Myers–Perryjeve crne rupe

Tomislav Miškić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 22. rujna 2021.)

Sažetak

Myers-Perryjeve crne rupe, odnosno Myers-Perryjevo prostorvrijeme jest generalizacija nenabijenih rješenja Einsteinove jednadžbe u proizvoljni broj dimenzija d. Motivacija za promatranje ovakvih generalizacija u proizvoljni broj dimenzija je proizašla iz potrebe za razvijanjem klasičnih očekivanja za tada u potpunosti novu teoriju superstruna. U ovom seminaru promatramo dobro poznato Schwarschildovo rješenje te Kerrovo rješenje. Nadalje, promatramo statičke d-dimenzionalne crne rupe, Myers-Perry(MP) crne rupe, klasifikaciju specifičnog ponašanja MP metrike, maksimalnu analitičku ekstenziju rješenja, termodinamiku navedenih crnih rupa te na kraju nestabilnosti istih.

I. UVOD

MP metrika daje generalizirani oblik stacionarne rotirajuće i nenabijene crne rupe. Raznim se limesima MP metrika može svesti, u prvom redu na Kerrovu metriku, a daljnjim ograničenjima i na Schwarschildovu. Iz navedenog je odmah jasno da će ponašanje MP metrike biti slično navedenim dvjema četverodimenzionalnim metrikama, ali treba imati na umu moguća odstupanja od poznatih svojstava na koja možemo naići analizom MP prostorvremena. Schwarschildovo i Kerrovo prostorvrijeme su dva najpoznatija rješenja Einsteinove jednadžbe koja odgovaraju fenomenološki nerotirajućim i nenabijenim crnim rupama te rotirajućim nenabijenim crnim rupama. Statička i asimptotski ravna četverodimenzionalna rješenja Einsteinove jednadžbe nužno imaju sferični horizont događaja. Rotirajuća rješenja ne moraju nužno više imati sferični oblik horizonta, a kamoli višedimenzionalne generalizacije kojima ćemo se baviti u MP prostorvremenu. Prvi primjer crne rupe koja nije imala sferični oblik horizonta su našli R. Emparan i H. S. Reall koji su kroz Kaluza-Klein teoriju konstruirali "crni prsten" topologije horizonta $S^1 \times S^2$. MP metrika je otkrivena 1985. godine kao dio doktorske disertacije R. C. Myers-a, Malcolm Perry mu je bio mentor. Autor je bio motiviran promatrati ponašanje generaliziranih proizvoljnodimenzionalnih metrika zbog nedavnih napredaka u obliku teorije superstruna. Pokazuje se kako crne rupe igraju veliku ulogu u shvaćanju neperturbativnih efekata kvantne teorije gravitacije. Nadalje, kroz klasičnu i kvantnu teoriju struna dolazi do pojedinih ograničenja na ukupni moment količine gibanja J koje jako nalièe ograničenju na moment količine gibanja Kerrove crne rupe. Svi navedeni razlozi predstavljaju motivaciju za pomnije promatranje MP prostorvremena te kako se ono ponaša nasprem svojih četverodimenzionalnih analogona: Schwarschildovog i Kerrovog prostrovremena. Analizu krećemo s pregledom svojstava Schwarschildovog i Kerrovog rješenja u četiri dimenzije.

* tmiskic.phy@pmf.hr

II. SCHWARSCHILDOVO I KERROVO RJEŠENJE

Prije promatranja proizvoljnodimenzionalnih generalizacija valja se uvjeriti u svojstva četverodimenzionalnih dobro poznatih rješenja, Schwarschildove i Kerrove metrike. Konstrukcija Schwarschildovog rješenja kreće od metrike za akcelerirane čestice u radijalnom smjeru te kombiniranjem tog izraza s izrazom za brzinu slobodnog pada u smislu Newtonovske fizike:

$$ds^2 = -dt^2 + (dr + f(r)dt)^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

gdje $-f(r)$ odgovara radijalnoj brzini slobodnog pada. U Newtonovom limesu navedenu brzinu možemo identificirati pomoću zahtjeva da je kinetička energija slobodnog pada čestice iz asimptotskog područja jednaka potencijalu na udaljenosti na kojoj se čestica nalazi od točkaste mase. Kada se sve to uzme u obzir dobivamo:

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{2}$$

te uvrštavanjem u metriku dobivamo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

Uvođenjem supstitucije:

$$t_s = t - \left(2r\sqrt{\frac{2GM}{r}} - 4GM \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{2GM}{r}}\right)\right) \tag{4}$$

možemo reproducirati dobro poznati izgled Schwarschildove metrike:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt_s^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5}$$

Iz gornjeg je izraza sada jasno da se na radijalnoj udaljenosti $r = 2GM$ nalazi horizont događaja. Horizont možemo definirati kao plohu na koju su svjetske linije svjetlosnog tipa uvijek tangencijalne. Nakon prelaske takve svjetlosne plohe čestica se ne može vratiti natrag.

Također je važno promotriti definiciju Killingovog horizonta. Naime, radi se o hiperplohi koja je definirana relacijom:

$$K^\mu K_\mu = 0 \tag{6}$$

Killingov horizont daje pedantniju lokalnu definiciju horizonta te se u slučaju Schwarschildove metrike navedena dva horizonta poklapaju. Nadalje, uvodimo površinsku gravitaciju κ kao:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu K_\nu\right)\left(\nabla^\nu K^\mu\right) \tag{7}$$

Intuitivna interpretacija gornjeg izraza u jednostavnijim slučajevima bi bila da površinska gravitacija predstavlja gustoću sile na konturi na kojoj ju računamo kao funkcija mase upadajuće čestice. Idejnim eksperimentom možemo dalje objasniti smisao površinske gravitacije. Pretpostavimo da jediničnu probnu masu spuštamo po radijalnoj trajektoriji iz asimptotskog područja ka statičkoj crnoj rupi. Tada površinska gravitacija predstavlja silu koju primjenjujemo na jediničnu probnu masu, odnosno ekvivalentno gustoću sile, u granici kada je probna masa spuštena do horizonta crne rupe. Za Schwarschildovo prostorvrijeme na horizontu $r = 2GM$ površinska gravitacija je konstantna i veća od nule. Također treba napomenuti kako je horizont hiperploha divergirajućeg gravitacijskog crvenog pomaka, zbog toga što g_{00} komponenta metrike postaje trivijalna na horizontu.

Kerrova metrika u Boyer-Lindquist koordinatama glasi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4mra\sin^2(\theta)}{\rho^2}dtd\phi + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 +$$

$$\rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2(\theta)}{\rho^2}\right)\sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{8}$$

gdje su:

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos(\theta) \tag{9}$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \tag{10}$$

U gornjim trima jednadžbama parametar a je dan s:

$$a = J/M \tag{11}$$

te predstavlja spinski parametar, dan omjerom momenta količine gibanja i mase crne rupe. Ukoliko uzmemo limes $a \to 0$, možemo reproducirati Schwarschildovu metriku, kao što bi i očekivali. Ukoliko se referiramo na jednadžbu (8), možemo vidjeti da zanimljivo ponašanje metrike primjećujemo kroz tri uvjeta:

$$\Delta = 0 \to g_{rr} \text{ singularan} \tag{12}$$

$$\rho^2 = 2mr \to g_{tt} \text{ trne} \tag{13}$$

vanjska ergoploha	$r_{E_+} = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2(\theta)}$
horizont događaja	$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$
Cauchyjev horizont	$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}$
unutarnja ergoploha	$r_{E_-} = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2(\theta)}$
singularitet	$r = 0$

Tablica I. Klasifikacija zanimljivih ploha Kerrovog prostorvremena.

$$\rho = 0 \to g_{rr} \text{ i } g_{\theta\theta} \text{ trnu, ostali singularni} \tag{14}$$

Navedeni uvjeti reproduciraju tražene plohe koje se mogu vidjeti u *Tablici I*. Daljnjim raspisivanjem bi se mogli uvjeriti da je singularitet $r = 0$ predstavljen kružnicom u ekvatorijalnoj ravnini radijusa a. Navedeno se najlakše vidi u Kerr-Schild koordinatama:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\Big|_{r=0} = \left[r^2 + a^2\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)\right]\Big|_{r=0} \tag{15}$$

što daje izraz:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{16}$$

Horizonti su dani elipsoidima, a ergoplohe imaju složeniju kutnu ovisnost. Također je bitno za napomenuti kako se na osi aksijalne simetrije dodiruju ergoploha i vanjski horizont. Važno svojstvo Kerrovog prostorvremena jest ograničavanje rotacije. Zapišimo metriku u slučaju $dr = d\theta = 0$:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 \tag{17}$$

Navedeno možemo svesti na:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{tt} + 2g_{t\phi}\frac{d\phi}{dt} + g_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{18}$$

Ako identificiramo kutnu brzinu $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$, tada imamo:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 \tag{19}$$

Kauzalne prostorvremenske trajektorije su vremenolike stoga slijedi uvjet na Ω:

$$\Omega_\pm = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \mp \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \tag{20}$$

Specifično, izvrijednimo li gornji izraz na vanjskoj ergoplohi, dobivamo minimalnu vrijednost $\Omega_- = 0$. Probna čestica na vanjskoj ergoplohi u Kerrovom prostorvremenu može ili rotirati u smjeru rotacije crne rupe ili mirovati, kako to vidi daleki promatrač. Ukoliko se ne bi ograničili na vanjsku ergoplohu, već jedino da se čestica nalazi u vanjskoj ergozoni, dobivamo općenitiji rezultat čija je analiza dana u *Dodatku A*. Također, ako uzmemo limes u Schwarschildovu metriku $a \to 0$, vidimo da se vanjska ergoploha i vanjski horizont spajaju te da unutarnji horizont i ergoploha nestaju. Navedeno je jako bitno, jer je to upravo razlika zašto možemo, odnosno ne možemo izvlačiti energiju iz crnih rupa idejnim eksperimentima kao što je Penroseov proces. Vanjska ergoploha dopušta da ga kauzalna svjetska linija presiječe dva puta. Uzevši to u obzir te ograničenje rotacije čestice, vidimo da postoji mogućnost da čestica uđe u prostor između vanjskog horizonta i ergoplohe, izvuče energiju iz crne rupe te opet presiječe ergoplohu i na taj način izbjegne zatočenje unutar vanjskog horizonta. Navedena svojstva Schwarschildovog i Kerrovog prostorvremena će se generalizirati u sljedećim poglavljima u slučajevima MP metrike i statičke d-dimenzionalne metrike.

