Unruhov efekt

Mario Tanfara*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Dan je kratki pregled i osnovni izvod Unruhovog efekta. Teorijske činjenice kvantne teorije polja da jednoliko ubrzani opažač Minkowski vakuum interpretira kao termalni spektar čestica. Značaj ovog efekta leži u ekvivalenciji Minkowskog vakuuma i Rindlerovog termalnog spektra.

I. UVOD I NOTACIJA

Unruhov efekt ili punim imenom Unruh-Davies-DeWitt-Fullingov efekt je prvi put opisao Stephen Fulling 1973. godine tvrdeći da je sadržaj čestica u polju ovisan o sustavu opažača [7]. Preciznije jednoliko ubrzani opažači (Rindler opažači) u prostorvremenu Minkowskog pridružuju "termalnu kupku" Rindlerovih čestica Minkowskom vakuumu inercijalnih opažača. Zaključak da će Rindlerov opažač vidjeti fiksno inercijalno zrcalo koje emitira termalnu radijaciju temperature $a\hbar/(2\pi k_B c)$ donio je Davies 1975.[6], a objasnio Unruh godinu nakon [10]. Do svega je došlo u pokušaju da se razumije Hawkingov efekt (termalna radijacija koju vidi stacionarni opažač blizu horizonta crne rupe). Pod razumnim pretpostavkama ovaj efekt implicira Hawkingov efekt kojeg je teže matematički izvesti čisto jer zahtjeva operacije u zakrivljenom prostorvremenu, dok ćemo se mi za konačni izvod zadržati u ravnom prostorvremenu.

Često se Unruhov efekt pokušava ekperimentalno dokazati i dok je to sasvim valjan fizikalan pristup, Unruhov efekt ne zahtjeva ekperimentalnu potvrdu jer je u biti matematički rezultat koji proizlazi iz postavki kvantne teorije polja. (Iako Unruhov efekt za kružno akcelerirane čestice spina 1/2 navodi na Sokolov-Ternov efekt [1].) To što Rindler i Minkowski perspektive daju međusobno konzistentna predviđanja je posljedica valjanosti ovih matematičkih konstrukcija. Dobru raspravu dali su Fulling i Unruh [8] nakon nekih sumnji u uvjerljivost argumenata za Unruhov efekt.

Iako ovaj efekt u modernije doba postaje sve opširnija i dublja tema, u smislu sve većeg interesa, zbog ograničenog znanja autora ovdje ću dati samo najjednostavniji pregled koji bi trebao poslužiti studentima da barem dobiju ideju "o čemu se tu radi", uz neke izvode koji se preskaču u citiranoj literaturi. Detaljnija rasprava i pregled modernog razvoja, te eksperimentalnih ideja može se naći u [5]. Pomoću Lagranžeove formulacije doći ćemo do Klein-Gordonove jednadžbe za skalarna polja. Rješenja ćemo razviti u modove i onda na svakog od njih primijeniti kvantnu mehaniku harmoničkog oscilatora (kanonska kvantizacija). Upustiti ćemo se u zakrivljena prostor vremena za početak (većinski konceptualno) da bi vidjeli što se to događa s interpretacijom stanja. Nakon određivanja putanje Rindler promatrača uvest ćemo Rindlerove koordinate i ograničiti se na 2-dimenzionalno ravno $(-+)$ prostor-vrijeme uz prirodne jedinice $\hbar = c = G = k_B = 1$, da bi došli do traženog rezultata koji se nasreću manifestira u ovako jednostavnom slučaju. Ako se ne naznači drugačije, implicira se Einsteinova konvencija za sumiranje.

* mtanfara@dominis.phy.hr

I.1. Euler-Lagrange

Počinjemo od generalizacije integrala akcije iz klasične mehanike (vremenski integral lagražijana L), tako da je sada L integral Lagranžeove gustoće $\mathcal{L}$ (po prostorvremenu), koja je funkcija jednog ili više polja $\phi(x)$ i njegovih derivacija. Neka koordinatni sustav $\{x^1, ..., x^n\}$ pokriva $O \in \mathscr{M}$, otvoreni podskup n-dimenzinalne mnogostrukosti $\mathscr{M}$.

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \nabla_\mu \phi) d^n x = \int_O \hat{\mathcal{L}}(\phi, \nabla_\mu \phi) \boldsymbol{\epsilon}$$

Gdje $\hat{\mathcal{L}} = (\sqrt{|g|})^{-1} \mathcal{L}$, je skalarni lagražijan, a $\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ volumna forma (pretpostavljamo da je koordinatni sustav $\{x^1, ..., x^n\}$ pozitivno orijentiran u odnosu na $\boldsymbol{\epsilon}$, što odgovara pozitivnom predznaku u Riemannovom integralu s $d^n x$). Općenito $\mathcal{L}$ može ovisiti direktno o koordinatama x^μ, no ovdje nećemo razmatrati takav slučaj. Kao i prije želimo minimizirati akciju, odnosno

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \stackrel{!}{=} 0$$

Ovdje se radi o funkcionalnim derivacijama, ali tu nećemo ulaziti u detalje jer će nas odvući o teme, a na površini nema velike razlike. Ulazimo u integral s derivacijom i koristimo lančano pravilo.

$$\frac{\partial S}{\partial \phi(x)} = \int d^4 x \Big\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \delta (\nabla_\mu \phi) \Big\}$$
$$= \int d^4 x \Big\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \nabla_\mu \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \delta \phi \big) - \nabla_\mu \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \big) \delta \phi \Big\}$$

Srednji član možemo, koristeći Stokesov teorem prebaciti na rub domene integracije. Pretpostavljeno je da su početne konfiguracije polja dane u početnom i konačnom (vremenskom) trenutku (na vremenskom rubu $\delta\phi$ je 0). Ograničimo se na slučajeve kada perturbacije $\delta\phi$ nestaju i na prostornim granicama, pa možemo ispustiti taj član. Argument koji se još koristi, a daje isti rezultat, je da O nema ruba. Perturbacija $\delta\phi$ je proizvoljna pa član uz nju mora iščezavati da bi vrijedio postavljeni uvjet. Ovo vodi do Euler-Lagranžeovih jednažbi za dinamiku polja $\phi_i(x)$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi_i)} = 0 \tag{1}$$

I.2. Killingov horizont

Hiperploha Σ se definira kao $(n-1)$ dimenzionalna podmnogostrukost od n dimenzionalne mnogostrukosti $\mathscr{M}$. Ako je Killingovo vektorsko polje χ^μ svjetlosnog tipa na nekoj svjetlosnoj hiperplohi Σ, kažemo da je Σ *Killingov horizont* za χ^μ. Svjetlosna ploha ne može imati 2 linearno nezavisna tangentna vektora svjetlosnog tipa, pa će χ^μ biti normala za Σ.

Svakom Killingovom horizontu možemo pridružiti *površinsku gravitaciju.* Jer je χ^μ normalan na Σ, na Killingovom horizontu će zadovoljavati geodezičnu jednadžbu, dok će se drugdje pojaviti član s desne strane. Dodatni član dolazi zato što integralne krivulje od χ^μ možda nisu afino parametrizirane (parametar nije afina funkcija vlastitog vremena τ, eng. "proper time").

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu$$

κ se naziva površinskom gravitacijom i ona će biti konstantna na Killingovom horizontu, osim u nekim posebnim slučajevima.

$$\pounds_\chi (\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu) = -\chi^\sigma \chi^\nu \nabla_\sigma \kappa - \chi^\sigma \kappa \nabla_\sigma \chi^\nu$$

$$\begin{aligned}\chi^\sigma (\nabla_\sigma \chi^\mu)(\nabla_\mu \chi^\nu) + \chi^\sigma \chi^\mu \nabla_\sigma \nabla_\mu \chi^\nu &= \\ = -\chi^\sigma \chi^\nu \nabla_\sigma \kappa + \chi^\eta (\nabla_\eta \chi^\sigma)(\nabla_\sigma \chi^\nu)\end{aligned}$$

Prvi na lijevoj i drugi na desnoj strani se poništavaju. Koristimo $\nabla_{(\mu}\chi_{\nu)} = 0$.

$$\chi^\sigma \chi^\mu \nabla_\sigma \nabla_\nu \chi^\mu = \frac{1}{2} \chi^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\nu \chi_\mu \chi^\mu = \chi^\sigma \chi^\nu \nabla_\sigma \kappa$$

Na Killingovom horizontu Σ vrijedi $\chi_\mu \chi^\mu = 0$, pa slijedi $\pounds_\chi \kappa|_\Sigma = 0$, odnosno κ je konstanta uzduž svake Killingove orbite χ^μ na Killingovom horizontu Σ. Napravimo sada sličan postupak, ali drugačije zapisan, također na Σ.

$$\pounds_\chi (\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu) = -\chi^\sigma \chi^\nu \nabla_\sigma \kappa - \chi^\sigma \kappa \nabla_\sigma \chi^\nu = 0 + \kappa^2 \chi^\nu$$

Sada znamo da je prvi komad na desnoj strani nula. Kombinacijom $\chi_{[\mu} \nabla_\sigma \chi_{\nu]} = 0$ (jer je normala na Σ) i $\chi_{(\mu}\chi_{\nu)} = 0$ (Killingovo polje) nastavljamo izvod. Na lijevoj strani preostaje.

$$\chi^\sigma (\nabla_\sigma \chi^\mu)(\nabla_\mu \chi^\nu) = -\chi^\nu (\nabla^\sigma \chi^\mu)(\nabla_\sigma \chi_\mu) - \chi^\mu (\nabla^\sigma \chi_\mu)(\nabla^\nu \chi_\sigma)$$

Drugi član možemo zapisati kao,

$$-\chi^\mu (\nabla_\sigma \chi_\mu)(\nabla^\nu \chi^\sigma) = +\kappa \chi_\sigma (\nabla^\nu \chi^\sigma) = -\kappa^2 \chi^\nu$$

Sve skupa dobijamo relaciju za površinsku gravitaciju κ koju treba izvrijedniti na Σ.

