Supersimetrije i Atiyah-Singer indeksni teorem

Seminar iz Diferencijalne geometrije u fizici

Marija Mađor-Božinović

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

Sažetak

Tema ovog seminara je Atiyah-Singerov indeksni teorem i njegova veza sa supersimetrijama. Indeksni teoremi općenito vežu topološka i analitička svojstva. Atiyah-Singerov indeksni teorem povezuje indeks eliptičnih Fredholmovih operatora kao što je npr. Diracov sa topološkim svojstvima mnogostrukosti. Indeks operatora daje informacije o dimenziji prostora rješenja diferencijalnih jednadžbi, dok se topološka svojstva odnose na integrale karakterističnih klasa po mnogostrukostima koji su topološke invarijante. Atiyah-Singerov indeksni teorem posebno je zanimljiv iz perspektive fizike, jer uz više načina dokazivanja, postoji i dokaz preko supersimetričnih integrala po stazama koji direktno veže indeks Diracovog operatora sa supersimetričnim integralom po stazama koji je po danom teoremu topološka invarijanta.

1 Uvod

Cilj ovog seminara je iznijeti iskaz i dokaz Atiyah-Singerovog indeksnog teorema, odnosno eksplicitno pokazati da su analitički i topološki indeks Fredholmovih operatora jednaki. Kao način dokazivanja razmatramo pristup preko supersimetričnog integrala po stazama. U poglavlju 2 uvedeni su svi pojmovi i koncepti potrebni za kasniji iskaz i dokaz, i uglavnom prate [1]. U poglavlju 3 nakon iznošenja najjednostavnijeg primjera indeksnog teorema definirani su eliptični Fredholmovi operatori i njima pripadajući eliptički kompleks, te prate izvore [1] i [2]. Konačno su dani iskaz teorema te dokaz preko supersimetrija koji prati [4]. Sličan pristup navedenom može se naći u [5], dok je [6] ista tema dana u kompaktnom obliku.

2 Relevantna terminologija

Prije iskaza i dokaza Atiyah-Singerovog indeksnog teorema napravit ćemo kratak pregled potrebnih pojmova, definicija i koncepata koje ćemo kasnije koristiti. Detaljniji pregled dostupan je u [1].

2.1 Osnovni topološki pojmovi

Osnovni pojam od kojeg krećemo je topološki prostor. Neka je X neki skup i $\mathscr{T} = \{U_i | i \in I\}$ familija podskupova od X. Tada je par $(X, \mathscr{T})$ ***topološki prostor*** (kojeg ćemo nadalje označavati sa X) ako zadovoljava:
(a) $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.
(b) Unija proizvoljnog broja skupova iz $\mathscr{T}$ je $\in \mathscr{T}$.
(c) Konačan broj presjeka skupova iz $\mathscr{T}$ je $\in \mathscr{T}$.
Za dva topološka prostora X_1 i X_2 kažemo da su homeomorfni ako postoje mape (preslikavanja) među prostorima $f : X_1 \to X_2$ i $f^{-1} : X_2 \to X_1$ koje su kontinuirane. Topološki prostor koji je lokalno homeomorfan $\mathbb{R}^n$-u zovemo mnogostrukost M. Preciznije, M je (otvorena) m-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost ako je zadovoljeno:
(a) M je topološki prostor.
(b) M-u je pridružena familija parova $\{(U_i, \varphi_i)\}$ gdje je $\{U_i\}$ familija otvorenih skupova koja pokriva M, a φ_i je homeomorfizam $\varphi_i : U_i \to U_i' \in \mathbb{R}^m$.
(c) Za otvorene skupove U_i i U_j za koje vrijedi $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ je

beskonačno diferencijabilna.
Dodatno, ako je na mnogostrukosti M u svakoj točki definirana simetrična i pozitivno definitna metrika g, par (M, g) zovemo Riemannova mnogostrukost.

2.2 Diferencijalne forme

Svakom vektorskom prostoru (za formalnu definiciju vidi [1]) možemo pridružiti dualni vektorski prostor tako da je produkt dualnog vektora i vektora dan sa $e^{*i}(e_j) = \delta^i_j$. Drugim riječima, dualni vektor linearno preslikava vektor u skalar. Trivijalnim poopćenjem definiramo tenzor tipa (p, q) kao multilinearno preslikavanje p dualnih vektora i q vektora u $\mathbb{R}$ (npr. dualni vektor je tenzor $(0, 1)$).
Diferencijalna forma reda r, r-forma, je potpuno antisimetrični tenzor tipa $(0, r)$, zadana sa

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}, \tag{1}$$

gdje $\wedge$ (eng. *wedge*) predstavlja potpuno antisimetrični tenzorski produkt. Vektorski prostor r-formi u točki $p \in M$ označavamo sa $\Omega^r_p(M)$.
Vanjska derivacija d_r je preslikavanje $\Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ na r-formu zadano sa

$$d_r\omega = \frac{1}{r!}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1...\mu_r}\Big) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \tag{2}$$

Iz definicije trivijalno slijedi nilpotentnost vanjske derivacije, odnosno

$$d_{r+1}d_r \equiv d^2 = 0, \tag{3}$$

budući da je parcijalna derivacija simetrična na zamjenu indeksa, a *wedge* produkt antisimetričan.
Vanjska derivacija d_r generira tzv. de Rhamov kompleks:

$$0 \xrightarrow{i} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} ... \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m(M) \xrightarrow{d_m} 0. \tag{4}$$

Promotrimo r-formu $\omega \in \Omega^r(M)$. Iz $d_r\omega \in im\, d_r$ i nilpotentnosti $d_{r+1}(d_r\omega) = 0$ slijedi da je $d_r\omega \in ker\, d_{r+1}$, odnosno $im\, d_r \subset ker\, d_{r+1}$. Uz definicije da forme koje zadovoljavaju $d\omega = 0$ zovemo zatvorenima, a forme koje se mogu zapisati kao $\omega = d\psi$ gdje je $\psi \in \Omega^{r-1}(M)$ zovemo egzaktnima, primjećujemo da je element kernela $ker\, d_{r+1}$ zatvorena forma, a element $im\, d_r$ egzaktna forma.