III. STATIČKE d-DIMENZIONALNE CRNE RUPE

Uvodimo generalizaciju Schwarschildove metrike u proizvoljni broj dimenzija kao:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{d-3}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^{d-3}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \tag{21}$$

gdje je $d\Omega_{d-2}$ površinski element $d-2$ dimenzionalne hiperplohe. Svojsta Schwarschildove metrike u proizvoljnom broju $d > 4$ dimenzija se ne mijenjaju. Naime, metrika u jednadžbi (21) pokazuje svojstveno ponašanje samo za jednu vrijednost generaliziranog radijusa $r_H^{d-3} = \mu$, analogno jednom horizontu rješenja u četiri dimenzije. Dobiveni horizont jest također ploha beskonačnog crvenog pomaka, što se vidi iz toga što g_{tt} komponenta metrike propada na r_H radijusu. Nadalje, valja promotriti odnos vlastitih vremena asimptotskog promatrača i niza promatrača koji se u limesu približavaju proizvoljno blizu horizontu. Znamo da će omjer njihovih vlastitih vremena biti obrnuto proporcionalan korijenu omjera g_{tt} komponente metrike na istim koordinatama. U tom slučaju trivijalnost g_{tt} komponente na horizontu uvjetuje divergenciju omjera vlastitih vremena asimptotskog promatrača i niza promatrača blizu horizonta. Uz horizont na $r_H^{d-3} = \mu$ također postoji i ergoploha definirana trivijalnošću g_{tt} komponente, no navedeni uvjet reproducira isti radijus r_H kao i za horizont. Metrika je asimptotski ravna te u generaliziranom d-dimenzionalnom smislu sferno simetrična. Također, detaljnijom analizom tenzora zakrivljenosti slijedi singularitet u ishodištu generaliziranog d-dimenzionalnog te isto tako četverodimenzionalnog prostorvremena. Ako pogledamo jednadžbu (21), ostaje nam fiksirati ulogu varijable μ. Navedeno ćemo napraviti asimptotskom analizom prostorvremena, pri čemu ćemo odrediti izraz za masu i ukupni moment količine gibanja proizvoljnodimenzionalne Schwarschildove crne rupe. Krećemo od Einsteinove jednadžbe:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{22}$$

Zapisujemo metriku kao malu perturbaciju Minkowski metrike s obzirom na to da radimo u limesu slabog polja te Newtonovom limesu:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \;\; |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{23}$$

Raspisom Riemannovog i Riccijevog tenzora te Riccijevog skalara, zadržavajući se do kvadratnog člana u preturbaciji metrike te koristeći baždarenje oblika:

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha \tag{24}$$

možemo reproducirati slijedeću jednadžbu za perturbaciju metrike u režimu u kojem radimo:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} = -19\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2} \eta_{\mu\nu} T^\zeta{}_\zeta) \equiv -16\pi G \tilde{T}_{\mu\nu} \tag{25}$$

Jednadžba (25) je nehomogena parcijalna diferencijalna jednadžba koju je moguće riješiti metodom Greenove funkcije u proizvoljnom broju dimenzija:

$$h_{\mu\nu}(x^i) = \frac{16\pi G}{(d-3)\Omega_{d-2}} \int \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(y^i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-3}} d^{d-1}y \tag{26}$$

U gornjoj je jednadžbi Ω_{d-2} prostorni kut jedinične $d-2$ hipersfere. S obzirom na to da radimo asimptotsku analizu, razvijamo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-3}$ po multipolima za $\|\mathbf{x}\| \gg \|\mathbf{y}\|$, do kvadratnog člana:

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-3}} \simeq 1 + (d-3) \cdot \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2} \tag{27}$$

Čime dobivamo sljedeći razvoj:

$$h_{\mu\nu}(x^i) = \frac{16\pi G}{(d-3)\Omega_{d-2}} \frac{1}{r^{d-3}} \int \tilde{T}_{\mu\nu}(y^i) d^{d-1}y +$$

$$+ \frac{16\pi G}{(d-3)\Omega_{d-2}} \frac{x^k}{r^{d-1}} \int y_k \tilde{T}_{\mu\nu}(y^i) d^{d-1}y + ... \tag{28}$$

Daljnjim sređivanjem te prebacivanjem u sustav mirovanja, dobivamo slijedeći izraz za (0, 0) komponentu perturbacije:

$$h_{00} \simeq \frac{16\pi G}{(d-2)(d-3)\Omega_{d-2}} \cdot \frac{M}{r^{d-3}} \tag{29}$$

Analognim se računom dobivaju ostale komponente te se zatim uspoređivanjem s metrikom u režimu slabog polja i Newtonovom limesu može dobiti sljedeća veza između konstante μ i mase crne rupe:

$$M = \frac{(d-2)\Omega_{d-2}}{16\pi G} \mu \tag{30}$$

iz čega možemo zaključiti da konstanta μ u generaliziranoj Schwarschildovoj metrici fiksira masu crne rupe. Jednaku će ulogu opservabla μ imati u MP metrici s obzirom na to da uzevši limes trivijalnosti svih spinskih parametara moramo moći reproducirati d dimenzionalnu

Schwarschildovu metriku. Na jednostavan način se d dimezionalna Schwarschildova metrika može generalizirati u Reissner–Nordström metriku koja opisuje nerotirajuće nabijene crne rupe. Uvođenjem 2-forme Faradayevog tenzora:

$$F = -\partial_r h \cdot dt \wedge dr \tag{31}$$

se na sličan način, promatrajući režim slabog polja te Newtonov limes mogu riješiti Einstein-Maxwell jednadžbe u asimptotskom području. Analognim postupkom se dalje dobiva novo uvedena konstanta D koja fiksira naboj crne rupe:

$$Q = \pm D\sqrt{\frac{(d-2)(d-3)}{8\pi G}} \tag{32}$$

Daljnjom analizom se može vidjeti da je globalna struktura generaliziranog i četverodimenzionalnog Reissner–Nordström rješenja ista.

IV. MP d-DIMENZIONALNE CRNE RUPE

MP metrika predstavlja prostorvrijeme rotirajuće nenabijene prozvoljnodimenzionalne crne rupe. Kao što ćemo vidjeti u narednim razmatranjima, velika će biti razlika je li d broj dimenzija paran ili neparan. Koristimo notaciju da je $d = 2n+2$, odnosno $d = 2n+1$, radi li se o parnom ili neparnom broju dimenzija koje promatramo. Prvo uvodimo ravnu metriku u $d = 2n+1$ dimenzija kao intuiciju za MP metriku koju ćemo kasnije uvesti:

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^{n}(dx_i^2 + dy_i^2)$$

$$= -dt^2 + dr^2 + r^2\sum_{i=1}^{n}(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) \tag{33}$$

Na sličan način slijedi metrika u parnom broju dimenzija, no jedina je razlika što se dodaje još jedna opservabla α:

$$ds^2\big|_{d=2n+2} = ds^2\big|_{d=2n+1} + r^2 d\alpha^2, \;\; r\alpha \equiv z \tag{34}$$

gdje z predstavlja generaliziranu koordinatu aksijalne osi. Po analogiji s generaliziranim kutovima u svakoj od ortogonalnih ravnina slijedi jedno ograničenje iz metrike:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + \alpha^2 \overset{!}{=} 1 \tag{35}$$

Gornja relacija vrijedi za $d = 2n+2$. Da bi reproducirali izraz u $d = 2n+1$, sve što treba napraviti jest maknuti opservablu α iz relacije. Zgodno je raditi u ovakvom generaliziranom d dimenzionalnom sfernom sustavu, jer nam odabir parametrizacije daje $n+1$ Killingovih vektora. Za rotacije u svakoj od ortogonalnih ravnina ∂_ϕ te translacije u vremenu ∂_t. Kako bi prešli s gornje metrike na MP metriku moramo uvesti spinske parametre te naći na koji se način oni povezuju s momentom količine gibanja. Ono što se brzo pokazuje u svim relativističkim razmatranjima jest to da više smisla ima zapisivati moment količine gibanja J kao antisimetrični tenzor, zbog antisimetričnih svojstava parametara Lorentzove grupe:

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \tag{36}$$

Koristeći diferencijalni oblik operatora impulsa u koordinatnoj bazi imamo:

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}) \tag{37}$$

Odnosno:

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(-i)(x_j\partial_k - x_k\partial_j) \tag{38}$$

Izraz u zagradama tada prepoznajemo kao tenzor momenta količine gibanja $J^{\mu\nu}$:

$$J^{\mu\nu} = (-i)(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \tag{39}$$

Gornji prikaz momenta količine gibanja J je diferencijalni, nas će primarno zanimati matrični prikaz. Ukoliko se postavimo u sustav centra mase, tenzor momenta količine gibanja u matričnom obliku možemo zapisati kao:

$$\mathbf{J} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mu_1 & \phi_1 & \mu_2 & \phi_2 & \dots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{J}_1 & 0 & 0 & \dots \\ -\mathrm{J}_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{J}_2 & \\ 0 & 0 & -\mathrm{J}_2 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mu_1 \\ \leftarrow \phi_1 \\ \leftarrow \mu_2 \\ \leftarrow \phi_2 \\ \vdots \end{array}$$

Svaki J^i definira rotaciju u i-toj ortogonalnoj ravnini. Ono što možemo zaključiti iz izgleda tenzora momenta količine gibanja jest to da imamo rotacije isključivo u svakoj pojedinoj ortogonalnoj ravnini. Ukoliko je $d = 2n+2$, zadnji redak i stupac propadaju te preostaje prilagođena formula za ukupni broj nezavisnih parametara m. Navedena formula slijedi iz gornje definicije kao najmanje cijelo od:

$$m = \frac{d-1}{2} \tag{40}$$

Uvrštavanjem $d = 2n+1(2)$ po našoj konvenciji te pridodavanjem nezavisnog parametra koji fiksira masu crne rupe μ, sve skupa imamo $n+1$ nezavisnih parametara koji definiraju MP crnu rupu. Navedeni parametri će biti n spinskih parametara a_i koji definiraju rotacije u svakoj od ortogonalnih ravnina te parametar μ koji fiksira masu crne rupe.