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu) \tag{2}$$

Zapravo Killingovo vektorsko polje nije jedinstveno, odnosno možemo ga pomnožiti proizvoljnim konstantnim predfaktorom i dobiti "novo" Killingovo polje. U asimptotski ravnim prostor-vremenima, Killingov vektor vremenske translacije $\chi^\mu = \partial_t$ može se normalizirati kao $\chi_\mu \chi^\mu (r \to \infty) = -1$, ovakva norma fiksira površinsku gravitaciju svih povezanih Killingovih horizonta.

U asimptotski ravnom prostor-vremenu, koje je pritom i statično, površinska gravitacija κ je akceleracija statičnog promatrača blizu horizonta koju mjeri statični promatrač u beskonačnosti. Statični u smislu da im je 4-brzina u^μ proporcionalna Killingovom polju $\chi^\mu = \mathcal{V} u^\mu$. Iz $u^\mu u_\mu = -1$ slijedi, $\mathcal{V} = \sqrt{-\chi_\mu \chi^\mu}$. Ide od 0 na horizontu do 1 u beskonačnosti.

Očuvana energija fotona s 4-momentom p^μ je $E = -p_\mu \chi^\mu$, dok frekvencija koju mjeri promatrač s 4-brzinom u^μ je $\omega = -p_\mu u^\mu$.

$$\omega = -p_\mu \mathcal{V}^{-1} \chi^\mu$$

$$\omega = \mathcal{V}^{-1} E$$

Sačuvanost energije povlači sačuvanost umnoška $\mathcal{V}\omega$, onda za dva promatrača slijedi.

$$\omega_1 \mathcal{V}_1 = \omega_2 \mathcal{V}_2 \tag{3}$$

Zbog ovoga se $\mathcal{V}$ nekada naziva faktorom crvenog pomaka. U beskonačnosti znači $\omega_\infty = \omega_1 \mathcal{V}_1$. Možemo izraziti 4-akceleraciju preko faktora crvenog pomaka.

$$\begin{aligned} a_\mu &= u^\sigma \nabla_\sigma u_\mu = (\mathcal{V}^{-1} K^\sigma) \nabla_\sigma (\mathcal{V}^{-1} K_\mu) \\ &= \mathcal{V}^{-2} K^\sigma \nabla_\sigma K_\mu - \mathcal{V}^{-3} K^\sigma K_\mu \nabla_\sigma \mathcal{V} \end{aligned}$$

Iskoristimo Killingovu jednadžbu na prvom članu, a zatim $K_\sigma K^\sigma = \mathcal{V}^2$

$$\mathcal{V}^{-2} K^\sigma \nabla_\sigma K_\mu = -\frac{1}{2\mathcal{V}^2} \nabla_\mu (-V^2) = \nabla_\mu \ln \mathcal{V}$$

Za drugi član napravimo obrnut postupak.

$$\frac{K_\mu}{\mathcal{V}^3} K^\sigma \nabla_\sigma \mathcal{V} = \frac{K_\mu}{2\mathcal{V}^4} K^\sigma \nabla_\sigma \mathcal{V}^2 = -\frac{K_\mu}{2\mathcal{V}^4} K^\sigma \nabla_\sigma K^\alpha K_\alpha$$

Preuredimo li izraz vidimo da,

$$K^\sigma \nabla_\sigma K^\alpha K_\alpha = 2 K^\sigma K^\alpha \nabla_\sigma K_\alpha,$$

što je sigurno nula kao kontrakcija simetričnog $K^\sigma K^\alpha$ i antisimetričnog $\nabla_\sigma K_\alpha$. Dobili smo akceleraciju izraženu preko faktora crvenog pomaka.

$$a^\mu = \nabla^\mu \ln \mathcal{V}$$

$$a = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \mathcal{V}^{-1} \sqrt{\nabla_\mu \mathcal{V} \nabla^\mu \mathcal{V}} \tag{4}$$

Na Killingovom horizontu ovo divergira, odnosno potrebna je beskonačna akceleracija da se tijelo zadrži na statičnoj putanji. Tvrdimo da,

$$\kappa = a\mathcal{V} = \sqrt{\nabla_\mu \mathcal{V} \nabla^\mu \mathcal{V}}\ ,$$

izvrijednjeno na Killingovom horizontu Σ.

I.3. Kauzalnost

Informacije putuju sporije od c pa se gibaju samo po krivuljama svjetlosnog ili vremenskog tipa (ne prostornog), nazivamo ih *kauzalnim* krivuljama. Specifično vremenske krivulje nazivamo kronološkim. Tip krivulje $x^\mu(\lambda)$ se određuje prema tipu tangenti $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ duž nje (vremenski za $u^\mu u_\mu < 0$).

Za kauzalnu krivulju možemo reći da je usmjerena u budućnost ili prošlost nakon što pronađemo ne nestajuće (Killingovo) vektorsko polje u odnosu na kojega definiramo smjer vremena (za Lorentzovu metriku to je ∂_t). [Vremenska orijentabilnost je odvojen pojam od orijentabilnosti koju zadaje volumna forma $\boldsymbol{\epsilon}$.]

Neka je $x^\mu(t)$ kauzalna krivulja usmjerena u budućnost parametrizirana s t. Za točku $p \in \mathscr{M}$ kažemo da je buduća krajnja točka za x^η ako za svaku okolinu O točke p, postoji t_0 tako da $x^\eta(t) \in O, \forall t > t_0$ (Slikovito krivulja se zadrži na okolini neke točke pa možemo reći da tu završava). Primjetimo da ne mora nužno postojati t za koji $x^\mu(t) = p$, te zbog Hausdorffovog svojstva slijedi da može biti najviše jedna ovakva točka. Ako za krivulju ne postoji ovakav p onda je nazivamo neprodužįvom krivuljom usmjernom u budućnost. Analogno se definira i suprotan smjer. $x^\mu(t)$ se uvijek može proširiti kao kontinuirana kauzalna krivulja spajanjem na p.

Za podskup $\Sigma \subset \mathscr{M}$ na mnogostrukosti možemo definirati kauzalnu budućnost $J^+(\Sigma)$ i kauzalnu prošlost $J^-(\Sigma)$.

$$J^\pm(\Sigma) \equiv \{x \in \mathscr{M} | \exists \gamma : [a,b] \to \mathscr{M}\}$$

Gdje je γ kauzalna krivulja usmjerena prema budućnosti odnosno prošlosti, koja ide od neke točke $y \in \Sigma$ do x. Na sličan način definiramo kronološku budućnost/prošlost $I^\pm(\Sigma)$, samo što u ovom slučaju je γ kronološka krivulja. Za Σ ćemo reći da je akronalni skup ako ne postoje dvije točke u Σ koje su povezane s vremenskom krivuljom, i.e. $\Sigma \cap I^+(S) = \varnothing$. Za zatvoreni akronalni skup Σ definiramo buduću domenu ovisnosti (eng. "Cauchy development").

$$D^+(\Sigma) \equiv \{p \in \mathscr{M} | \forall \gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{M},\ \exists \lambda \in \mathbb{R};\ \gamma(\lambda) \in \Sigma\}$$

Gdje su γ neprodužive kauzalne krivulje usmjerene u prošlost koje prolaze kroz $p \in \mathscr{M}$ i presjecaju Σ. Analogno se definira i prošlost $D^-(\Sigma)$. Ovo znači da ako imamo odgovarajuće rubne uvjete na S možemo predvidjeti što se događa na $D^+(\Sigma)$, i vidjeti u prošlost što se događa na $D^-(\Sigma)$. Definiramo punu domenu ovisnosti Σ kao $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$ (dio mnogostrukosti kauzalno povezan sa podmnogostrukosti Σ). Rubovi ovih skupova $\partial D^\pm(\Sigma) = H^\pm(\Sigma)$ nazivaju se budućim/prošlim Cauchyjevim horizontima. Gdje je rub definiran kao skup točaka $p \in \Sigma$ takvih da svaka okolina O od p sadrži točku $q \in I^+(\Sigma)$, točku $r \in I^-(\Sigma)$ i vremensku (kronološku) krivulju koja spaja q i r bez da presijeca Σ.

