamo ga Hawkingovim zračenjem.

Kod Hawkingovog zračenja se radi o istim fluktuacijama koje smo promatrali kod Unruhovog efekta. Razlika je u tome što dio čestica padne u crnu rupu, a dio bježi u beskonačnost.

Bitna napomena je još to da svi opažači opažaju Hawkingovo zračenje, a vezu Unruhovog efekta i Hawkingovog zračenja ćemo promotriti na primjeru Schwarzschildove metrike.

Izračunajmo akceleraciju opažača koji miruje u nekoj točki izvan Schwarzschildove crne rupe (izraz (3)):

$$ds^2(r = r_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0) = -d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 \quad , \tag{66}$$

Brzina $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ je onda:

$$u^\mu = \left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0\right) \quad . \tag{67}$$

Akceleracija a^μ je:

$$a^\mu = u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = \frac{GM}{r\sqrt{r - 2GM}} \quad . \tag{68}$$

Vidimo da statični opažač koji je jako blizu horizonta $r = 2GM$ ima jako veliku akceleraciju u usporedbi sa Schwarzschildovim radijusom koji određuje zakrivljenost prostorvremena pa će na vremenskoj i prostornoj skali za njega prostor izgleda otprilike ravno. Promotrimo drugog opažača koji slobodno pada blizu crne rupe. On vidi prostor Minkowskog i za njega statičan opažač jednoliko ubrzava u ravnom prostorvremenu i detektira Unruhovu radijaciju koja odgovara temperaturi $T = \frac{a}{2\pi}$.

Kako čestice koje ne padnu u crnu rupu odlaze u beskonačnost zanima nas što vidi opažač tamo. Znamo da je u statičkom prostorvemenu za opažača u beskonačnosti akceleracija opažača na horizontu jednaka površinskoj gravitaciji stoga slijedi:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad . \tag{69}$$

Ovo je temperatura na kojoj zrači crna rupa za promatrača u beskonačnosti. Rezultat vrijedi generalno za crne rupe što ovdje nećemo dalje argumentirati.

4 Termodinamika crnih rupa

4.1 Četiri zakona termodinamike crnih rupa

Prvi zakon

Prvi zakon termodinamike glasi:

$$dE = TdS - pdV \quad , \tag{70}$$

gdje je E energija, T temperatura, S entropija, a pdV rad obavljen na sustavu. Usporedimo ga s jednadžbom (39):

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J \quad .$$

Korespondencija je sljedeća:

$$E \Leftrightarrow M \quad , \tag{71}$$

$$S \Leftrightarrow \frac{A}{4G} \quad , \tag{72}$$

$$T \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2\pi} \quad . \tag{73}$$

Iz jednadžbe (39) nije očito kako razdvojiti $\frac{S}{A}$ i $\frac{T}{\kappa}$. Ovo je riješeno kad je Hawking pokazao da crna rupa zrači kad se u obzir uzmu kvantni efekti pa se crne rupe ponašaju kao tijela energije $E = M$ u termodinamičkoj ravnoteži s temperaturom $T = \frac{\kappa}{2\pi}$. Entropijom je onda $S = \frac{A}{4G}$.

Jer crna rupa zrači ima smisla govoriti o termodinamici crne rupe, a ne samo o analogiji.

Drugi zakon

Površina horizonta događaja ne smanjuje se u vremenu:

$$\delta A \geqslant 0 \quad . \tag{74}$$

Ako se dvije crne rupe sjedine, površina konačnog horizonta bit će veća od zbroja površina pojedinih horizonata:[2]

$$A_3 > A_1 + A_2 \quad . \tag{75}$$

Očita je analogija s entropijom, tj. s drugim zakonom termodinamike. U termodinamici se ukupna entropija sustava uvijek povećava. Razlika je jedino u tome što se u termodinamici entropija pojedinih dijelova sustava može smanjiti, npr. ako neki dio sustava ohladimo, dok se u slučaju crnih rupa površina svake pojedine crne rupa ne može smanjiti.