Sada možemo napraviti prijelaz na MP metriku:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\mu r^\gamma}{\Pi F}\left(dt + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i^2 d\phi_i\right)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - \mu r^\gamma}dr^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r^2+a_i^2\right)\left(d\mu_i^2+\mu_i^2 d\phi_i^2\right)+r^2 d\alpha^2\cdot {\delta^1}_{\gamma} \tag{41}$$

gdje su:

$$F = 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2\mu_i^2}{r^2+a_i^2} \tag{42}$$

$$\Pi = \prod_{i=1}^{n}(r^2+a_i^2) \tag{43}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1\ , & d \text{ paran} \\ 2\ , & d \text{ neparan} \end{cases}$$

Kao što je navedeno, imamo $n+1$ parametar koji definiraju metriku: n spinskih parametara a_i te parametar koji fiksira masu μ. Ukoliko bi gledali različita izvrijednjenja i limese gornjih parametara, mogli bi reproducirati Schwarschildovo ili Kerrovo prostorvrijeme u četiri dimenzije te generalizirano d dimenzionalno Schwarschildovo prostorvrijeme. Zahtjevom $n=1$ dobivamo Kerrovo četverodimenzionalno prostorvrijeme, dok trivijalnost svih spinskih parametara $a_i=0$ reproducira generalizirano d dimenzionalno Schwarschildovo prostorvrijeme. Analogno asimptotskim razmatranjima iz prijašnjeg poglavlja, u režimu slabog polja i Newtonovom limesu, dobivamo sljedeću vezu parametara metrike s opservablama momenta količine gibanja i mase crne rupe:

$$M = \frac{(d-2)\Omega_{d-2}}{16\pi G}\cdot\mu \tag{44}$$

što je identičan izraz kao i prije. Navedeno je odlika nezavisnosti parametara:

$$J^{y_i x_i} = \frac{\Omega_{d-2}}{8\pi G}\mu a_i \tag{45}$$

Gornja metrika također ima $n+1$ Killingovih vektora koji opisuju translacije u vremenu te rotacije u svakoj pojedinoj ortogonalnoj ravnini. Drugim riječima, u potpuno proizvoljnom slučaju m spinskih parametara imamo $U(1)^m$ grupu simetrija, no ako pretpostavimo da je naših m spinskih parametara jednako, promoviramo grupu simetrija u $U(m)$. Naravno, tada operatori simetrije djeluju na uređenu m-torku oblika $\mu_i e^{i\phi_i}$. Analogno ponašanju Kerrovog rješenja u četiri dimenzije, kod MP metrike dolazi do tzv. "frame dragging"-a, što je pojava koja se ne može zapaziti u Newtonovskoj teoriji gravitacije. Naime, pojava opisuje precesiju točkaste mase u polju rotirajuće sferno simetrične raspodjele mase. Zbog toga što je navedena rotacija simetrija problema u Newtonovskom formalizmu, kutni dinamički stupnjevi slobode ostaju trivijalni, dok u relativističkom formalizmu rotacija izvora polja perturbira geometriju prostorvremena te uzrokuje precesiju probne mase. Navedeni efekt je relativno slab te ga je teško za zamijetiti, no eksperimentalno je provjeren. Iz metrike u jednadžbi (41) je jasno da postoji vezanje $g_{t\phi_i}$ koje uzrokuje navedeni efekt. Puno suptilnija su vezanja oblika $g_{\phi_i\phi_j}$, $g_{\mu_i\mu_j}$ i $g_{\mu_i\alpha}$. Od navedenih se vezanja samo $g_{\phi_i\phi_j}$ javlja eksplicitno, dok se ostali javljaju kroz normalizacijsku jednadžbu (35). U sljedećem poglavlju promatramo analizu singulariteta.

V. KLASIFIKACIJA SINGULARITETA, HORIZONATA I ERGOPLOHA MP PROSTORVREMENA

Ukoliko pomnije pogledamo jednadžbu (41) možemo primijetiti da se singulariteti te horizonti javljaju kroz dva uvjeta:

$$\frac{\Pi F}{r^{\gamma}} = 0 \tag{46}$$

$$\Pi - \mu r^{\gamma} = 0 \tag{47}$$

Kao rješenje prvog se dobivaju singulariteti prostorvremena, dok drugi uvjetuje horizonte prostorvremena. Pozabavimo se prvo singularitetima.

Samim promatranjem divergencija metrike ne možemo uistinu zaključiti radi li se o singularitetu geometrije ili ne. Ukoliko želimo identificirati singularitete geometrije, trebamo odrediti ponašanje Riemannovog tenzora u lokalnim ortogonalnim koordinatama. Za slijedeću je analizu najjednostavnije promotriti rješenje u Kerr-Schildovoj formi, oblika:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h\cdot k_\mu k_\nu \tag{48}$$

Gdje je k_μ vektorsko polje svjetlosnog tipa te:

$$h = \frac{\mu r^{\gamma}}{\Pi F} \tag{49}$$

Uvođenjem koordinata svjetlosnog tipa $\sqrt{2}u = t+z$, $\sqrt{2}v = t-z$, za parni d te daljnjim transformacijama se može reproducirati lokalna ortogonalna baza u kojoj računamo najjednostavniju R_{vuvu} komponentu Riemannovog tenzora. Pretpostavljamo da je d paran te kasnije uvodimo slučaj neparnog d:

$$R_{vuvu} = -\frac{h}{r^2}\left(2\cdot\left(\frac{r^2N_3}{F}-\frac{1}{2}+\frac{r^2}{r^2+a_i^2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)+$$
$$-\frac{h}{r^2}\left(\frac{r^2(r^2-a_i^2)}{(r^2+a_i^2)^2}+\frac{r^2N_3}{F}\cdot\left(\frac{2r^2N_3}{F}-1\right)+\frac{4r^4N_4}{F}\right) \tag{50}$$

gdje je:

$$N_n = \frac{a_i^2((x^i)^2+(y^i)^2)}{(r^2+a_i^2)^n} \tag{51}$$

Pretpostavimo da je p spinskih parametara trivijalno. U limesu $r \to 0$ imamo:

$$R_{vuvu} = -\frac{h}{r^2}\left(2p^2 - p\right) +$$

$$-\frac{h}{r^2}\left((4p-3)\left(\frac{r^2}{a_i^2} + \frac{r^2}{\tilde{\alpha}^2}\cdot\frac{\mu_i^2}{a_i^2}\right) + O(r^4)\right) \tag{52}$$

gdje je:

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{r}\cdot(z^2 + (x^i)^2 + (y^i)^2) \tag{53}$$

Ukoliko uzmemo $\tilde{\alpha} \neq 0$, $F \to \tilde{\alpha}^2$, R_{vuvu} divergira u granici $r \to 0$ osim ako je $p = 0$, odnosno ako nema trnućih spinskih parametara. Kao drugi slučaj uzimamo $\tilde{\alpha} = 0$ te $F \to \left. r^2 N_3\right|_{r\to 0}$ te tada komponenta Riemannovog tenzora R_{vuvu} postaje:

$$R_{vuvu} = -\frac{h}{r^2}\left(2p^2 + 3p + 1 + O(r^2)\right) \tag{54}$$

U ovom slučaju komponenta R_{vuvu} divergira u limesu $r \to 0$ neovisno o tome koliki je p broj trivijalnih spinskih parametara. Dakle, promatrani singularitet metrike zaista opisuje singularitet zakrivljenosti prostora. Slična analiza se može provesti za neparni broj dimenzija d. Zaključak će biti isti. Koordinata $r = 0$ uistinu odgovara singularitetu zakrivljenosti. Jedina će razlika biti u tome da će se u navedena dva limesa za $\tilde{\alpha}$ i F pojaviti uvjeti na sprječavanje divergencije u obliku $p = 1$ i $p = 0$ redom prema gornjoj analizi. Prema gornjim razmatranjima, u tri od navedena četiri slučaja slijedi da je moguće postaviti uvjet na broj trnućih spinskih parametara p tako da promatrana Riemannova komponenta ne izdivergira. To je bitno jer u slučajevima kada nema singulariteta, možemo napraviti produljenje r koordinate na negativne vrijednosti. Promotrimo pobliže geometriju singulariteta u trima specifičnim slučajevima.

Prvo promatramo slučaj parnog d te svi a_i ne iščezavaju. Zanima nas karakterizacija plohe singulariteta tako da uvjetujemo trivijalnost F varijable prema jednadžbi (46):

$$F = \alpha^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{r^2\mu_i^2}{r^2 + a_i^2} \tag{55}$$

Da bi imali trivijalnost u F moramo imati $\alpha = 0$ te $r = 0$. Intuiciju potrebnu za interpretaciju rezultata možemo dobiti ako postavimo $\mu \to 0$. Tada dobivamo ravan prostor prožen elipsoidnim plohama konstantne radijalne koordinate:

$$\frac{z^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 + y_i^2}{r^2 + a_i^2} = 1 \tag{56}$$

Postavljanjem $\mu = 0$ smo definirali ravan prostor prožet ekviplohama radijalne koordinate kao u gornjoj jednadžbi. Ako sada pogledamo limes $r \to 0$ te $z = 0$, jednadžbe elipsa prelaze u $(d-3)$ dimenzionalne hipersfere. Koordinata α igra uloge radijalne koordinate hiperelipse te tako vrijedi da je $\alpha = 1$ ishodište, a $\alpha = 0$ rub plohe gdje je metrika singularna. Drugim riječima, prstenasta struktura singulariteta u četverodimenzionalnom Kerrovom prostorvremenu se generalizira u $(d-3)$ hipersferu u proizvoljnom parnom broju dimenzija MP prostorvremena.

Nadalje, promatramo slučaj neparnog d te jedan trivijalni spinski parametar, npr. $a_1 = 0$. Sada F poprima malo drukčiji oblik:

$$F = \mu_1^2 + r^2\sum_{i=2}^{n}\frac{\mu_i^2}{r^2 + a_i^2} \tag{57}$$

Kako bi sada mogli uvjetovati trivijalnost F opservable, mora biti zadovoljeno $\mu_1 = 0$ te $r = 0$, čime dobivamo sličnu relaciju za radijalne ekviplohe kao i prije:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{r^2} + \sum_{i=2}^{n}\frac{x_i^2 + y_i^2}{r^2 + a_i^2} = 0 \tag{58}$$

Ako pogledamo limes u singularitet $r \to 0$, moramo imati $x_1 = y_1 = 0$, zbog pozitivne definitnosti izraza $x_1^2 + y_1^2$. Analognu ulogu α u prošlom slučaju ima koordinata μ_1. Dakle, za razliku od prošlog slučaja kada se hiperelipsa urušila u $(d-3)$ hipersferu, sada imamo urušavanje u ishodište prve od n ortogonalnih ravnina.