Zatvorenu akronalnu plohu Σ nazivamo *Cauchyjevom plohom* ako $D(\Sigma) = \mathscr{M}$, svaka kauzalna krivulja siječe ovakvu plohu točno jedan put. Odmah slijedi $\partial\Sigma = \varnothing$ da je rub Cauchy plohe prazan skup. Slijedi da je svaka Cauchy površina 3-dimenzionalna smještena C^0 podmnogostrukost od $\mathscr{M}$ [12, 8.3.1].

Pošto je akronalan, o Σ možemo razmišljati kao o jednom trenutku u vremenu. Zapravo u Minkowskom prostor-vremenu plohe određene s uvjetom t =konst. su upravo Cauchyjeve plohe. Prostor koji ima barem jednu Cauchyjevu plohu naziva se *globalno hiperboličkim*. Upravo u ovakvim prostorima se želimo baviti fizikom jer ako poznajemo potrebne rubne uvjete na Σ poznajemo cijelu prošlost i budućnost sustava. Zapravo globalno hiperboličke mnogostrukosti su popunjene listovima Cauchyjevih ploha (eng. "foliated"), $\mathscr{M}$ je difeomorfna sa produktom $\Sigma \times \mathbb{R}$. Bernal i Sanchez su pokazali da svaka globalno hiperbolička mnogostrukost ima glatko smještenu trodimenzionalnu Cauchyjevu površinu, te da su dvije takve površine difeomorfne [2].

II. SLOBODNO SKALARNO POLJE

Započinjemo sa realnim skalarnim poljem $\phi(x)$ na $(n+1)$ dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathscr{M}$ s metrikom u obliku

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -\lambda^2(x)dt^2 + \gamma_{ab}dx^a dx^b \qquad (5)$$

γ_{ab} je inducirana metrika na hiperpovršini konstantne koordinate t. Potencijal u lagranžianu je onaj jednostavnog harmoničkog oscilatora $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, gdje je m realna konstanta. Skalarni lagranžian $\hat{\mathcal{L}}$, povezan s gustoćom preko $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}$ u ovom slučaju glasi,

$$\hat{\mathcal{L}}(\phi, \nabla_\mu\phi) = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)(\nabla^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \xi R\phi^2 \qquad (6)$$

R je skalar zakrivljenosti. Radi jednostavnosti pretpostavljamo minimalnu povezanost ($\xi = 0$) sa zakrivljenosti. Klein-Gordon jednadžba dobije se kao Euler-Langrangeova jednadžba za gore navedeni lagranžian. Prema jednadžbi (1) računamo članove.

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\phi} = -m^2\phi$$

U drugom članu za jednadžbu koristimo da je kovarijantna derivacija metrike nula i drugačije zapisujemo "kinetički" član u $\hat{\mathcal{L}}$.

$$-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)(\nabla^\mu\phi) \to -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_\rho\phi)(\nabla_\sigma\phi)$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\nabla_\mu\phi)} &= -\frac{1}{2}\nabla_\mu[g^{\rho\sigma}\delta^\mu_\rho\nabla_\sigma\phi + g^{\rho\sigma}\delta^\mu_\sigma\nabla_\rho\phi] \\ &= -\frac{1}{2}\nabla_\mu[\nabla^\mu\phi + \nabla^\mu\phi] = -\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = -\Box\phi\end{aligned}$$

Gdje je $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ kovarijantni D'Alembertian. Dobijamo Klein-Gordon jednadžbu.

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\phi} - \nabla_\mu\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\nabla_\mu\phi)} = 0 \ \to\ \boxed{(\Box - m^2)\phi = 0} \qquad (7)$$

Došli smo do potrebne jednadžbe, ali smo pretpostavili oblik potencijala, pa možda nije baš uvjerljivo.

II.0.1. Klein-Gordonova jednadža iz relativističke generalizacije Schrodingerove jednadžbe

U nerelativističkoj kvantnoj mehanici Schrodingerova jednadžba za slobodnu česticu došla je iz identifikacije Hamiltonijana i impulsa sa operatorima (kanonska kvantizacija).

$$H = \frac{p^2}{2m} \to i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi$$

Možemo napraviti sličnu identifikaciju nakon relativističke generalizacije Hamiltonijana.

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} \to i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi$$

Odmah zaključujemo da je ovo poprilično nezgodna jednadžba, pa ćemo kvadrirati da bi se riješili korijena. Takav postupak daje puno bolji oblik jednadžbe.

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\psi \to \partial_\mu \partial^\mu \psi = m^2\psi$$

Ovdje smo zapravo dobili jednadžbu (7) u prostorvremenu Minkowskog. Ali to se i moglo očekivati pošto smo generalizirali samo Hamiltonian, bez rasprave o prostoru (odnosno prostorvremenu na kojem se sve odvija) koji je u kvantnoj mehanici tro-dimenzionalan i ravan, opremljen Euklidskom metrikom i vremenom kao parametrom kojeg proglasimo koordinatom. Identificiramo li $\partial_\mu \partial^\mu$ s D'Alembertianom možemo zapisati koordinatno općenitu formu, jednaku onoj pod (7).

$$(\Box - m^2)\psi = 0$$

Sada smo dobili jednadžbu s kojom se lakše nositi, ali nam to uzrokuje neke probleme. Pošto smo kvadrirali, negativne energije postaju moguća rješenja za problem slobodne čestice. Ova rješenja se u kvantnoj teoriji polja interpretiraju kao antičestice, a rješenja pozitivne energije kao čestice. Prva ćemo nazivati rješenjima negativne frekvencije f_k^*, a druga rješenjima pozitivne frekvencije f_k. Kasnije ćemo malo bolje vidjeti zašto je to tako.

Da bi Klein-Gordonova jednadžba sa početnim uvjetima bila dobro definirana zadaća ograničavamo se na globalno hiperbolička prostorvremena. Neka je n^μ jedinična normala na Cauchy plohu Σ. Onda za bilo koji uređen par (f_0, f_1) glatkih funkcija na Σ uz rubne uvjete

$$\phi|_\Sigma = f_0 \qquad n^\mu \nabla_\mu \phi|_\Sigma = f_1$$

Rješenja imaju kauzalnu ovisnost o rubnim uvjetima u smislu da za točku $x \in J^+(\Sigma)$ vrijedi da se $\phi(x)$ neće promijeniti ako se f_0, f_1 promijene izvan $J^-(x) \cap \Sigma$. Što ima smisla jer ako do točke koja nas zanima x ne možemo povući kauzalnu krivulju od točke u prošlosti y, onda y ne može imati fizikalan utjecaj na n pa tako ni na polje u x. Slično ako je $x \in J^-(\Sigma)$ vrijedi da se $\phi(x)$ neće promijeniti ako se f_0, f_1 promijene izvan $J^+(x) \cap \Sigma$.

Za dva rješenja jednadžbe $f_i(x)$, $f_j(x)$ definira se Klein-Gordon struja.

$$\mathcal{J}^\mu_{(ij)}(x) \equiv f_i^*(x)\nabla^\mu f_j(x) - f_j(x)\nabla^\mu f_i^*(x) \tag{8}$$

Primjetimo bitno svojstvo ovako definirane struje koristeći K-G jednadžbu i $\nabla_\mu f \nabla^\mu g = \nabla^\mu f \nabla_\mu g$.

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \mathcal{J}^\mu_{(ij)} =& \nabla_\mu f_i^* \nabla^\mu f_j + f_i^* \nabla_\mu \nabla^\mu f_j \\ &- \nabla_\mu f_j \nabla^\mu f_i^* - f_j \nabla_\mu \nabla^\mu f_i^* \\ =& f_i^* m^2 f_j - f_j m^2 f_i^* = 0\end{aligned}$$

Dakle za struju vrijedi $\nabla_\mu \mathcal{J}^\mu_{(ij)} = 0$, odnosno da je očuvana (ovo je analogno jednadžbi kontinuiteta). Preoblikujmo ovaj rezultat nakon što dokažemo korisnu relaciju za 1-formu α na $n+1$ dimenzionalnoj mnogostrukosti.