Jer crna rupa zrači, gubi energiju na račun svoje mase kako bi energija bila očuvana. Izjednačimo li energiju Hawkingovih čestica s masom crne rupe koju izgubi dolazimo do zaključka da će crna rupa izgubiti svu svoju masu u konačnom vremenu. Ovo je proces "isparavanja" crne rupe ("black hole evaporation"). Tijekom tog procesa, površina horizonta se smanji, stoga moramo popraviti drugi zakon koji onda glasi:

$$\delta \left(S + \frac{A}{4G} \right) \geqslant 0 \quad , \tag{76}$$

gdje je S entropija materije izvan crne rupe, a A zbroj svih površina horizonta događaja.

Drugi zakon je bilo potrebno generalizirati jer kvantno mehanički tenzor energije i impulsa ne zadovoljava tzv. "null energy condition" - svjetlosni energijski uvjet, što je bila pretpostavka teorema o površini. Radi se o uvjetu na oblik tenzora energije i impulsa, gdje izvor promatramo kao idealni fluid gustoće ρ i tlaka p prema kojem energija može biti negativna dok god se može kompenzirati pozitivnim tlakom.

Nulti zakon

Površinska gravitacija κ je stalna duž cijele hiperplohe horizonta događaja. Ovo odgovara nultom zakonomu termodinamike prema kojem sustav u termodinamičkoj ravnoteži ima stalnu temperaturu u svakoj točki.

Treći zakon

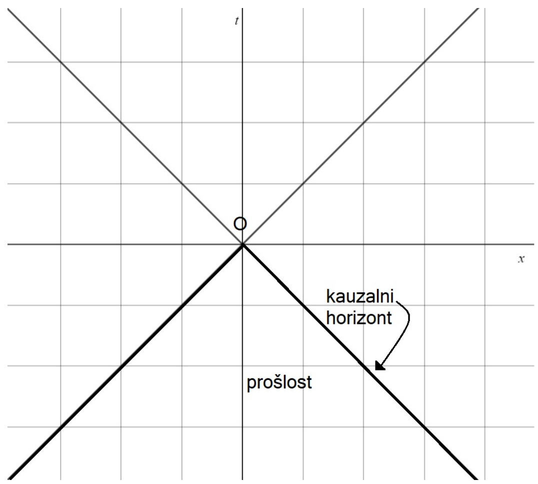
Prema trećem zakonu termodinamike, nije moguće u konačno mnogo koraka sniziti temperaturu sustava tako da je jednaka nuli. Analogna izjava za crne rupe glasila bi da nije moguće smanjiti površinsku gravitaciju u konačno mnogo koraka tako da bude jednaka nuli.

Iz izraza za površinsku gravitaciju Kerrove crne rupe (40), vidimo da je ona jednaka nuli ako je $\frac{J}{GM^2} = 1$. Površinsku gravitaciju možemo smanjiti ako povećamo angularni moment crne rupe što možemo postići ako u crnu rupu bacamo čestice, no površinska gravitacija se smanjuje sve manje sa svakom sljedećom česticom kako se približavamo angularnom momentu koji odgovara kritičnom uvjetu.

Ovaj zakon (u ovom obliku) nije fundamentalan kao prošla tri, no naveo se radi potpunosti.

4.2 Entropija kauzalnog horizonta

Postavlja se još pitanje možemo li zakone termodinamike, konkretno vezu između površine horizonta i entropije, dobivene za horizont crne rupe poopćiti na druge kauzalne horizonte —svjetlosne hiperplohe koje predstavljaju granicu svih točaka do kojih možemo doći gibajući se po vremenolikim krivuljama u prošlost. Kauzalni horizont prikazan je na slici 6. [5]



Slika 6: Kauzalni horizont za opažača O u ishodištu. Točke koje su iza horizonta ne mogu utjecati na O, tj. nisu kauzalno povezane. Granica je svjetlosna hiperploha koju generiraju svjetlosni geodezici koji se propagiraju unatrag u vremenu.