Treći i zadnji slučaj singulariteta koji promatramo jest neparni d broj dimenzija te svi spinski parametri nejednaki nula. U ovom slučaju imamo izraz za F oblika:

$$F = r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{r^2 + a_i^2} \tag{59}$$

Ako pogledamo gornji izraz, možemo zaključiti da u limesu $r \to 0$ imamo:

$$\frac{\Pi F}{r^2} \to konst. \neq 0 \tag{60}$$

Dakle nema singulariteta na mnogostrukosti za $r = 0$, ali još uvijek metrika pokazuje čudno ponašanje jer komponenta $g_{rr} \propto r^2$ u navedenom limesu. Kao što je navedeno kod analize R_{vuvu} komponente Riemannovog tenzora, možemo napraviti produljenje koordinate r u područje $r < 0$, jer nema singulariteta na $r = 0$. Ukoliko to napravimo, imati ćemo singularitet zakrivljenosti u $\rho = -a_s^2$. Gdje je $\rho = r^2$ te je a_s po modulu najmanji spinski parametar. Ukoliko imamo degeneraciju u najmanjem spinskom parametru cijela hiperploha $\rho = -a_s^2$ je singularna.

Horizonte događaja definiramo relacijom $g_{rr} = 0$, odnosno:

$$\Pi - \mu r^{\gamma} = 0 \tag{61}$$

Promotrimo za sada slučaj parnog broja dimenzija d za koji je $\gamma = 1$. Osim za $d \in \{4, 6\}$, općenito nema rješenja navedene polinomne jednadžbe, što slijedi iz

Abel-Ruffinijevog teorema. Abel-Ruffinijev teorem tvrdi kako ne postoji algebarsko rješenje proizvoljne polinomne jednadžbe reda 5 i više. Broj dimenzija $d = 6$ upada u navedeni okvir zbog naše konvencije $d = 2n + 2(1)$ za parni(neparni) broj dimenzija te zato što je gornja jednadžba reda $2n$. Unatoč tome možemo napraviti neka razmatranja preko kojih ćemo zaključiti broj horizonata. S obzirom na to da Π raste puno brže nego μr u asimptotskom području te μr raste brže u intervalu $r \leq \frac{1}{\mu}$, možemo očekivati minimum u području $r \leq \frac{1}{\mu}$. Ovisno o tome kako su izvrijednjeni spinski parametri će vrijednost minimuma biti na negativnim vrijednostima u r-u, u $r = 0$ ili pak u intervalu $r \in \left\langle 0, \frac{1}{\mu}\right]$. Navedena će vrijednost minimuma u r koordinati uzrokovati redom 0, 1 ili 2 nulišta, odnosno horizonta. Ovakvo ponašanje odgovara ponašanju Kerrovog prostorvremena u četiri dimenzije. Horizonti imaju S^{d-2} topologiju. Usprkos ovakvom slaganju dolazi do nekakvih malih razlika, koje su primarno uzrokovane viškom spinskih parametara u MP metrici nasprem četverodiemnzionalne Kerrove metrike. Naime, radi se o slučaju kada jedan ili više spinskih parametara propada. U tom slučaju nužno postoji barem jedan horizont. Ukoliko m spinskih parametara propada, tada će za male r, Π rasti kao r^{2m}. Kratkom analizom bi sada mogli zaključiti kako za neku vrijednost $r \in \mathbb{R}^+$ sigurno dolazi do jednog nulišta, jer će se dvije navedene krivulje barem jednom sijeći u $\mathbb{R}^+$. U slučaju neparnog d izvrijednjujemo $\gamma = 2$ u jednadžbi (44). Dobivenu je jednadžbu sada lakše zapisati pomoću prijašnje uvedenih koordinata ρ:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\rho + a_i^2\right) - \mu\rho = 0 \tag{62}$$

Na ovaj smo način sveli polinomnu jednadžbu reda $2n$, na n te je naša nova jednadžba rješiva za $n = 2,\ 3,\ 4$. Ukoliko tražimo rješenja za $\rho > 0$, postavljamo nužan, ali ne i dovoljan uvjet na sustav:

$$\mu > \sum_i \prod_{j \neq i} a_j^2 \tag{63}$$

Ukoliko je μ dovoljno velik te vrijedi prošli uvjet, onda je korijen jednadžbe na $\rho > 0$. Ukoliko je μ negativan, rješenja u r-u su imaginarna te imamo $\rho < 0$ uz dodatni uvjet $-a_s^2 < \rho$, jer imamo potencijalno singularno područje u intervalu od $-a_{s'}^2$ do $-a_s^2$, gdje je $-a_{s'}^2$ prvi sljedeći po modulu najmanji spinski parametar. Nadalje, ako nema degeneracije u najmanjem spinskom parametru te ako se jedno od rješenja nađe u intervalu $-a_{s'}^2 < \rho < -a_s^2$, može se pokazati da nema horizonta za $\rho > 0$. Da bi obavili potpuni opis MP crnih rupa moramo razmotriti još jedan tip ploha koji se javljaju u Kerrovom prostorvremenu, a to su ergoplohe.

U Kerrovom prostorvremenu su ergoplohe definirane relacijom (6). To su plohe koje dopuštaju povratak u suprotnom smjeru, nakon što ih se jednom presiječe. Cijeli koncept termodinamike crnih rupa je temeljen na takvom principu. Erogoplohe definiramo preko $g_{tt} \stackrel{!}{=} 0$, što daje sljedeći uvjet na MP prostorvrijeme:

$$F\Pi - \mu r^{\gamma} = 0 \tag{64}$$

gdje je γ definiran kao u poglavlju *IV*. Topologija ergoploha je još uvijek S^{d-2}, no javlja se kompliciranija kutna ovisnost zbog varijable F koja se javlja u gornjoj jednadžbi. Analitičkih rješenja gornje jednadžbe nema, ali ono što se može zaključiti pomnijom analizom jest to da jedna ergoploha uvijek postoji izvan vanjskog horizonta te da može postojati još jedna unutar. Ono što je zanimljivo za pogledati jest uvjet $F = 1$. Tada naime, jednadžba (64) postaje jednaka jednadžbi (61) koja definira horizonte. Drugim riječima rješavanjem $F = 1$ uvjeta možemo reproducirati hiperplohe na kojima se ergoplohe dodiruju s horizontima. Pogledajmo prvo paran d slučaj:

$$F = 1 = \alpha^2 + \sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 \tag{65}$$

gdje suma ide po m pretpostavljenih trnućih spinskih parametara. Ukoliko su svi spinski parametri netrivijalni slijedi:

$$\alpha = \pm 1 \tag{66}$$

Navedeni rezultat je generalizacija razmatranja u četiri dimenzije, odnosno u Kerrovom prostorvremenu gdje se ergoploha i vanjski horizont u najopćenitijem slučaju dodiruju na aksijalnoj osi simetrije. Ukoliko je d neparan, imamo uvjet oblika:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 = 1 \tag{67}$$

gdje se opet pretpostavlja da suma ide po m trnućih spinskih parametara. U ovom smo slučaju dobili hiperplohu preklapanja horizonata i ergoplohe topologije S^{2m-1}. Ukoliko pretpostavimo da je parametar μ pozitivan imamo ergoplohu van horizonta, dok u protivnom nema ergoploha.

U MP prostorvremenu isto kao i u četverodimenzionalnom Kerrovom prostorvremenu možemo zamijetiti efekt *superzračenja*. Superzračenje je proces u kojemu izlazna čestica nakon raspada u nekom sustavu ima veću energiju od upadne. Detaljniji raspis osnovog argumenta superzračenja skalarnog i fermionskog polja se nalazi u *Dodataku B*. Nas specifično zanima slučaj interakcije s rotirajućom crnom rupom. Prvi zakon mehanike crnih rupa nam daje uvid u odnos mase M, naboja Q, površine horizonta A_H te momenta količine gibanja J, za stacionarnu perturbiranu crnu rupu:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A_H + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \tag{68}$$

gdje je κ površinska gravitacija uvedena u jednadžbi (7), Ω_H kutna brzina rotacije horizonta te Φ_H elektrostatski potencijal na horizontu. Ukoliko vrijedi slabi energetski uvjet:

$$T_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} \geq 0 \tag{69}$$

onda drugi zakon mehanike crnih rupa glasi $\delta A_H \geq 0$. Slabi energetski uvjet intuitivno možemo shvatiti tako da promatrač definiran tangentnim vektorskim poljem vremenskog tipa uvijek vidi pozitivno definitnu raspodjelu materije u prostoru. Ukoliko pretpostavimo da se radi o nenabijenoj crnoj rupi te da je materija koja upada u crnu rupu električki neutralna, vrijedi sljedeća relacija:

$$\frac{\delta J}{\delta M} = \frac{m}{\omega} \tag{70}$$

gdje je m azimutalni broj upadne čestice te ω do na $\hbar$ energija upadnog vala. Ukoliko se sada vratimo u prvi zakon, možemo izvesti sljedeću relaciju:

$$\delta M = \frac{\omega\kappa}{8\pi} \cdot \frac{\delta A_H}{\omega - m\Omega_H} \tag{71}$$

Nadalje, koristeći drugi zakon možemo doći do zaključka da upadni valovi s frekvencijom $\omega < m\Omega_H$ izvlače energiju iz crne rupe, $\delta M \leq 0$, što smo i namjeravali reproducirati. Prvi idejni eksperiment izvlačenja energije iz crne rupe je osmislio R. Penrose. On je zamislio raspad čestice koja prvotno miruje, mase mirovanja μ_0 u asimptotskom području. Navedena se čestica raspada na dvije čestice masa mirovanja μ_{fin} radi jednostavnosti, između ergoplohe i vanjskog horizonta Kerrovog prostorvremena. Jedna čestica na kraju ima sveukupnu negativu energiju te prelazi horizont, dok druga još jednom siječe ergoplohu, ali sada s većom energijom nego ulazna čestica prema prijašnjoj analizi.

