Fizički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Liejeve grupe i Liejeve algebre

Lovro Dulibić

21. rujna 2021.

Sažetak

Grupe i algebre veoma su općenite matematičke strukture koje se u nekom obliku javljaju gotovo svugdje u matematici i fizici. Koncentriranje 'samo' na Liejeve grupe i Liejeve algebre ne smanjuje na značajan način obujam posla za fizičare jer su upravo to one grupe i algebre koje se javljaju u fizici. O ovoj temi postoji mnoštvo literature na različitim razinama složenosti, više posvećene fizičarima ili matematičarima. Ovaj rad je napisan kao fizičarev uvod u Lie teoriju čiji cilj je zainteresirati i otvoriti vrata prema složenijim materijalima.

U ovome radu dan je uvod u Liejeve grupe i Liejeve algebre. Pregled osnovnih primjera, onih koje često srećemo u fizici. Tehnički uvod kratko podsjeća na mnogostrukosti i svežnjeve koji su potrebni za razgovor o Liejevim grupama i algebrama. Istražena je duboka veza Liejevih grupa i njihovih algebri koja u konačnici proizlazi iz geometrijske strukture na kojoj su i definirane. Također, dane su poveznice s fizikom i rezultatima poznatim iz fizike kako bi se razjasnilo njihovo porijeklo. Kratki pregled teorije reprezentacija nam govori kako iz apstraktnih elemenata dolazimo do konkretnih operatora transformacija koji predstavljaju grupe i algebre kakve znamo u fizici. Naposlijetku, dan je uvid u kompleksnost baždarne teorije kroz jezik svežnjeva i Liejevih grupa i algebri.

Bitno je za imati na umu kako je ovo uistinu opširna tema i ovaj tekst nije u mogućnosti pokriti sve što je od važnosti za Liejeve grupe i algebre. Svima znatiželjnima preporučam dublji pogled u izvore navedene na kraju.

Sadržaj

1 Motivacija

Široka primjena Liejevih grupa i algebri u matematici i fizici, naravno, prva je motivacija za proučavanje istih. Od konkretnih primjena u fizici prije svih iskače polje fizike visokih energija. Interakcije standardnog modela počivaju na Liejevoj teoriji i zapravo cijeli formalizam u kojem je standardni model formuliran. Naravno, primjena u fizici visokih energija nije nipošto jedini primjer, ali je sigurno među značajnijima. Proučavanje grupa i algebri daje uvid u 'mašineriju' iza velikih otkrića i bitnih rezultata.

Liejeve grupe specifične su po tome što su definirane na glatkoj mnogostrukosti, a ne na skupu kao druge (obične) grupe. Elementi grupe su točke na mnogostrukosti, elementi njima pripadajućih algebri su tangentni vektori na toj mnogostrukosti. To otvara cijeli arsenal geometrije i topologije koji se onda koristi kako bismo baratali grupama i njihovim algebrama.

Kroz nekoliko zanimljivih rezultata vidjet ćemo kako su Liejeve grupe i Liejeve algebre blisko povezane. Također, ideja je pružiti dublji pogled u rezultate koji se u kontekstu fizike javljaju bez pogleda u čvrstu matematiku iza njih. Primjerice, zašto za element Liejeve algebre kažemo da je infinitezimalni element Liejeve grupe.

Ono što se u fizici nazivaju Liejeve grupe najčešće se zapravo misli na *reprezentacije* Liejevih grupa. One se u *tom* obliku susreću u fizici nebrojivo puta te kratka šetnja kroz teoriju reprezantacija trebala bi iskristalizirati poveznicu između matematički apstraktnih struktura i konkretnih operatora koje nalazimo u fizici.

2 Uvod tehničke prirode

Na početku, bitno je upoznati se s terminologijom vezanom za grupe, algebre, topologije, mnogostrukosti, svežnjeve i s njima povezanim terminima u svrhu definiranja notacije i stvaranja okoliša u kojem možemo govoriti o Liejevim grupama i algebrama.

2.1 Grupe i algebre

Definicija 2.1 **Grupa** *je uređeni par* $(G, \circ)$ *skupa* G *i zatvorene operacije* $\circ : G \times G \to G$ *koja zadovoljava sljedeća svojstva* $\forall g, h, j \in G$*:*

(i) *asocijativnost* $g \circ (h \circ j) = (g \circ h) \circ j$

(ii) *neutralni element* $\exists n \in G$ *takav da* $n \circ g = g$

(iii) *inverzni element* $\exists g^{-1} \in G$ *takav da* $g^{-1} \circ g = n$

Na primjer, $(\mathbb{R}, +)$ realni brojevi s grupnom operacijom zbrajanja tvore grupu. Imaju neutralni element $n = 0$ te inverz $\forall a \in \mathbb{R} \mid \exists(-a) \in \mathbb{R}$ takav da $a + (-a) = n = 0$.

Algebre se mogu definirati ne samo nad poljem, već i nad općenitijim objektom zvanim prsten, ali za naše potrebe dovoljno je pogledati dobro poznatu definiciju algebre nad poljem.

Definicija 2.2 **Algebra** *nad poljem* $\mathbb{K}$ *je uređeni par* $(A, \circ)$ *vektroskog prostora* A *nad poljem* $\mathbb{K}$ *i bilinearnog preslikavanja* $\circ : A \times A \to A$. *Za algebru* $(A, \circ)$ *kažemo da je:*

(i) **asocijativna** *ako* $\forall x, y, z \in A \mid$ $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

(ii) **unitarna** *ako* $\exists n \in A \mid x \circ n = n \circ x = x$

(iii) **Abelova** *ili* **komutativna** *ako* $\forall x, y \in A \mid$ $x \circ y = y \circ x$

Primjerice, $(\mathbb{R}^2, \circ)$ kompleksni brojevi, koje predstavljamo dvodimenzionalnim realnim vektorskim prostorom nad $\mathbb{C}$, i operacija množenja kompleksnih brojeva $\circ$.

Liejeve grupe osim svoje grupne strukture posjeduju i geometrijsku strukturu. Kako bismo mogli dobro definirati i razumijeti Liejeve grupe podsjetimo se malo diferencijalne geometrije.

2.2 Mnogostrukosti

Kroz idućih nekoliko definicija potrudit ćemo se graditi dodatne strukture na osnovnom matematičkom objektu - skupu. Na taj način možemo doći do vrlo rigorozne i formalne matematičke strukture koja pokazuje geometrijska svojstva.

Definicija 2.3 *Neka je X skup, a $\mathcal{T}$ familija podskupova skupa X. Tada je* **topološki prostor** *uređen par $(X, \mathcal{T})$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) *skup X i prazan skup $\emptyset$ nalaze se u $\mathcal{T}$*

(ii) *unija proizvoljnog broja skupova iz $\mathcal{T}$ nalazi se u $\mathcal{T}$*

(iii) *presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{T}$ nalazi se u $\mathcal{T}$*

Skupu X posebno smo definirali podskupove s kojima on zajedno čini topološki prostor, odnosno topologiju.

Definicija 2.4 *Za topologiju $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* **Hausdorffova** *ako za svake dvije točke $a, b \in X$ postoje disjunktne okoline O_a i O_b.*

Definicija 2.5 *Za topologiju $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* **lokalno euklidska** *dimenzije $m \in \mathbb{N}_0$ ako $\forall x \in X$ postoji $O_x \subseteq X$ koja je homeomorfna s otvorenim podskupom $\mathbb{R}^m$.*

Definicija 2.6 *Uređen par podskupa $O \subseteq X$ i homeomorfnog preslikavanja $\phi : O \to \mathbb{R}^m$ zovemo* **karta**.

Ovime smo pripremili sve potrebno za definiciju mnogostrukosti. Ona je upravo takva topologija koja na sebi nosi gore definirane posebne uvjete.

Definicija 2.7 *Hausdorffov lokalno euklidski topološki prostor dimenzije $m \in \mathbb{N}_0$ zovemo* **topološka m-mnogostrukost**.

Bitno je za napomenuti kako je mnogostrukost i dalje 'samo' topologija. Ona ima istu strukturu kao i općeniti topološki prostor. Uvjeti definirani iznad samo opisuju posebnu vrstu takve strukture, odnosno kažu da je mnogostrukost određena vrsta topologije. Dodavanjem strukture na samu mnogostrukost možemo proširiti ideju topološkog prostora u svrhu definiranja vektora.

Definicija 2.8 *Za dvije karte (U, ϕ) i (V, ψ) kažemo da su C^r* **kompatibilne** *ako $U \cap V = \emptyset$ ili ako su tzv. funkcije prijelaza $\phi \circ \psi^{-1}$ i $\psi \circ \phi^{-1}$ klase C^r.*

Definicija 2.9 *C^r kompatibilni* **atlas** *$\mathcal{A}$ je familija karata $\{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}$ na mnogostrukosti M koje su u parovima C^r kompatibilne takve da je O_α otvoreni pokrivač M.*

Dakle, ako svaki djelić prostora možemo preslikati u $\mathbb{R}^m$ i imamo dovoljno takvih karata da prekrijemo cijelu mnogostrukost, onda imamo atlas.

Definicija 2.10 *Uređen par $(M, \mathcal{A})$ mnogostrukosti M i C^r kompatibilnog atlasa $\mathcal{A}$ zovemo* **diferencijabilna mnogostrukost**.

Uz pomoć atlasa, odnosno karata, uspjeli smo na potpuno apstraktni objekt topologiju dovesti ideju koordinata. Ta dodatna struktura otključala je vrata mnogočemu korisnome pa tako i tangentnim vektorima.

