Nulti zakon termodinamike crnih rupa

Irena Barjašić
PMF-fizika
8. rujna 2016.

Cilj ovog seminara je upoznati se s postojanjem analogije između četiri zakona termodinamike i četiri zakona koji opisuju mehaniku crne rupe. Glavni fokus bit će na nultom zakonu, te ćemo prvo uvesti njegov centralan pojam - površinsku gravitaciju. Nakon razrade svih uvjeta pod kojima je ispunjeni, osvrnut ćemo se na nedavna istraživanja nultog zakona te slučaja u kojem ne vrijedi.

1 Četiri zakona mehanike crnih rupa

Zakoni termodinamike izraz su makroskopske aproksimacije sustava koje nije moguće opisati egzaktno mikroskopski. Stoga bi bilo neobično pretpostaviti da je moguće napraviti poveznicu između termodinamike kao takve i skupa zakona koji slijede iz teorema diferencijalne geometrije, točnije zakona mehanike crnih rupa. No ipak, teorem o površini crnih rupa (Hawking,1971.) [1] koji govori da se ukupna površina crnih rupa u svemiru ne može smanjiti, $\delta A \geq 0$ neodoljivo podsjeća na drugi zakon termodinamike.Pronađeni su analogoni i ostalih zakona, te ih sve skupa možemmo vidjeti:

Zakon	Termodinamika	Crne rupe
Nulti	T tijela konstantna u ravnoteži	κ konstantna na horizontu stacionarne crne rupe
Prvi	$dE = TdS + dW$	$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_H dJ$
Drugi	$\delta S \geq 0$ u svim procesima	$\delta A \geq 0$ u svim procesima
Treći	nemoguće postići $T = 0$ fizikalnim procesom	nemoguće postići $\kappa = 0$ fizikalnim procesom

gdje su κ površinska gravitacija, M masa crne rupe, A površina, Ω_H kutna brzina horizonta i J kutna količina gibanja definirani u [1]. Pobliže ćemo se upoznati s nultim zakonom kao temom seminara te za početak u sljedećem poglavlju definirati površinsku gravitaciju κ.

2 Killingov horizont i površinska gravitacija

Horizont događaja crne rupe u prostor-vremenu je granica iza koje događaji ne mogu utjecati na vanjskog promatrača. Osim horizonta događaja, moguće je uvesti i pojam Killingovog horizonta: za neki χ^a Killingov vektor, Killingov horizont je ploha na koju Killingovo vektorsko polje χ čini normalu te mu norma na njoj iznosi nula (ploha svjetlosnog tipa). U stacionarnom, asimptotski ravnom prostor-vremenu koje sadrži crnu rupu te je rješenje Einsteinovih jednadžbi s materijom koja zadovoljava hiperbolične jednadžbe možemo izjednačiti pojam horizonta događaja i Killingovog horizonta (Hawking i Ellis,1973.) [3]. U slučaju da je pretpostavka stacionarnosti prejaka, i ako želimo izbjeći korištenje Einsteinove jednadžbe, možemo pretpostaviti da je crna rupa ili statična ili stacionarno-osnosimetrična sa "t-ϕ" izometrijom refleksije. Tada za statični slučaj dobivamo da je Killingovo polje okomito na horizont događaja te je on ujedno i Killingov horizont, dok je u slučaju stacionarno-osnosimetrične rupe linearna kombinacija stacionarnog ξ i osnog ψ Killingovog polja $\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a$ okomita na horizont. Dakle, na horizontu koji je ploha svjetlosnog tipa, vrijedit će $\chi^a \chi_a = 0$, to jest $\chi^a \chi_a$ će biti konstantno po plohi. Iz toga možemo zaključiti da će $\nabla^a(\chi^b \chi_b)$ biti okomito na plohu, u smjeru samog Killingovog vektora te možemo definirati funkciju proporcionalnosti κ:

$$\nabla^a(\chi^b \chi_b) = -2\kappa\chi^a \tag{1}$$

Ako primjenimo Liejevu derivaciju po polju χ^a na jednadžbu (1), zbog komutacije polja χ^a samog sa sobom ($\pounds_X Y = [X, Y]$) dobivamo:

$$\pounds_\chi \kappa = 0 \tag{2}$$

što nam govori da je κ konstatna duž geodezika χ^a. U sljedećem poglavlju pokazat ćemo uz koje uvjete je κ konstatna po cijelom horizontu, dok nam je zasad namjera fizikalno je interpetirati i dovesti u oblik na koji možemo te uvjete primjeniti. Prvo napišemo jednadžbu

(1) u malo drugačijem obliku iz kojeg vidimo da χ^a zaista je geodezik, samo u neafinoj parametrizaciji, gdje κ mjeri odstupanje danog parametra od afinog:

$$\chi^b \nabla_a \chi_b = -\chi^b \nabla_b \chi_a = -\kappa \chi_a \tag{3}$$

Parametar vektora χ^a, Killingov parametar, označimo sa v ($\chi^a = \frac{dx^a}{dv}$) te iz [2] nalazimo njegovu poveznicu s afinim parametrom λ, uvrštavanjem $\gamma(v) = \kappa$ i $\lambda = f(v)$:

$$f(v) = \int^v d\xi exp\left(\int^\xi \gamma(\sigma) d\sigma\right) = Ae^{\kappa v} - \frac{B}{\kappa} \tag{4}$$

Konstante integracije odaberemo tako da:

$$f(v) = \lambda = \pm e^{\kappa v} \tag{5}$$

Afino parametriziran geodezik k^a sada dobijemo pomoću [2]:

$$\frac{dx^a}{d\lambda} = \frac{1}{f'(v)} \frac{dx^a}{dv} \tag{6}$$

$$k^a = \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa v} \chi^a \tag{7}$$

no promjena parametra za posljedicu ima to da k^a, koji je tangentan na generatore horizonta, više nije Killingov vektor.