Kerr-Newmanovo četverodimenzionalno prostorvrijeme opisuje rotirajuće nabijene crne rupe. Razmotrimo kauzalnost svjetskih linija, odnosno mogućnost postojanja zatvorenih vremenskih krivulja (CTC - closed time curves), na primjeru Kerr-Newmanovog prostorvremena. Promotrimo aksijalno simetrično vektorsko polje, koje je ujedno i Killingov vektor, ζ^{μ}_{ϕ}. Tada vrijedi da je $\zeta^2_{\phi} = g_{\phi\phi}$. Ukoliko se ograničimo na ekvatorijalnu ravninu $\theta = \frac{\pi}{2}$, imamo sljedeći oblik za $g_{\phi\phi}$ komponentu Kerr-Newman metrike:

$$g_{\phi\phi} = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} - \frac{a^2Q^2}{r^2} \tag{72}$$

Iz gornje je jednadžbe vidljivo da zbog zadnjeg člana komponenta $g_{\phi\phi}$ više ne mora nužno imati isti predznak svugdje na mnogostrukosti, već ga može mijenjati. Navedeno otvara mogućnost CTC svjetskih linija. Ovakav rezultat nam daje intuiciju za razumijevanje narušenja kauzalnosti koje ćemo razmotriti u složenijem slučaju d dimenzionalne MP metrike. Ukoliko se radi o slučaju parnog broja dimenzija MP prostorvremena, problem nastaje u produljivanju rješenja u područje $r < 0$. Specifično u faktoru $\mu r/(\Pi F)$ koji nije paran u r. Tada komponente metrike $g_{\phi_i\phi_i}$ mogu postati negativne što onda vodi na isti zaključak o postojanju CTC svijetskih linija kao i u primjeru Kerr-Newman prostorvremena. Ukoliko promatramo neparni broj dimenzija, imamo problematični član:

$$g_{\phi_i\phi_i} = \left(\rho + a_i^2\right)\left(1 + \frac{\mu a_i^2}{\Pi}\right) \tag{73}$$

kada drugi faktor postane nula, jer tada $g_{\phi_i\phi_i}$ komponenta mijenja predznak. Zanimljivo je također vidjeti kako se ponaša crna rupa s negativnim parametrom mase $\mu < 0$ što se tiče kauzalnosti. U tom se slučaju horizont nalazi između $-a_s^2$ i nule. Tada za bilo koji kut ϕ_i za koji je odgovarajući spinski parametar $a_i^2 > a_s^2$, $g_{\phi_i\phi_i}$ postaje negativan za neke vrijednosti ρ van horizonta. Navedeni je zaključak, da možemo imati CTC krivulje van horizonta, svojstven rješenjima negativnog parametra mase.

VI. MAKSIMALNA ANALITIČKA EKSTENZIJA I SIMETRIJE

Ideja kod maksimalne analitičke ekstenzije jest naći koordinate u kojima možemo produljiti domenu analitičnosti preko prijašnjih divergencija. Što se tiče četverodimenzionalnog Kerrovog prostorvremena, uvodimo dva tipa analitičkih ekstenzija na svakom od horizonata, tzv. "infalling" i "outgoing" koordinate. Navedene koordinate opisuju redom budući i prošli smjer horizonata. Prijašnja razmatranja u Kerrovom prostorvremenu su identična kao i ona u MP prostorvemenu. Imajući to na umu, uvodimo koordinatnu supstituciju Eddington tipa:

$$dt = dt_{\pm} \mp \frac{\mu r^2}{\Pi - \mu r}dr \tag{74}$$

$$d\phi_i = d\phi_{\pm,i} \pm \frac{\Pi}{\Pi - \mu r} \cdot \frac{a_i}{r^2 + a_i^2}dr \tag{75}$$

Koristeći ove nove koordinate postigli smo da se MP metrika dobro ponaša na horizontima $\Pi - \mu r^{\gamma} = 0$, no kao što je i očekivano, nismo se uspjeli riješti $\Pi F/r = 0$ singulariteta, jer on predstavlja singularitet zakrivljenosti prostorvremena. Dakle, t_+ ostaje konačan u limesima $r \to r_H$ te $t \to +\infty$, dok t_- ostaje konačan u limesima $r \to r_H$ te $t \to -\infty$. S obzirom na to da analogoni Eddington tipa koordinata čuvaju analitičnost na horizontima u četverodimenzionalnom Kerrovom prostorvremenu, zaključujemo da je struktura horizonata ista kao i u četiri dimenzije. Ukoliko pretpostavimo da je masa crne rupe očuvana, da je broj dimenzija paran, da su svi spinski parametri netrivijalni te da povećavamo neke od spinskih parametara, nakon dovoljno dugo vremena će se horizonti spojiti. U navedenom slučaju se analitičke ekstenzije preko dvaju horizonata spajaju te dolazi do tzv. maksimalne analitičke ekstenzije rješenja. U tom se slučaju u okolini horizonta može prepoznati $AdS_2 \times S^n$

topologija. U *Dodatku C* se nalazi kratki uvod u važnost AdS_n topologije. Ukoliko bi se spinski parametri nastavili dalje povećavati, izgubili bi horizonte te bi preostao goli singularitet. Ukoliko je d paran te jedan ili više spinskih parametara trnu, tada je rješenje jednadžbe (61) dano s $r = 0$ te neki $r \in \mathbb{R}^+$. Struktura rješenja je tada nalik Schwarschildovom rješenju te se neće promijeniti neovisno o tome kolikim momentom količine gibanja crna rupa rotira u svakoj od ortogonalnih ravnina. Slična razmatranja vrijede za neparan broj dimenzija. U novim se koordinatama u Kerr-Schildovoj formi metrika može zapisati kao:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{\mu r}{\Pi F}(k_\pm)_\mu (k_\pm)_\nu \tag{76}$$

Nadalje, definicija nul-vektora u originalnom sustavu slijedi kao:

$$k^\mu_\pm \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\Pi}{\Pi - \mu r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \mp \frac{\partial}{\partial r} \tag{77}$$

gdje je ω_i:

$$\omega_i = \frac{a_i}{r^2 + a_i^2} \tag{78}$$

Na samom horizontu k^μ_- postaje generator budućeg horizonta, dok k^μ_+ postaje generator prošlog horizonta na $r = r_H$.

Gibanje čestice u Kerrovom četverodimenzionalnom prostorvremenu se u potpunosti može odrediti s obzirom na to da imamo četiri konstante gibanja u problemu. Dvije konstante dolaze od Killingovih vektora, translacije u vremenu i rotacije oko aksijalne osi, treća dolazi od normiranja 4-brzine, dok četvrta dolazi od Killing-Yano tenzora u Kerrovom prostorvremenu. Po uzoru na ovaj primjer u Kerrovom prostorvremenu treba promotriti simetrije koje su sačuvane u Killing-Yano tenzoru za MP metriku. Uvodimo zatvorenu konformalnu Killing-Yano 2-formu ($CCKY$) preko relacije:

$$\nabla_c h_{ab} = g_{ca}\zeta_b - g_{cb}\zeta_a \tag{79}$$

$$\zeta_a = \frac{1}{d-1}\nabla^b h_{ba} \tag{80}$$

odnosno u jeziku diferencijalnih formi:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{h} = \mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\zeta} \tag{81}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{d-1}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h} \tag{82}$$

gdje je $\mathbf{X}$ proizvoljno vektorsko polje. S obzirom na to da je $\mathbf{h}$ zatvorena 2-forma, znamo da barem lokalno postoji 1-forma takva da $\mathbf{h} = \mathbf{db}$. U slučaju MP metrike imamo eksplicitni oblik $CCKY$ tenzora kao:

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i d\mu_i \wedge \left(a_i dt + (r^2 + a_i^2) d\phi_i^2\right) + \\ + r dr \wedge \left(dt + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i^2 d\phi_i \right) \tag{83}$$

Poznavajući $CCKY$ tenzor, možemo konstruirati Killingov tenzor:

$$K_{(\mu\nu)} = -h_\mu{}^\sigma h_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \tag{84}$$

koji zadovoljava intuitivno jasnu generalizaciju Killingove jednadžbe:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu\rho)} = 0 \tag{85}$$

U višim dimenzijama jest gornji Killingov tenzor samo jedna od niza očuvanih veličina tzv. Killingovog tornja:

$$\frac{(2^l l!)^2}{(2l)!} K^{(l)\mu}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \cdot h^{[\mu_1\nu_1 \cdots} h^{\mu_l\nu_l]} h_{[\mu_1\nu_1 \dots} h_{\mu_l\nu_l]} + \\ -2l \cdot h^{\mu[\nu_1 \cdots} h^{\mu_l\nu_l]} h_{\nu[\nu_1 \dots} h_{\mu_l\nu_l]} \tag{86}$$

Dalje uvodimo ograničenja koja definiraju konstante gibanja problema:

$$K^{(l)}{}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \text{konst.}^{(l)} \tag{87}$$

Iz jednadžbe (86) je jasno da je kardinalnost domene indeksa l jednaka $n+1$, no:

$$\begin{cases} K^{(n+1)}_{\mu\nu} = 0 \\ K^{(0)}{}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \end{cases}$$

Stoga $l = 0, 1, ..., n$ te sve skupa Killingov tenzor reproducira $n+1$ konstanti gibanja. Ukoliko tome pribrojimo također $n+1$ konstanti gibanja koje dolaze od Killingovih vektora, dobivamo $2n+2$ konstante gibanja što upravo odgovara broju dimenzija problema te nam omogućuje da riješimo problem evolucije čestice u MP metrici u parnom broju dimenzija. U neparnom broju dimenzija svaki navedeni argument također vrijedi te bi se na prvu pomisao moglo zaključiti kako imamo jednu previše konstantu gibanja. Usprkos takvim razmišljanjima, pokazuje se da je broj dimenzija uistinu jednak broju konstanti gibanja. Problem se javlja u $l = n$ konstanti, za koju se pokazuje da je reducibilna. Ukoliko pogledamo izraz (86), vidimo da je Killingov tenzor definiran preko kontrakcije dvaju $CCKY$ tenzora ranga $d - 2l$. Ukoliko je $l = n$ te $d = 2n + 1$, dobivamo 1-formu za koju se jednadžba (79) i (80) svodi na Killingovu jednadžbu. Drugim riječima $l = n$ konstanta iz jednadžbe (87) nije nezavisna s jednom od konstanti gibanja koje slijede iz Killingove jednadžbe te je sveukupni broj konstanti gibanja $2n + 1$, kao što bi i očekivali, a ne $2n + 2$. $CCKY$ tenzor je od krucijalne važnosti, jer dodaje taman trgaženi broj ograničenja kako bi se mogle riješiti Hamilton-Jacobi jednadžba, Diracova jednadžba te KG jednadžba u općenitoj obitelji Kerr-NUT-AdS prostorvremena.