2.3 de Rhamove grupe kohomologije

Neka je M m-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost. Skup svih zatvorenih r-formi označimo sa $Z^r(M)$, a skup svih egzaktnih r-formi sa $B^r(M)$. Kako vrijedi $d^2 = 0$, očito je $B^r(M) \subset Z^r(M)$. Tada je de Rhamova grupa kohomologije reda r definirana kao kvocijentni skup

$$H^r(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M). \tag{5}$$

Po definiciji su dakle egzaktne r-forme identificirane, odnosno za $\omega \in Z^r(M)$, $[\omega] \in H^r(M)$ postaje klasa ekvivalencije $\{\omega' \in Z^r(M) | \omega' = \omega + d\psi, \psi \in \Omega^{r-1}(M)\}$. Forme ω i ω' se razlikuju do na egzaktnu formu i takve forme općenito zovemo kohomolognima.

2.4 Svežnjevi

Neka je $c : (a, b) \to M$ krivulja i neka je $f : M \to \mathbb{R}$, gdje je (a, b) otvoreni interval koji sadrži x_0. Tangentni vektor u točki $c(x_0)$ definira se kao usmjerena derivacija funkcije $f(c(x_0))$ duž krivulje $c(x)$. Uzmimo sada točku $p \in M$. Sve klase ekvivalencije krivulja u p, odnosno svi tangentni vektori u toj točki, sačinjavaju vektorski prostor kojeg zovemo tangentni prostor mnogostrukosti M u točki p, kojeg označavamo sa T_pM. Ako nadalje promatramo kompletnu mnogostrukost, unija svih tangentnih prostora mnogostrukosti,

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_pM, \tag{6}$$

sačinjava tangentni svežanj. U ovom kontekstu mnogostrukost zovemo bazni prostor. Neka je $\{U_i\}$ otvoreni pokrivač od M i neka je $x^\mu = \varphi_i(p)$ koordinata definirana na U_i. Tada je element

$$TU_i \equiv \bigcup_{p \in U_i} T_pM \tag{7}$$

zadan sa točkom $p \in M$ i vektorom $V = V^\mu(p)\partial/\partial x^\mu\big|_p \in T_pM$. Sada proizvoljno izaberemo točku $u \in TU_i$, iz koje možemo rekonstruirati informacije o točki $p \in M$ i vektoru $V \in T_pM$. Za informaciju o točki potrebna nam je projekcija $\pi : TU_i \to U_i$, gdje je $\pi(u \in TU_i) = p \in U_i$ i $\pi^{-1}(p) = T_pM$. T_pM zovemo vlakno u točki p.

Svežanj je uređena petorka (E, π, M, F, G) s elementima:
(a) tri mnogostrukosti E, M i F redom totalni prostor, bazni prostor i vlakno,
(b) surjektivna projekcija $\pi : E \to M$, čiji je inverz $\pi^{-1}(p) = F_p$ vlakno u p,
(c)strukturna Lieva grupa G, koja djeluje na F s lijeva,
(d) skup otvorenih pokrivača $\{U_i\}$ od M sa difeomorfizmom[1] $\phi_i : U_i \times F$ gdje je $\pi\phi_i(p, f) = p$. Preslikavanje ϕ_i zovemo lokalnom trivijalizacijom jer vrijedi $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$.
(e) Na presjeku $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ zahtijevamo da $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \to F$ bude element od G, čime su ϕ_i i ϕ_j povezane glatkim (diferencijabilnim) preslikavanjem $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$. Skup $\{t_{ij}\}$ zovemo prijelazne funkcije. Svežanj ćemo skraćeno označavati sa $E \xrightarrow{\pi} M$ ili sa E.
Ako su sve prijelazne funkcije jedinična preslikavanja, svežanj zovemo trivijalnim. Drugim riječima, trivijalni svežanj je direktni produkt $M \times F$.
Glavni svežanj ili G - svežanj (eng. *principal bundle*) sadrži vlakno identično strukturnoj grupi G i označavamo ga sa $P(M, G)$.
Svežnjevi su dakle mnogostrukosti koje lokalno izgledaju kao direktan produkt dva topološka prostora. Ako to svojstvo zadrže i globalno, zovemo ih trivijalnim.
Neka je $E \xrightarrow{\pi} M$ svežanj. Tada je ***prerez*** (eng. *section*) $s : M \to E$ glatko preslikavanje koje zadovoljava $\pi s = id_M$, gdje je $s(p)$ element F_p. Skup prereza na mnogostrukosti M označavamo sa $\Gamma(M, E)$. Prerez zadan na otvorenom skupu umjesto na cijeloj mnogostrukosti zovemo lokalnim prerezom.