Kako bismo eksplicitno izveli formulu za κ koristimo činjenicu da je χ^a ortogonalan na hiperplohu horizonta, pa možemo iz Frobeniusovog teorema (B.3.6) [1] u vektorskom zapisu:

$$\chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]} = 0 \tag{8}$$

uz Killingovu jednadžbu $\nabla_a \chi_b + \nabla_b \chi_a = 0$ izraziti kao:

$$\chi_c \nabla_a \chi_b = -2\chi_{[a} \nabla_{b]} \chi_c \tag{9}$$

Kontrakcijom s $\nabla^a \chi^b$ i uz činjenicu da je χ^a vektor svjetlosnog tipa dobivamo:

$$\begin{aligned} \chi_c (\nabla^a \chi^b)(\nabla_a \chi_b) &= -2[(\nabla^a \chi^b)(\chi_a \nabla_b)\chi_c - (\nabla^a \chi^b)(\chi_b \nabla_a)\chi_c] \\ &= -2(\chi_a \nabla^a \chi^b)(\nabla_b \chi_c) \end{aligned} \tag{10}$$

iz čega uz (3) konačno možemo izvući κ, uz podsjetnik da se izvrjednjuje na horizontu:

$$\kappa^2 = -\lim_{horizont} \frac{1}{2} (\nabla^a \chi^b)(\nabla_a \chi_b) \tag{11}$$

Do fizikalne interpretacije κ možemo doći ako upotrijebimo sljedeću jednakost koja vrijedi svugdje u prostoru:

$$\begin{aligned} 3(\chi^{[a} \nabla^b \chi^{c]})(\chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]}) &= \chi^a \chi_a (\nabla^b \chi^c)(\nabla_b \chi_c) \\ &\quad - 2(\chi^a \nabla^b \chi^c)(\chi_b \nabla_a \chi_c) \end{aligned} \tag{12}$$

Budući da nam je cilj izraziti desnu stranu jednadžbe (11) na alternativan način, dijelimo jednadžbu (12) sa $\chi^a \chi_a$ te promatramo što se događa s lijevom stranom kad težimo prema horizontu. Za dobivanje tog limesa upotrebljavamo l'Hospitalovo pravilo koje glasi:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13}$$

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{ili} \pm \infty \tag{14}$$

Uvjet za korištenje pravila je ispunjen time što na horizontu vrijedi Frobeniusov teorem i χ^a je vektor svjetlosnog tipa okomit na plohu svjetlosnog tipa. Gradijent lijeve strane od (12) nula je zbog Frobeniusovog teorema, a $\nabla_b(\chi^a \chi_a) \neq 0$ ako je $\kappa \neq 0$, dakle limes njihovog kvocijenta bit će nula, a prema (13) i naš tražen kvocijent funkcija. Konačno:

$$(\nabla^b \chi^c)(\nabla_b \chi_c) = 2 \frac{(\chi^a \nabla^b \chi^c)(\chi_b \nabla_a \chi_c)}{\chi^a \chi_a} \tag{15}$$

te možemo preoblikovati (11) u intuitivniji oblik:

$$\kappa^2 = \lim_{horizont} \left(\left(-\frac{(\chi^b \nabla_b \chi^c)}{\chi^d \chi_d} \right) (\chi^a \nabla_a \chi_c) \right) \tag{16}$$

Prvi faktor u limesu (16) prepoznajemo kao akceleraciju probne mase u Killingovu polju ako u općenitu formulu za akceleraciju $a^c = u^b \nabla_b u^c$ uvrstimo četverobrzinu izraženu preko Killingovog vektora uz odgovarajuću normalizaciju:

$$u^c = \frac{\chi^c}{(-\chi^a \chi_a)^{\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

Množenjem i dijeljenjem (16) faktorom $\chi^a\chi_a$ dobivamo konačan oblik:

$$\kappa = \lim_{horizont}(Va) \tag{18}$$

gdje su $a = (a^c a_c)^{\frac{1}{2}}$ i $V = (-\chi^a\chi_a)^{\frac{1}{2}}$. Interpretaciju V možemo pronaći promatrajući statičnu crnu rupu za koju vrijedi $\chi^a = \xi^a$. $(\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}}$ je duljina Killingovog vektora u nekoj točki koja opisuje gravitacijski crveni pomak kad postoje simetrije u sustavu. Dakle, može se reći da je promjena valne duljine fotona proporcionalna promjeni duljine Killingovog vektora između različitih točaka prostor-vremena. ([1] 5.3.6.) Ako promotrimo potencijalnu energiju čestice koja miruje, isti faktor crvenog pomaka V pojavi se nakon uvrštavanja brzine:

$$u^c = \frac{\xi^c}{(-\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

u formulu za energiju $E = -m\xi_c u^c$ kao $E = mV$. Kako bismo izračunali izraz za silu u beskonačnosti koja drži česticu u mirovanju, treba nam gradijent potencijalne energije:

$$\nabla_b E = m\nabla_b(\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}} = m\frac{\xi_a\nabla_b\xi^a}{(\xi^c\xi_c)^{\frac{1}{2}}} \tag{20}$$