Jedan primjer kauzalnog horizonta je Rindlerov horizont kojeg vidi opažač koji jednoliko akcelerira. No taj horizont očito ovisi o opažaču i kako opažač usporava tako je horizont sve dalje iza njega dok napokon ne ode u beskonačnost kad opažač stane. Još jedna razlika je to što iza Rindlerovog horizonta ne postoji singularnost.

Ipak, postoji koncept koji je zajednički svim horizontima. Površina horizonta proporcionalna je entropiji, a znamo da je ona usko povezana s količinom dostupnih informacija. Informacije o objektu koji je prošao horizont izgubljene su za opažača koji stoji izvan njega. Jedina dostupna informacija o objektu iza horizonta je njegov utjecaj na gravitacijsko polje.

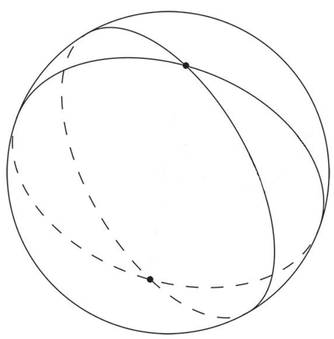
Svojstvo da se horizont ponaša kao neka vrsta barijere iza koje nije moguće saznati informacije nije karakteristično samo za horizont crne rupe nego za svaki horizont, jer on odvaja dijelove prostore koji su kauzalno povezani s opažačem, tj. dijelove prostora o kojima opažač može dobiti informaciju, od onih o kojima ne može. S tog vidika ima smisla govoriti o entropiji kauzalnog horizonta.

Ovo nisu najuvjerljiviji argumenti, no interpretacija entropije horizonta je još uvijek otvoreno pitanje. Klasična i kvantna razmatranja koja u ovom seminaru nećemo razmatrati pokazuju da je veza između termodinamike i horizonata u prostorvremenu općenita.[3]

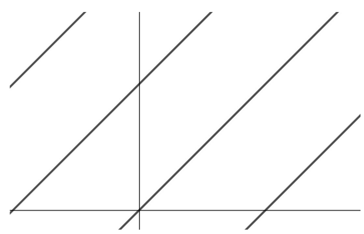
Zanima nas termodinamika kauzalnog horizonta, tj. ponašanje svjetlosnih geodezika koji generiraju horizont kad u sustav (prostorvrijeme iza horizonta) ulazi energija što je opisano Raychaudhurijevom jednadžbom.

5 Raychaudhurijeva jednadžba

Osim Riemannovog tenzora i njegovih kontrakcija, još jedan način na koji možemo saznati je li prostor zakrivljen je promatrajući kako se ponašaju susjedni geodezici na mnogostrukosti.



Slika 7: Geodezici 2-sfere. Sfera je primjer zakrivljene mnogostrukost pa geodezici ne putuju paralelno.



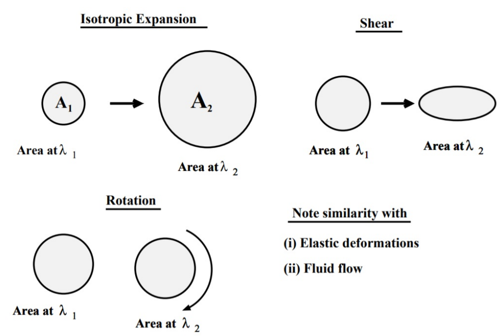
Slika 8: Geodezici u ravnom dvodimenzionalnom prostoru su pravci i uvijek su paralelni.

U ravnom prostorvremenu geodezici koji su paralelni u nekom trenutku ostaju paralelni, dok u zakrivljenom prostoru to nije slučaj. Primjer je na slikama 7 i 8.