$$\begin{aligned}*d*\alpha =& \frac{1}{(n+1)!}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_n}((n+1)\nabla_{[\mu_1}\epsilon_{\sigma\mu_2\ldots\mu_{n+1}]}\alpha^\sigma) \\ =& \frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_n}\epsilon_{\sigma[\mu_2\ldots\mu_{n+1}}\nabla_{\mu_1]}\alpha^\sigma \\ =& \frac{1}{n!}n!(-1)^s \delta^{\mu_1}_\sigma \nabla_{\mu_1}\alpha^\sigma \\ =& (-1)^s \nabla_\mu \alpha^\mu\end{aligned}$$

s je signatura metrike. Znači da uvjet $\nabla_\mu \mathcal{J}^\mu_{(ij)} = 0$ možemo zamijeniti s $*d*\mathcal{J} = 0 \to d*\mathcal{J} = 0$ (primjetimo da u prvoj jednakosti je 0 broj, dok je u drugoj 0 zapravo $(n+1)$ forma pa nju možemo integrirati po nekom skupu na mnogostrukosti). Ovdje je $\mathcal{J}$ 1-forma na $\mathscr{M}$ s komponentama $\mathcal{J}_\mu = g_{\mu\nu}\mathcal{J}^\nu$. Zamislimo sada dio prostor vremena $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ omeđen sa dvije prostorne hiperplohe Σ_1 i Σ_2, te izgurajmo bočne dijelove u beskonačnost gdje pretpostavljamo da se struja može zanemariti (iščezava dovoljno brzo). Koristeći Stokes teorem,

$$\int_\Omega d(*\mathcal{J}) = 0 \to \int_{\partial\Omega} *\mathcal{J} = 0$$

Primjetimo

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

plus još onaj rubni dio koji zanemarujemo. Pripazimo na orijentaciju ploha, tako da će jedan rubni integral doći s minusom ispred (Sada nije bitno koji ali inače za plohe vremenskog tipa normala treba biti prema unutra, a vani za prostorne).

$$0 = \int_{\Sigma_1} *\mathcal{J} - \int_{\Sigma_2} *\mathcal{J}$$

$$q(\Sigma_i) \propto \int_{\Sigma_i} *\mathcal{J} \ \to \ q(\Sigma_1) = q(\Sigma_2)$$

Vidimo da je vrijednost veličine q neovisna o izboru hiperplohe po kojoj integriramo, kao nekakav očuvani naboj. Ovo nam može dobro poslužiti za definiciju skalarnog produkta na prostoru rješenja Klein-Gordonove jednadžbe od kojeg bi bilo poželjno da je očuvan. Neka je Σ n-dimenzionalna, sada Cauchy ploha sa normalom n^μ i induciranom metrikom γ_{ij} s njenom determinantom γ. Za dva rješenja $f_i,\ f_j$ definiramo Klein-Gordon skalarni produkt.

$$(f_i, f_j)_{KG} =: \langle f_i, f_j \rangle \equiv i\int_\Sigma *\mathcal{J}_{(ij)} \tag{9}$$

Kao konstantnu proporcionalnosti se stavlja imaginarna jedinica i tako da $\langle f_i, f_j\rangle^* = \langle f_j, f_i\rangle$ (za struju vrijedi $\mathcal{J}^*_{(ij)} = -\mathcal{J}_{(ji)}$). Inače se dodaju još neke konstante, ali nećemo o tome sada. Ovako definiran skalarni produkt je i kvaziasocijativan, u smislu da vrijedi $\langle f_i, af_j\rangle = a\langle f_i, f_j\rangle$ za $a \in \mathbb{C}$. U prvom argumentu je antilinearan, a u drugom linearan, pa je i distributivan (u oba argumenta). Primjetimo još jedno svojstvo produkta,

$$\langle f_i^*, f_j^*\rangle = -\langle f_i, f_j\rangle^* = -\langle f_j, f_i\rangle \tag{10}$$

Svaku n-formu ω na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti možemo zapisati kao umnožak funkcije $\chi(x)$ i Levi-Civita tenzora $\omega = \chi(x)\epsilon = *\chi$. Primjenimo Hodge dual s obe strane, slijedi $\chi = (-1)^s * \omega$. U gornjem integralu $\omega = *\mathcal{J}$ je upravo n-forma ograničena na n-dimenzionalnu Σ. Da ne bi bilo zabune neka $*'$ bude Hodge dual na Σ, s induciranim volumnim elementom $\hat{\epsilon}$ i induciranom metrikom γ. Djelujemo s ovim operatorom na $*\mathcal{J}$ da dobijemo skalar (poput χ).

$$\begin{aligned} *'(*\mathcal{J}) &= \frac{1}{n!}\hat{\epsilon}^{\mu_1\ldots\mu_n}(*\mathcal{J})_{\mu_1\ldots\mu_n} \\ &= \frac{1}{n!}\hat{\epsilon}^{\mu_1\ldots\mu_n}\epsilon_{\sigma\mu_1\ldots\mu_n}\mathcal{J}^\sigma \\ &= \frac{1}{n!}n_\lambda\epsilon^{\lambda\mu_1\ldots\mu_n}\epsilon_{\sigma\mu_1\ldots\mu_n}\mathcal{J}^\sigma = n_\sigma\mathcal{J}^\sigma \end{aligned}$$

Slijedi da $*\mathcal{J} = (-1)^{s'} n_\mu \mathcal{J}^\mu\hat{\epsilon}$, koristeći $\hat{\epsilon} = \sqrt{|\gamma|}dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ u koordinatnom sustavu $\{y_i\}$ na Σ možemo preoblikovati izraz za skalarni produkt (9).

$$\langle f_i, f_j\rangle = i\int_\Sigma n_\mu \mathcal{J}^\mu_{(ij)}\sqrt{\gamma}\ d^n y \tag{11}$$

U analogiji s harmoničkim oscilatorom polje ϕ odgovara koordinati x, pa uvedimo položaju kanonski konjugirani moment. Ovdje deriviramo Lagrange gustoću $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}}$.

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_0\phi} = \sqrt{-g}\lambda^{-2}\nabla_0\phi(x) = \lambda^{-1}\sqrt{G}\nabla_0\phi(x) \tag{12}$$

Pretpostavimo do kraja ovog paragrafa da smo u Minkowski prostoru s plohom konstantog t kao Cauchy plohom s normalom $n^\mu = \partial_t$, pa skalarni produkt glasi

$$\langle f_i, f_j\rangle = i\int_\Sigma d^n x(f_i^*\partial_t f_j - f_j\partial_t f_i^*) \tag{13}$$

Za proizvoljna kompleksna rješenja $f_i(x)$ i $f_j(x)$,

$$\begin{aligned} &[\langle f_i,\hat{\phi}\rangle,\ \langle\hat{\phi}, f_j\rangle] = \\ &= -\int d^n x\int d^n x'[(f_i^*\hat{\pi} - \hat{\phi}\partial_t f_i^*),(\hat{\phi}'\partial_t f_j' - f_j'\hat{\pi}')] \\ &= -\int d^n x\int d^n x'\Big(f_i^*\partial_t f_j[\hat{\pi},\hat{\phi}'] - f_i^* f_j'[\hat{\pi},\hat{\pi}'] - \\ &\quad -\partial_t f_i^*\partial_t f_j'[\hat{\phi},\hat{\phi}'] + f_j'\partial_t f_i^*[\hat{\phi},\hat{\pi}']\Big) \\ &= -\int d^n x\int d^n x'\delta^n(x-x')\Big(f_i^*\partial_t f_j'(-i) - 0 + f_j'\partial_t f_i^* i\Big) \\ &= i\int (f_i^*\partial_t f_j - f_j\partial_t f_i^*)\ d^n x = \langle f_i, f_j\rangle \end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi.

$$[\langle f_i,\hat{\phi}\rangle,\ \langle\hat{\phi}, f_j\rangle] = \langle f_i, f_j\rangle \tag{14}$$

Slično se može pokazati i u općenitijim slučajevima.

II.1. Kvantizacija

Sustav ćemo kvantizirati kanonski. Cilj će nam biti općenita rješenja Klein-Gordonove jednadžbe razviti u modove, te onda na svaki od njih primjeniti kvantnu mehaniku jednostavnog harmoničkog oscilatora. Klasična polja ϕ, π promičemo u operatore $\hat{\phi}$ i $\hat{\pi}$ te namećemo komutacijske relacije između njih analogne onima za položaj i impuls.

$$[\phi(t,\boldsymbol{x}),\ \phi(t,\boldsymbol{x}')] = [\pi(t,\boldsymbol{x}),\ \pi(t,\boldsymbol{x}')] = 0 \tag{15}$$

$$[\phi(t,\boldsymbol{x}),\ \pi(t,\boldsymbol{x}')] = i\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{16}$$

Gdje je δ definirana bez $\sqrt{|g|}$ faktora.

$$\int_\Sigma f(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^n x' = f(\boldsymbol{x})$$

Pretpostavljamo da postoji potpun ortonormiran skup rješenja Klein-Gordonove jednadžbe $\{f_i,\ f_i^*\}$.

$$\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij} \quad \langle f_i^*, f_j^*\rangle = -\delta_{ij}$$

Zbog jednostavnosti uzimamo da su indeksi $\{i\}$ diskretni, iako to nije općenito istina ali generalizacija je očita. Ovaj izbor potpunog ortonormiranog skupa rješenja, u općenitom slučaju, će biti daleko od jedinstvenog što će stvarati neke probleme u interpretaciji teorije.

Razvijamo operator $\hat{\phi}(x)$ u red, gdje su modovi $\{f_i, f_i^*\}$ "koeficijenti" za neke operatore $\hat{a}_i,\ \hat{a}_i^\dagger$.