$$\nabla_b E = mVa \tag{21}$$

Sveukupno, izraz za silu u beskonačnosti glasi:

$$F_\infty = (\nabla^b E\nabla_b E)^{\frac{1}{2}} = mVa = VF \tag{22}$$

te, ako uvedemo jediničnu masu, prepoznajemo (18), pa napokon možemo dati fizikalni smisao κ; to je sila u beskonačnosti koja je potrebna da se jedinična masa drži u mirovanju u limesu prema Killingovu horizontu - površinska gravitacija. Također vidimo da silu u beskonačnosti možemo dobiti množenjem lokalne slike faktorom crvenog pomaka. Na horizontu, naravno, lokalna sila postane beskonačna, no limes sile u beskonačnosti još uvijek je konačan. Pojam površinske gravitacije koristi se općenito, iako za rotirajuću crnu rupu ($\chi^a = \xi^a + \Omega_H\psi^a$) ovakva interpretacija ne vrijedi jer masu nije moguće držati u mirovanju u blizini horizonta. Za općenite slučajeve crnih rupa kažemo da je površinska gravitacija mjera za odstupanje Killingovog parametra od afinog duž nul-generatora [4].

Budući da nam je konačni cilj dokazati konstatnost površinske gravitacije na horizontu, sljedeći korak nam je pokušati derivirati κ. No, u obzir trebano uzeti da je κ definirana samo na horizontu te nam nije dozvoljeno samo iskoristiti kovarijantnu derivaciju, koja djeluje i u smjerovima koji nisu tangentni na horizont. Za spuštanje kovarijantne derivacije na horizont ne možemo upotrijebiti ni projektor $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ definiran za Cauchyjeve plohe, gdje je n_a jedinični vektor okomit na plohu, jer horizont nije prostorna ploha, već ploha svjetlosnog tipa i time nema operator projekcije. Ipak, možemo iskoristiti umnožak volumnog elementa i Killingovog vektora $\epsilon^{abcd}\chi_d$ koji je tangentan na horizont ($(\epsilon^{abcd}\chi_d)\chi_c = 0$, množimo antisimetrični Levi-Civita i simetrični skalarni produkt). Djelujemo s $\epsilon^{abcd}\chi_d\nabla_c$ (u alternativnom obliku $\chi_{[d}\nabla_{c]}$) na (3):

$$\begin{aligned}\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]} + \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a &= \chi_{[d}\nabla_{c]}(\chi^b\nabla_b\chi_a)\\ &= (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) + \chi^b\chi_{[d}\nabla_{c]}\nabla_b\chi_a\end{aligned} \tag{23}$$

Zadnji član napisati ćemo u drukčijem obliku korištenjem definicije Riemannovog tenzora:

$$\nabla_a\nabla_b\chi_c - \nabla_b\nabla_a\chi_c = R_{abc}{}^d\chi_d \tag{24}$$

Preoblikujemo je pomoću Killingove jednadžbe $\nabla_a\chi_b + \nabla_b\chi_a = 0$:

$$\nabla_a\nabla_b\chi_c + \nabla_b\nabla_c\chi_a = R_{abc}{}^d\chi_d \tag{25}$$

Dodamo li jednadžbi (25) njezinu prvu permutaciju indeksa i oduzmemo drugu, dobivamo:

$$\begin{aligned}2\nabla_b\nabla_c\chi_a &= (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d)\chi_d\\ &= -2R_{cab}{}^d\chi_d\end{aligned} \tag{26}$$

$$\nabla_a\nabla_b\chi_c = -R_{bca}{}^d\chi_d \tag{27}$$

Drugi član (23) tako smo preoblikovali pa imamo:

$$\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]} + \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a = (\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b)(\nabla_b\chi_a) - R_{ba[c}{}^e\chi_{d]}\chi_e \tag{28}$$

Preostaje nam još preurediti prvi član desne strane (23):

$$\begin{aligned}\chi_{[d}\nabla_{c]}(\nabla_b\chi_a) &= -\frac{1}{2}(\chi^b\nabla_d\chi_c)\nabla_b\chi_a \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\chi_a\nabla_d\chi_c \\ &= \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a\end{aligned} \tag{29}$$

U prvom i trećem redu koristili smo jednadžbu (9), dok smo u drugom upotrijebili (3). Izraz koji smo dobili jednak je drugom članu lijeve strane jednadžbe (28) te ga krati pa konačno imamo:

$$\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = \chi^b R_{ab[c}{}^e\chi_{d]}\chi_e \tag{30}$$

Zatim primjenjujemo $\chi_{[d}\nabla_{e]}$ na jednadžbu (9) i koristimo tu jednadžbu na prvom članu u trećem redu:

$$\begin{aligned}(\chi_{[d}\nabla_{e]}\chi_c)\nabla_a\chi_b + \chi_c\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_b &= -2\chi_{[d}\nabla_{e]}\chi_{[a}\nabla_{b]}\chi_c \\ &= -2(\chi_d\nabla_e - \chi_e\nabla_d)(\chi_a\nabla_b\chi_c - \chi_b\nabla_a\chi_c) \\ &= -2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\chi_{[a})\nabla_{b]}\chi_c - 2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\chi_{|c|})\chi_{a]} \\ &= (\chi_{[d}\nabla_{e]}\chi_c)\nabla_a\chi_b - 2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\chi_{|c|})\chi_{a]}\end{aligned} \tag{31}$$