Definicija 2.11 *Neka je M glatka m-mnogostrukost.* **Tangentan vektor** *X_p u točki $p \in M$ je preslikavanje $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava sljedeća svojstva $\forall f, g \in C^\infty(M)$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

(i) *linearnost $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p f + \beta X_p g$*

(ii) *Leibnizovo pravilo $X_p(fg) = f X_p g + g X_p f$*

Skup svih tangentnih vektora u točki $p \in M$ zovemo **tangentni vektorski prostor** *$T_p M$, a skup svih tangentnih vektora na mnogostrukosti označavamo TM.*

Također se može definirati vektorima dualan prostor, odnosno prostor funkcionala nad vektorima. Diferencijalne forme su preslikavanja koja uzimaju vektor u nekoj točki te daju broj kao rezultat.

Definicija 2.12 *Neka je M glatka m-mnogostrukost.* **diferencijalna 1-forma** *ω_p u točki $p \in M$ je preslikavanje $\omega_p : T_p M \to \mathbb{R}$. Skup svih 1-formi u točki $p \in M$ zovemo* **kotangentan vektorski prostor** *$T_p^* M$, a skup svih 1-formi na mnogostrukosti označavamo $T^* M$.*

Mnogostrukosti su po definiciji lokalno euklidski prostori i tangentne vektore na mnogostrukostima definiramo lokalno, u nekoj točki. Pitanje je kako raditi s vektorima definiranim u različitim, proizvoljno udaljenim točkama. U tom pothvatu od velike važnosti su 'guranja' i 'povlačenja'.

Definicija 2.13 *Neka su M i N glatke mnogostrukosti te $F : M \to N$ glatko preslikavanje. U svakoj točki $p \in M$ definiramo* **guranje**

$$F_{p*} : T_pM \to T_{F(p)}N \text{ takvo da vrijedi}$$

$$F_{p*}(X_p)f = X_p(f \circ F) \mid \forall f \in C^\infty(N)$$

Ukratko, to preslikavanje 'izgura' vektor na drugu mnogostrukost (ili drugi dio iste mnogostrukosti) kako bi djelovao na tamo definirane funkcije.

Definicija 2.14 *Neka su M i N glatke mnogostrukosti te $F : M \to N$ glatko preslikavanje. U svakoj točki $F(p) \in N$ definiramo* **povlačenje**

$$F_p^* : T_{F(p)}N \to T_pM \text{ takvo da vrijedi}$$

$$F_p^*(\omega_{F(p)})X_p = \omega_{F(p)}(F_{p*}X_p)$$

Povlačenje uzima 1-formu s jedne mnogooostrukosti i povlači ju na drugu kako bi djelovala na tamo definirane vektore. Dakle, vektore guramo, a forme povlačimo.

2.3 Svežnjevi

Svežnjevima možemo opisati matematičke objekte koji su sastavljeni od 'faktora'. U grubom smislu, oni su generalizacija produkta, odnosno ono što bismo *intuitivo* nazvali produktom, ali nije direktni produkt. Takve objekte možemo opisati svežnjevima.

Uzmimo za primjer cilindar i Möbiusovu vrpcu. Cilindar možemo zamisliti kao da smo svakoj točki kružnice pridružili dužinu - direktni produkt kružnice i dužine. Möbiusova vrpca je *lokalno* isto produkt kružnice i dužine, međutim znamo da ona ima posebna topološka svojstva koja ju bitno razlikuju od običnog cilindra, stoga ona nije direktni produkt kružnice i dužine. O njoj možemo pričati kao o svežnju kružnice i dužine.

Definicija 2.15 Svežanj *mnogostrukosti je uređena trojka (E, π, M) mnogostrukosti E koju zovemo totalni prostor, kontinuirane surjektivne projekcije $\pi : E \to M$ i mnogostrukosti M koju zovemo bazni prostor. Svežanj (E, π, M) označavat ćemo $E \xrightarrow{\pi} M$.*

Ako nas zanima što tvori totalni prostor, odnosno koji 'faktori' ga sačinjavaju moramo pogledati odakle projekcija uzima elemente. Međutim, ne možemo gledati inverz projekcije jer nije injektivna, nego gledamo njenu prasliku.

Definicija 2.16 *Neka je $E \xrightarrow{\pi} M$ svežanj i $p \in M$. $F_p = preim_\pi(p)$ zovemo* **vlakno** *u točki p.*

Trivijalni primjer svežnja jest produktni svežanj, onaj čiji totalni prostor je jednostavno produkt $M \times N$. Tako da imamo svežanj $M \times N \xrightarrow{\pi} M$ gdje u svakoj točki $p \in M$ imamo pripadajuće vlakno $F_p = N$.

Definicija 2.17 Vlaknasti svežanj $E \xrightarrow{\pi} M$ *je svežanj čiji totalni prostor lokalno izgleda kao produkt baznog prostora M i vlakna F. Formalno $\forall p \in M \mid \exists O_p \subset M$ za koju postoji homeomorfizam (tzv. lokalna trivijalizacija) $\psi_p : preim_\pi(O_p) \to O_p \times F$.*

Sljedeća definicija omogućit će nam da diskutiramo o elementima totalnog prostora koji nisu na samoj mnogostrukosti.

Definicija 2.18 *Neka je $E \xrightarrow{\pi} M$ svežanj. Preslikavanje $\sigma : M \to E$ takvo da vrijedi $\sigma \circ \pi = id_M$ zovemo* **presjek** *svežnja.*

Kada smo pričali o tangentnim vektorima i formama konstruirali smo (ko)tangentni vektorski prostor u svakoj točki i označili uniju svih (ko)vektorskih prostora $T^{(*)}M$. Dalje ćemo pokušati formalizirati ideju skupa *svih* tangentnih vektora na mnogostrukosti koristeći svežnjeve. Dakle, u svakoj točki mnogostrukosti (bazni prostor) imamo tangentni vektorski prostor (vlakno), a oni zajedno tvore skup svih tangentnih vektora na mnogostrukosti TM (totalni prostor). Preostalo je još definirati topologiju i glatki atlas na

TM kako bismo imali u konačnici svežanj *mnogostrukosti*, a ne samo skupova. Dosta je korisno na taj način pričati o vektorima na mnogostrukosti jer se onda mašinerija vezana za svežnjeve može lagano iskoristiti, primjerice vektorsko polje se vrlo lako definira pomoću presjeka i sl.

Neka je $TM \xrightarrow{\pi} M$ svežanj (za sada svežanj skupova), $\mathcal{A}_M$ atlas na m-mnogostrukosti M i $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ karta. Ako je $X \in preim_\pi(U) \subseteq TM$ onda je po definiciji projekcije $X \in T_{\pi(X)}M$. Karta koja bi označavala elemente prostora TM mora imati dvostruko veću dimenziju od one koja označava elemente prostora M. Razlog tomu je što ne moramo samo reći u kojoj točki $p \in M$ se vektor nalazi, nego i *koji* je to vektor od svih u prostoru tangentih vektora u točki T_pM. Prirodan način za definirati takvu kartu je da prvih m dimenzija popunimo kartom kao što je i definirana za mnogostrukost M (govori u kojoj je *točki* vektor), a drugih m popunimo komponentama vektora iz baze inducirane kartom na mnogostrukosti (govori *koji* je vektor u toj točki).

Definicija 2.19 *Neka je $\mathcal{A}_M$ atlas na m-mnogostrukosti M i $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ karta. Definiramo preslikavanje $\xi : preim_\pi(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^m$ takvo da vektoru pridružuje koordinate $X \to x(\pi(X), X^1, ..., X^m)$; gdje su $\{X^1, ..., X^m\}$ komponente vektora X. Tada je $\mathcal{A}_{TM} = \{(preim_\pi(U), \xi) \mid (U, x) \in \mathcal{A}_M\}$* **atlas na mnogostrukosti** *TM.*

Ako pridružimo takozvanu inicijalnu topologiju našem skupu TM tada ga (s gore definiranim atlasom) možemo promovirati u mnogostrukost te je također moguće definirati projekciju $\pi : TM \to M$ takvu da je glatka. Rigoroznosti radi, trebalo bi pokazati kako je onako definiran atlas gladak te da je $(preim_\pi(U), \xi)$ karta, međutim mi ćemo to uzeti bez dokaza. Uz ovako definiran atlas konačno smo od TM napravili diferencijabilnu mnogostrukost i možemo definirati tangentni svežanj.

Definicija 2.20 *Neka je M glatka mnogostrukost, TM skup svih tangentnih vektora na M mnogostrukosti, $(TM, \mathcal{A}_{TM})$ glatka mnogostrukost te glatko surjektivno preslikavanje $\pi : TM \to M$. Tada je $TM \xrightarrow{\pi} M$* **tangentni svežanj**.

Sada kada imamo tangentni svežanj onda možemo formalno pričati o svim vektorima na mnogostrukosti odjednom. Točnije, možemo definirati vektorska *polja*.

Definicija 2.21 *Neka je $TM \xrightarrow{\pi} M$ tangentni svežanj na glatkoj mnogostrukosti M.* **Vektorsko polje** *na M je glatki presjek tangentnog svežnja, odnosno glatko preslikavanje $\sigma : M \to TM$ takvo da $\pi \circ \sigma = id_M$. Tada skup svih vektorskih polja na mnogostrukosti M zovemo $\Gamma(TM) = \{\sigma : TM \to M \mid \sigma$ glatka i vrijedi $\sigma \circ \pi = id_M\}$.*

3 Liejeve grupe i Liejeve algebre

Podsjetili smo se grupi i algebra u općenitom smislu, definirali smo diferencijabilne mnogostrukosti i razne strukture vezane uz njih, a sada smo spremni krenuti prema Liejevim grupama i algebrama te vidjeti što sve možemo s njima i u konačnici kakve veze to ima s fizikom.