2.5 Baždarni potencijal i jakost polja

Za geometrijsku interpretaciju dobro poznatih fizikalnih objekata, baždarnog potencijala i jakosti polja prvo ćemo uvesti potrebne pojmove.
Neka su zadane dvije mnogostrukosti M i N i neka postoje preslikavanja $F : M \to N$ i $f : N \to \mathbb{R}$. Vraćanje funkcije f na mnogostrukost M je kopozicija funkcija oblika

$$F^*f \equiv f \circ F : M \to \mathbb{R} \tag{8}$$

i zovemo je povlačenje (eng. *pullback*).
Nadalje, neka imamo tangentni vektor X_p na istoj mnogostrukosti M. Premještanje ili guranje tangentnog vektora sa mnogostrukosti M na mnogostrukost N je preslikavanje $F_* : T_p(M) \to T_{F(p)}N$ definirano kao kompozicija

$$(F_*X_p)(f) \equiv X_p(F * f) = X_p(f \circ F) \tag{9}$$

zovemo guranje [2].
Neka je $P(M, G)$ glavni svežanj. Koneksija (eng. *connection*) na glavnom svežnju

[1]Difeomorfizam podrazumijeva preslikavanje koje ima invez, gdje su oba beskonačno diferencijabilna.

je jedinstvena podjela njegovog tangentnog prostora T_uP na dva podprostora, nazovimo ih vertikalni V_uP i horizontalni prostor H_uP, tako da je zadovoljeno:
(a) $T_uP = V_uP \oplus H_uP$.
(b) Glatko vektorsko polje X se razdvaja u dva glatka vektorska polja $X = X^V + X^H$ vertikalnog i horizontalnog podprostora.
(c) Vrijedi $H_{ug}P = R_{g^*}H_uP$ za $u \in P$ i $g \in G$.
Razdvajanje podprostora V_uP i H_uP omogućeno je uvođenjem 1-forme $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ koja je izvrjednjena u Lievoj algebri (eng. *Lie-algebra valued*), i zovemo je 1-forma koneksije, a zadovoljava:

$$\omega(A^{\#}) = A, \tag{10a}$$

$$R_g^* \omega_{ug} = Ad_{g^{-1}} \omega_{ug} = g^{-1} \omega_u(X) g, \tag{10b}$$

gdje je $A^{\#}$ vektor definiran kao

$$A^{\#} f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \Big|_{t=0}. \tag{11}$$

Time je 1-forma koneksije projekcija tangentnog prostora T_uP na vertikalni tangentni podprostor $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ gdje je $\mathfrak{g}$ Lieva algebra od G.
Uzmimo sada globalno definiranu 1-formu koneksije ω i promotrimo istu strukturu definiranu lokalno. Neka je $\{U_i\}$ otvoreni pokrivač od M i neka je σ_i lokalni prerez definiran $\forall U_i$. Uvodimo lokalnu 1-formu na U_i:

$$\mathscr{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i), \tag{12}$$

te je očito povlačenje globalne 1-forme jednako lokalnoj. Lokalna *Lie-algebra valued* 1-forma $\mathscr{A}_i$ u Yang-Millsovim teorijama predstavlja baždarni potencijal (npr. gluonsko polje u $SU(3)_c$, u formi $\mathscr{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha$, gdje su T_α generatori Lieve algebre).
Za jakost polja potrebna nam je definicija kovarijantne derivacije. Neka je $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$ i neka su $X_1, ..., X_{r+1} \in T_uP$. Tada je kovariantna derivacija zadana sa:

$$D\phi(X_1, ..., X_{r+1}) \equiv d_P \phi(X_1^H, ..., X_{r+1}^H). \tag{13}$$

Dva-forma zakrivljenosti Ω je kovarijantna derivacija 1-forme koneksije, odnosno

$$\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}. \tag{14}$$

Ponovimo postupak i lokaliziranjem zakrivljenosti dobivamo lokalnu formu $\mathscr{F}$ zakrivljenosti Ω analognim povlačenjem

$$\mathscr{F} \equiv \sigma^* \Omega. \tag{15}$$

Cartanova strukturna jednadžba koju zadovoljavaju globalne 1-forma koneksije ω i 2-forma zakrivljenosti Ω

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega, \tag{16}$$

tada lokalno porima oblik

$$\mathscr{F} = d\mathscr{A} + \mathscr{A} \wedge \mathscr{A}. \tag{17}$$

$\mathscr{F}$ je u Yang-Millsovim teorijama jakost polja poznatija u obliku $\mathscr{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha$, kao dio kinetičkog člana baždarnih polja u lagranžijanu.

2.6 Karakteristične klase

Neka imamo bazni prostor M, strukturnu grupu G i vlakno F. Konstrukcija svežnja iz danih elemenata nije jedinstvena i ovisi o izboru prijelaznih funkcija. Ako uzmemo trivijalni svežanj koji je direktan produkt $M \times F$, zanima nas koliko još različitih konstrukcija postoji i koliko se one razlikuju od trivijalnog svežnja.
Kvantitativnu mjeru za netrivijalnost (što možemo nazvati kovrčanjem vlakna) daju tzv. karakteristične klase, koje spadaju u podskup klasa kohomologije baznog prostora. Mjera nazovimo kovrčanja je cjelobrojna topološka konstanta, izražena preko

integrala po zakrivljenosti svežnja. U ovom potpoglavlju definirat ćemo karakteristične klase nužne za formulaciju Atiyah-Singerovog indeksnog teorema.
Neka je E kompleksni vektorski svežanj sa vlaknom $\mathbb{C}^k$, i strukturna grupa G je podgrupa od $GL(k, \mathbb{C})$, te neka su dani baždarni potencijal $\mathscr{A}$ i jakost polja $\mathscr{F}$ koji poprimaju vrijednosti u $\mathfrak{g}$. Tada se totalna Chernova klasa definira kao

$$c(\mathscr{F}) \equiv det\left(\mathbb{I} + \frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right) = 1 + c_1(\mathscr{F}) + c_2(\mathscr{F}) + ... \tag{18}$$

gdje je $c_j(\mathscr{F})$ j-ta Chernova klasa koja za m-dimenzionalnu mnogostrukost preživljava do reda $2j = m$.
Totalni Chernov karakter definira se kao