Prvi članovi s obje strane se skrate pa uz (27) slijedi:

$$\begin{aligned}\chi_c\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_b &= -2(\chi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\chi_{|c|})\chi_{a]} \\ &= -2(\chi_{[d}\nabla_{e]}(\nabla_b\chi_c)\chi_a - \chi_{[d}\nabla_{e]}(\nabla_a\chi_c)\chi_b) \\ -\chi_c R_{ab[e}{}^f\chi_{d]}\chi_f &= 2\chi_{[a}R_{b]c[e}{}^f\chi_{d]}\chi_f\end{aligned} \tag{32}$$

Dobiveni izraz množimo s g^{ce} te kontrahiramo:

$$\begin{aligned}0 &= 2(\chi_a R_{bce}{}^f\chi_d\chi_f - \chi_a R_{bcd}{}^f\chi_e\chi_f \\ &\quad - \chi_b R_{ace}{}^f\chi_d\chi_f + \chi_b R_{acd}{}^f\chi_e\chi_f)g^{ce} \\ &= 2(\chi_a R_{bc}{}^{cf}\chi_d\chi_f - \chi_a R_{bcd}{}^f\chi^c\chi_f \\ &\quad - \chi_b R_{ac}{}^{cf}\chi_d\chi_f + \chi_b R_{acd}{}^f\chi^c\chi_f) \\ &= 2(-\chi_{R_b}{}^f\chi_d\chi_f + \chi_b R_a{}^f\chi_d\chi_f - \chi_{[a}R_{b]cd}{}^f\chi^c\chi_f) \\ &= 2(-\chi_{[a}R_{b]}{}^f\chi_d\chi_f - \chi_{[a}R_{b]cd}{}^f\chi^c\chi_f)\end{aligned} \tag{33}$$

Konačno:

$$-\chi_{[a}R_{b]}{}^f\chi_f\chi_d = \chi_{[a}R_{b]cd}{}^f\chi^c\chi_f \tag{34}$$

ako uzmemo u obzir pravilo o zamjeni indeksa Riemannovog tenzora, na desnoj strani jednakosti prepoznajemo desnu stranu (30). Dakle, dobili smo izraz:

$$\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = -\chi_{[d}R_{c]}{}^f\chi_f \tag{35}$$

pomoću kojeg ćemo u sljedećem poglavlju, primjenom određenih uvjeta, pokazati da je površinska gravitacija konstantna.

3 Konstantnost površinske gravitacije

3.1 Einsteinova jednadžba i uvjet dominantne energije

Osim uvjeta dominantne energije i Einsteinove jednadžbe, za dokazivanje konstatntosti κ na horizontu, potrebna nam je još jedna jednadžba, koja slijedi iz geometrijskih svojstava Killingovog polja. Izvod joj započinjemo preoblikovanjem Frobeniusovovog teorema kao:

$$\chi_{[a}\nabla_{b]}\chi_c = -\frac{1}{2}\chi_c\nabla_a\chi_b \tag{36}$$

Jednadžbu projiciramo na horizont kontrahiranjem s vektorima m^b i n^c, tangentnim na horizont ($\chi^a m_a = \chi^a n_a = 0$).

$$\begin{gathered}\chi_a m^b n^c\nabla_b\chi_c - \chi_b m^b n^c\nabla_a\chi_c = -\frac{1}{2}m^b n^c\chi_c\nabla_a\chi_b \\ m^b n^c\nabla_b\chi_c = 0\end{gathered} \tag{37}$$

Ako se podsjetimo definicije tenzora $B_{ab} = \nabla_b\xi_a$ iz poglavlja 9.2. [1], vidimo da je to upravo jednadžba (37). Njeno iščezavanje možemo iskoristiti u definicijama tenzora ekspanzije θ, smicanja σ_{ab} i rotacije ω_{ab} kako bismo pokazali da i oni iščezavaju na Killingovu horizontu,

$$\begin{aligned}\theta &= B^{ab}h_{ab} = 0 \\ \sigma_{ab} &= B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab} = 0 \\ \omega_{ab} &= B_{[ab]} = 0\end{aligned} \tag{38}$$

gdje je h_{ab} već spomenuti operator projekcije.

Primjenom operatora $\xi^c\nabla_c$ na tenzor B_{ab} te računanjem traga dobije se Raychaudurijeva jednadžba:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\chi^c\chi^d \tag{39}$$

koja opisuje kinematiku kongruencija - kako se integralne krivulje ponašaju u vremenu jedne u odnosu na druge. Budući da su u našem slučaju θ, σ_{ab} i ω_{ab} nula, preostaje nam samo zadnji član, koji čini upravo jednadžbu potrebnu za nastavak analize ponašanja κ na horizontu:

$$R_{ab}\chi^a\chi^b = 0 \tag{40}$$

Sada možemo iskoristiti Einsteinovu jednadžbu:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \tag{41}$$

koju kontrahiramo vektorima svjetlosnog tipa χ^a i χ^b zbog čega iščeznu članovi s tenzorom metrike. Ostaje nam jednakost koja povezana s (40) daje:

$$T^a{}_b\chi^b\chi_a = 0 \tag{42}$$

Iz ortogonalnosti možemo zaključiti da je vektor $T^a{}_b\chi^b$ vektor prostornog tipa, svjetlosnog tipa ili jednak nuli. Kako bismo odabrali između te tri mogućnosti, moramo se poslužiti dominantnim uvjetom energije [1],(9.2):