Kako bismo promatrali ponašanje susjednih geodezika definiramo kongruenciju geodezika —skup geodezika koji predstavljaju neinteragirajuće čestice, tj. nestlačivi tok čestica. Kongruencija završava u točki u kojoj se geodezici sijeku tako da svaka točka prostovremena pripada jednoj krivulji. Evolucija geodezika prikazana je na slici 9. Zanimaju nas svjetlosni geodezici čiju brzinu toka definiramo kao $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Promatramo evoluciju vektora u dvodimenzionalnom potprostoru $T_\perp$ koji čine vektori okomiti na svjetlosni tangentni vektor k^μ i prate devijaciju susjednih geodezika. Usto definiramo i pomoćni svjetlosni vektor l^μ za kojeg zahtijevamo:

$$l^\mu k_\mu = -1 \quad , \tag{77}$$

$$k^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0 \quad , \tag{78}$$



Slika 9: Devijacija geodezika. Moguća je rotacija, ekspanzija/kontrakcija koja opisuje promjenu površine i smicanje koje govori o promjeni oblika površine. [4]

U prostoru $T_\perp$ žive vektori V^μ takvi da:

$$T_\perp = \{V^\mu | \, V^\mu k_\mu = 0, V^\mu l_\mu\} \quad , \tag{79}$$

Tenzor projekcije Q, koji projicira u prostor $T_\perp$ definiramo tako da je:[1]

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu l_\nu + k_\nu l_\mu \quad , \tag{80}$$

a iz izraza (79) dobivamo:

$$Q_{\mu\nu} V^\nu = V_\mu \quad . \tag{81}$$

Iz jednakosti (78), kompatibilnosti metrike s kovarijantnom derivacijom i jer k^μ zadovoljava jednadžbu geodezika slijedi:

$$k^\rho \nabla_\rho Q^\mu{}_\nu = 0 \quad , \tag{82}$$

Transport vektora V duž k dan je izrazom koji, jer komutator vektora V i k iščezava, možemo zapisati kao:

$$k^\nu \nabla_\nu V^\mu = \hat{B}^\mu{}_\nu V^\nu \quad , \tag{83}$$

gdje je $\hat{B}^\mu{}_\nu = \nabla_\nu k^\mu$. Može se još pokazati:

$$\begin{aligned} k^\nu \nabla_\nu V^\mu &= k^\nu \nabla_\nu (Q^\mu{}_\rho V^\rho) \\ &= Q^\mu{}_\rho k^\nu \nabla_\nu V^\rho \\ &= Q^\mu{}_\rho \hat{B}^\rho{}_\nu V^\nu \\ &= Q^\mu{}_\rho \hat{B}^\rho{}_\nu Q^\nu{}_\sigma V^\sigma = \\ &= B^\mu{}_\sigma V^\sigma \end{aligned} \tag{84}$$

gdje je projicirani tenzor B definiran kao:

$$B^\mu{}_\nu = Q^\mu{}_\rho Q^\nu{}_\sigma \hat{B}^\rho{}_\nu \quad . \tag{85}$$

Slijedi da je dovoljno promatrati projicirani tenzor B.

Svaki (0, 2) tenzor možemo rastaviti na antisimetrični ω i simetrični dio koji još rastavljamo na trag θ i dio bez traga σ. Imamo:

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta Q_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad , \tag{86}$$

$$\theta = Q^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = B^{\mu}_{\mu} \quad , \tag{87}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\theta Q_{\mu\nu} \quad , \tag{88}$$

$$\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]} \quad . \tag{89}$$

Faktor $\frac{1}{2}$ potječe od $Q^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} = 2$.
Evolucija kongruencije dana je kovarijantnom derivacijom u smjeru vektora k. Evoluciju izračunamo za cijeli tenzor $B_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} k^{\sigma}\nabla_{\sigma} B_{\mu\nu} &= k^{\sigma}\nabla_{\sigma}(Q^{\alpha}_{\ \mu} Q^{\beta}_{\ \nu} \nabla_{\alpha} k_{\beta}) \\ &= Q^{\alpha}_{\ \mu} Q^{\beta}_{\ \nu} k^{\sigma} \nabla_{\sigma}\nabla_{\alpha} k_{\beta} \\ &= -Q^{\alpha}_{\ \mu} Q^{\beta}_{\ \nu} (\hat{B}^{\sigma}_{\alpha} \hat{B}_{\beta\sigma} + R_{\alpha\lambda\beta\sigma} k^{\lambda} k^{\sigma}) = \\ &= -B^{\sigma}_{\mu\nu} B_{\nu\sigma} - Q^{\alpha}_{\ \mu} Q^{\beta}_{\ \nu} R_{\alpha\lambda\beta\sigma} k^{\lambda} k^{\sigma} \quad . \end{aligned} \tag{90}$$