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i\Big(\hat{a}_i f_i(x) + \hat{a}_i^\dagger f_i^*(x)\Big) \tag{17}$$

Koristeći ortonormiranost baze imamo

$$\hat{a}_i = \langle f_i,\hat{\phi}\rangle \qquad \hat{a}_i^\dagger = \langle\hat{\phi}, f_i\rangle\ ,$$

a koristeći izraz (14) i ortonormiranost skupa $\{f_i, f_i^*\}$ možemo izvesti komutacijske relacije za operatore $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$.

$$[\hat{a}_i,\ \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger,\ \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_i,\ \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{18}$$

Operatori $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$ se nazivaju *operatori poništenja i stvaranja* (opet analogija s jednostavnim kvantim harmoničkim oscilatorom).

Vakuumsko (osnovno) stanje definirano je kao svojstveno stanje (svih) operatora poništenja sa svojstvenom vrijednosti nula, $\hat{a}_i|0\rangle = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$. Operator broja za određeni mod $'i'$ definira se kao $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$. Svojstvena stanja $|n\rangle$ operatora broja (i energije) razapinju cijeli Hilbertov prostor, nazivamo ih Fockovim stanjima (čine Fockovu bazu). Repetitivnim djelovanjem operatora stvaranja na osnovno stanje $|0\rangle$ možemo konstruirati sva svojstvena stanja $|n\rangle$, n označava broj "pobuda" svaka od kojih nosi energiju ω, u kvantnoj teoriji polja pobude u Fockovoj bazi interpretiramo kao čestice.

$$|n_\omega\rangle = \frac{\hat{a}_\omega^\dagger}{\sqrt{n}}|(n-1)_\omega\rangle = ... = \frac{(\hat{a}_\omega^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0_\omega\rangle \tag{19}$$

Stavljen je indeks ω da bi naznačili da se radi o modu jedne frekvencije, i za svaku vrijedi ova relacija. Prema ovakvoj definiciji operatora broja može se vidjeti da će definicija vakuumskog stanja ovisiti o izboru potpunog skupa $\{f_i, f_i^*\}$, jer će o njima ovisiti interpretacija operatora poništenja i stvaranja, a s time i interpretacija broja pobuđenja u polju. Znači da s ovakvim operatorom ne možemo dobro definirati koncept čestica jer rezultat koji nam daje detektor čestica ne bi trebao ovisiti o bazi koju koristimo za razvoj rješenja.

II.2. Bogoljubovljevi koeficijenti

Sad pretpostavimo da imamo dva skupa takvih ortonormiranih rješenja Klein-Gordonove jednadžbe $\{f_i\}$ i $\{g_I\}$. Pretpostavljamo i potpunost pa jedne možemo razviti u red po drugima i obrnuto.

$$g_I = \sum_i \left(\alpha_{Ii} f_i + \beta_{Ii} f_i^*\right) \tag{20}$$

$$g_I^* = \sum_i \left(\alpha_{Ii}^* f_i^* + \beta_{Ii}^* f_i\right) \tag{21}$$

Skalarnim produktom izvlačimo koeficijente iz razvoja, pazeći pritom na kvaziasocijativnost produkta i koristeći (10).

$$\alpha_{Ii} = \langle f_i, g_I\rangle = \langle g_I, f_i\rangle^*$$

$$\beta_{Ii} = -\langle f_i^*, g_I\rangle = \langle g_I^*, f_i\rangle$$

Sada razvijamo funkcije f_i u bazi g_I (ima minus jer su g_I^* normalizirane na minus deltu),

$$f_i = \sum_I \left(\langle g_I, f_i\rangle g_I - \langle g_I^*, f_i\rangle g_I^*\right)$$

Vidimo da već znamo koji su koeficijenti za ovu ekspanziju jer smo ih koristili 2 reda prije.

$$f_i = \sum_I \left(\alpha_{Ii}^* g_I - \beta_{Ii} g_I^*\right) \tag{22}$$

$$f_i^* = \sum_I \left(\alpha_{Ii} g_I^* - \beta_{Ii}^* g_I\right) \tag{23}$$

Polje $\hat{\phi}(x)$ možemo jednako dobro razviti u obe baze

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i \left(\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*\right) = \sum_I \left(\hat{b}_I g_I + \hat{b}_I^\dagger g_I^*\right)$$

Sada možemo iskoristiti razvoje funkcija baze da izrazimo operatore poništenja i stvaranja u jednoj bazi kao sumu operatora iz druge baze i obrnuto. Sada se vidi zašto se operatori broja u dvije baze neće slagati oko sadržaja pobudenja (odnosno čestica). Zato što će se operatori poništenja i stvaranja "izmiješati" između dvije baze. Raspisujemo oba razvoja polja.

$$\sum_I \left(\hat{b}_I g_I + \hat{b}_I^\dagger g_I^*\right) =$$
$$\sum_{Ii} \left\{b_I(\alpha_{Ii} f_i + \beta_{Ii} f_i^*) + b_I^\dagger(\alpha_{Ii}^* f_i^* + \beta_{Ii}^* f_i)\right\} =$$
$$\sum_{iI} \left\{f_i(\alpha_{Ii} b_I + \beta_{Ii}^* b_I^\dagger) + f_i^*(\alpha_{Ii}^* b_I^\dagger + \beta_{Ii} b_I)\right\}$$

$$\sum_i \left(\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*\right)$$
$$= \sum_{iI} \left\{a_i(\alpha_{Ii}^* g_I - \beta_{Ii} g_I^*) + a_i^\dagger(\alpha_{Ii} g_I^* - \beta_{Ii}^* g_I)\right\} =$$
$$= \sum_{Ii} \left\{g_I(\alpha_{Ii}^* a_i - \beta_{Ii}^* a_i^\dagger) + g_I^*(\alpha_{Ii} a_i^\dagger - \beta_{Ii} a_i)\right\}$$

Izjednačavanjem članova uz odgovarajuće funkcije dobijamo relacije transformacije među operatorima poništenja i stvaranja.

$$\hat{a}_i = \sum_I \left(\alpha_{Ii}\hat{b}_I + \beta_{Ii}^*\hat{b}_I^\dagger\right) \tag{24}$$

$$\hat{b}_I = \sum_i \left(\alpha_{Ii}^*\hat{a}_i - \beta_{Ii}^*\hat{a}_i^\dagger\right) \tag{25}$$

Transformacija koja miješa operatore poništenja i stvaranja u dvije baze naziva se *Bogoljubovljeva transformacija*, a koeficijenti α_{Ii} i β_{Ii} se nazivaju *Bogoljubovljevi koeficijenti.* Sada jasno vidimo kako dolazi do "miješanja" operatora poništenja i stvaranja, te odmah slijedi zaključak da općenito $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ i $\hat{N}_I = \hat{b}_I^\dagger\hat{b}_I$ neće opisivati jednak sadržaj čestica u polju. Pa zaključujemo da će se vakuumska stanja $|0_a\rangle$ i $|0_b\rangle$ također razlikovati. Ipak postoje specijalni slučajevi u kojima će se baze slagati u "mišljenju" koje je stanje vakuumsko. Već možemo pretpostaviti da će to biti slučajevi u kojima razvoj operatora poništenja u jednoj bazi možemo napraviti samo pomoću operatora poništenja druge baze. Pogledajmo to eksplicitno. Nalazimo očekivanu vrijednost operatora broja $\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ u stanju $|0_I\rangle$ (vakuumsko stanje u drugoj bazi) koristeći razvoje (24,25), obrnuti račun je analogan. Pogledajmo očekivanu

$$\langle 0_I|N_i|0_I\rangle = \langle 0_I|\hat{a}_i^\dagger a_i|0_I\rangle$$
$$= \sum_{IJ}\langle 0_I|\left(\alpha_{Ii}^*\hat{b}_I^\dagger + \beta_{Ii}\hat{b}_I\right)\left(\alpha_{Ji}\hat{b}_J + \beta_{Ji}^*\hat{b}_J^\dagger\right)|0_I\rangle$$
$$= \sum_{IJ}(\beta_{Ii})(\beta_{Ji}^*)\langle 0_I|b_I b_J^\dagger|0_I\rangle$$
$$= \sum_{IJ}(\beta_{Ii})(\beta_{Ji}^*)\delta_{IJ} = \sum_I |\beta_{Ii}|^2$$

Na sličan način izračunamo obrnuti slučaj.

$$\langle 0_i|N_I|0_i\rangle = \sum_i |\beta_{Ii}|^2$$

Kao što smo očekivali zahtjev da se vakuumska stanja poklapaju traži da Bogoljubovljevi koeficijenti β_{Ii} budu jednaki nuli. Ovo se prevodi u činjenicu da modove f_i možemo razviti preko samo modova g_I, odnosno *interpretacije vakuuma će se slagati ako modove pozitivne frekvencije u jednoj bazi možemo razviti preko samo modova pozitivne frekvencije u drugoj bazi.* Ovo će biti jedna od glavnih činjenica teorije koja će se koristiti u izvodu konačnog rezultata. U ovom slučaju slaganje ne mora vrijediti za ostala stanja, jer i dalje imamo linearnu kombinaciju operatora poništenja (stvaranja) u jednoj bazi kao operator poništenja (stvaranja) u drugoj, pa će se promijeniti broj čestica u pojedinim modovima (spektar će se razlikovati). Nas će u ovom slučaju ponajviše zanimati vakuumsko stanje pa nije toliko bitno.