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0 \tag{43}$$

gdje je ξ^a vektor ili vremenskog ili svjetlosnog tipa. Ako $-T^a_b\chi^b$ interpretiramo kao četverostruju energije i momenta koju vidi promatrač brzine χ^a, fizikalna granica na brzinu širenja energije u vidu brzine svjetlosti stavljena je upravo jednadžbom (43). Dominantni uvjet energije vektor $-T^a{}_b\chi^b$ određuje kao vektor vremenskog tipa usmjeren u budućnost, vektor svjetlosnog tipa ili jednak nuli. Time je, uz prošli uvjet na $-T^a{}_b\chi^b$, određeno da on mora biti jednak nuli ili vektor svjetlosnog tipa na Killingovom horizontu. To znači da je kolinearan s vektorom χ^a i da vrijedi $\chi_{[c}T_{a]b}\chi^b = 0$ pa uz ponovnu upotrebu (41) kojom mijenjamo tenzor energije i momenta za Riccijev konačno dobivamo da je desna strana (33) jednaka nuli iz čega slijedi konstantnost κ.

$$\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = 0 \tag{44}$$

3.2 Statične i stacionarno-osnosimetrične rupe

U ovom potpoglavlju pokazat ćemo da je moguće osigurati konstantnost površinske gravitacije na horizontu i bez posezanja za Einsteinovom jednadžbom. Dovoljno će biti da su crne rupe koje promatramo statične ili stacionarno-osnosimetrične [3]. Neizbježan korak prema dokazu te tvrdnje bit će sljedeći rezultat, naime da κ iščezava na horizontu ako se poslužimo sljedećim uvjetom na tenzor rotacije:

$$\nabla_{[a}\omega_{b]}|_{horizont} = 0 \tag{45}$$

Tenzor rotacije je definiran kao $\omega_a = \epsilon_{abcd}\xi^b\nabla^c\xi^d$, što se može dobiti i iz prošle definicije (38) ako antisimetričnu zagradu zapišemo preko Levi-Civita tenzora i kontrahiramo s ξ^b. Njegovu vanjsku derivaciju zapisat ćemo preko Riccijevog tenzora kako bismo je mogli povezati s (35). Zasad se zadržavamo na statičnim Killingovim poljima. Počinjemo raspisivanjem (45), također preko definicije antisimetrične zagrade:

$$\begin{aligned}\nabla_{[a}\omega_{b]} &= \frac{1}{2!}\delta^{ef}_{ab}\nabla_e\omega_f \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\epsilon^{efcd}\nabla_e\omega_f\end{aligned} \tag{46}$$

Zatim uvrštavamo definiciju tenzora rotacije:

$$\begin{aligned}\epsilon^{cdef}\nabla_e\omega_f &= \epsilon^{cdef}\epsilon_{fghi}\nabla_e(\xi^g\nabla^h\xi^i) \\ &= 6\nabla_e(\xi^{[e}\nabla^c\xi^{d]})\end{aligned} \tag{47}$$

U prvom redu korištena je konstantnost volumnog elementa, a u drugom jednadžba (B.2.13.) iz [1]. Raspisujemo dobiveni antisimetrizirani član pod kovarijantnom derivacijom i koristimo Killingovu jednadžbu da bismo dobili:

$$\xi^{[e}\nabla^c\xi^{d]} = \frac{1}{3}(\xi^e\nabla^c\xi^d + \xi^c\nabla^d\xi^e + \xi^d\nabla^e\xi^c) \tag{48}$$

Nakon deriviranja prvog člana vidimo da jedan dobiveni član iščezava kao produkt simetričnog i antisimetričnog tenzora a drugi zapisujemo pomoću (27):

$$\begin{aligned}\nabla_e(\xi^e\nabla^c\xi^d) &= (\nabla_e\xi^e)(\nabla^c\xi^d) + \xi^e\nabla_e\nabla^c\xi^d \\ &= -\xi^e R_e^{cd}{}_f f^f \\ &= 0\end{aligned} \tag{49}$$

Preostali član također iščezava zbog antisimetričnosti Riemannovog tenzora u zadnja dva indeksa. Sad deriviramo druga dva člana jednadžbe (48):

$$\begin{aligned}\nabla_e(\xi^c\nabla^d\xi^e+\xi^d\nabla^e\xi^c) &= (\nabla_e\xi^c)(\nabla^d\xi^e)+(\nabla_e\xi^d)(\nabla^e\xi^c)\\ &+\xi^c\nabla_e\nabla^d\xi^e+\xi^d\nabla_e\nabla^e\xi^c\\ &=\xi^d R^{ec}_{ee}\xi^e+\xi^c R^{ed}_{ee}\xi^e\\ &=-2\xi^{[d}R^{c]}_{e}\xi^e\end{aligned} \tag{50}$$

Prva dva člana u prvom redu pokrate se jer vrijedi Killingova jednadžba, a Riemannov tenzor kontrahira se u Riciijev. Vanjsku derivaciju tenzora rotacije izrazili smo kao:

$$\nabla_{[a}\omega_{b]}=-\epsilon_{abcd}\xi^{[c}R^{d]}_{e}\xi^e \tag{51}$$

Kontrahiranjem jednadžbe Levi-Civita tenzorom ϵ^{abcd} postižemo jednakost desne strane (51) s desnom stranom (35), dakle možemo ih povezati u :

$$\xi_{[ab]}\kappa=-\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\nabla^{[c}\omega^{d]} \tag{52}$$

iz čega je očito da je uvjet (45) dovoljan da bi površinska gravitacija κ bila konstantna na horizontu.