3.1 Od Liejevih grupa do Liejevih algebri

3.1.1 Što su Liejeve grupe?

Definicija 3.1 **Liejeva grupa** *je grupa $(G, \circ)$ gdje je G glatka mnogostrukost i sljedeća preslikavanja su glatka $\forall g, h \in G$:*

(i) $\mu : G \times G \to G \mid (g, h) \to (g \circ h)$

(ii) $i : G \to G \mid g \to g^{-1}$

Definicija 3.2 *Neka su $(G, \circ)$ i $(H, \bullet)$ Liejeve grupe. Za preslikavanje $\phi : G \to H$ kažemo da je* **homomorfizam Liejevih grupa** *ako je glatki grupni homomorfizam.* **Izomorfizam Liejevih grupa** *je grupni homomorfizam koji je također difeomorfizam.*

Dakle, jednakost Liejevih grupa proizlazi iz njihovih jednakosti kao grupa, ali i jednakosti kao mnogostrukosti.

Definicija 3.3 Dimenzija $d \in N$ **Liejeve grupe** $(G, \circ)$ *je dimenzija mnogostrukosti* G.

Općenito, Liejeve grupe ne moraju nužno biti *matrične* Liejeve grupe, međutim budući da gotovo isključivo takve susrećemo u fizici fokusirat ćemo se na njih.

Definicija 3.4 Opća linearna grupa $(GL(n, \mathbb{K}), \circ)$ *nad poljem* $\mathbb{K}$ *je skup* $n \times n$ *invertibilnih matrica s grupnom operacijom* $\circ$ *običnog matričnog množenja.*

Opća linearna grupa je, upravo kako naziv daje naslutiti, općenita. Iz nje izvlačimo podgrupe koje su mnogima poznate iz fizike. Prije nego pogledamo nekoliko primjera trebali bismo kratko spomenuti unutarnji produkt.

Definicija 3.5 *Neka je* V *vektorski prostor.* **Pseudounutarnji produkt** *je bilinearno preslikavanje* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *koje zadovoljava* $\forall v, w \in V$*:*

(i) *simetriju* $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(ii) *nedegeneriranost*
$(\forall w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0) \Rightarrow v = 0$

Primjetimo da ovako definiran unutarnji produkt dopušta da izaberemo vektore baze $\{e_a\}$ tako da vrijedi $\langle e_a, e_b \rangle = \pm \delta_{a,b}$. Ako imamo p pluseva i q minuseva, tada par (p, q) zovemo **signatura** produkta. Pozitivna definitnost bi u ovom kontekstu bila zahtjev da signatura produkta bude $(n, 0)$, a nedegenerativnost je slabiji uvjet (koji dopušta produkt kao što je u teoriji relativnosti $(1, 3)$) i ona je razlog zašto se ovaj produkt zove *pseudo*unutarnji. Također, razlikuje se od običnog unutarnjeg produkta i po tome što *ne* zahtjeva konjugatnu simetriju, već samo simetriju! To znači da prirodna deifnicija pseudounutarnjeg produkta neće glasiti $\langle x, y \rangle = x_i y_i^*$, nego $\langle x, y \rangle = x_i y_i$.

Pogledajmo sada nekoliko primjera grupa koje se vrlo često susreću.

(i) **ortogonalna grupa** nad poljem $\mathbb{K}$ - skup svih $n \times n$ matrica koje čuvaju pseudounutarnji produkt
$O(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \forall x, y \in \mathbb{K}^n : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \}$

(ii) **specijalna ortogonalna grupa** $SO(n, \mathbb{K})$ ista kao $O(n, \mathbb{K}$ uz dodatni uvjet $\det A = +1$

(iii) **unitarna grupa** - skup svih $n \times n$ matrica koje čuvaju normu
$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{I}_n\}$

(iv) **specijalna unitarna grupa** $SU(n)$ ista kao $U(n)$ uz dodatni uvjet $\det A = +1$

(v) **specijalna linearna grupa** $SL(n, \mathbb{K})$ ista kao $GL(n, \mathbb{K})$ uz dodatni uvjet $\det A = +1$

U fizici često susrećemo upravo te podgrupe opće linearne grupe - (specijalnu) ortogonalnu i (specijalnu) unitarnu. Primjerice Lorentzova grupa transformacija je $SO(1, 3)$, grupa koja opisuje čestice spina $1/2$ je $SU(2)$, ili recimo grupa običnih rotacija u prostoru $SO(3)$.

Za ove konkretne primjere, budući da se često javljaju, dobro je i pogledati koja im je dimenzija (u smislu koliko nezavisnih parametara ih definira). Način na koji su definirane ortogonalna, unitarna i njihove specijalne varijante jest pomoću dodatnih uvjeta na skupu $GL(n, \mathbb{K})$.

Ortogonalne matrice ograničene su uvjetom $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ koji je ekvivalentan uvjetu $AA^T = \mathbb{I}$, neovisno o polju nad kojem je $O(n, \mathbb{K})$ definirana (sjetimo se definicije pseudounutarnjeg produkta). Uvjet $A^T A = \mathbb{I}$ implicira da su matrice A simetrične, također naizgled daje n^2 ograničenja na elemente matrice A. Budući da se radi o simetričnoj matrici ona ima n elemenata na dijagonali i $n(n-1)/2$ na jednoj strani od dijagonale - ukupno $n(n+1)/2$; znači da uvjet $A^T A = \mathbb{I}$ daje $n(n+1)/2$ ograničenja. Konačno dimenzija ortogonalne grupe $O(n)$ je jednaka dimenziji opće linearne grupe od koje oduzmemo ograničenja, dakle vrijedi:
$\dim O(n) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2.$

Unitarne matrice moraju čuvati unutarnji produkt i to nad poljem $\mathbb{C}$. One su podgrupa opće linearne grupe nad $\mathbb{C}$, tako da za njih uvjet čuvanja produkta je ekvivalentan uvjetu $A^\dagger A = \mathbb{I}$. Dimenzija elemenata opće linearne grupe nad $\mathbb{C}$ je $2n^2$ jer se radi o kompleksnim matricama. Ovaj puta, uvjet $A^\dagger A = \mathbb{I}$ implicira da su matrice *hermitske*; analogno računamo - na dijagonali imamo n *realnih* brojeva (hermitske matrice moraju imati relanu dijagonalu!) i s jedne strane od dijagonale imamo još $n(n-1)/2$ kompleksnih brojeva - ukupno n^2 nezavisnih parametara. U konačnici dimenzija unitarne grupe je za n^2 manja nego od opće linerane definirane nad $\mathbb{C}$ iliti $\dim U(n) = 2n^2 - n^2 = n^2$.

Specijalne varijante ovih grupa naizgled imaju dodatno ograničenje $\det A = +1$, međutim to nije sasvim točno. U slučaju specijalne ortogonalne grupe uzimanje determinante uvjeta ortogonalnosti daje $\det(A^2) = 1$ dakle uvjet ortogonalnosti sam po sebi već stvara ograničenje da je determinanta $+1$ ili -1, biranjem jedne od tih ne stavljamo dodtano ograničenje, već samo pravimo proizvoljni odabir. Stoga, dimenzija $\dim SO(n) = \dim O(n) = n(n-1)/2$. S druge strane, kod specijalnih unitarnih grupa uzimanje determinante uvjeta daje $\det(|A|^2) = |\det(A)|^2 = 1$, odnosno $\det(A) = e^{i\phi}$ što ne daje ograničenje na determinantu jer i dalje imamo dostupan kontinuum vrijednosti. Stoga, uvjet da determinanta bude $+1$ za specijalne unitarne grupe predstavlja *dodatno* ograničenje i dimenzija im je $\dim SU(n) = \dim U(n) - 1 = n^2 - 1$.

3.1.2 Glatka struktura Liejevih grupa

Ono što Liejeve grupe bitno razlikuje od običnih grupa je glatka struktura. Obične grupe definirane su na skupu elemenata, Liejeve grupe definirane su na glatkoj mnogostrukosti. O njenim elementima onda možemo pričati kao o točkama mnogostrukosti i možemo koristiti sve alate prethodno definirane kako bismo pričali o Liejevim grupama.

Za Liejeve grupe definirat ćemo nešto što se zove lijeva (desna) translacija. One predstavljaju djelovanje grupnog elementa s lijeva ili s desna na neki drugi grupni element preko definirane grupne operacije. Ukratko, to je množenje grupnog elementa grupnim elementom s lijeva ili s desna.

Definicija 3.6 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa. $\forall g, h \in G$ možemo definirati preslikavanje l_g $(r_g) : G \to G$:*

(i) **lijeva translacija** $l_g(h) = g \circ h$

(ii) **desna translacija** $r_g(h) = h \circ g$

Ako pogledamo lijevu (desnu) translaciju možemo vidjeti kako se zapravo radi o difeomorfizmu. Za to je potrebno pokazati kako je lijeva (desna) translacija glatka bijekcija te da je njezin inverz gladak.

Neka su $g, h, h' \in G$, tada $l_g(h) = l_g(h') \Leftrightarrow g \circ h = g \circ h' \Leftrightarrow h = h'$. Dakle, lijeva translacija je injekcija. Dalje, $\forall h \in G$, $\exists (g^{-1}h) \in G \mid l_g(g^{-1}h) = h$. Dakle, lijeva translacija je surjekcija. Ako nju gledamo kao preslikavanje $l : G \times G \to G$ koje ima jedan element domene fiksan onda se možemo pozvati na definiciju Liejeve grupe 3.1 u kojem je općenito preslikavanje oblika $\mu : G \times G \to G$ nužno glatko. Isto, pozivanjem na definiciju 3.1 možemo vidjeti kako je inverz lijeve translacije $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}} \mid l_{g^{-1}} \circ l_g = id_G$ također gladak. Stoga, lijeva translacija je glatka bijekcija $l_g : G \to G$ s glatkim inverzom $l_{g^{-1}}$, odnosno lijeva translacija je difeomorfizam.