VII. TERMODINAMIKA, NESTABILNOSTI I FRAGMENTACIJA MP CRNIH RUPA

Nulti zakon mehanike crnih rupa govori o tome da je površinska gravitacija, odnosno temperatura, konstantna na horizontima stacionarnih crnih rupa. Smarrova formula međusobno povezuje parametre crne rupe, kao što su masa M, moment količine gibanja J, površina horizonta A_H i sl. Kako bi izveli Smarrovu formulu, krećemo od Komarovih integrala vezanih za Killingovo vektorsko polje $\mathfrak{X}^\mu$. Uvodimo očuvanu struju za zadano Killingovo polje kao:

$$J^\mu [\mathfrak{X}] = \mathfrak{X}_\nu R^{\mu\nu} \tag{88}$$

Koristeći Einsteinove jednadžbe, gornju jednadžbu možemo zapisati kao:

$$J^\mu [\mathfrak{X}] = 8\pi G \mathfrak{X}_\nu \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \tag{89}$$

Prvo moramo pokazati da $J^\mu [\mathfrak{X}]$ zaista predstavlja očuvanu struju u relativistički kovarijantnom smislu. Gledamo kovarijantnu derivaciju izraza:

$$\nabla_\mu J^\mu [\mathfrak{X}] = 8\pi G \left(\nabla_\mu \mathfrak{X}_\nu \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \right.$$

$$\left. + \mathfrak{X}_\nu \nabla_\mu \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \right) \tag{90}$$

Nadalje koristimo očuvanost tenzora energije i impulsa, obzirom na to da je on u svojoj osnovi također očuvana struja na translacije te svojstvo da $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$:

$$\nabla_\mu J^\mu [\mathfrak{X}] = 4\pi G \mathfrak{X}^\mu \nabla_\mu T \tag{91}$$

$$\nabla_\mu J^\mu [\mathfrak{X}] = -\frac{1}{2} \mathfrak{X}^\mu \nabla_\mu R = 0 \tag{92}$$

Prijelaz iz jednadžbe (91) u jednadžbu (92) se može pokazati kontrakcijom Einsteinove jednadžbe:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad / \cdot g^{\mu\nu} \tag{93}$$

$$8\pi G T = R \cdot \left(1 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \right) \tag{94}$$

što se svodi na:

$$R = -8\pi G T \tag{95}$$

Dakle, uspjeli smo pokazati da početni izraz uistinu predstavlja očuvanu struju. Navedeni smo rezultat mogli i očekivati s obzirom na to da je on pokazatelj činjenice da se geometrija prostora ne mijenja duž Killingovog polja. Svaka očuvana struja ima pridruženi očuvani naboj:

$$Q [\mathfrak{X}] = -\int_\Sigma d^3 y \sqrt{|\, \gamma \,|}\, n_\mu J^\mu [\mathfrak{X}] \tag{96}$$

gdje je γ metrika na području integracije Σ te n_μ normalno vektorsko polje.

$$Q [\mathfrak{X}] = -\int_\Sigma d^3 y \sqrt{|\, \gamma \,|}\, n_\mu J^\mu \mathfrak{X}_\nu \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \tag{97}$$

Koristeći relaciju kontrakcije Ricci tenzora s zadanim Killingovim poljem $\mathfrak{X}^\mu$:

$$\nabla_\nu \nabla^\mu \mathfrak{X}^\nu = R^{\mu\nu} \mathfrak{X}_\nu \tag{98}$$

možemo prijeći na površinski integral za očuvani naboj:

$$Q [\mathfrak{X}] = -\int_{\partial\Sigma} d^2 x \sqrt{|\, \alpha \,|}\, n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu \mathfrak{X}^\nu \tag{99}$$

gdje je α metrika na području integracije $\partial\Sigma$ te σ_ν normalno vektorsko polje. Prema Noetherinom teoremu u gornjim su jednadžbama predstavljene očuvane struje i naboji, dani s Komarovim integralima, vezani za kontinuiranu simetriju Killingovog polja $\mathfrak{X}^\mu$. Pozivajući se na gornje argumente uvodimo Komarovu masu i moment količine gibanja kao očuvane naboje na translacije u vremenu i rotacije za stacionarna prostorvremena:

$$M_{Komar} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\partial\Sigma} dA \cdot n_{\mu\nu} \nabla^\mu \tilde{n}^\nu \tag{100}$$

$$(J_{Komar})_i = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} dA \cdot n_{\mu\nu} \nabla^\mu {\tilde{m}_i}^{\ \nu} \tag{101}$$

Gdje $\tilde{n}^\mu$ i $\tilde{m}^\mu$ predstavljaju Killingova polja za simetrije čija su Komarova masa i moment količine gibanja očuvani naboji. Može se provjeriti da su Komarova masa i moment količine gibanja jednaki parametrima mase i momenta količine gibanja u Schwarschildovom i Kerrovom prostorvremenu te nabijenim generalizacijama istih. Navedeno se svojstvo analogno generalizira u proizvoljni broj dimenzija, odnosno za naš slučaj MP metrike. Svjetlosni generator horizonta je kombinacija Killingovih vektora $\tilde{n}^\mu$ i $\tilde{m}^\mu$, nazovimo ga $\tilde{k}^\mu$:

$$\tilde{k}^\mu = \tilde{n}^\mu - \omega_i \tilde{m}_i^\mu \tag{102}$$

gdje je ω_i dan s:

$$\omega_i = \frac{a_i}{r_H^2 + a_i^2} \tag{103}$$

Prešutno se pretpostavlja sumacija po prostornim indeksima u jednadžbi (102). Koristeći proizvoljnodimenzionalne generalizacije jednadžbi (100) i (101) te definiciju površinske gravitacije:

$$\tilde{k}^\mu \nabla_\mu \tilde{k}^\nu = \kappa \tilde{k}^\nu \tag{104}$$

dolazimo do tražene Smarrove formule za naš problem:

$$\frac{d-3}{d-2} M - \omega_i J_i = \frac{\kappa A_H}{8\pi G} \tag{105}$$

Generaliziranjem jednadžbe (68) tako da se uzme u obzir da imamo n ortogonalnih ravnina u kojima crna rupa može rotirati te ograničenjem na nenabijene crne rupe, slijedi prvi zakon mehanike crnih rupa:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \omega_i \delta J_i \tag{106}$$

po intuiciji Smarrove formule iz jednadžbe (102). Iz prvog zakona možemo odrediti ireducibilnu masu crne rupe. Naime, ako pretpostavimo trivijalnost svih spinskih parametara, slijedi $\delta J_i = 0$ te:

$$M_{irr} = \frac{1}{8\pi G}\int_0^{A_H} \kappa(A, J_{i=0})dA \tag{107}$$

Nakon identifikacije opservabli iz složenijeg izraza slijedi:

$$M_{irr} = \frac{d-2}{d-3}\cdot\frac{\kappa A_H}{8\pi G} \tag{108}$$

Navedenu smo jednadžbu još jednostavnije mogli dobiti izvrijednjavanjem Smarrove formule u $J_i = 0$. Gornji izraz predstavlja ireducibilnu masu MP crne rupe, onda će dakle $M - M_{irr}$ predstavljati doprinose masi koji su vezani uz rotaciju crne rupe. Drugi zakon, slijedi iz teorema o površini horizonata. Iz navedenog teorema slijedi da je površina horizonta veličina koja se ne smanjuje, odnosno ako promotrimo sve crne rupe u svemiru, njihova ukupna površina horizonata se ne može smanjivati fizikalno dozvoljivim procesom. Drugi zakon glasi $\delta A \geq 0$ te se analogno generalizira u proizvoljni broj dimenzija ne mijenjajući strukturu.

Kerrovo rješenje u četiri prostorvremenske dimenzije jest stabilno, no MP crne rupe pokazuju nestabilnosti u režimu izuzetno velikog momenta količine gibanja, odnosno u ultrarotirajućem limesu. Općenito se nestabilnosti sustava promatraju malom perturbacijom metrike. Navedeno je moguće u standardne četiri dimenzije, no ne i u većem broju dimenzija od pet. Intuiciju za shvaćanje nestabilnosti u $d \geq 6$ preuzimamo iz rezultata za Gregory-Laflamme nestabilnost u $d = 5$. Promotrimo specifično MP metriku proizvoljne parnosti sa samo jednim netrivijalnim spinskim parametrom, npr. a_1:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\mu}{r^{d-5}\rho^2}\left(dt + a\cdot\sin^2\theta d\phi\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 +$$

$$+\left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta d\phi^2 + r^2\cos^2\theta d\Omega_{d-4}^2 \tag{109}$$

Gdje su:

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{110}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{d-5}} \tag{111}$$

$$\mu_1 = \sin\theta \tag{112}$$

Horizonte po prijašnjim razmatranjima određujemo kao najveći korijen od jednadžbe $\Delta(r) = 0$:

$$r_H^2 + a^2 - \frac{\mu}{r_H^{d-5}} = 0 \tag{113}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da za $d < 6$ postoji konačna vrijednost spinskog parametra, takva da nakon nje više nema rješenja jednadžbe. Nasuprot tome za $d \geq 6$ ne postoji nikakva gornja granica na spinski parametar a. Navedeno je jasno, jer doprinos $\frac{\mu}{r_H^{d-5}}$ u tom slučaju divergira u $r_H = 0$ te jednadžba nužno ima rješenje neovisno o parametru a. Drugim riječima, postoji mogućnost ultrarotirajućih rješenja u $d \geq 6$, što postavlja pitanje stabilnosti MP crnih rupa u takvim dimenzijama. Ukoliko se ograničimo na ultrarotirajući limes te držimo parametar mase konstantnim, tada izvrijednjavanjem jednadžbe (113) slijedi:

$$r_H \simeq \left(\frac{\mu}{a^2}\right)^{\frac{1}{d-5}} \tag{114}$$

Dakle, što je spinski parametar veći, to je radijus horizonta manji. No situacija nije toliko jednostavna te je slika događaja puno jasnija ukoliko se sagleda ultrarotirajući limes u dvama ortogonalnim $d-4$ dimenzionalnim hiperplohama:

$$A_{||}^{(d-4)} = \Omega_{d-4}(r_H^2 + a^2) \simeq \Omega_{d-4}a^2 \tag{115}$$

$$A_{\perp}^{(d-4)} = \Omega_{d-4}(r_H\cos\theta)^{d-4} \tag{116}$$

Gdje su $A_{||}^{(d-4)}$ i $A_{\perp}^{(d-4)}$ površina presjeka horizonta s ravninom normalnom na aksijalnu os te površina presjeka horizonta s proizvoljnom ravninom tangencijalnom na aksijalnu os problema. Općenito nam je jednostavnije sagledati skalu dimenzije duljine te iz jednadžbi (112) i (113) slijedi:

$$l_{||} \ \propto \ a \tag{117}$$

$$l_{\perp} \ \propto \ r_H \tag{118}$$

Iz ove nam je analize sada jasno da u takvom ultrarotirajućem limesu dolazi do atenuiranja skale dimenzije duljine u tangencijalnom smjeru na aksijalnu os problema, dok skala dimenzije duljine u normalnom smjeru divergira. Drugim riječima, horizont poprima generalni oblik "palačinke". Stručnije rečeno prijašnja S^{d-2} topologija se urušava u $\mathbb{R}^2 \times S^{d-4}$. Za sveukupnu površinu horizonta se može pokazati kako trne kao $\propto \ a^{-\frac{2}{d-5}}$. Zbog toga što sveukupna površina horizonta atenuira u ultrarotirajućem limesu, slijedi da se horizont brže sužava u smjeru osi rotacije nego, što se širi u normalnom smjeru na navedenu os. Nekom promatraču blizu osi rotacije bi geometrija horizonta nalikovala membrani, no kao što su Gregory i Laflamme pokazali, gravitacijske crne membrane nisu stabilne, stoga nema razloga misliti da bi bile stabilne u $d \geq 6$ slučaju. Fazni prijelaz između Kerr tipa prostorvremena i membrane se može dobiti preko termodinamičkih razmatranja.

U slijedećim razmatranjima puštamo $\mu \to +\infty$, na točno takav način da omjer parametra mase i spinskog parametra koji će se pojavljivati ne divergira. Za $d = 5$ kako raste spinski parametar do svoje maksimalne vrijednosti, tako temperatura T atenuira sukladno očekivanju. Ukoliko se radi o slučaju $d \geq 6$ nema gornje granice za spinski parametar te tada temperatura T pada do određenog minimuma, nakon čega kreće rasti. Navedeno je ponašanje svojstveno crnim membranama te slijedi:

$$T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2r_H^{d-4}}{\mu} + \frac{d-5}{r_H}\right) \tag{119}$$

Minimum u gornjoj ovisnosti se postiže za:

$$\frac{a}{r_H} = \sqrt{\frac{d-3}{d-5}} \tag{120}$$

Ukoliko izvrijedimo gornju ovisnost u pojedinim, nama zanimljivim, dimenzijama $d \geq 6$, imamo:

$$\frac{a^{d-3}}{\mu} = \begin{cases} 1.29\ , & d = 6 \\ 1.33\ , & d = 7 \\ 1.34\ , & d = 8 \end{cases} \tag{121}$$

Iz jednadžbe (121) jest dalje jasno da do nestabilnosti dolazi za ne tako velike vrijednosti parametra spina za $d \geq 6$. Drugim riječima, da prag za ultrarotirajući limes nije toliko velik koliko bi očekivali intuitivno. Jedan od rezultata Gregory-Laflamme razmatranja jest taj da se nestabilnost crnih rupa povezuje s njihovim negativnim toplinskim kapacitetom. Daljnjim uspostavljanjem analogona s Gregory-Laflamme nestabilnosti zaključujemo da crna rupa postaje nestabilna nakon $\partial^2 S/\partial J^2 = 0$ točke infleksije u $S - J$ ovisnosti. Navedeni uvjet daje jednadžbu:

$$\left.\frac{a^{d-3}}{\mu}\right|_{kritično} = \frac{d-3}{2(d-4)}\left(\frac{d-3}{d-5}\right)^{\frac{1}{2}\cdot(d-5)} \tag{122}$$

Navedena jednadžba reproducira prijašnje izvedeni uvjet iz termodinamičkih razmatranja. Analitički pristup navedenom problemu faznih prijelaza MP crnih rupa ne daje rezultata, stoga se provode razni numerički izračuni. Promatrajući nestabilnost u uskoj okolini kritične vrijednosti spinskog parametra mogli bi numeričkim proračunima zaključiti kako frekvencija rotacije prostaje trivijalna. Navedeni trivijalni mod odgovara prebacivanju MP rješenja u rješenja s većim spinskim parametrom. Nadalje, provodeći numeričku analizu se može naći još takvih trivijalnih modova za još veće vrijednosti spinskog parametra. Svi slijedeći takvi modovi dodaju čvor u raspodjeli polarnog kuta θ geometrije horizonta. Ovakva rješenja predstavljaju novu klasu crnih rupa s "valovitom" raspodjelom u polarnom kutu. Dalje se pretpostavlja da bi sljedeća faza ovakvih crnih rupa bili rotirajući prstenovi topologije $S^1 \times S^{d-3}$. Perturbacije koje ne pokazuju aksijalnu simetriju isključivo uzrokuju nestabilnost rješenja, prema numeričkim izračunima. Navedene perturbacije uzrokuju nestabilnosti za puno manje vrijednosti spinskog parametra nego što su u jednadžbi (121):

$$\left.\frac{a^{d-3}}{\mu}\right|_{neaksi.sim.} = \begin{cases} 0.76\ , & d = 5 \\ 0.48\ , & d = 6 \\ 0.28\ , & d = 7 \\ 0.27\ , & d = 8 \end{cases} \tag{123}$$

Konačno stanje faznih prijelaza MP crne rupe u ultrarotirajućem limesu je složeno pitanje. Promatramo mogući slučaj fragmentacije ultrarotirajuće crne rupe u dvije identične crne rupe, radi jednostavnosti. U slučaju veće konačne površine horizonata od početne, smatramo da dolazi do nestabilnosti. Nadalje, u analizi ne uzimamo u obzir gravitacijsko zračenje te je stoga ovaj račun na razini aproksimacije, ali je što se toga tiče analogan Gregory-Laflamme razmatranjima. Također, uzimamo da su konačne crne rupe nerotirajuće s obzirom da na taj način maksimiziramo entropiju. Početno je stanje definirano masom MP crne rupe M te momentom količine gibanja J pomoću kojih slijedi početna površina A_0:

$$A_0 = \Omega_{d-2} r_H^{d-4}(r_H^2 + a^2) \tag{124}$$

Pretpostavimo da su novonastale crne rupe mase m, beskonačno daleko udaljene jedna od druge te da se gibaju u antiparalelnim smjerovim s parametrom raspršenja $2R$. U sustavu centra mase tada imamo:

$$M = 2\sqrt{m^2 + \frac{J^2}{4R^2}} \tag{125}$$

Navedenu jednadžbu možemo riješiti za m:

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{J^2}{R^2}} \tag{126}$$

Ukoliko μ_1 definiramo kao:

$$\mu_1 = \frac{16\pi G}{(d-2)\Omega_{d-2}} m \tag{127}$$

tada imamo:

$$\mu_1 = \frac{r_H^{d-5}(r_H^2 + a^2)}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{(d-2)^2}\cdot\frac{a^2}{R^2}} \tag{128}$$

Konačne crne rupe su nerotirajuće. Gibaju se antiparalelno konstantnim brzinama. S obzirom na to da je površina horizonta invarijantna na Lorentzove boostove slijedi konačna površina crnih rupa:

$$A_1 = 2\Omega_{d-2}\cdot\mu_1^{\frac{d-2}{d-3}} \tag{129}$$

Nadalje, kako smo definirali kriterij nestabilnosti kao:

$$A_1/A_0 > 1 \tag{130}$$

slijedi uvjet:

$$\frac{1+(a/r_H)^2}{2}\left(1-\frac{4}{(d-2)^2}\cdot\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{d-2}{2}}>1 \qquad (131)$$

Iz gornje je jednadžbe vidljivo da A_1 možemo maksimizirati tako da postavimo R da bude što veći. Navedeno razmatranje ipak nije sukladno našim očekivanjima. Naime, očekivali bi da će R biti iste skale kao a. U tom slučaju, te za dovoljno veliki a gornja će nejednakost uvijek biti zadovoljena. Kako bi procijenili vrijednosti omjera parametara MP crne rupe za koje dolazi do fragmentacije pretpostavljamo $R \leq \sqrt{r_H^2+a^2}$ te tada imamo:

$$\frac{a^{d-3}}{\mu} \geq \begin{cases} 0.88\ , & d=6 \\ 0.97\ , & d=7 \\ 1.02\ , & d=8 \end{cases} \qquad (132)$$

Zbog prirode aproksimacije navedeni rezultati sami po sebi ne nose preveliku važnost, ali glavni principi vrijede. Pogotovo uvedeni uvjet da povećanje površine horizonta uvjetuje nestabilnost MP crne rupe.