Sad se možemo poslužiti ovim rezultatom da bismo dokazali prvu tvrdnju ovog potpoglavlja: da je κ konstantna za statične crne rupe. Naime, kod statičnih rupa vremensko Killingovo polje ξ^a bit će okomito na horizont. Frobeniusov teorem za polje okomito na hiperplohu daje $\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]}$, što zahtjeva $\omega_a=0$, a samim time je i njena vanjska derivacija nula.

Želimo li poopćiti situaciju, uvest ćemo još jedno Killingovo polje ψ^a, linearno nezavisno od ξ^a. Ako polje ψ^a komutira s ξ^a i vrijedi $\nabla_a(\psi^b\omega_b)=0$, κ je konstantna na Killingovom horizontu. Kako bismo to dokazali, pretpostavljamo suprotno: $\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa\neq 0$ na otvorenom podskupu O Killingovog horizonta N. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti i $\kappa\neq 0$. Liejeva derivacija kvadrata norme vektorskog polja ξ^a po polju ψ^a bit će nula zbog zahtjeva da polja komutiraju ($\pounds_X Y=[X,Y]$).

$$\begin{aligned}\pounds_\psi(\xi^a\xi_a) &= (\psi^b\nabla_b\xi^a)\xi_a+\xi^a\nabla_b\xi_a\\ &=-2\kappa\psi^b\xi_b=0\end{aligned} \tag{53}$$

Vidimo da je ψ^a tangencijalno na horizont na skupu O. Pretpostavimo i da je na istom skupu ψ^a proporcionalno ξ^a kao $\psi^a=f\xi^a$, primjenom Liejeve derivacije na ξ^a uz komutativnost slijedi:

$$\begin{aligned}\pounds_\psi\xi^a=0 &= \psi^b\nabla_b\xi^a-\xi^b\nabla_b\psi^a\\ &=f\nabla_b\xi^a-\xi^b\nabla_b f-f\nabla_b\xi^a\\ \xi^b\nabla_b f&=0\end{aligned} \tag{54}$$

Ako u jednadžbu (53) uvrstimo proporcionalnost vektora, dobivamo $\psi^a\psi_a=0$ na okolini O, iz čega zaključujemo da je O dio Killingovog horizonta generiran s ψ^a te da možemo definirati površinsku gravitaciju $\widetilde{\kappa}=f\kappa$. Uvrštavanjem u jednadžbu (35) dobivamo:

$$\begin{aligned}\psi_{[a}\nabla_{b]}\widetilde{\kappa} &= -\psi_{[a}R^e_{b]}\psi_e\\ f\xi_{[a}\nabla_{b]}(f\kappa) &= -f^2\xi_{[a}R^e_{b]}\xi_e\\ f^2\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa+f\kappa\xi_{[a}\nabla_{b]}f &= -f^2\xi_{[a}R^e_{b]}\xi_e\end{aligned} \tag{55}$$

Kako bi ista jednadžba vrijedila za κ, srednji član mora biti nula $\xi_{[a}\nabla_{b]}f=0$. Dakle, na O vrijedi $\nabla_a f=0$, što implicira da su ψ^a i ξ^a linearno zavisni. Budući da im je skalarni umnožak nula (53), a ξ^a je vektor vremenskog tipa, mora postojati točka $p\in O$ gdje je ψ^a vektor prostornog tipa. Iz iščezavanja Liejeve derivacije jednadžbe (1):

$$\begin{aligned}\pounds_\psi(\nabla^a\xi^c\xi_c)=0 &= \psi^b\nabla_b[\nabla^a(\xi^c\xi_c)]-\nabla^b(\xi^c\xi_c)\nabla_b\psi^a\\ &=\psi^b\nabla_b(-2\xi^a\kappa)+2\xi^b\kappa\nabla_b\psi^a\\ &=-2\xi^a\psi^b\nabla_b\kappa-2\kappa f\xi^b\nabla_b\xi^a+2\kappa f\xi^b\nabla_b\xi^a\\ &=-2\xi^a\psi^b\nabla_b\kappa\end{aligned} \tag{56}$$

onda slijedi da je $\psi^a\nabla_a\kappa=0$ u točki p. Vratimo li se sad na (52), zapišemo antisimetriziranu zagradu preko Levi-Civita simbola te kontrahiramo cijelu jednadžbu s ϵ^{cdef} imamo:

$$\begin{aligned}\xi_{[c}\nabla_{d]}\kappa=-\frac{1}{4}\epsilon_{cdef}\epsilon^{efab}\xi_a\nabla_b\kappa &= -\frac{1}{4}\epsilon_{cdef}\nabla^{[e}\omega^{f]}\\ \epsilon^{efab}\psi_f\xi_a\nabla_b\kappa &= \psi_f\nabla^{[e}\omega^{f]}\end{aligned} \tag{57}$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $\omega_a=0$ iz istog razloga kao kod statičnih rupa, te

$$\pounds_\psi \omega_a = \psi^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a \omega^b = 0 \ (58)$$