II.3. Izbor baze

Kako onda uopće da izaberemo bazu prema kojoj ćemo interpretirati sadržaj polja ako su sve baze jednako dobre? Postoji "prirodni" izbor vakuumskog stanja ako je prostorvrijeme statično uz $g_{0\mu} = 0$. Odnosno ako su u našoj pretpostavljenoj metrici (5) funckija $\lambda(x)$ i inducirana metrika γ_{ab} neovisni o koordinati t. U ovakvoj metrici za jedan od Christoffelovih simbola vrijedi sljedeće.

$$\Gamma^{\sigma}_{00} = \frac{1}{2} g^{\sigma\beta}(\partial_0 g_{0\beta} + \partial_0 g_{0\beta} - \partial_\beta g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\sigma\beta}\partial_\beta g_{00}$$

Za d'Alembertian imamo,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi \\ &= g^{00}\partial_0^2\phi + g^{ij}\partial_i\partial_j\phi - g^{00}\Gamma^{\sigma}_{00}\partial_\sigma\phi - g^{ij}\Gamma^{\sigma}_{ij}\phi \\ &= -\lambda^{-2}\big(\partial_t^2 - \frac{1}{2} g^{\sigma\beta}(\partial_\beta\lambda^2)\partial_\sigma\big)\phi + \gamma^{ij}(\partial_i\partial_j - \Gamma^{\sigma}_{ij}\partial_\sigma)\phi \\ &= -\lambda^{-2}\partial_t^2\phi + \gamma^{ij}\big(\partial_i\partial_j + (\partial_j \ln\lambda)\partial_i - \Gamma^{\sigma}_{ij}\partial_\sigma\big)\phi \end{aligned}$$

U takvom slučaju Klein-Gordon jednadžba postaje,

$$\partial_t^2\phi = -\lambda^2\Big\{\gamma^{ij}\big(\partial_i\partial_j + (\partial_j \ln\lambda)\partial_i - \Gamma^{\sigma}_{ij}\partial_\sigma\big) - m^2\Big\}\phi \quad (26)$$

Poanta je da se dio rješenja ovisan o t može separirati od ostatka tako da rješenja možemo pisati kao umnožak.

$$f_\omega(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} f_\omega(\mathbf{x})$$

Ove modove se definira kao *modove pozitivne frekvencije*,

$$\partial_t f_\omega(t, \mathbf{x}) = -i\omega f_\omega(t, \mathbf{x}) \quad , \ \omega > 0$$

Konjugirani parovi su *modovi negativne frekvencije* f^*_ω takvi da,

$$\partial_t f^*_\omega(t, \mathbf{x}) = i\omega f_\omega(t, \mathbf{x}) \quad , \ \omega > 0$$

Primjetimo,

$$\hat{H} f_\omega = i\partial_t f_\omega = i(-i\omega) f_\omega = \omega f^*_\omega$$

$$\hat{H} f^*_\omega = i\partial_t f^*_\omega = i(i\omega) f^*_\omega = -\omega f^*_\omega$$

, da ovako definirana rješenja pozitivne frekvencije odgovaraju rješenjima pozitivne energije i analogno vrijedi za negativna rješenja. Znači da bi definirali modove pozitivne/negativne energije (smisao čestica i antičestica) potreban nam je nekakav smjer vremena u odnosu na koji to možemo napraviti. Pa kako odrediti taj smisao za opažače u pokretu na mnogostrukosti?

Ako se detektor kreće po krivulji $x^\mu(\tau)$, gdje smo za parametar uzeli vlastito vrijeme τ. Detektor vrijeme mjeri prema τ pa bi prema tom vremenu mogli definirati pozitivnu i negativnu frekvenciju rješenja.

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\nabla_\mu f_i = -i\omega f_i$$

U općenitom slučaju neće biti moguće naći ovakva rješenja $\{f_i\}$ na cijelom prostoru. To će biti moguće u specifičnom slučaju kada je prostorvrijeme statično, globalno hiperbolično i kada ima Killingovo vektorsko polje K^μ vremenskog tipa, normalno na Cauchyjevu hiperplohu. Pošto je ∂_t Killingov vektor za metriku (5) koristili smo ga na početku odjeljka. Ovu definiciju pozitivnih modova možemo prebaciti u koordinatno neovisnu formu pomoću Liejeve derivacije (potrebna nam je derivacija polja uzduž vektorskog polja K^μ).

$$\pounds_K f_\omega = -i\omega f_\omega \quad , \ \omega > 0 \quad (27)$$

Analogno modovi negativne frekvencije će biti oni za koje vrijedi,

$$\pounds_K f^*_\omega = i\omega f^*_\omega \quad , \ \omega > 0 \quad (28)$$

Ako putanja promatrača (detektora) prati orbitu Killingovog vektorskog polja odnosno ako je putanja integralna krivulja Killingovog polja ($u^\mu = dx^\mu/d\tau$ je proporcionalan s K^μ), onda će vlastito vrijeme odgovarati Killingovom vremenu i modovi definirani kao pozitivni u odnosu na Killingovo polje će služiti kao baza (za Fockov prostor) i za takvog promatrača. Ovo će nas dovesti do dobro definiranog vakuumskog stanja koje čuva simetriju vremenske translacije, nazivamo ga *statičnim vakuumom.*

I dalje u općenitom zakrivljenom prostorvremenu bez izometrija ne možemo očekivati da ćemo imati prirodnu (preferiranu) interpetaciju vakuumskog stanja, i štoviše pojam čestica i antičestica.

II.4. Minkowski baza

Lorentzova metrika $\eta_{\mu\nu}$.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Klein-Gordonova jednažba glasi (d'Alembertian se svodi na $\Box = -\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2$),

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (29)$$

Prepoznajemo ovo kao valnu jednadžbu i kao iz puške uzimamo ravne valove $f_k(t, x) \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$ kao bazu za rješenja, uz $\omega = |k| = k$. Nakon toga ih normaliziramo, uz plohe konstantnog vremena kao plohe integracije ($n^\mu = \partial_t,\ \gamma = 1$). Skalarni produkt je onaj definiran pod (13). Uvodimo valni 4-vektor $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, tako da $f_k(t,x) \sim e^{ik_\mu x^\mu}$.

$$\langle f_k, f_{k'}\rangle = i\int d^3r (f_k^* \partial_t f_{k'} - f_{k'}\partial_t f_k^*)$$

$$= i\int d^3r \{e^{-ik_\mu x^\mu}(-ik')e^{ik'_\mu x^\mu} - e^{ik'_\mu x^\mu}(ik)e^{-ik_\mu x^\mu}\}$$

$$= e^{it(\omega-\omega')}(\omega+\omega')\int d^3r\ e^{i\mathbf{r}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})}$$

$$= e^{it(\omega-\omega')}(\omega+\omega')(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$$

Normalizirana rješenja glase,

$$f_k(t,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{ik_\mu x^\mu} \tag{30}$$

Da bi dobili potpunu bazu potrebni su nam i kompleksni konjugati ovih rješenja. Koristeći $\langle f_k^*, f_{k'}^*\rangle = -\langle f_k, f_{k'}\rangle^*$ vidimo da vrijede sljedeće relacije ortonormiranosti.

$$\langle f_k, f_{k'}\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad \langle f_k^*, f_{k'}^*\rangle = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

I naravno f_k su ortogonalne na sve konjugirane članove baze $\langle f_k, f_{k'}^*\rangle = 0$. f_k su modovi pozitivne frekvencije, a f_k^* modovi negativne frekvencije prema ranije raspravljenoj definiciji. Iz (17) vidimo da to znači da su f_k koeficijenti za operatore poništenja, a f_k^* koeficijenti za operatore stvaranja.

Nadalje vršimo kanonsku kvantizaciju uvodeći komutacijske relacije na plohama konstantnog vremena, te operatore poništenja i stvaranja ranije opisanim postupkom. Ali rekli smo da će nam operator broja ovisiti o izboru baze, pa zašto smo ovdje izabrali ovu bazu? Napravimo Lorentz transformaciju uz $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$,

$$t' = \gamma t - \gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}' = \gamma\mathbf{x} - \gamma\mathbf{v}t$$

Inverznu transformaciju dobijemo zamjenom crtkanih i necrtkanih koordinata, te promjenom predznaka za $\mathbf{v}$. Pogledajmo što se dogodi sa uvjetom pozitivne frekvencije (27) u potisnutom sustavu $\{x'^\mu\}$.

$$\partial'_t f_k = \frac{\partial x^\mu}{\partial t'}\frac{\partial f_k}{\partial x_\mu} = (-i\gamma\omega + i\gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})f_k = -i\omega' f_k$$

Gdje je $\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$ frekvencija u potisnutom sustavu. Vidimo da će se stanje s nekim brojem čestica samo transformirati u stanje s istim brojem čestica, ali s novim potisnutim momentima. Naš izbor inercijalnog sustava pokazao se nebitnim u ovom slučaju. Ovo je posljedica postojanja Killingovog vektorskog polja vremenskog tipa $K^\mu = \partial_t$. Sva ovakva vektorska polja mogu se povezati Lorentzovim transformacijama pa je Fockov prostor stanja nepromijenjen, pa rastav u pozitivne i negativne modove ostaje isti, iako se frekvencije promijene. Chmielowski je pokazao da dva komutirajuća Killingova vektorska polja navode na istu definiciju vakuuma [4].