Uzmemo trag tako da pomnožimo zadnji red jednadžbe (90) s $Q^{\mu\nu}$ pa je evolucija traga:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -B^{\nu\sigma} B_{\nu\sigma} - Q^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\beta\sigma} k^{\lambda} k^{\sigma} \quad . \tag{91}$$

Uvrstimo jednadžbu (86) u zadnji red i $Q^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ da dobijemo izraz:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} k^{\mu\nu} \quad . \tag{92}$$

Ovo je Raychudhurijeva jednadžba koja opisuje evoluciju ekspanzije kongruencije svjetlosnih geodezika. Slične jednadžbe mogu se dobiti za smicanje i rotaciju, no neće se izvoditi jer nisu potrebne u daljnjim razmatranjima.

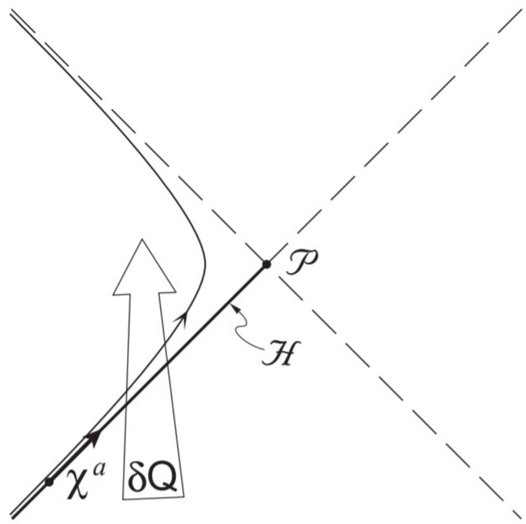
Horizont događaja je svjetlosna hiperploha koja je ujedno i Killingov horizont pa kažemo da je horizont generiran kongruencijom svjetlosnih geodezika. Kad govorimo o tome da horizont npr. ekspandira zapravo se misli na kongruenciju geodezika koji generiraju taj horizont i ekspandiraju.

6 Einsteinova jednadžba kao jednadžba stanja

U nekom prostorvremenu opisanom proizvoljnom metrikom $g_{\mu\nu}$ kauzalni horizont nekog opažača može ekspandirati ili smicati se, ali mi ćemo se dalje ograničiti samo na horizonte u ravnoteži za koje ekspanzija i smik iščezavaju.

6.1 Ravnotežna termodinamika

Lokalni horizont u ravnoteži definiramo na način da izaberimo proizvoljnu točku prostorvremena p u kojoj je zbog principa ekvivalencije prostorvrijeme ravno. U okolini te točke definiramo 2-plohu $\mathcal{P}$ prostornog tipa. Horizont čini kongruencija svjetlosnih geodezika usmjerena u prošlost s 2-plohe $\mathcal{P}$. Oni globalno ekspandiraju, ali ih u okolini točke p u prvom redu aproksimiramo kao paralelne, tj. u okolini točke p su ekspanzija i smik geodezika jednaki nuli. Taj horizont je Rindlerov horizont u lokalnoj ravnoteži, a sustav je dio prostorvremena iza Rindlerovog horizonta. Prikaz je na slici 10.



Slika 10: Svaka točka na dijagramu je 2-ploha prostornog tipa. Hiperbola je svjetska linija opažača koji uniformno akcelerira, χ^a je Killingovo polje koje generira Lorentzove potiske na lokalnom Rindlerovom horizontu $\mathcal{H}$ 2-plohe $\mathcal{P}$, a δQ je tok topline. [6]

Lokalni Rindlerovi horizonti postoje u svakoj točki prostorvremena.