$$ch(\mathscr{F}) \equiv tr\; exp\left(\frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\, tr\left(\frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right)^i, \tag{19}$$

gdje je k dimenzija vlakna i j-ti član sume predstavlja j-ti Chernov karakter koji preživljava do reda $2j = m$. Na kompleksnom vektorskom svežnju definira se i Toddova klasa

$$Td(\mathscr{F}) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} = 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathscr{F}) + \frac{1}{12}\Big(c_1(\mathscr{F})^2 + c_2(\mathscr{F})\Big) + ... \tag{20}$$

sasvim desno izražena preko Chernovih klasa.
Na realnim vektorskim svežnjevima definira se Pontrjaginova klasa kao

$$p(\mathscr{F}) \equiv det\left(\mathbb{I} + \frac{\mathscr{F}}{2\pi}\right) = 1 + p_1(\mathscr{F}) + p_2(\mathscr{F}) + ..., \tag{21}$$

preko koje konačno definiramo Eulerovu klasu e na $2l$-dimenzionalnoj orijentabilnoj Riemannovoj mnogostrukosti kao

$$e(A)e(A) = p_\ell(A) \tag{22}$$

gdje su A $2\ell \times 2\ell$ matrice. Definirano je da Eulerova klasa za neparno dimenzionalne mnogostrukosti iščezava.
Važno je naglasiti da su integrali karakterističnih klasa po mnogostrukostima topološke invarijante.

3 Indeksni teoremi

Indeksni teoremi općenito povezuju topološke invarijante i analitička rješenja, npr. lokalna rješenja diferencijalnih jednadžbi i globalne topološke invarijante. Promotrimo najjednostavniji konačno dimenzionalni primjer, tzv. *toy* indeks teorem. Neka su V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori i neka je definirano linearno preslikavanje $f : V \to W$ i njemu adjungirano $f' : W \to V$. Tada vrijedi

$$dim\; ker\; f - dim\; ker\; f' = dim\; V - dim\; W, \tag{23}$$

čiji dokaz trivijalno slijedi iz teorema koji kaže

$$dim\; V = dim\; ker\; f + dim\; im\; f \tag{24}$$

i iz jednakosti slika dvaju preslikavanja: $dim\; im\; f = dim\; im\; f'$. Primijetimo da u (23) svaki član lijevo ovisi o preslikavanjima, međutim njihova razlika ovisi samo o dimenzijama vektorskih prostora na koje djeluju.
Diferencijalni operatori korišteni u fizici, kao što su laplasijan ili Diracov operator, jesu preslikavanja na prerezima mnogostrukosti

$$D : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F), \tag{25}$$

gdje su E i F vektorski svežnjevi na mnogostrukosti M. Ako navedeni svežnjevi imaju definiran unutarnji produkt, možemo definirati adjungirani diferencijalni operator kao

$$D^\dagger : \Gamma(M,F) \to \Gamma(M,E). \tag{26}$$

Operatori D i $D^\dagger$ daju analitičke informacije o spektru rješenja i mogućoj degeneraciji. Od interesa jesu rješenja diferencijalnih jednadžbi, odnosno zanimaju nas kerneli operatora:

$$ker\ D \equiv \{s \in \Gamma(M,E) | Ds = 0\}, \tag{27a}$$

$$ker\ D^\dagger \equiv \{s \in \Gamma(M,F) | D^\dagger s = 0\}. \tag{27b}$$

Uvedimo sada veličinu definiranu analitičkim svojstvima operatora, analitički indeks zadan kao:

$$ind\ D = dim\ ker\ D - dim\ ker\ D^\dagger. \tag{28}$$

Indeksni teoremi općenito kažu da je analitička veličina (28) topološka invarijanta koja je formulirana kao integral određene karakteristične klase na mnogostrukosti M.

3.1 Eliptični i Fredholmovi operatori

Ovo potpoglavlje uglavnom prati razmatranje iz [1] i [3]. Zanimaju nas diferencijalni operatori koji imaju dobro definiran indeks (28), što je slučaj za opreratore sa konačno dimenzionalnim kernelima.
Fourierov transformat $\mathcal{F}$ neke funkcije $f(x)$ definiran je kao:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n x \exp(i\xi x) f(x) \equiv \widehat{f}(\xi). \tag{29}$$

Neka laplasijan u kartezijevim koordinatama oblika

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{30}$$

djeluje na funkciju $f(x)$. Time inverzni Fourierov transformat ima oblik

$$\Delta f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \xi \left[\xi_1^2 + ... + \xi_n^2\right] \exp(-i\xi x) \widehat{f}(\xi). \tag{31}$$

Vodeći simbol diferencijalnog operatora (eng. *leading symbol*) definiramo kao najvišu potenciju od ξ koja se pojavljuje u Fourierovom transformatu i označavamo je sa $\sigma_L(D)$. U slučaju laplasijana vodeći simbol dan je sa

$$\sigma_L(\Delta) = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2. \tag{32}$$

Poopćavanjem laplasijana tako da derivacije koordinata ne dolaze sa različitim težinama, nego svaka sa skalom a_i, laplasijan postaje

$$\Delta = -\sum_1^n a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{33}$$

a vodeći simbol jednak je konstanti c i dobije se jednadžba

$$a_1 \xi_1^2 + ... + a_n \xi_n^2 = c, \tag{34}$$

što je jednadžba elipsoida u $\mathbb{R}^n$. Ako je vodeći simbol $\sigma_L(x,\xi)$ uvijek različit od nule za $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tada se diferencijalni operator naziva ***eliptični***.
Primjerice, dalamberijan definiran sa