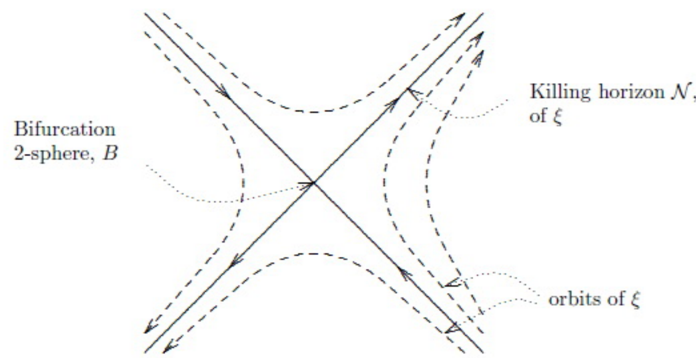
zbog komutativnosti ψ_a i ξ_a, možemo desnu stranu jednadžbe (57) zapisati u poznatijem obliku:

$$\frac{1}{2}\psi_f(\nabla^e\omega^f - \nabla^f\omega^e) = \frac{1}{2}[\psi_f\nabla^e\omega^f + \omega^f\nabla^e\psi^f] = \frac{1}{2}\nabla^e(\psi_f\omega_f) \tag{59}$$

Dobiveni izraz prepoznajemo kao uvjet ($\nabla_a(\psi^b\omega_b) = 0$) za koji smo zahtjevali da bude nula na horizontu. Zato u točki p vrijedi $\epsilon^{efab}\psi_f\xi_a\nabla_b\kappa = 0$ i, otprije $\psi^a\nabla_a\kappa = 0$, što sveukupno znači da je $\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa = 0$ na horizontu te je time dokazano da je κ konstantna. Ako odaberemo da je ψ^a osno Killingovo polje, prethodni rezultat možemo prenijeti na stacionarno-osnosimetrične crne rupe sa simetrijom "$t-\phi$" refleksije. Horizont događaja te crne rupe bit će onda Killingov horizont generiran linearnom kombinacijom ψ^a i ξ^a. Uvjet $\psi^a\omega_a = 0$ prirodno izlazi iz Frobeniusovog teorema za simetriju "$t-\phi$" refleksije [3]. Konačno za svaku stacionarno-osnosimetričnu crnu rupu sa simetrijom "$t-\phi$" refleksije možemo tvrditi da je površinska gravitacija konstantna.

3.3 Bifurkacijska ploha

Posljednji uvjet u općoj relativnosti koji za sobom povlači konstantnost κ je da Killingov horizont sadrži bifurkacijsku plohu. Kako bismo definirali bifurkacijsku plohu [5], prisjetimo se formule (7) kojom povezujemo Killingov vektor χ^a i afino parametriziran geodezik k^a: $\chi^a = \pm\kappa e^{\kappa v}k^a$. Za skup točaka (2-sfera) $v = -\infty$ vrijedi $\chi^a = 0$ te taj skup nazivamo bifurkacijska ploha. Možemo reći da je bifurkacijski Killingov horizont [6] par Killingovih horizonata čiji je dvodimenzionalan presjek, na kojem Killingov vektor iščezava, bifurkacijska ploha. Primjere takvih horizonata vidimo u prostoru Minkowskoga, de Sitter, Anti de Sitter i Schwarzschilda. Na Slici 1. [5] priložena je dvodimenzionalna vizualizacija jednog takvog horizonta, na kojoj svaka točka predstavlja 2-sferu.



Slika 1. Bifurkacijski Killingov horizont

Konstantnost površinske gravitacije dokazat ćemo tako da na κ^2 (11) djelujemo kovarijantnom derivacijom projiciranom na plohu horizonta, preciznije bifurkacijsku plohu B. Za to će nam poslužiti operator $t^c\nabla_c$, gdje je t^a vektor tangentan na bifurkacijsku plohu.

$$\begin{aligned} t^c\nabla_c\kappa^2|_B &= -(\nabla^a\chi_b)t^c\nabla_c(\nabla_a\chi_b) \\ &= -(\nabla^a\chi^b)t^c R_{bac}{}^d\chi_d|_B = 0 \end{aligned} \tag{60}$$

U drugom redu korištena je jednadžba (27), te činjenica da Killingovo polje iščezava na B. Budući da je κ^2 konstantna duž χ^a, bit će konstantna i na cijelom horizontu.

4 Općeniti slučaj teorije gravitacije

Kako bismo pokazali relevantnost zakona mehanike crnih rupa, poslužit će nam nedavno objavljeni članak [4] u kojem se provjerava vrijedi li nulti zakon i u nekim generalnijim teorijama od opće relativnosti. Za primjer teorije gravitacije uzeta je Lanczos-Lovelock gravitacija, prirodna generalizacije Einsteinove opće relativnosti u više dimenzija koja zadovoljava uvjet produciranja jednadžbi gibanja drugog reda. Pitanje koje se postavlja je povlači li ova generalizacija opće relativnosti sa sobom u više dimenzije i analogiju mehanike crnih rupa s termodinamikom. Za prvi i drugi zakon to je već potvrđeno te nam sad preostaje provjeriti je li moguće zadovoljiti nulti zakon samo uz uvjet dominantne energije i jednadžbe gibanja, bez pozivanja na dodatne simetrije. Moramo uzeti u obzir da, za razliku od opće relativnosti, za Lanczos-Lovelock gravitaciju ne postoji dokaz da je horizont događaja stacionarne crne rupe ujedno i Killingov horizont, što bi povlačilo sa sobom konstantnost κ . Počinjemo od jednadžbe polja, koja za Lanczos-Lovelock gravitaciju glasi:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \alpha_m E_{(m)ab} = 8\pi T_{ab} \tag{61}$$

gdje je $m \geq 2$ i:

$$E_{(m)}{}^{a}{}_{b} = -\frac{1}{2^{m+1}}\delta^{aa_1b_1...a_mb_m}_{bc_1d_1...c_md_m} R^{c_1d_1}_{a_1b_1}...R^{c_md_m}_{a_mb_m}$$