Tok topline δQ definiramo kao tok energije i impulsa T_{ab} koji prelazi horizont s obzirom na Killingov vektor χ, generator Lorentzovih potisaka, koji generira Killingov horizont. Tok topline je:

$$\delta Q = \int_{\mathcal{H}} T_{ab} \chi^a d\Sigma^b \quad , \tag{93}$$

gdje je integriramo po dijelu horizonta $\mathcal{H}$, a tok topline je u smjeru prošlosti plohe $\mathcal{P}$.

Koordinatni sustav postavimo tako da potisak u blizini 2-plohe $\mathcal{P}$ ima smjer u buduću unutrašnjost (slika 10), a na samoj 2-plohi $\mathcal{P}$ iščezava. Ovo možemo postići npr. ako je potisak $\chi = z\partial t + t\partial z$, a 2-ploha $\mathcal{P}$ u $x - y$ ravnini ($t = 0, z = 0$).

Ako definiramo još vektor k^a —generator horizonta za afini parametar λ (jednak nuli u točki p) —koji je negativan u smjeru prošlosti plohe $\mathcal{P}$, element hiperplohe po kojoj integriramo možemo raspisati kao $d\Sigma^a = k^a d\lambda d\mathcal{A}$, gdje je $d\mathcal{A}$ element poprečnog presjeka horizonta. Postoji još veza između vektora k i χ dana s izrazom:

$$\chi^a = \frac{dx^a}{du} = \frac{dx^a}{d\lambda}\frac{d\lambda}{du} = \frac{d\lambda}{du} k^a \quad . \tag{94}$$

Parametar λ i u na Killingovom horizontu su povezani relacijom: [7]

$$\lambda = e^{\kappa u} \quad , \tag{95}$$

gdje je κ površinska gravitacija, koju uvrstimo u izraz (94) iz čega slijedi:

$$\chi^a = \kappa\lambda k^a \quad . \tag{96}$$

Tok topline je stoga: [6]

$$\delta Q = -\kappa \int_{\mathcal{H}} \lambda T_{ab} k^a k^b d\lambda d\mathcal{A} \quad , \tag{97}$$

gdje se predznak minus pojavio jer tok topline i k imaju suprotan smjer.

Tok topline kroz horizont deformira površinu horizonta za $\delta\mathcal{A}$. Perturbacija je infinitezimalna pa je horizont i dalje u ravnoteži, a znamo da u termodinamici tada vrijedi jednakost $\delta Q = TdS$. Znamo još da prema drugom zakonu postoji veza između entropije i površine pa možemo pisati:

$$dS = \eta\delta\mathcal{A} \quad , \tag{98}$$

gdje je $\delta\mathcal{A}$ varijacija površine poprečnog presjeka horizonta, a η konstanta (zbog dimenzija).

S druge strane, deformacija horizonta znači da postoji devijacija kongruencije geodezika koji generiraju horizont što je opisano Raychaudurijevom jednadžbom (92). Varijacija poprečnog presjeka δA je:

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\mathcal{H}} \theta d\lambda d\mathcal{A} \quad , \tag{99}$$

gdje je θ ekspanzija generatora horizonta s obzirom na parametar λ.

Ploha $\mathcal{P}$ je postavljena tako da na njoj ekspanzija i smicanje u prvom redu iščezavaju pa su θ i σ jednake nuli, a članovi višeg reda θ^2 i σ^2 zanemarivi u usporedbi s Riccijevim tenzorom. Stoga Raychaudurijevu jednadžbu aproksimiramo izrazom:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -R_{ab} k^a k^b \quad . \tag{100}$$

Jednadžba (100) opisuje promjenu površine kongruencije geodezika koji se približavaju točki p. Integriramo tu jednadžbu da dobijemo izraz:

$$\theta = -\lambda R_{ab} k^a k^b \quad , \tag{101}$$

i uvrstimo ga u izraz (99):

$$\delta A = -\int_{\mathcal{H}} \lambda R_{ab} k^a k^b d\lambda d\mathcal{A} \quad . \tag{102}$$