Budući da je lijeva translacija difeomorfizam možemo dobro definirati lijevo guranje $L_{g*} : \Gamma(TG) \to \Gamma(TG)$.

Definicija 3.7 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa. Za vektorsko polje $X \in \Gamma(TG)$ kažemo da je* **lijevo invarijantno** *ako $\forall g \in G :\ (L_{g*})X = X$, odnosno, po točkama $\forall g, h \in G :\ (l_{g*})X_h = X_{gh}$.*

Ovime smo definirali vektorsko polje tako da u različitim točkama možemo pronaći isti vektor. Recimo na euklidskoj $\mathbb{R}^n$ mnogostrukosti to bi bila ono što znamo odprije kao homogena vektorska polja.

Skup svih lijevo invarijantnih polja na mnogostrukosti G zovemo $\mathcal{L}(G)$ i može se pokazati da je on vektorski podprostor od $\mathcal{L}(G) \subseteq \Gamma(TG)$.

3.1.3 Liejeva algebra Liejeve grupe

U literaturi, ponajviše iz fizike, promatramo elemente Liejeve algebre kao infinitezimalne elemente Liejevih grupa, a sada bismo htjeli formalizirati tu ideju i vidjeti što to znači konkretno. Prvi korak je povezati lijevo invarijantni vektorski prostor s tangentnim vektorskim prostorom u jediničnom elementu algebre.

Teorem 3.1 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa s neutralnim (jediničnim) elementom $e \in G$. Tada je skup lijevo invarijantnih polja vektorski izomorfan s prostorom tangentnih vektora u jediničnom elementu, odnosno $\mathcal{L}(G) \cong_{vec} T_eG$.*

Dokaz 3.1 Cilj je konstruirati linearni izomorfizam $j : T_eG \to \mathcal{L}(G)$. Prvo, definirajmo $j : T_eG \to \Gamma(TG)$ koji vektor $A \in T_eG$ šalje u neki $j(A)$. Sam $j(A)$ definiramo kao guranje na sljedeći način $j(A) : G \to TG \mid g \to j(A)_g = (l_{g*})A$.

Možemo pokazati kako je $j(A)$ zapravo lijevo invarijantno polje. Neka su $g, h \in G$ tada $\forall A \in T_eG$ imamo:

$$\begin{aligned}(l_g)j(A)_h &= (l_{g*})(l_{h*})A \\ &= (l_{gh*})A \\ &= j(A)_{gh}\end{aligned}$$

Dakle, kodomena preslikavanja $j(A)$ je samo $\mathcal{L}(G)$, a ne cijeli $\Gamma(TG)$. Surjektivnost, injektivnost i glatkost su naslijeđeni od guranja tako da je $j(A) : T_eG \to \mathcal{L}(G)$ izomorfizam vektorskih prostora. □

Ovaj rezultat sa sobom nosi veliku težinu. Grupu smo definirali na geometrijskom objektu (topologiji), a ne na skupu. To nam je omogućilo da se koristimo alatima koji postoje samo uz ideju prostora kao što je guranje vektora odnosno vektorskih polja, a i vektori sami po sebi. Na taj način smo poistovijetili skup *svih* lijevo invarijantnih vektorskih polja s tangentnim vektorskim prostorom u samo jednom elementu grupe, tj. u samo jednoj točki mnogostrukosti. S ovime na umu ćemo konstruirati Liejeve algebre i pokazati da postoji algebarski izomorfizam analogan ovome vektorskom. Zato znamo od prije da su 'elementi Liejeve algebre infinitezimalni elementi Liejevih grupa', ali da ne bismo brzali idemo prvo vidjeti što je to Liejeva algebra.

Definicija 3.8 Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ *je uređeni par vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{K}$ i bilinearnog preslikavanja $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ koje poštuje $\forall x, y, z \in V$:*

(i) *antisimetričnost* $[x, y] = -[y, x]$

(ii) *Jacobijev identitet*
$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Definicija 3.9 Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ *Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je vektorski podprostor $h \leqslant g$ unutar kojega je operacija zagrade zatvorena.*

Dakle, ako $\forall X, Y \in \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$ vrijedi da $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ onda je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Ako pogledamo prostor $\Gamma(TM)$ na njemu možemo sagraditi Liejevu algebru dosta jednostavno, uz 'prirodnu' definiciju komutatora. Zagrada $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ zajedno s prostorom $\Gamma(TM)$ čini Liejevu algebru. A njemu će prostor lijevo invarijantnih vektorskih polja činiti Liejevu podalgebru.

Teorem 3.2 *Neka je G Liejeva grupa. Tada je $\mathcal{L}(G)$ Liejeva podalgebra od $\Gamma(TM)$.*

Dokaz 3.2 Neka su $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Tada imamo $\forall g \in G$ i $\forall f \in C^\infty(G)$:

$$\begin{aligned}[X, Y](f \circ l_g) &= X(Y(f \circ l_g)) - Y(X(f \circ l_g)) \\ &= X(Y(f) \circ l_g) - Y(X(f) \circ l_g) \\ &= X(Y(f)) \circ l_g - Y(X(f)) \circ l_g \\ &= [X, Y](f) \circ l_g\end{aligned}$$

Dakle, $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$ je lijevo invarijantan vektor! □

Definicija 3.10 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa.* **Pridružena Liejeva algebra** *od G je $(\mathcal{L}(G), [\cdot,\cdot])$.*

Za sada pokazali smo kako su vektorski izomorfni prostori $\Gamma(TM)$ i $\mathcal{L}(G)$ te pokazali smo kako je Liejeva algebra sagrađena na $\mathcal{L}(G)$ podalgebra od one sagrađene na $\Gamma(TM)$. Sada bismo htjeli pokazati da je Liejeva algebra definirana na $\mathcal{L}(G)$ izomofrna kao Liejeva algebra s onom definiranom na tangentnom vektorskom prostoru u jediničnom elementu T_eG.

Prije svega, definirat ćemo što je to izomorfizam Liejevih algebri. Svaka Liejeva algebra je definirana na nekom vektorskom prostoru s pridruženom zagradom. Dakle, trebamo proširiti ideju jednakosti da ne uključuje samo 'jednakost' vektorskih prostora, već i 'jednakost' algebraskih operacija zagrada.

Definicija 3.11 *Neka su* $(L, [\cdot,\cdot]_L)$ *i* $(G, [\cdot,\cdot]_G)$ *Liejeve algebre. Linearno preslikavanje* $\phi : L \to G$ *je* **homomorfizam Liejevih algebri** *ako* $\forall X, Y \in L$*:*

$$\phi([X,Y]_L) = [\phi(X), \phi(Y)]_G$$

Ukoliko je ϕ *bijekcija onda je* **izomorfizam Liejevih algebri**.

Dakle, želimo pokazati kako su $\mathcal{L}(G)$ i T_eG izomorfni ne samo kao vektorski prostori, već i kao Liejeve algebre. Izomorfnost prostora već smo pokazali (vidi teorem 3.1), znači da nam za izomorfnost Liejevih algebri još samo fali pokazati uvjet na Liejevim zagradama. Međutim, mi dosad nismo uopće ni definirali kakva zagrada tvori Liejevu algebru na T_eG. Kao pomoć koristimo definiciju 3.11 i definiramo bilinearno preslikavanje zagradu $[\cdot,\cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ takvo da $\forall X, Y \in T_eG$:

$$[X,Y]_{T_eG} = j^{-1}([j(X), j(Y)]_{\mathcal{L}(G)})$$

Tada su Liejeve algebre T_eG i $\mathcal{L}(G)$ izomorfne.

Iako Liejeve algebre jesu samostalne matematičke strukture, svaka Liejeva algebra da se definirati iz pripadajuće Liejeve grupe. Radeći s mnogostrukostima izolirali smo lijevo invarijantni vektorski prostor te na njemu konstruirali Liejevu algebru uz prirodno definiran komutator (zagradu). Onda smo pronašli izomorfizam koji identificira prostor lijevo invarijantnih vektora s tangentnim prostorom vektora u jediničnom elementu grupe. Uz dobru definiciju zagrade na tom prostoru pokazali smo kako je Liejeva algebra *svih* lijevo invarijantnih vektorskih polja izomorfna s Liejevom algebrom nad vektorskim poljem u jediničnom elementu.

3.2 Klasifikacija Liejevih algebri

Za općenite algebre imali smo kratku klasifikaciju ovisno o tome koje dodatne uvjete zadovoljavaju. Dijelili smo ih na komutativne (Abelove), asocijativne i unitarne. Liejeve algebre, zbog njihove složenije strukture, se klasificiraju na nešto kompliciraniji način. Naravno, svojstvo kao što je komutativnost i dalje postoji pa stoga:

Definicija 3.12 *Neka je* $(L, [\cdot,\cdot])$ *Liejeva algbera. Ako* $\forall X, Y \in L$ *vrijedi* $[X,Y] = 0$ *tada kažemo da je Liejeva algebra* L **komutativna (Abelova)**.

Budući da su svi komutatori takve algebre točno jednaki nula onda nam zapravo ni nema puno smisla definirati takvu operaciju.

Definicija 3.13 Ideal *Liejeve algebre* $(L, [\cdot,\cdot])$ *je Liejeva podalgebra takva da* $\forall i \in I$, $\forall X \in L$ *vrijedi* $[i, X] \in I$. *Ideali* $\{0\}$ *i* $\{L\}$ *zovu se* **trivijalni ideali**.