Iz (61) lako vidimo da ako stavimo $\alpha_m = 0$, dobivamo limes opće relativnosti. Nakon uvrštavanja (61) u (35) te malo složenijeg raspisivanja, konačno dobivamo:

$$(2^{-m})\xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa = -\alpha_m^{(D-2)} E_{(m-1)}{}^{a}{}_{b} R^{pq}_{ar} N_p \xi_q \xi^r \tag{63}$$

N^a je nul-vektor koji zadovoljava $\xi^a N_a = -1$. Općenito, desna strana ne iščezava pa površinska gravitacija, koja je konstantna duž jednog generatora (2), može ovisiti o kutnim koordinatama. Za razliku od opće relativnosti, stacionarno rješenje Lanczos-Lovelock gravitacije s Killingovim horizontom koji nema simetriju "$t-\phi$" refleksije, neće imati konstantnu površinsku gravitaciju. No, postoje posebni slučajevi u kojima je κ ipak konstantna. Zahtijevanjem da je topologija horizonta ravna, tenzori zakrivljenosti unutar horizonta iščezavaju pa se κ ne mijenja od generatora do generatora. Druga mogućnost je da je $R^{pq}_{ar} N_p \xi_q \xi^r = 0$ na horizontu. Jedno od rješenja Lanczos-Lovelock gravitacije za koje to vrijedi su stacionarno-osnosimetrične crne rupe sa simetrijom "$t - \phi$" refleksije i u tom slučaju se može pokazati da je

$$\mathrm{R}^{pq}_{br} N_p \xi_q \xi^r = \xi_{[b} R_{a]}{}^{c} \xi_c \tag{64}$$

što je zbog "$t - \phi$" simetrije nula. Zasad je jedino pronađeno stacionarno rješenje opća relativnost, no druga rješenja, ako budu pronađena, bez "$t-\phi$" izometrije neće imati konstantnu κ. Za kraj ćemo proučiti još jednu moguću generalizaciju, opću difeomorfno invarijantnu teoriju gravitacije. Difeomorfna invarijatntnost od teorije zahtijeva da je neovisna o koordinatama. Jednadžba polja dana je kao $\varepsilon_{ab} = 8\pi T_{ab}$, gdje je ε_{ab} kovarijantno očuvan simetrični tenzor. Upotrebom (35) imamo:

$$\begin{aligned} \xi_{[a}\nabla_{b]}\kappa &= -\xi_{[a} R_{b]}{}^{c} \xi_c \\ &= \xi_{[a}(\varepsilon_{b]}{}^{c} - R_{b]}{}^{c})\xi_c - 8\pi \xi_{[a} T_{b]}{}^{c} \xi_c \end{aligned} \tag{65}$$

Općenito, nulti zakon će vrijediti ako je:

$$\begin{aligned} \xi_{[a}(\varepsilon_{b]}{}^{c} - R_{b]}{}^{c})\xi_c = 0 \\ \varepsilon_{ab}\xi^a\xi^b = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

i ako je zadovoljen dominantni uvjet energije. Za Lanczos-Lovelock gravitaciju drugi uvjet (66) nije ispunjen,te je u toj teoriji narušen nulti zakon mehanike crnih rupa.

5 Zaključak

Konačno, možemo reći da su zakoni mehanike crnih rupa analogni zakonima termodinamike u općoj relativnosti. U klasičnom kontekstu te teorije nije moguće napraviti jaču poveznicu od analogije, zbog opisa crne rupe kao savršenog apsorbera koji ne emitira ništa, što povlači da je temperatura crne rupe $T = 0$ te da ne postoji fizikalna poveznica između T i κ. No, 1974. Hawking je otkrio da crna rupa ipak može emitirati zračenje [5]. Naime nakon gravitacijskog kolapsa, moguće je da crna rupa dio vremena ne bude stacionarna, što dozvoljava produkciju čestica u blizini horizonta. Zbog beskonačne dilatacije vremena na horizontu, tim česticama trebat će puno vremena da pobjegnu od utjecaja crne rupe, što će dati tok zračenja u vremenu puno kasnijem od samog kolapsa koji neće ovisiti o detaljima kolapsa. To termalno zračenje nazvano je Hawkingovo zračenje te je njegova temperatura dana izrazom $T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}$. Ovaj izraz fizikalna je veza između zakona termodinamike i zakona crnih rupa, koji nam govori da njihova analognost nije tek puka slučajnost, već su zakoni mehanike crnih rupa ustvari zakoni termodinamike primjenjeni na crne rupe. Time je zakonima termodinamike crnih rupa dana puno veća težina, te se njihova konzistentna formulacija u novijim i općenitijim teorijama gravitacije može uzeti i kao kriterij valjanosti teorije.

Literatura

[1] Robert M. Wald, *General Relativity*, (1984).

[2] Ivica Smolić ,*Opća teorija relativnosti*

[3] I. Rácz, R.M. Wald, Global Extensions of Spacetimes Describing Asymptotic Final States of Black Holes, *Class. Quantum Grav. 13* (1996) 539–553 [arXiv: gr-qc/9507055]

[4] S. Sarkar, S. Bhattacharya, The issue of zeroth law for Killing horizons in Lanczos-Lovelock gravity *Phys. Rev.* D 87 (2013) 044023 [arXiv: 1205.2042]

[5] P. K. Townsend, *Black holes*, lecture notes

[6] T. Jacobson, R. Parentani, Horizon entropy*Found.Phys.* 33 (2003) 323-348