Temperatura T na Rindlerovom horizontu je $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ kao što je prethodno bilo izvedeno pa usporedbom jednadžbi (97) i (102) slijedi:

$$\begin{aligned} \delta Q = TdS = \frac{\kappa}{2\pi}\eta\delta A \rightarrow \\ T_{ab}k^a k^b = \frac{\eta}{2\pi} R_{ab} k^a k^b \quad . \end{aligned} \tag{103}$$

Odnosno:

$$\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} = R_{ab} + f g_{ab} \quad , \tag{104}$$

gdje je f neka funkcija koju moramo odrediti. Kad jednadžbu (104) pomnožimo s $k^a k^b$ uz f je norma vektora k koja je jednaka nuli jer je k svjetlosni vektor i dobivamo jednadžbu (103).

Odnosno, ako jednadžba (104) vrijedi u točki p onda mora vrijediti za svaki k.

Odredimo funkciju f. Najprije kontrahiramo jednadžbu (104) s g^{ac}, a zatim izraz kovarijantno deriviramo:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\eta} T^c{}_b &= R^c{}_b + f\delta^c_b \\ \frac{2\pi}{\eta} \nabla_c T^c{}_b &= \nabla_c R^c{}_b + \nabla_c f \delta^c_b \\ 0 &= \nabla_b \frac{1}{2} R + \nabla_b f \end{aligned} \tag{105}$$

Tenzor energije i impulsa je očuvan, pa kovarijantna derivacija tenzora T u drugom redu iščezava, a u trećem redu korišten je Bianchijev identitet:

$$\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad . \tag{106}$$

U zadnjem izrazu iskoristimo svojstva linearnosti kovarijantne derivacije pa je $\nabla_b(\frac{1}{2}R + f) = 0$. Slijedi da je:

$$f = -\frac{R}{2} + \lambda \quad , \tag{107}$$

gdje je λ konstanta. Ovaj izraz uvrstimo u jednakost (104) iz čega slijedi:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab} \quad . \tag{108}$$

Jednadžba (108) je Einsteinova jednadžba.

Jednadžbu koja opisuje kako materija zakrivljuje prostorvrijeme dobili smo iz relacija koje povezuju toplinu, entropiju i temperaturu —varijabli koje određuju jednadžbu stanja —pod pretpostavkom da je horizont u ravnoteži pa je stoga Einsteinova jednadžba opis ravnotežnog stanja zakrivljenosti prostorvremena.

7 Zaključak

Iz veze između površine horizonta i entropije te ravnotežne termodinamičke relacije $\delta Q = TdS$ dobivena je Einsteinova jednadžba. Ona očito neće više vrijediti kad ne postoji ravnoteža što je slučaj koji bi trebalo posebno proučiti.

Osim toga, jednadžba stanja vrijedi samo u termodinamičkoj granici —dobijemo ju kao aproksimaciju dinamike u pozadini koju određuju jednadžbe gibanja i one su fundamentalni zakoni. Tako Einsteinova jednadžba ne predstavlja fundamentalnu jednadžbu pa je ni nema smisla pokušavati kvantizirati iz istog razloga zbog kojeg nema smisla kvantizirati jednadžbu stanja plina, iako je svaki atom plina kvantna čestica.

Literatura

[1] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited, 2014.

[2] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking. *The Four Laws of Black Hole Mechanics*. Commun. math. Phys. 31, 1973.

[3] T. Jacobson. *Black holes and Hawking Radiation in Spacetime and Its Analogues*. Springer Inernational Publishing Switzerland, 2013.

[4] S. Kar, S. Sengupta. *The Raychaudhuri Equation: A Brief Review*. Pramana, Vol. 69, No. 1, 2007.

[5] T. Jacobson, R. Parentani. *Horizon Entropy*. Foundations of Physics, Vol. 33, No. 2, 2003.

[6] T. Jacobson. *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State* Phys. Rev. Lett. 75, 1995.

[7] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

[8] The Unruh Effect.
`https://web.stanford.edu/~ajlucas/The%20Unruh%20Effect.pdf`