Definicija 3.14 *Za Liejevu algebru* $(L, [\cdot,\cdot])$ *kažemo da je:*

(i) **prosta** *ako je nekomutativna i ne sadrži netrivijalne ideale*

(ii) **poluprosta** *ako ne sadrži netrivijalne komutativne ideale*

Definicija 3.15 *Neka je* $(L, [\cdot,\cdot])$ *Liejeva algebra. Liejeva podalgebra* $L^{(1)} = [L, L]$ *zove se* **derivirana Liejeva podalgebra**. *Od deriviranih Liejevih podalgebri možemo konstruirati niz* $L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq ...$ *koji onda zovemo* **dervirani niz Liejevih podalgebri**, *gdje je* $L^{(k)}[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$. *Također, možemo definirati niz Liejevih podalgebri gdje je* $L^{(k)} = [L, L^{(k-1)}]$, *tada se on zove* **niži centralni niz**.

Definicija 3.16 *Neka je* $(L, [\cdot,\cdot])$ *Liejeva algebra. Za* L *kažemo da je* **rješiva** *ukoliko postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da* $L^{(n)} = 0$.

Vezano za klasifikaciju Liejevih algebri postoji jedan vrlo bitan teorem kojeg ćemo brzo iskazati, a dokaz se može pronaći u [5]. Levijev teorem dekompozicije kaže kako se svaka Liejeva algebra može raspisati kao semidirektna suma rješivog ideala i polujednostavne Liejeve algebre.

Definicija 3.17 *Neka su L_1 i L_2 Liejeve algebre s dobro definiranim zagradama.* **Direktna suma Liejevih algebri** $L_1 \oplus_{Lie} L_2$ *je definirana nad vektorskim prostorom koji je direktna suma $L_1 \oplus L_2$ te zadovoljava uvjet za zagradu $\forall X_1, Y_1 \in L_1 \mid \forall X_2, Y_2 \in L_2$:*

$$[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2]_{L_1 \oplus_{Lie} L_2} = [X_1, Y_1]_{L_1} + [X_2, Y_2]_{L_2}$$

Definicija 3.18 *Neka su R i L Liejeve algebre s dobro deifniranim zagradama.* **Semidirektna suma Liejevih algebri** $R \oplus_s L$ *je definirana nad vektorskim prostorom koji je direktna suma $R \oplus L$ te zadovoljava uvjet za zagradu $\forall r \in R \mid \forall X \in L$:*

$$[r, X]_{R \oplus_s L} \subseteq R$$

Odnosno R je ideal od $R \oplus_s L$.

Teorem 3.3 (Levi) *Bilo koja konačno dimenzionalna Liejeva algebra $(L, [\cdot, \cdot])$ može se raščlaniti na semidirektnu sumu rješivog ideala R i polujednostavne Liejeve podalgebre L'.*

$$L = R \oplus_s L'$$

Ovaj teorem je od velikog značaja za Liejevu teoriju te ima široke implikacije u svijetu matematike, pa tako posredno i fizike. Omogućio je da se problemi vezani za bilo kakve Liejeve algebre podijele u probleme rješivih i probleme polujednostavnih Liejevih algebri. Još kada se uzme u obzir da se sve polujednostavne Liejeve algebre mogu pisati kao direktna suma jednostavnih onda vidimo zašto je Levijev teorem bitan za klasifikaciju Liejeveih algebri.

U pothvatu klasificiranja Liejevih algebri postoji nekoliko alata, jedan od kojih je takozvana Killingova forma. No treba biti pažljiv, ona nije diferencijalna forma, već bilinearna. Prije no što ju definiramo trebamo definirati adjungirano preslikavanje.

Definicija 3.19 *Neka je $(L, [\cdot, \cdot])$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{K}$. Definiramo linearno* **adjungirano preslikavanje**

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_X : & L \to L \\ & Y \to [X, Y] \end{aligned}$$

Adjungirano preslikavanje je efektivno samo Liejeva zagrada koja čeka jedan element. Dakle, operator koji djeluje na elemente algebre te vraća element algebre. Možemo reći da je ad_X endomorfizam na prostoru L. Nadalje, da se pokazati kako je preslikavanje ad_X zapravo homomorfizam Liejeve algebre L i Liejeve algebre endomorfizama na tom prostoru $\mathrm{End}(L)$ jer čuva Liejevu zagradu.

Definicija 3.20 *Neka je $(L, [\cdot, \cdot])$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{K}$. Tada je* **Killingova forma** *bilinearno preslikavanje:*

$$\begin{aligned} \kappa : & L \times L \to \mathbb{K} \\ & (X, Y) \to \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \end{aligned}$$

Kao što je i obećano koristeći Killingovu formu također je moguće klasificirati Liejeve algebre pomoću takozvanog Cartanovog kriterija. Liejeva algebre L je polujednostavna ako i samo ako je Killingova forma κ nedegenerativna, tj. $\forall Y \in L \mid \kappa(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$.

Osim općenite klasifikacije, Liejeve algebre trebamo na neki način međusobno razlikovati. Pojedine Liejeve algebre međusobno razlikujemo po njihovim komutatorima. Iz tog razloga komutacijske relacije elemenata baze određene Liejeve algebre zovemo strukturne konstante. Budući da još uvijek nismo niti spomenuli reprezentacije, možemo biti sigurni kako su strukturne konstante Liejevih algebri neovisne o reprezentaciji (ali jesu ovisne o bazi u kojoj ih računamo!). Također, one u potpunosti deifniraju Liejevu algebru.

Definicija 3.21 *Neka je $(L, [\cdot, \cdot])$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{K}$ te neka je $\{E_i\}$ baza. Tada po definiciji algebre*

$$[E_i, E_j] = C^k{}_{ij} E_k$$

gdje su ${C^k}_{ij} \in \mathbb{K}$. *Brojeve* ${C^k}_{ij}$ *zovemo* **strukturne konstante**.

Zaključno što se tiče klasifikacije Liejevih algebri možemo reći da je Liejeva algebra $(L, [\cdot,\cdot])$:

(i) **jednostavna** ako je nekomutativna i ne sadrži netrivijalne ideale

(ii) **polujednostavna** ako ne sadrži netrivijalne komutativne ideale ili ako joj je Killingova forma nedegenerativna

(iii) **rješiva** ako postoji član u njenom deriviranom nizu koji je jednak nuli

(iv) **nilpotentna** ako postoji član u njenom *nižem centralnom nizu* koji je jednak nuli

(v) **savršena** ako cijela algebra čini ideal

Klasifikacija Liejevih algebri je više izražena tema u matematici nego u fizici. Svejedno, ovakav kratki pogled ipak daje ideju o tome koje su općenite razlike između Liejevih algebri i u koje veće košare ih možemo pospremiti.

3.3 Od Liejevih algebri do Liejevih grupa

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako iz Liejeve algebre doći nazad do Liejeve grupe. Upravo suprotno onome što smo radili ranije. Dakle, pokazali smo kako na Liejevoj grupi možemo izolirati lijevo invarijantne vektore koji predstavljaju elemente odgovarajuće Liejeve algebre. Te smo vektore poistovjetili s vektorskim prostorom u jediničnom elementu, a sada ćemo pokazati kako od njih možemo dokučiti kojoj Liejevoj grupi pripadaju. Ovaj 'ples' Liejevih grupa i algebri pokazuje koliko je bitno posvetiti im se istovremeno. Informacije koje izvlačimo iz grupa mogu nam reći nešto o algebrama i obrnuto.

Prvo, treba nam malo pripreme. Definirat ćemo takozvane integralne krivulje. One su krivulje na mnogostrukosti posebne po tome što su lokalno jedinstvene nekom vektorskom polju, odnosno vektori tog polja lokalno su tangentni na krivulju.

Definicija 3.22 *Neka je M glatka mnogostrukost i $Y \in \Gamma(TM)$.* **Integralna krivulja** *od Y je glatko preslikavanje $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tako da $\forall\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$ vrijedi:*

$$X^{\gamma}_{\gamma(\lambda)} = Y_{\gamma(\lambda)}$$

gdje je $X^{\gamma}_{\gamma(\lambda)}$ vektor tangentan na krivulju γ izvrijednjen u točki $\gamma(\lambda)$.

Općenito ova definicija definira integralne krivulje lokalno, a teorem o postojanju i jedinstvenosti rješenja diferencijalnih jednadžbi osigurava njihovo postojanje, ali i jedinstvenost. Nas zanimaju i malo više specifični slučajevi kada su krivulje tako definirane da interval iz kojeg dolaze je zapravo cijeli $\mathbb{R}$.

Definicija 3.23 **Potpuna integralna krivulja** $\gamma : I \to M$ *je ona za koju vrijedi $I = \mathbb{R}$.*

Definicija 3.24 **Potpuno vektorsko polje** X *je ono čije integralne krivulje su potpune.*

Vezano za ovu diskusiju postoji par kratkih, ali vrlo bitnih teorema koje ćemo ovdje iskazati bez dokaza.

Teorem 3.4 *Na kompaktnoj mnogostrukosti, sva su vektorska polja potpuna.*

Teorem 3.5 *Svako lijevo invarijantno vektorsko polje na Liejevoj grupi je potpuno.*

Koristeći rezultate ovih teorema možemo konstruirati takozvano eksponencijalno preslikavanje koje nam elemente iz tangentnog prostora u jediničnom elementu preslikava u elemente grupe. Neka je G Liejeva grupa i njezin jedinični element e. U jediničnom elementu imamo tangentni vektorski prostor T_eG iz kojeg možemo uzeti neki vektor $A \in T_eG$. Njega lijevim guranjem l_{g*} možemo pomaknuti u *bilo koju* drugu točku mnogostrukosti tako da efektivno stvaramo vektorsko polje, odnosno definiramo vektor X^A_g u bilo kojem $g \in G$ za dani $A \in T_eG$. Onda za X^A_g možemo pronaći potpunu integralnu krivulju koja prolazi kroz $e \in G$ zato što lijevo guranje ne mijenja vektor pa krivulja koja mu je tangentna u g

mu je tangentna i u e. O guranju vektora možemo razmišljati kao o micanju vektora duž njegove tangentne krivulje.