VIII. ZAKLJUČAK

MP crne rupe predstavljaju proizvoljnodimenzionalnu generalizaciju Kerrovog prostorvremena. Ideja promatranja crnih rupa u većem broju dimenzija od četiri je bila motivirana tadašnjim napretcima u teoriji superstruna koja uvjetuje veći broj dimenzija na fizikalne sisteme od dobropoznate tri prostorne i jedne vremenske. S obzirom da je MP metrika generalizacija Kerrove metrike, na svakom smo koraku računa imali na umu da limesom u $d=4$ moramo reproducirati Kerrovo prostorvrijeme. Nit vodilja razmatranja u ovom seminaru jest generalizacija dobro poznatih svojstava Schwarschildovog i Kerrovog prostorvremena u proizvoljni broj dimenzija te gledanje kako se navedena svojstva prenose u viši broj dimenzija. Razmatranja smo započeli s kratkim uvodom u Kerrovo i Schwarschildovo prostorvrijeme. Zatim smo promatrali statičke d-dimenzionalne crne rupe tražeći intuiciju za generalizirane Schwarschildove parametre u asimptotskom području, koristeći režim slabog polja i Newtonov limes. Navedena razmatranja su fiksirala parametar mase μ crne rupe dan s jednadžbom (30). Nakon generalizacije Schwarschildovog prostorvremena smo postepeno nadograđivali metriku u d dimenzija dok nismo došli do konačne MP metrike. Tijekom procesa je veliku razliku predstavljalo radi li se o parnom broju dimenzija d ili neparnom te navedena problematika prožima gotovo cijeli seminar. Potom smo uveli singularitete, horizonte i ergoplohe te ih klasificirali. Pronađena je maksimalna analitička ekstenzija rješenja u Eddington tipu koordinata te je korišten Killing-Yano $CCKY$ tenzor kako bi se pokazalo da su jednadžbe gibanja MP prostorvremena rješive. Na kraju je promatrana termodinamika crnih rupa, nulti, prvi i drugi zakon te se argumentirala nestabilnost crnih rupa u $d \geq 6$ dimenzija i fragmentacija.

IX. ZAHVALE

Htio bih se zahvaliti profesoru Smoliću na prilici da napišem seminar o ovoj jako zanimljivoj temi MP crnih rupa, u sklopu polaganja predmeta $Diferencijalna\ Geometrija\ u\ Fizici$ na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

X. DODATAK A

U *Dodatku A* pomnije pormatramo što se događa s probnom česticom u ekvatorijalnoj ravnini ergozone Kerrovog prostorvremena. Pozivamo se na jednadžbu (20):

$$\Omega_{\pm}=-\frac{1}{g_{\phi\phi}}\left(g_{t\phi}\pm\sqrt{g_{t\phi}^2-g_{tt}g_{\phi\phi}}\right) \qquad (133)$$

koja definira gornju i donju granicu na frekvenciju efekta ograničene rotacije u ergozoni ekvatorijalne ravnine Kerrovog prostorvremena. Ukoliko postavimo probnu česticu na ergoplohu, iz definirajuće relacije ergoploha, $g_{tt}=0$, slijedi da Ω_- postaje trivijalan. Dakle, u tom slučaju čestica može rotirati u smjeru rotacije crne rupe netrivijalnom kutnom brzinom Ω ili mirovati. Ukoliko pretpostavimo da se čestica nalazi unutar ergozone, a ne nužno na ergoplohi, moramo raspisati $-g_{tt}g_{\phi\phi}$ kako bi otkrili ponašanje kutne brzine:

$$-g_{tt}g_{\phi\phi}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos\theta}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos\theta}\right)\sin^2\theta \qquad (134)$$

$$-g_{tt}g_{\phi\phi}=-\frac{4m^2r^2a^2\sin^4\theta}{(r^2+a^2\cos\theta)^2}+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos\theta}\left(\sin^2\theta-1\right)+$$

$$+(r^2+a^2)\sin^2\theta-\frac{2mr^3\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} \qquad (135)$$

Ukoliko se ograničimo na ekvatorijalnu ravninu $\theta=\pi/2$, slijedi:

$$-g_{tt}g_{\phi\phi}=-\frac{4m^2a^2}{r^2}+r^2+a^2-2mr \qquad (136)$$

Pogađanjem odmah možemo vidjeti da je jedno od rješenja $r=2m$, što upravo odgovara limesu u vanjsku ergoplohu ekvatorijalne ravnine, sukladno prijašnjoj analizi. Daljnjom analizom gornje funkcijske ovisnosti se može pokazati da $-g_{tt}g_{\phi\phi}$ poprima negativne vrijednosti za sve $r < 2m$. Drugim riječima, u cijeloj je ergozoni ekvatorijalne ravnine izraz negativan. Iz navedenog te pozivajući se na jednadžbu (133), pozitivnu definitnost $g_{\phi\phi}$ i suprotnost predznaka $g_{t\phi}$ komponente u parametru a, zaključujemo da Ω_- postaje pozitivan što znači da unutar ergozone čestica može isključivo korotirati s crnom rupom. Također je važno za napomenuti što se događa van ergoplohe $r > 2m$. Naime, tada će gornji izraz biti isključivo pozitivno definitan što će sve skupa utjecati na Ω_- na način da minimalna kutna brzina postaje negativna, odnosno probna masa rotira u proizvoljnom smjeru.

XI. DODATAK B

U *Dodatku B* promatramo efekt superzračenje na bozonskim i fermionskim raspršenjima. U kontekstu se seminara navedeni efekt javlja u smislu idejnog Penrosovog procesa ekstrakcije energije iz ergosfere crne rupe Kerrovog, odnosno MP prostorvremena.

Promotrimo bezmaseno skalarno polje vezano za (1+1) potencijal A_μ. Skalarno polje Φ naravno zadovoljava bezmasenu KG jednadžbu:

$$\Phi^{;\mu}{}_{;\mu} = 0 \tag{137}$$

Kovarijantna derivacija je u gornjoj jednadžbi definirana po čestičarskoj notaciji:

$$\Phi_{;\mu} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi \tag{138}$$

Radi jednostavnosti uzmimo $A^\mu = (A_0, 0)$ te A_0 postaje trivijalan u negativnoj beskonačnosti, a konačan u pozitivnoj beskonačnosti. Koristeći ansatz oblika $\Phi = e^{-i\omega t}f(x)$, KG jednadžba se svodi na:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (\omega - eA_0)^2 f = 0 \tag{139}$$

U asimptotskim područjima rješenja možemo zapisati pomoću koeficijenata refleksije R i transmisije T:

$$f_-(x) = Ie^{i\omega x} + Re^{-i\omega x} \tag{140}$$

$$f_+(x) = Te^{ikx} \tag{141}$$

gdje je $k = \pm(\omega - eV(x \to +\infty))$. Koristeći očuvanje struja čestica, možemo izvesti vezu reflektiranog, upadnog i transmitiranog rješenja:

$$|R|^2 = |I|^2 - \frac{\omega - eV(x \to +\infty)}{\omega}|T|^2 \tag{142}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je za $0 < \omega < eV(x \to \infty)$, moguće imati pojačanje reflektirane struje iznad amplitude upadne struje, drugim riječima efekt superzračenja.

Promotrimo sada mogućnost efekta superzračenja na bezmasenim fermionskim spin-$\frac{1}{2}$ poljima Ψ, uz istu definiciju potencijala kao i za bozonski slučaj. Uvodimo bezmasenu Diracovu jednadžbu:

$$\gamma^\mu \Psi_{;\mu} = 0 \tag{143}$$

Pretpostavljamo ansatz oblika $\Psi = e^{-i\omega t}\chi(x)$, analogno bozonskom slučaju, gdje je χ 2-spinor:

$$\chi = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \tag{144}$$

Koristeći dvodimenzionalnu reprezentaciju:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{145}$$

Dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\frac{df_1}{dx} - i(\omega - eA_0)f_2 = 0 \tag{146}$$

$$\frac{df_2}{dx} - i(\omega - eA_0)f_1 = 0 \tag{147}$$

Sačuvana struja koja slijedi iz Diracove jednadžbe je dana s:

$$j^\mu = -e\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi \tag{148}$$

Izjednačavanjem struje u asimptotskim područjima dobivamo sljedeću relaciju:

$$|R|^2 = |I|^2 - |T|^2 \tag{149}$$

Vidimo da gornja jednadžba ne dopušta superzračenje, $|R|^2 \leq |I|^2$. Ovaj je rezultat intuitivno jasan. Naime, opisane procese možemo shvatiti kao tvorba para u vanjskom EM polju, no broj fermionskih parova je ograničen Paulijev principom isključenja, dok takva ograničenja ne postoje za bozone.

XII. DODATAK C

U *Dodatku C* promatramo važnost AdS_n prostorvremena. Jedan od važnijih razloga zašto je AdS prostorvrijeme u kontinuiranom fokusu istraživanja jest činjenica da je to jedno od jednostavnijih prostorvremena s kojima se radi, stoga se može koristiti za isprobavanje raznih rješenja. Nadalje, baza je istraživanja M-teorije, što je jedan od većih poduhvata reformulacije teoretske fizike. U teorijama polja se često uvode razvoji oko osnovnih stanja te AdS_n, de-Sitter prostorvrijeme dS_n te Minkowski prostorvrijeme predstavljaju cijelu listu maksimalno simetričnih osnovnih stanja. Prostorvrijeme de-Sitter se prirodno javlja kroz promatranje inflacije, dok se Anti-de-Sitter prostorvrijeme javlja kao prirodno osnovno stanje baždarnih teorija supergravitacije. Posebno treba istaknuti važnost AdS_n prostorvremena, jer opisuje topologiju okoline horizonata ekstremalnih crnih rupa, koje se spominju u glavnom tekstu seminara.

[1] Robert C. Myers: "*Myers − Perry black holes*"

[2] R. C. Myers, M. J. Perry: "*Black Holes in Higher Dimensional Space − Times*"

[3] Christian Heinicke, Friedrich W. Hehl: "*Schwarschild and Kerr Solutions of Einsten′s Field Equation*"

[4] Roberto Emparan, Robert C. Myers: "*Instability of Ultra − Spinning Black Holes*"

[5] Dennis Hansen, Niels Obers: "*Killing − Yano tensors* "

[6] Valeri P. Frolov, Pavel Krtouš, David Kubiznak: "*New Metrics Admitting the Principal Killing − Yano Tensor*"

[7] Ivica Smolić: "*Diferencijalna Geometrija u Fizici, Bilješke, skice i škrabotine*"

[8] Andreas Vigand Pedersen: "*Aspects of Black Hole Physics*"

[9] G. W. Gibbons: "*Anti − de − Sitter spacetime and its uses*"

[10] Vaishak Prasad, Rahul Srinivasan, Sashideep Gutti: "*Casuality Aspects of Modified Kerr − Newman spacetimes*"

[11] Richard Brito, Vitor Cardoso, Paolo Pani: "*Superradiance*"

[12] Roberto Emparan, Troels Harmark, Vasilis Niarchos, Niels A. Obers, Maria J. Rodriguez: "*The Phase Structure of Higher − Dimensional Black Rings and Black Holes*"

[13] Eric Morfa Morales: "*On a Second Law of Black Hole Mechanics in a Higher Derivative Theory of Gravity*"