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{(n-1)}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{35}$$

ima vodeći simbol

$$\sigma(\Box) = \xi_1^2 + ... + \xi_{(n-1)}^2 - \xi_n^2, \tag{36}$$

koji iščezava na svjetlosnom stošcu

$$\xi_n^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_{(n-1)}^2 \tag{37}$$

i zato ne spada u eliptične operatore.
Neka je D eliptični operator definiran kao preslikavanje (25) sa kernelom (27a) i pripadajućim adjungiranim operatorom (26) sa kernelom (27b). Neka su definirani produkti na svežnjevima E i F, te neka je veza među produktima

$$\langle s', Ds \rangle_F \equiv \langle D^\dagger s', s \rangle_E, \tag{38}$$

gdje je $s \in \Gamma(M, E)$ i $s' \in \Gamma(M, F)$. Kokernel operatora D definiramo kao kvocijentni skup

$$coker\ D \equiv \Gamma(M, F)/im\ D. \tag{39}$$

Fredholmovi operatori jesu eliptični operatori sa konačno dimenzionalnim kernelima i kokernelima. Oni imaju dobro definiran analitički indeks

$$ind\ D = dim\ ker\ D - dim\ coker\ D, \tag{40}$$

koji je ekvivalentan indeksu (28) po teoremu koji kaže da

$$coker\ D \cong ker\ D^\dagger. \tag{41}$$

Dokaz je sljedeći. Neka je $[s] \in coker\ D$ klasa ekvivalencije oblika

$$[s] = \{s' \in \Gamma(M, F) | s' = s + Du, u \in \Gamma(M, E)\}. \tag{42}$$

Sada definirajmo $s_0 \in ker\ D^\dagger$, tako da je

$$s_0 \equiv s - D\frac{1}{D^\dagger D}D^\dagger s. \tag{43}$$

gdje s_0 očito pripada kernelu od $D^\dagger$ budući da je

$$D^\dagger s_0 = D^\dagger s - \frac{D^\dagger D}{D^\dagger D}D^\dagger s = 0. \tag{44}$$

Sada uvedimo novi $s_0' \in ker\ D^\dagger \neq s_0$ i želimo pokazati da je $[s_0] \neq [s_0']$ u $coker\ D \equiv \Gamma(M, F)/im\ D$. Ako je $[s_0] = [s_0']$ onda očito vrijedi da $\exists u \in \Gamma(M, E)$ tako da je $s_0 - s_0' = Du$. Tada je

$$0 = \langle u, D^\dagger(s_0 - s_0') \rangle_E = \langle u, D^\dagger Du \rangle_E = \langle Du, Du \rangle_F \geq 0, \tag{45}$$

pa je $Du = 0$ i ne postoje dvije različite klase ekvivalencije u $coker\ D$. Pokazali smo dakle da je $s_0 \to [s]$ bijekcija čime je zadovoljena relacija (41).
Općenito je poznato u teoriji operatora da su eliptični operatori na kompaktnim mnogostrukostima Fredholmovi.

3.2 Eliptički kompleksi

Prethodno definiran de Rhamov kompleks generiran vanjskom derivacijom na r-formama ima svoj analogon eliptički kompleks, gdje na skup prereza djeluju eliptični operatori. Razmotrimo niz Fredholmovih operatora

$$... \xrightarrow{D_{i-2}} \Gamma(M, E_{i-1}) \xrightarrow{D_{i-1}} \Gamma(M, E_i) \xrightarrow{D_i} \Gamma(M, E_{i+1}) \xrightarrow{D_{i+1}} ... \tag{46}$$

Član (E_i, D_i) zovemo ***eliptički kompleks*** ako je D_i nilpotentan operator (kao što je bio slučaj kod vanjske derivacije). Adjungirani operator definiran je preslikavanjem u 'suprotnom smjeru'

$$D_i^\dagger : \Gamma(M, E_{i+1}) \to \Gamma(M, E_i). \tag{47}$$

U novom kontekstu možemo definirati laplasijan $\Delta_i : \Gamma(M, E_i) \to \Gamma(M, E_i)$ kao

$$\Delta_i \equiv D_{i-1} D_{i-1}^\dagger + D_i^\dagger D_i. \tag{48}$$

Potpuno analogno s de Rhamovim grupama kohomologije, u ovom slučaju definiramo

$$H^i(E, D) \equiv \frac{ker\ D_i}{im\ D_{i-1}}, \tag{49}$$

te analogno vrijedi da je $H^i(E, D) \cong ker\ \Delta_i$. Definirajmo indeks eliptičkog kompleksa kao

$$ind\ D \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i dim H_i(E, D) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i dim\ ker\ \Delta_i. \tag{50}$$

Sada ćemo ovu generalizaciju primijeniti naš slučaj. Prvo pretvorimo svoje preslikavanje u eliptički kompleks dodavanjem nula na obje strane:

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F) \xrightarrow{\varphi} 0, \tag{51}$$

i izračunajmo indeks po općenitoj formuli (50).

$$\begin{aligned} ind\ D =& dim\ H^0(E, D) - dim H^1(F, \varphi) \\ =& dim\ ker\ D - dim\ im\ i - (dim\ ker\ \varphi - dim\ im\ D) \\ =& dim\ ker\ D - dim\ coker\ D, \end{aligned} \tag{52}$$

gdje smo uzeli u obzir relaciju grupa kohomologije (49) i definiciju kokernela $coker\ D = \Gamma(M, F)/im\ D = ker\ \varphi/im\ D$, te $im\ i = 0$. Očita je ekvivalencija s prethodnom definicijom indeksa.