Definicija 3.25 *Neka je G Liejeva grupa.* **Eksponencijalno preslikavanje** *je preslikavanje*

$$\begin{aligned}\exp :& T_eG \to G\\ & A \to \gamma^A(1)\end{aligned}$$

gdje je $\gamma^A(1)$ integralna krivulja vektora A izvrijednjena u 1.

Ideja iza izvrijednjavanja krivulje γ baš u jedinici je konvencija te je nekako 'prirodno' definirano jer skaliranjem A s λ ćemo jednostavno dobiti γ izvrijednjenu u λ. Gradeći na toj ideji pogledajmo što su to jednoparametarske podgrupe.

Definicija 3.26 *Neka je G Liejeva grupa.* **Jednoparametarska podgrupa** *grupe G je homomorfizam Liejevih grupa*

$$\xi : \mathbb{R} \to G$$

gdje se na $\mathbb{R}$ podrazumijeva obično zbrajanje kao grupna operacija.

Teorem 3.6 *Neka je G Liejeva grupa. Tada za neki $A \in T_eG$ preslikavanje*

$$\begin{aligned}\xi^A :& \mathbb{R} \to G\\ & \lambda \to \exp(\lambda A)\end{aligned}$$

je jednoparametarska podgrupa. Također, svaka jednoparametarska podgrupa od G je istog oblika.

Sada već polako možemo povezati kako se i u fizici definiraju grupe i algebre. Infinitezimalni elementi grupa su elementi algebri i to oni koje zovemo *generatori*, u smislu da ispred generatora ($A \in T_eG$) stavimo parametar (λ) i oni eksponencirani daju element grupe, odnosno neku konačnu transformaciju!

4 Teorija reprezentacija Liejevih grupa i algebri

Proučavanjem reprezentacija Liejevih grupa i algebri konačno dobivamo ideju o tome kako se ove matematičke strukture koriste u fizici. Reprezentacije Liejevih algebri su preslikavanja u endomorfizme nekog vektorskog prostora odnosno u prostor operatora koji djeluju na vektorski prostor.

4.1 Reprezentacije Liejevih algebri

Budući da Liejevu algebru možemo definirati na proizvoljnom prostoru sve dok su određeni uvjeti zadovoljeni, možemo izabrati da taj prostor bude upravo prostor operatora na nekom drugom vektorskom prostoru. Onda ako postoji homomorfizam između tog prostora i onoga na kojem je naša algebra deifnirana to znači da smo našli poveznicu apstraktne Liejeve algebre s onom koja nam daje konkretne operatore transformacija koje kao fizičari jako volimo.

Definicija 4.1 *Neka je $(L, [\cdot,\cdot])$ Liejeva algebra.* **Reprezentacija** *od L je homomorfizam Liejevih algebri*

$$\rho : L \to \mathrm{End}(V),$$

gdje je V neki konačno dimenzionalni vektorski prostor nad istim poljem kao i L.

Definicija 4.2 *Reprezentaciju $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ zovemo* **trivijalna** *ukoliko $\forall X \in L$*

$$\rho(X) = 0.$$

Definicija 4.3 *Reprezentaciju $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ zovemo* **adjungirana** *ukoliko $\forall X \in L$*

$$\rho(X) = ad(X)$$

Definicija 4.4 *Neka je $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ reprezentacija od L.*

(i) *vektorski prostor V zovemo* **reprezentacijski prostor** *od ρ*

(ii) **dimenzija reprezentacije** *ρ je dimV*

Dvije različite reprezentacije mogu zajedno tvoriti novu reprezentaciju kao sumu ili produkt originalnih.

Definicija 4.5 *Neka su $\rho_1 : L \to \mathrm{End}(V_1)$ i $\rho_2 : L \to \mathrm{End}(V_2)$ reprezentacije Liejeve grupe $(L, [\cdot,\cdot])$. Tada možemo konstruirati*

(i) **diretknu sumu reprezentacija**

$$\begin{aligned}\rho_1 \oplus \rho_2 :& L \to \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2)\\ & X \to \rho_1(X) \oplus \rho_2(X)\end{aligned}$$

(ii) **tenzorski produkt reprezentacija**

$$\begin{aligned}\rho_1 \otimes \rho_2 :& L \to \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)\\ & X \to \rho_1(X) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X)\end{aligned}$$

U fizičarskoj literaturi riječ 'reprezentacija' se zna zloupotrijebiti. Primjerice, različite baze algebre γ-matrica (Cliffordove algebre) se navode kao reprezentacije (Weylova, Dirac-Paulijeva, Majoranina...). Sve one su zapravo različite *baze*, ali iste *reprezentacije* (u ovom primjeru to bi bila spinorna reprezentacija).

Promotrimo u kakvim odnosima mogu biti različite reprezentacije Liejeve algebre.

Definicija 4.6 *Neka je $(L, [\cdot,\cdot])$ Liejeva algebra i neka su*

$$\rho_1 : L \to \mathrm{End}(V_1) \qquad \rho_2 : L \to \mathrm{End}(V_2)$$

reprezentacije od L. Linearno preslikavanje $f : V_1 \to V_2$ zovemo **homomorfizam reprezentacija** *ako $\forall x \in V$ vrijedi*

$$f \circ \rho_1(x) = \rho_2 \circ f(x)$$

Ukoliko je f bijekcija tada ga zovemo **izomorfizam reprezentacija**.

Uz par definicija moći ćemo i klasificirati različite reprezentacije algebri prema njihovim svojstvima.

Definicija 4.7 *Za reprezentaciju $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ kažemo da je* **vjerna** *ako je injektivna. Odnosno ako $\dim(\mathrm{im}_\rho(L)) = \dim(L)$.*

Ukratko, ako dani operator ima jedinstveni element algebre kojeg reprezentira onda je reprezentacija vjerna.

Definicija 4.8 *Za reprezentaciju $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ kažemo da je* **reducibilna** *ako postoji netrivijalni vektorski podprostor $W \subseteq V$ koji je invarijantan na ρ. Formalno $\forall X \in L$,*

$$\rho(X)w \in W \mid \forall w \in W$$

Definicija 4.9 *Za reprezentaciju $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ kažemo da je* **ireducibilna** *ako nije reducibilna.*

4.2 Casimirov operator

Casimirov operator se u fizici najčešće prvi puta sretne kao kvadrat operatora angularnog momenta. U ovom odjeljku vidjet ćemo što je Casimirov operator u kontekstu Liejeve teorije i vidjeti gdje su poveznice s Casimirovim operatorom kojega srećemo u fizici. Primjerice, kako to da Casimirov operator komutira sa svim elementima algebre. Definirajmo za početak Killingovu formu na reprezentaciji.

Definicija 4.10 *Neka je $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre L nad poljem $\mathbb{K}$. Definiramo* **ρ-Killingovu formu***:*

$$\begin{aligned}\kappa_\rho :& L \times L \to \mathbb{K}\\ & (X, Y) \to \mathrm{tr}(\rho(X) \circ \rho(Y))\end{aligned}$$

Sada ćemo definirati jedan poseban skup vektora kako bismo ih mogli koristiti u definiciji Casimirovog operatora.

Definicija 4.11 *Neka je $\{E_i\}$ baza vektorskog prostora L na kojem je definirana Liejeva algebra te neka je $\{\epsilon^i\}$ baza njemu dualnog prostora. Deifniramo* **skup dualnih vektora s obzirom na ρ-Killingovu formu** *$\{\xi_i\}$ takav da $\forall X \in L$ vrijedi:*

$$\kappa_\rho(X, \xi_i) = \epsilon^i(X)$$

Odnosno $\kappa_\rho(E_i, \xi_j) = \epsilon^j(E_i) = \delta^j_i$.

Za tako definiran skup vektora može se pokazati da vrijedi:

$$[E_i, \xi_j] = \sum_{l=1}^{\dim L} C^j{}_{li}\xi_l$$

Definicija 4.12 *Neka je $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ vjerna reprezentacija Liejeve algebre L i neka je $\{E_i\}$ baza od L.* **Casimirov operator** *je endomorfizam $\Omega : V \to V$ definiran kao:*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{\dim L} \rho(E_i) \circ \rho(\xi_i)$$

Teorem 4.1 *Neka je Ω Casimirov operator reprezentacije $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$. Casimirov operator komutira sa svim drugim ednomorfizmima na V. Formalno, $\forall X \in L$ vrijedi:*

$$[\Omega, \rho(X)] = 0$$

Dokaz 4.1 *Zapišimo vektor X preko njegovih komponenata kao $X = x^i E_i$. Onda imamo:*

$$\begin{aligned}[\Omega, \rho(X)] &= \left[\sum_{i,j=1}^{\dim L} \rho(E_i) \circ \rho(\xi_i), \rho(x^j E_j)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{\dim L} x^j [\rho(E_i) \circ \rho(\xi_i), \rho(E_j)]\end{aligned}$$

Koristimo identitet $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

$$\begin{aligned}&= \sum_{i,j=1}^{\dim L} x^j \big(\rho(E_i) \circ [\rho(\xi_i), \rho(E_j)] + \\ &\qquad\qquad + [\rho(E_i), \rho(E_j)] \circ \rho(\xi_i)\big)\end{aligned}$$

Budući da je reprezentacija homomorfizam onda vrijedi

$$\begin{aligned}&= \sum_{i,j=1}^{\dim L} x^j \big(\rho(E_i) \circ \rho([\xi_i, E_j]) + \rho([E_i, E_j]) \circ \rho(\xi_i)\big) \\ &= \sum_{i,l,j=1}^{\dim L} x^j \big(\rho(E_i) \circ \rho(-C^i{}_{lj})\xi_l) + \rho(C^l{}_{ij} e_l) \circ \rho(\xi_i)\big)\end{aligned}$$

Uz preimenovanje indeksa po kojima se sumira u prvom faktoru $l \leftrightarrow i$ imamo:

$$\begin{aligned}&= \sum_{i,l,j=1}^{\dim L} x^j \big(-\rho(e_l) \circ C^l{}_{ij}\rho(\xi_i) + C^l{}_{ij}\rho(e_l) \circ \rho(\xi_i)\big) \\ &= 0 = [\Omega, \rho(X)]\end{aligned}$$

□

Dakle, uspješno smo pokazali kako Casimirov operator komutira sa svakim endomorfizmom prostora u kojem je i sam definiran.