III. RINDLEROVE KOORDINATE

Neka smo u 2-dimenzionalnom prostor-vremenu $\mathscr{M}$ s metrikom $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Ono je statično i globalno hiperbolično (plohe konstantnog t su Cauchy plohe). Za početak promotrimo putanju prirodno parametrizirnu vlastitim vremenom $x^\mu(\tau)$ promatrača s akceleracijom iznosa α, iz našeg inercijalnog Kartezijevog (laboratorijskog) sustava. Prema definiciji,

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}u^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

Gdje smo iskoristili lančano pravilo i odsutnost Christoffelovih simbola u Kartezijevim koordinatama. Jer vrijedi $u_a u^a = -1$ imamo $a^\mu u_\mu = 0$, odnosno 4-akceleracija je prostornog tipa ($a^\mu a_\mu > 0$). Sada koristimo ovu relaciju, te norme akceleracije i brzine da bi našli jednadžbu putanje.

$$u_\mu a^\mu = -u^0 a^0 + u^x a^x = 0 \to a^0 = \frac{u^x a^x}{u^0}$$

$$u_\mu u^\mu = -1 = -(u^0)^2 + (u^x)^2 \qquad a_\mu a^\mu = \alpha^2 = -(a^0)^2 + (a^x)^2$$

Jer vrijedi $a^x = du^x/d\tau$ tražimo nekakvu relaciju između x komponentni akceleracije i brzine. Kombiniranjem sve tri jednadžbi,

$$\alpha^2 = (a^x)^2[1 - (\frac{u^x}{u^0})^2] = \frac{(a^x)^2}{1+(u^x)^2}$$

Nadalje integriramo dva puta da dobijemo $x(\tau)$. Uzimamo iste predznake u korijenima, uskoro ćemo vidjeti koja je razlika.

$$\int_0^{u^x} \frac{du'^x}{\sqrt{1+(u'^x)^2}} = \int_0^\tau \alpha d\tau'$$

$$\mathrm{arsinh}(u^x) - 0 = \alpha\tau \to \frac{dx}{d\tau} = \sinh(\alpha\tau)$$

$$x(\tau) = \alpha^{-1}\cosh\alpha\tau + c_x$$

Gdje je c_x za našu raspravu nebitna konstanta, pa odmah biramo da je jednaka nuli. Zanima nas i $t(\tau)$ kojeg ćemo naći preko norme 4-brzine.

$$u^0 = \sqrt{1+(u^x)^2} \to \frac{dt}{d\tau} = \cosh\alpha\tau$$

Nakon integracije opet će se pojaviti konstanta koju fiksiramo na nulu.

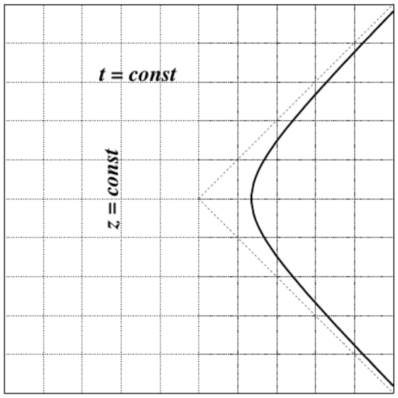
$$(x,t)(\tau) = \alpha^{-1}(\cosh\alpha\tau,\ \sinh\alpha\tau)$$

Možemo naći neparametriziranu jednadžbu da bi dobili bolji dojam. Prebacivanjem konstanti, kvadriranjem i oduzimanjem.

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\cosh(\alpha\tau)^2 - \sinh(\alpha\tau)^2)$$

$$x^2 - t^2 = \alpha^{-2}$$

Vidimo da se radi o jednadžbi za hiperbolu. Ovdje smo prešutno poopćili jednadžbu hiperbole, u smislu da parametrizirana forma dana iznad daje samo desnu stranu hiperbole. Da bi dobili i lijevu bilo je potrebno uzeti različite predznake u korijenima prije integracije 4-brzine. Ovo bi samo promijenilo predznak za $x(\tau)$ iz pozitivnog u negativni.



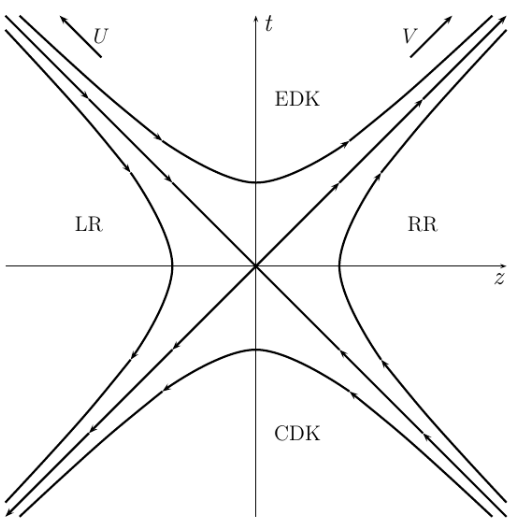
Slika 1: Svjetska linija jednoliko ubrzanog (Rindler) promatrača. Akcelerirani opažači putuju od prošle svjetlosne beskonačnosti do buduće svjetlosne beskonačnosti, za razliku od geodezičnih promatrača koji odlaze u vremensku beskonačnost.

Možemo primjetiti da se promatrač giba samo u dijelu ravnine određene uvjetom $|t| < x$ koju nazivamo desnim Rindlerovim klinom W_R. Analogno za drugu stranu vrijedi $|t| < -x$, te je nazivamo lijevim Rindlerovim klinom W_L.

Definiramo kratice $U = t - x$, $V = t + x$ na cijelom prostor-vremenu $\mathscr{M}$. Rindlerove klinove W_R i W_L možemo opisati uvjetima na U, V.

$$W_R = \{(U, V) \in \mathscr{M}; V > 0,\ U < 0\}$$

$$W_L = \{(U, V) \in \mathscr{M}; V < 0,\ U > 0\}$$



Slika 2: U tekstu će se regije RR ($|t| < x$) i LL ($|t| < -x$) (desni i lijevi Rindlerov klin) označavati sa W_R i W_L. Označene krivulje su integralne krivulje Killingovog vektora $K^\mu = \partial_\eta = x\partial_t + t\partial_x$. Regije $t > |x|$ i $t < -|x|$ su globalno hiperbolične, ali nisu statične, te ih nazivamo ekspandirajući, odnosno kontrahirajući, degenerirani Kasner svemir.

Da bi raspravljali u samo desnom klinu treba napraviti transformaciju kooordinata $\{t, x\} \to \{\eta, \xi\}$. S parametrom $a = \text{konst} > 0$.

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta \quad x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta \quad , W_R \tag{31}$$

Ovdje su $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}$. Želimo li lijevu stranu samo nabacimo jedan minus.

$$t = a^{-1} e^{a\tilde{\xi}} \sinh a\tilde{\eta} \quad x = -a^{-1} e^{a\tilde{\xi}} \cosh a\tilde{\eta} \quad , W_L \tag{32}$$

Nekada se za obje strane koriste iste oznake za koordinate $\{\eta, \xi\}$ iako jedan par nije dovoljan za pokriti $W_R \cup W_L$. Iz razloga što je metrika ista na obe strane,

$$\begin{aligned} ds^2 =& - dt^2 + dx^2 \\ =& - [e^{a\xi} \sinh(a\eta) d\xi + e^{a\xi} \cosh(a\eta) d\eta]^2 + \\ &+ [e^{a\xi} \cosh(a\eta) d\xi + e^{a\xi} \sinh(a\eta) d\eta]^2 \\ =& e^{2a\xi} [d\xi^2 (\cosh^2 - \sinh^2) + 0 + d\eta^2 (\sinh^2 - \cosh^2)] \\ =& e^{2a\xi} (d\xi^2 - d\eta^2) \end{aligned}$$

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\xi^2 - d\eta^2) \tag{33}$$

Očiti Killingov vektor za ovu metriku je ∂_η, to je zapravo već poznati član Poincare grupe (nismo promijenili prostor). Vidimo da su i desni klin W_R i lijevi klin W_L statični i globalno hiperbolični s plohama konstantnog η kao Cauchyjevim plohama.

$$\begin{aligned} \partial_\eta =& \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x + \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t \\ =& e^{a\xi} (\sinh(a\eta) \partial_x + \cosh(a\eta) \partial_t) \\ =& a(t\partial_x + x\partial_t) \end{aligned}$$

To je upravo potisak u x smjeru skaliran faktorom a, jedino što je ∂_η definiran samo na W_R. Na W_L ćemo imati $\partial_{\tilde{\eta}}$.