3.3 Atiyah-Singerov indeksni teorem

Atiyah-Singerov indeksni teorem kaže sljedeće. Neka je (E, D) eliptički kompleks definiran na m-dimenzionalnoj kompaktnoj mnogostrukosti bez ruba M. Tada je indeks ovog kompleksa zadan sa

$$ind(E, D) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_M ch\Big(\bigoplus_r (-1)^r E_r\Big) \frac{Td(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\Bigg|_{vol}. \tag{53}$$

Indeks iščezava za neparan m. Integral desno 'vidi' samo m-forme, a karakteristične klase se raspišu kao produkti izvedeni dijagonalizacijom (tj. principom dijeljenja), te se izraz nakon sređivanja integrira po zadanoj mnogostrukosti M. Postoji više dokaza teorema, npr. preko K-teorije, ili u tzv. *heat-kernel* formalizmu. U idućem podpoglavlju iznijet ćemo dokaz preko supersimetričnih integrala po stazama.
Iz teorema trivijalno slijedi sljedeći korolar. Neka je $\Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F)$ eliptički kompleks sa dva člana. tada je indeks zadan sa:

$$ind\ D = dim\ ker D - dim\ ker D^\dagger = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_M (chE - chF) \frac{Td(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\Bigg|_{vol}. \tag{54}$$

Dakle, razlika dimenzija kernela dvaju adjungiranih Fredholmovih operatora topološka je invarijanta.

3.4 Dokaz preko supersimetrija

U ovom podpoglavlju iznijet ćemo dokaz za Atiyah-Singerov indeksni teorem prateći [4]. Supersimetrije (SUSY) najjednostavnije rečeno obuhvaćaju kvantnu teoriju polja koja sadržava dodatnu simetriju: svaka čestica opisana Bose-Einsteinovom statistikom (bozon) ima svog superpartnera opisanog Fermi-Diracovom statistikom

(fermion) i obrnuto. Prijelaz iz bozonskih u fermionska stanja i obrnuto opisan je djelovanjem supersimetričnog operatora Q. Uzatopnim djelovanjem Q konstruira se tzv. supersimetrični multiplet.
Uzmimo teoriju definiranu na konačnom volumenu sa jednim supersimetričnim nabojem. Neka je Q supersimetrični generator i neka je H hamiltonijan sustava gdje je $H = Q^2$ i $[H, Q] = 0$. Stanja anihilirana sa Q imaju nulto najniže stanje energije u spektru. Svako stanje vlastite energije λ povezano je sa bozonsko-fermionskim parom stanja kao:

$$\begin{aligned} Q|b,\lambda\rangle &= \sqrt{\lambda}|f,\lambda\rangle; \quad Q|f,\lambda\rangle = \sqrt{\lambda}|b,\lambda\rangle, \\ Q^2|b,\lambda\rangle &= \lambda|b,\lambda\rangle; \quad Q^2|f,\lambda\rangle = \lambda|f,\lambda\rangle, \end{aligned} \tag{55}$$

gdje b i f predstavljaju redom bozonsko i fermionsko stanje. Važno je primjetiti da promjenom parametara teorije (npr. konstanti vezanja) razlika bozonskih i fermionskih stanja nulte energije $n_b - n_f$ ostaje konstanta jer stanja u paru poprimaju jednake energije. Iz te činjenice slijedi Wittenova relacija

$$\begin{aligned} Tr(-)^f e^{-\beta H} &= \sum_b \langle b|e^{-\beta\lambda_b}|b\rangle - \sum_f \langle f|e^{-\beta\lambda_f}|f\rangle \\ &= \sum_{\lambda\neq 0} e^{-\beta\lambda}\big(\langle b|b\rangle - \langle f|f\rangle\big) + \sum_{\lambda=0}\big(\langle b_0|b_0\rangle - \langle f_0|f_0\rangle\big) \\ &= n_b(\lambda=0) - n_f(\lambda=0), \end{aligned} \tag{56}$$

gdje smo odvojili stanja nultih i pobuđenih svojstvenih vrijednosti, te iskoristili činjenicu da se sva pobuđena stanja krate u parovima budući da imaju iste svojstvene vrijednosti. U gornjoj Desna strana jednadžbe (56) je, kao što vidimo, razlika cjelobrojih veličina što se poklapa s definicijom indeksa, te ćemo sada pokazati da je to upravo indeks Diracovog operatora.
Svaki spinor možemo uz pomoć projektora $P_{L,R}$ podijeliti na lijeva i desna kiralna stanja kao

$$\psi = P_L S + P_R S = S_L + S_R. \tag{57}$$

Definirajmo sada Diracov operator D kao

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{D}_L \\ \mathbf{D}_R & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{D}_L \\ -\mathbf{D}_L^\dagger & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

gdje su lijevi i desni Diracov operator preslikavanja

$$\mathbf{D}_L : S_L \to S_R; \quad \mathbf{D}_R : S_R \to S_L. \tag{59}$$

Indeks Diracovog operatora sada je

$$ind\mathbf{D} = dim\ ker\mathbf{D}_L - dim\ ker\mathbf{D}_R = n_0^L - n_0^R, \tag{60}$$

gdje su $n_0^{R,L}$ broj rješenja sa nultom vlastitom vrijednosti desnog i lijevog Diracovog operatora. Dokažimo da je poslijednji izraz ekvivalentan indeksu (56). Definirajmo dva adjungirana operatora

$$\Delta_L = \mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{D}_L; \quad \Delta_R = \mathbf{D}_R^\dagger \mathbf{D}_R, \tag{61}$$

pozitivno definitna (usporedi s hamiltonijanom) koji dijele kernel sa redom lijevim i desnim Diracovim operatorom $ker\Delta = ker\mathbf{D}$, jer djelovanje (adjungiranog) Diracovog operatora na 0 opet daje 0, i dodatno, po definicijama (58), (59) i (61) vidimo naime da je kernel operatora $\Delta_{L,R}$ determiniran sasvim desnim operatorom: imamo $\mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{D}_L S_L = -\mathbf{D}_R S_R = -S_L$ ili $\mathbf{D}_L^\dagger \mathbf{D}_L S_R = 0$, odnosno doprinos jedino lijevog operatora u $\Delta_{L,R}$ ne može poništiti stanje.
Sada ćemo pokazati da Δ_L i Δ_R djelovanjem na stanje daju iste vlastite vrijednosti. Neka vrijedi:

$$\Delta_L \psi = \lambda\psi. \tag{62}$$

Kako je iz definicije operatora $\mathbf{D}_R = -\mathbf{D}_L^\dagger$ imamo:

$$\Delta_R \mathbf{D}_L \psi = (\mathbf{D}_R^\dagger \mathbf{D}_R)\mathbf{D}_L \psi = (\mathbf{D}_L \mathbf{D}_L^\dagger)\mathbf{D}_L \psi = \mathbf{D}_L \Delta_L \psi = \mathbf{D}_L \lambda \psi, \tag{63}$$

čime je pokazano da djelovanje operatora $\Delta_{L,R}$ daje iste svojstvene vrijednosti. Preko Diracovog operatora hamiltonijan je dan sa

$$H = \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{D}_R^\dagger \\ \mathbf{D}_L^\dagger & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{D}_L \\ \mathbf{D}_R & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta_L . \end{pmatrix} \tag{64}$$

Da bismo reproducirali indeks kao razliku lijevog i desnog kernela operatora $\Delta_{L,R}$ očito je da u trag mora ući

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

U tom slučaju indeks postaje:

$$\begin{aligned} Tr\gamma_5 e^{-\beta H} &= dim\ ker\Delta_L - dim\ ker\Delta_R \\ &= dim\ ker\mathbf{D}_L - dim\ ker\mathbf{D}_R \\ &= ind\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{66}$$

Iz analogije

$$\{\gamma_5, \mathbf{D}\} = 0 \leftrightarrow \{(-)^f, Q\} = 0, \tag{67}$$

primjećujemo da γ_5 ima ulogu $(-)^f$, a Diracov operator ulogu superoperatora Q. Sada ćemo povezati supersimetrični integral po stazama sa $Tr\gamma_5 e^{-\beta H}$, koristeći slobodni Diracov operator u 4 dimenzije. Preko γ matrica u euklidskom prostoru definiramo operatore stvaranja i poništenja:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2}; \quad \xi_2 = \frac{\gamma_3 - i\gamma_4}{2}, \\ \xi_1^* &= \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2}; \quad \xi_2^* = \frac{\gamma_3 + i\gamma_4}{2}, \end{aligned} \tag{68}$$

koji zadovoljavaju algebru:

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta^*\} = \delta_{\alpha\beta}; \quad \{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \{\xi_\alpha^*, \xi_\beta^*\} = 0. \tag{69}$$

Ovako konstruirani operatori zadovoljavaju Grassmanovu antikomutirajuću algebru i pri integraciji se ponašaju ovako:

$$\int d\xi = 0; \quad \int d\xi \xi = 1. \tag{70}$$

Sada uz pomoć Grassmannove algebre možemo konstruirati unutarnji produkt dva vektora:

$$(V, W) = \sum_{n=1}^{4} V_n^* W_n = \int \prod_{\alpha=1}^{2} d\xi_\alpha d\xi_\alpha^* e^{-\sum_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^*} V^*(\xi) W(\xi^*). \tag{71}$$

Za vektore biramo reprezentaciju:

$$\begin{aligned} V(\xi) =& V_0 + V_1\xi_1 + V_2\xi_2 + V_3\xi_1\xi_2, \\ V^*(\xi^*) =& V_0^* + V_1^*\xi_1^* + V_2^*\xi_2^* + V_3^*\xi_1^*\xi_2^*. \end{aligned} \tag{72}$$

Elementi $(1, \xi_1, \xi_2, \xi_1^*, \xi_2^*)$ čine ortonormiranu bazu u prostoru stanja i svaki matrični operator $\hat{M}$ povezan je s kernelom $K(\xi, \xi^*)$. Djelovanje matričnog operatora na spinorni prostor u operatorskom obliku zadan sa $V_\alpha = M_{\alpha\beta} W_\beta$ u formulaciji integrala po stazama ima oblik:

$$V(\xi) = \int d\eta_\alpha d\eta_\alpha^* e^{-\sum_\alpha \eta_\alpha \eta_\alpha^*} K(\xi, \eta^*) W(\eta). \tag{73}$$

Umjesto matričnog operatora sada imamo tzv. normalni simbol definiran pomoću matričnih elemenata i baze Grassmannove algebre:

$$N(\xi, \xi^*) = M_{00} + M_{10}\xi_1 + M_{01}\xi_1^* + M_{11}\xi_1\xi_1^*, \tag{74}$$

te je veza kernela i normalnog simbola zadana sa

$$K(\xi, \xi^*) = e^{\sum_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^*} N(\xi, \xi^*). \tag{75}$$