Sljedeća (Schurova) lema pokazuje porijeklo činjenice da je Casimirov operator zapravo jediničan. U fizici znamo da su, primjerice, sva stanja sustava zapravo svojstvena stanja Casimirovog operatora.

Lema 4.1 (Schur) *Neka je $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ ireducibilna reprezentacija od Liejeve algebre $(L, [\cdot, \cdot])$ nad poljem $\mathbb{K}$. Tada je operator $S \in \mathrm{End}(V)$ koji komutira sa svim endomorfizmima oblika:*

$$S = \lambda \mathrm{id}_V$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{K}$.

Znači Casimirov operator je proporcionalan identitetu. Pitanje je sada, što sve možemo reći o konstanti λ? S jedne strane imamo: $\mathrm{tr}(\Omega) = \mathrm{tr}(\lambda \mathrm{id}_V) = \lambda \dim V$. Dok s druge strane:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Omega) =& \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{\dim L} \rho(E_i) \circ \rho(\xi_i)\right) \\ =& \sum_{i=1}^{\dim L} \mathrm{tr}\left(\rho(E_i) \circ \rho(\xi_i)\right) \\ =& \sum_{i=1}^{\dim L} \kappa_\rho(E_i, \xi_i)\end{aligned}$$

Što je po definiciji 4.11

$$\begin{aligned}=& \sum_{i=1}^{\dim L} \delta_{ii} \\ =& \dim L\end{aligned}$$

Dakle, za Casimirov operator imamo

$$\Omega = \frac{\dim L}{\dim V} \mathrm{id}_V.$$

Ovako definiran Casimirov operator jako blisko je vezan za Casimirov operator kojega poznajemo iz kvantne fizike. Isto komutira sa svim drugim elementima algebre i isto je proporcionalan identitetu. Detaljna diskusija ovog rezultata i još mnogo više vezano za teoriju reprezentacija može se naći u [6].

4.3 Reprezentacije Liejevih grupa

Liejeve grupe, također, su apstraktne strukture koje na neki način trebamo pretvoriti u operatore koji bi djelovali na vektorskom prostoru. Ono gdje se reprezentacije Liejevih algebri i grupa razlikuju je u tome što Liejeve grupe nužno moraju biti reprezentirane operatorima koji su invertibilni, dok kod algebri to nije bio slučaj. Zašto je to nužno? Zato što da bi grupa bila grupa mora imati inverzni element, pa tako i njega treba reprezentirati.

Endomorfizmi na nekom vektorskom prostoru V, koji su invertibilni, zovu se automorfizmi i označavamo ih $\mathrm{Aut}(V)$.

Definicija 4.13 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa. Tada je* **reprezentacija Liejeve grupe** *G nad vektorskim prostorom V je homomorfizam Liejevih grupa $R : G \to \mathrm{Aut}(V) \subseteq GL(V)$ takav da $\forall g_1, g_2 \in G$ vrijedi:*

$$R(g_1 \circ g_2) = R(g_1) \bullet R(g_2)$$

gdje je $\bullet$ operacija množenja na $\mathrm{Aut}(V) \subseteq GL(V)$.

Reprezentacija Liejeve grupe od velike važnosti je adjungirana reprezentacija jer daje uvid u povezanost Liejevih grupa i algebri. Već smo susreli adjungirano preslikavanje u kontekstu algebri kao 'zagradu koja čeka drugi element', za grupe definicija je nešto drugačija i notacijski ih razlikujemo po malom (za algebru), odnosno velikom (za grupu) početnom slovu.

Definicija 4.14 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa i $g \in G$. Definiramo* **adjungirano** *preslikavanje takvo da $\forall g, h \in G$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g : & G \to G \\ & h \to g \circ h \circ g^{-1} \end{aligned}$$

Pogledat ćemo kako ovo preslikavanje povezuje Liejeve grupe i algebre putem reprezentacije. Budući da je adjungirano preslikavanje Liejevih grupa kompozicija grupne operacije i inverza ono samo po sebi je glatko te se iz njega može kostruirati guranje na tangentnom prostoru. Znamo da vrijedi $\mathrm{Ad}_g(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e$.

Definicija 4.15 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa i $g \in G$. Definiramo* **adjungirano guranje** *na tangentnom vektorskom prostoru u jediničnom elementu*

$$\mathrm{Ad}_{g*} : T_eG \to T_{\mathrm{Ad}_g(e)}G = T_eG.$$

Ako bolje razmislimo, upravo smo definirali endomorfizam na prostoru T_eG koji prima vektor i vraća vektor. Ono što dalje možemo napraviti je definirati isto to guranje, samo bez unaprijed izabranog g. Tako ćemo napraviti preslikavanje Ad koje prima g i vraća automorfizam Ad_{g*} - odnosno konstruirat ćemo reprezentaciju.

Definicija 4.16 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa. Definiramo* **adjungiranu reprezentaciju** *Liejeve grupe G kao preslikavanje*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : & G \to \mathrm{Aut}(T_eG) \\ & g \to \mathrm{Ad}_{g*} \end{aligned}$$

Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe G je reprezentacija na njenoj vlastitoj Liejevoj algebri! Veza između preslikavanja Ad i ad dana je, naravno, eksponencijalnim preslikavanjem. Neka je $X \in T_eG$ vektor iz Liejeve algebre T_eG od Liejeve grupe G. Tada

$$\exp(\mathrm{ad}_X) = \mathrm{Ad}_{\exp X}.$$

Eksponencijalno preslikavanje nam ovdje daje poveznicu reprezentacija Liejeve grupe i algebre. Za adjungiranu reprezentaciju Liejeve grupe kaže se i da je 'prirodna' reprezentacija jer, naime, djeluje na vlastitu algebru.

5 Primjena Liejevih grupa i algebri u fizici

U ovom poglavlju cilj nam je iskoristiti naučene rezultate u konkretnim situacijama u kojima ih srećemo u fizici. Do sada smo usput samo navodili površne primjere, a sada ćemo malo detaljnije pogledati pokoju specifičnu primjenu.

5.1 Par poznatih primjera

5.1.1 Specijalna teorija relativnosti

U specijalnoj teoriji relativnosti transformacije su definirane iz uvjeta da čuvaju element duljine u prostorvremenu. On je definiran kao pseudounutarnji produkt s jednim minusom i tri plusa, ili obrnuto ovisno o konvenciji. Grupa transformacija koja čuva pseudounutarnji produkt te ima takvu signaturu je Lorentzova grupa $SO(1,3)$. Njoj pridružena algebra je stoga Lorentzova algebra $\mathfrak{so}(1,3)$. Znamo da su elementi takvih grupa simetrični pa nam je odmah jasno kako ih opisuje 6 nezavisnih parametara.

Definirajuća relacija Lorentzove algebre je komutator njezinih baznih elemenata. Neka je $\{J^{\mu\nu}\}$ baza Lorentzove algebre. Tada se može pokazati da vrijedi:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}$$

Treba imati na umu da $J^{\mu\nu}$ označava sve elemente algebre, odnosno da μ i ν ovdje nisu matrični indeksi, već indeksi koji govore o kojem elementu algebre pričamo. Dakle, svaki odabir indeksa μ i ν odgovarat će jednom elementu algebre. Primjerice $\mu = 0$ i $\nu = 1,2,3$ odgovara potiscima duž smjera x, y, z, redom. Svaka od tih transformacija za sebe ima (pomoću reprezentacije) povezan operator (matricu) koji u konačnici ima matrične indekse i djeluje na neki 'pravi' četverovektor (ako se radi o vektorskoj reprezentaciji).

Od ovih algebarskih elemenata možemo sagraditi grupni element eksponencijalnim preslikavanjem. Prisjetimo se definicije 3.25 i pogledajmo općenito preslikavanje gdje skaliramo transformaciju proizvoljnim parametrom $\omega_{\alpha\beta}$, također $J^{\alpha\beta}$ smo reprezentirali u vektorskoj reprezentaciji. Tada imamo:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \Big(\exp(\omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta})\Big)^{\mu}{}_{\nu}$$

Konačno smo došli do *matrice transformacije* $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ koja se kao takva i javlja u fizici. Indeksi α, β sumiraju po elementima vektorske reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{so}(1,3)$, dok indeksi μ, ν označavaju red i stupac konačne matrice transformacije.

5.1.2 Angualrni moment i spin

U popularnim izvorima, spin se gotovo uvijek objašnjava doslovnom vrtnjom, a onda u formalnom obrazovanju fizičara snažan je naglasak na upravo suprotnu poruku - ništa se ne vrti! Pogled kroz oči Liejeve teorije opet kaže drugu stvar - postoji homomorfizam između spina i rotacija.

Između grupa $SU(2)$ i $SO(3)$ postoji takozvani dva-u-jedan homomorfizam. Kažemo da grupa $SU(2)$ dva puta pokriva grupu $SO(3)$. Drugim riječima, svakom elementu $SO(3)$ odgovaraju dva elementa u $SU(2)$. To ujedno znači da je svaka reprezentacija $SO(3)$ također reprezentacija $SU(2)$, ali postoje reprezentacije $SU(2)$ koje nisu reprezentacije $SO(3)$. Zato kažemo da $SU(2)$ dva puta pokriva $SO(3)$ i u nekom smislu možemo reći da su im algebre iste.

5.2 Baždarenje u jeziku svežnjeva

U ovom odjeljku ćemo dati kratki, površni odgovor na pitanje što je to baždarna teorija iz konteksta Liejevih grupa i algebri, odnosno u jeziku matematičke fizike kojim smo i dosad pričali. Promotrit ćemo koji koncepti iz diferencijalne geometrije odgovaraju primjerima iz fizike. Također, imajmo na umu i povijesni razvoj jer, naime, Maxwell se nije koristio svežnjevima kako bi pričao o baždarno invarijantnom potencijalu. Baždarna teorija kakvu ovdje predstavljamo je proizvod koji je nastao tijekom prve polovice 20. st. od strane kako fizičara, tako i matematičara.

Prije nego počnemo povlačiti paralele između terminologije u fizici i zamorno temeljite matematike trebamo se upoznati s još nekoliko pojmova. Pokazat ćemo što je to djelovanje (akcija) na nekoj mnogostrukosti te definirati takozvani 'glavni' svežanj.

Definicija 5.1 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa i M glatka mnogostrukost. Definiramo glatko preslikavanje zvano* **desno G-djelovanje** $\triangleleft : M \times G \to M$ *takvo da $\forall p \in M$ i $g_1,\ g_2 \in G$ vrijedi:*

(i) $p \triangleleft e = p$

(ii) $p \triangleleft g_1 \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \circ g_2)$

gdje je $e \in G$ jedinični element grupe.

Naravno, analogno se definira i lijevo djelovanje, ali ovdje se držimo samo desnoga jer je konvencija definirati glavni svežanj uz desno djelovanje.

Djelovanje možemo doživljavati kao poopćenje reprezentacija. Odnosno, reprezentacija je vrlo specifičan primjer djelovanja. Dalje bismo htjeli razmotriti kako djelovanja djeluju na točke na mnogostrukosti.

Definicija 5.2 *Neka je $\triangleleft : M \times G \to M$ desno djelovanje. Tada definiramo*

(i) $\forall p \in M$ *definiramo* **orbitu** $O_p = \{q \in M \mid \exists g \in G\ :\ p \triangleleft g = q\}$ *odnosno sve točke mnogostrukosti q koje se mogu dosegnuti iz točke p danom transformacijom g*

(ii) *neka $p \sim q$ bude relacija ekvivalencije za sve točke na orbiti; dakle, takva da $\exists g \in G\ :\ q = p \triangleleft g$, onda definiramo* **orbitni prostor** $M/\sim$ *kao kvocijentni prostor mnogostrukosti M s obzirom na danu relaciju*

(iii) $\forall p \in M$ *definiramo* **stabilizator** $S_p = \{g \in G \mid p \triangleleft g = p\}$ *odnosno svi elementi grupe koji ne pomiču točku p*

Nadalje, definiramo glavni svežanj koji predstavlja teren na kojem se odvija igra baždarne teorije. On nije samo specifičan svežanj kao što smo ih prije vidjeli, već ima i dodatnu strukturu.

Definicija 5.3 *Neka je $(G, \circ)$ Liejeva grupa, M mnogostrukost i $P \xrightarrow{\pi} M$ svežanj.* **Glavni svežanj** *je uređena trojka totalnog prostora P koji ima sebi pridruženo desno djelovanje $\triangleleft : P \times G \to G$, projekcije π i baznog prostora M. Uz uvjete na desno djelovanje:*

(i) *čuva vlakna tako da $\forall p \in M,\ \forall g \in G$ vrijedi $\pi(p \triangleleft g) = \pi(p)$*

(ii) $\forall p \in M,\ g \in G$ *postoji, u okolini O_p, lokalna trivijalizacija*

$$\Psi : \mathrm{preim}_\pi(O_p) \to O_p \times G$$
$$\Psi(p) \mapsto (\pi(p), \psi(p))$$

gdje $\psi(p \triangleleft g) = \psi(p) \circ g$.

Da malo pojasnimo, iz prvoga uvjeta se jasno vidi kako su vlakna zapravo orbite desnog djelovanja $\triangleleft$, jer ako projekcija ne vidi razliku između točke p i točke $p \triangleleft g$ onda znači da se nalaze unutar istog vlakna, a po definiciji skup svih točaka do kojih se dolazi proizvoljnom transofrmacijom su orbita neke početne točke.

U nekom konkretnom slučaju mnogostrukost M bi mogla biti $\mathbb{R}^4$ prostorvrijeme, a Liejeva grupa G bi mogla biti $U(1)$. Lokalni presjek ovoga svežnja odgovarao bi odabiru lokalnog baždarenja. Idemo to malo detaljnije prodiskutirati. Vlakna glavnog svežnja su orbite točaka baznog prostora. Vlakna - orbite prostorvremena pod utjecajem $U(1)$ su skupovi faznotransformiranih točaka prostorvremena. Ako odaberemo specifični lokalni presjek onda zapravo biramo specifične elemente iz skupa faznotransformiranih točaka prostor vremena, tj. iz vlakna. Stoga, 'biranje lokalnog presjeka = fiksiranje lokalnog baždarenja'.

Baždarni potencijali i jakosti baždarnih polja odgovarajućih baždarnih simetrija proizlaze iz baždarnih polja, odnosno iz posebne 1-forme koja se zove konekcija. Ona uzima kao argument vektore iz tangentnog prostora na totalnom prostoru te vraća element Liejeve algebre, naravno uz posebne uvjete koje mora poštivati.

Definicija 5.4 *Neka je $P \xrightarrow{\pi} M$ glavni svežanj.* **Konekcija** $\omega_p : T_pP \to T_eG$ *je glatka 1-forma koja preslikava u prostor Liejeve algebre te zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) $(\triangleleft g)^*\omega = Ad_{g^{-1}*}\omega$

(ii) $\omega(X^A) = A$, *gdje je* $X_g^A = l_{g*}A$ *za neki* $g \in G$ *i* $A \in T_eG$

Konekcija sama po sebi predstavlja baždarno polje (A^μ). A onda vezano za nju slijedi jakost baždarnog polja ($F^{\mu\nu}$) koja se definira preko zakrivljenosti na glavnom svežnju. Zakrivljenost ovdje dolazi jer jakost polja gledamo kao veličinu koja bi trebala sadržavati ideju promjene polja ili nagiba polja, a zakrivljenost daje upravo to (naravno, puno kompliciranije i detaljnije, ali ideja je tu). Veza jakosti i samog polja je dana preko takozvane Cartanove strukturne jednadžbe.

Međutim, nećemo ići predaleko jer ova tema je usitinu beskonačno duboka jama. Bilo da dolazite iz više matematičarske ili fizičarske pozadine u svakom slučaju dublji pogled u [7] neće ostaviti ravnodušne one kojima ne smeta čitati stranice i stranice definicija i teorema. Literatura na ovu temu nije nipošto oskudna, knjiga koja je navedena je tek jedna od mnogih i sigurno bi se našao i pokoji tekst koji možda nije toliko matematički zahtjevan.

6 Zaključak

Kroz nekoliko stranica uveli smo osnovne pojmove diferencijalne geometrije neophodne za razgovor o Liejevim grupama. Definirali smo Liejeve grupe i algebre te vidjeli kako su one međusobno povezane. Pokazali smo kako iz svake Liejeve grupe proizlazi odgovarajuća algebra i to definirana na lijevo invarijantnom vektorskom prostoru koji je, naime, izomorfan s vektorskim prostorom u jediničnom elementu. Kroz reprezentacije vidjeli smo kako možemo koristiti Liejeve grupe i algebre na onaj način na koji ih poznajemo iz fizike - kao operatore transformacija.

U konačnici spajanjem koncepata svežnjeva, Liejevih grupa i algebri te djelovanja definirali smo glavni svežanj. Bitno je za dodati kako njegova primjena nije zatvorena samo za baždarnu teoriju. Primjerice, ako pokušamo izgraditi glavni svežanj od referentnih sustava ubrzo ćemo se naći duboko u literaturi opće teorije relativnosti. Sva ova matematička mašinerija može se koristiti na nebrojivo mnogo načina u fizici, a i matematici. Liejeve grupe možda nisu zvijezde koje se guraju ispred svih samo da ih se primjeti, ali stoje u srcu ovakvih rigoroznih i moćnih alata koji nose suvremenu teorijsku fiziku na leđima još od polovice dvadesetog stoljeća.

Literatura

[1] Ivica Smolić, *Diferencijalna geometrija u fizici - Bilješke, skice i škrabotine*

[2] Frederic P. Schuller, *Geometrical anatomy of theoretical physics*, predavanja s Friedrich-Alexander Universität ak. god. 2013./2014.

[3] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*

[4] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*

[5] Arkadij L. Onishchik, Ernest B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*

[6] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*

[7] Gregory L. Naber, *Topology, Geometry and Gauge Fields*