Izračunajmo sada trag za najjednostavniji slučaj kada je $H = \not{p}^2 = p^2$. Vrijedi po definiciji

$$Tr\ e^{-\beta H} = \lim_{N\to\infty} (1 - \epsilon H)^N, \tag{76}$$

gdje je $N = \beta/\epsilon$. Kada se ovaj izraz prevede u integral po stazama dobije se izraz (u kojem iz produkta izvučemo prvu i zadnju grassmannovu varijablu za što će razlog biti jasan uskoro):

$$Tr\ e^{-\beta H} = \int d\xi_N d\xi_0^* e^{-\xi_N \xi_0^*} e^{\xi_N \xi_{N-1}^*} \prod_{i=1}^{N-1} d\xi_i d\xi_i^* e^{-\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i(\xi_i^* - \xi_{i-1}^*)} \int b.d.o.f., \tag{77}$$

gdje su $b.d.o.f.$ bozonski stupnjevi slobode. Uvršavamo anti-periodički granični uvjet:

$$\xi_0^* = -\xi_N^*. \tag{78}$$

Međutim, supersimetričan integral po stazama mora sadržavati periodički granični uvjet kako bi se osigurala vremenska invarijantnost, i dodatno, može se pokazati da je SUSY akcija invarijantna na supersimetrične transformacije ako se poštuje periodički granični uvjet. Kako smo pokazali da operatoru $(-)^f$ analogon γ_5, ona će se pobrinut da uz anti-periodički granični uvjet u integralu po stazama fermionski dijelovi poprime periodičnost. Time elegantno rješavamo problem i uz raspis bozonskog integrala imamo:

$$Tr\gamma_5 e^{-\beta H} = \int \mathscr{D}\xi_\alpha(t)\mathscr{D}\xi_\alpha^*(t)\mathscr{D}x^\mu(t) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\beta (\dot{x}^\mu)^2 + \xi_\alpha \xi_\alpha^*}\Big|_{PBC}. \tag{79}$$

Uz zamjene

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}}; \quad \xi_2 = \frac{\psi_3 - i\psi_4}{\sqrt{2}}, \\ \xi_1^* &= \frac{\psi_1 - i\gamma_2}{\sqrt{2}}; \quad \xi_2^* = \frac{\psi_3 + i\psi_4}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{80}$$

dobije se poznata struktura:

$$Tr\gamma_5 e^{-\beta H} = \int \mathscr{D}x^\mu(t)\mathscr{D}\psi^\mu(t) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\beta (\dot{x}^\mu)^2 + \psi_\mu \dot{\psi}_\mu}\Big|_{PBC}. \tag{81}$$

Desna strana jednadžbe (81) izgrađena je samo iz SUSY hamiltonijana uz poštivanje periodičkih graničnih uvjeta, dok je lijeva strana topološka invarijanta. Možemo još dodatno poopćiti rezultat uvođenjem izospinskih stupnjeva slobode čime dobivamo analitički indeks prikazan preko integrala po stazama u formi:

$$Tr(-)^f e^{-\beta H} = Tr\gamma_5(-)^N e^{-\beta H - i\alpha N} = \int_{PBC} \mathscr{D}x^\mu(t)\mathscr{D}\psi^\mu \mathscr{D}\eta_\alpha \mathscr{D}\eta_\alpha^* e^{-S}. \tag{82}$$

Dokaz Atiyah-Singerovog indeksnog teorema sada se, s obzirom na invarijantnost supersimetričnog integrala po stazama na izbor koordinatne reprezentacije i baždarenja, može provesti uz izbor:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= -\frac{1}{2} x^\nu F_{\mu\nu}, \\ \psi_\mu \Gamma^\mu_{\nu\rho} \psi^\nu &= \frac{1}{2} R_{\alpha\rho\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu x^\alpha. \end{aligned} \tag{83}$$

Zadnja ključna stvar je da konačan izraz ne smije eksplicitno ovisiti o β, pri čemu ćemo koristit rezultat iz *heat kernel* pristupa

$$\int \mathscr{D}x^\mu(t) e^{-\frac{1}{2\beta}\int(\dot{x}^\mu)^2} \sim \int dx^1 ... dx^n \beta^{-\frac{d}{2}}, \tag{84}$$

i reskaliranje $\psi \to \psi/\sqrt{\beta}$, $t \to \beta t$, te $x \to \sqrt{\beta}x$. Uz izračunavanje potrebnih tragova kao konačan rezultat dobije se indeks:

$$Tr(-)^f e^{-\beta H} = Tr\gamma_5(-)^N e^{-\beta H - i\alpha N} = I(\alpha), \tag{85}$$

$$I(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-)^k e^{-i\alpha k} \int_M \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{d/2} det^{-1/2}\left(\frac{sh\mathscr{R}^\lambda{}_\nu/2}{\mathscr{R}^\lambda{}_\nu/2}\right) Tr(e^{\mathscr{F}}), \tag{86}$$

gdje su

$$\mathscr{F} = F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu; \quad \mathscr{R}^\lambda{}_\nu = \frac{1}{2}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{87}$$

U (86) još prepoznajemo:

$$\begin{aligned} \hat{A}(TM) =& det^{-1/2}\left(\frac{sh\mathscr{R}^\lambda{}_\nu/2}{\mathscr{R}^\lambda{}_\nu/2}\right), \\ ch(\mathscr{F}) =& \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{d/2} Tr(e^{\mathscr{F}}). \end{aligned} \tag{88}$$

gdje je $\hat{A}(TM)$ Diracov genus. Konačno možemo izreći Atiyah-Singerov indeksni teorem:

Topološki i analitički indeks su jedan drugom jednaki.

Literatura

[1] M. Nakahara *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics 2nd Edition

[2] I. Smolić *Diferencijalna geometrija u fizici*, Skripta iz kolegija dostupna na http://www.phy.pmf.unizg.hr/ ismolic/dgf.pdf

[3] A. Eriksson *Index Theorems and Supersymmetry*, Master Thesis, Uppsala University

[4] P. Windey, *Supersymmetric Quantum Mechanics and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Acta Phys. Pol. B15 (1984).

[5] D. Friedan i P. Windey *Supersymmetric Derivation of the Atiyah-Singer Index and the Chiral Anomaly*, Nucl.Phys. B235 (1984) 395.

[6] D. Friedan i P. Windey *Supersymmetry and index theorems*, Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 15, Issues 1–2, Pages 3-294 (February 1985)