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\eta}} =& e^{a\tilde{\xi}} (- \sinh(a\tilde{\eta}) \partial_x + \cosh(a\tilde{\eta}) \partial_t) \\ =& - a(t\partial_x + x\partial_t) = -\partial_\eta \end{aligned}$$

Vidimo zašto metrika ostaje nepromijenjena između W_R i W_L. Analogno U, V definiramo u ($\tilde{u}$), v ($\tilde{v}$). Tilde U, V nisu potrebni pošto su oni definirani na cijelom prostor-vremenu $\mathscr{M}$.

$$u = \eta - \xi \quad v = \eta + \xi \qquad , W_R$$

$$\tilde{u} = \tilde{\eta} + \tilde{\xi} \quad \tilde{v} = \tilde{\eta} - \tilde{\xi} \qquad , W_L$$

Izrazimo transformaciju $(t, x) \to (\eta, \xi)$ preko $U, V, u, ...$

$$U = t - x = \frac{e^{a\xi}}{a} (\sinh(a\eta) - \cosh(a\eta)) = \frac{e^{a\xi}}{a} (-e^{-a\eta})$$

$$V = t + x = \frac{e^{a\xi}}{a}(\sinh(a\eta) + \cosh(a\eta)) = \frac{e^{a\xi}}{a}(e^{a\eta})$$

$$U = -a^{-1}e^{-au} \quad V = a^{-1}e^{av} \qquad , W_R \tag{34}$$

Ili obrnuto.

$$v = a^{-1}\ln(aV) \quad u = -a^{-1}\ln(-aU) \qquad , W_R \tag{35}$$

Vidimo da ovo samo radi za $V > 0$ i $U < 0$, odnosno u W_R. Za drugu stranu uskaču $\tilde{u}, \tilde{v}$.

$$U = t - x = \frac{e^{a\tilde{\xi}}}{a}(\sinh(a\tilde{\eta}) + \cosh(a\tilde{\eta})) = \frac{e^{a\tilde{\xi}}}{a}(e^{a\eta})$$

$$V = t + x = \frac{e^{a\tilde{\xi}}}{a}(\sinh(a\tilde{\eta}) - \cosh(a\tilde{\eta})) = \frac{e^{a\tilde{\xi}}}{a}(-e^{-a\tilde{\eta}})$$

$$U = a^{-1}e^{a\tilde{u}} \quad V = -a^{-1}e^{-a\tilde{v}} \qquad , W_L \tag{36}$$

Ili obrnuto.

$$\tilde{v} = -a^{-1}\ln(-aV) \quad \tilde{u} = a^{-1}\ln(aU) \qquad , W_L \tag{37}$$

Opet vidimo da ovo radi samo za $V < 0$ i $U > 0$, odnosno samo u W_L.

U Rindlerovim koordinatama put opažača konstante akceleracije u desnom klinu glasi

$$x = \alpha^{-1}\cosh(\alpha\tau) = a^{-1}e^{a\xi}\cosh(a\eta) \to a\eta = \alpha\tau, \quad \frac{a}{\alpha} = e^{a\xi}$$

$$(\eta, \xi) = (\frac{\alpha}{a}\tau, \ \frac{1}{a}\ln\frac{a}{\alpha}) \tag{38}$$

Primjetimo da je svjetlosna linija ($x = t$) budući Cauchy horizont za svaku η =konst. prostornu hiperpovršinu u Rindlerovom desnom klinu. Linija $x = -t$ je prošli Cauchy horizont. Identificirani horizonti su zapravo Killingovi horizontni ovog polja, odnosno $x = \pm t$ su svjetlosnog tipa te ∂_μ na njima postaje svjetlosnog tipa.

Na površini $t = 0$, ∂_μ je vremenski Killingov vektor K^μ_R ortogonalan na hiperpovršinu (osim u $x = 0$ gdje nestaje ali to je skup mjere nula). Znači da njega možemo korisiti za definiciju pozitivnih i negativnih modova na kojima možemo izgraditi Fockovu bazu za Hilbertov prostor skalarnih polja. Indeks R označava da je ∂_μ Killingov vektor u W_R desnom Rindlerovom klinu, dok će za W_L to biti $K^\mu_L = \partial_{\tilde{\eta}} = -\partial_\eta$.

IV. 2D PRIMJER

Da bi došli do željenog rezultata zanemarimo sve komplikacije zakrivljenosti prostora, ali zadržimo ideje koje je potaknula. Razmotrimo bezmaseno ($m = 0$) skalarno polje ϕ u (1+1) dimenzionalnom Minkowski prostoru s Rindlerovim koordinatama. Raditi ćemo sa dvije baze modova, Rindlerovom i Minkowski. Prostor stanja za sustav mora biti isti u Rindler i Minkowski bazama, odnosno Hilbertovi prostori su isti, ali ćemo imati različite baze za Fockova stanja $\{|n\rangle_M\}$ i $\{|n\rangle_R\}$. Jedan Rindler mod je u $t = 0$ ograničen samo na pozitivnu stranu x osi (desni klin) pa se sigurno ne može razviti kao superpozicija samo pozitivnih Minkowski modova. Zbog ovoga će Rindler operator poništenja sigurno biti superpozicija Minkowski operatora poništenja i stvaranja, pa se Minkowski vakuum i Rindler vakuum ne mogu poklapati. Drugim riječima dvije reprezentacije ne mogu se složiti oko sadržaja čestica u polju.

U Kartezijevim koordinatama vidjeli smo da će rješenja biti ravni valovi (30),

$$f_{\pm k}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}e^{-ik(t\pm x)}$$

Zajedno sa konjugiranim parovima $f^*_{\pm k}(t, x)$ čine bazu Fockovih stanja. Općenito rješenje promovirano u operator možemo rastaviti na modove koji se kreću udesno $\hat{\phi}_-$ i one koji se gibaju ulijevo $\hat{\phi}_+$.

$$\hat{\phi}(t, x) = \hat{\phi}_+(V) + \hat{\phi}_-(U) \tag{39}$$

$$\hat{\phi}_+(V) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\left(\hat{b}^\dagger_{+k}e^{ikV} + \hat{b}_{+k}e^{-ikV}\right)$$

$$\hat{\phi}_-(U) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\left(\hat{b}^\dagger_{-k}e^{ikU} + \hat{b}_{-k}e^{-ikU}\right)$$

Pošto nema interakcije između "desnih" $\hat{\phi}_-$ i "lijevih" $\hat{\phi}_+$ modova možemo se ograničiti na razmatranje samo jednih među njima, dok je postupak za druge potpuno analogan.

Klein-Gordonova jednadžba u Rindleorvim koordinatama se oblikom svodi na istu jednadžbu kao u Kartezijevim koordinatama (5), samo sa novim varijablama. Štoviše Lagrangeova gustoća $\mathcal{L}$ je invarijantna pod ovom transformacijom pa možemo zadržati postupak kvantizacije polja uveden za Kartezijeve koordinate.

$$\Box\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = e^{-2a\xi}(-\partial^2_\eta + \partial_\xi)\phi = 0 \tag{40}$$

Očito ravni val $g_\omega \sim e^{-i\omega\eta + ik\xi}$ rješava ovu jednadžbu uz $\omega = |k|$. Plohe integracije su sada plohe $\eta =$ konst. s vektorom normale $n^\mu = N\partial_\eta$.

$$n^\mu n_\mu = 1 = g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = g_{\eta\eta}N^2 = N^2e^{2a\xi}$$

Stoga je normalizirani vektor normale $n^\mu = e^{-a\xi}\partial_\eta$. Korijen determinante inducirane metrike je $\sqrt{|\gamma|} = \sqrt{|g_{\xi\xi}|} = \sqrt{e^{2a\xi}} = e^{a\xi}$. Slijedi da $n^\mu\sqrt{|\gamma|} = 1$ isto kao za slučaj sa plohama za koje je normala bila ∂_t (Kartezijeve koordinate). Zbog ovoga integral skalarnog produkta izgleda isto kao (30) samo sa drugim varijablama, odnosno normalizacija modova će biti ista ($[(2\pi)^n 2\omega]^{-1/2}$) u Rindlerovim kao i u Kartezijevim koordinatama. Normalizirana rješenja glase

$$g_{\pm\omega}(\eta, \xi) = (4\pi\omega)^{-1/2}e^{-i\omega(\eta\pm\xi)} \tag{41}$$

Ovakva rješenja su modovi pozitivne frekvencije (u W_R) jer $\pounds_{K_R} g_\omega = -i\omega g_\omega$. Na isti način definiramo modove pozitivne frekvencije u W_L samo je tamo Killingov vektor $K_L = \partial_{-\eta}$. Zbog definicije ξ, η ovakva rješenja nisu definirana na cijelom prostorvremenu pa ih želimo (analitički) proširiti na cijeli prostor. Općenito rješenje možemo razviti i u ovim modovima slično kao i u Kartezijevim koordinatama (ili za samo dio polja koji se giba ulijevo). Za $V > 0$ možemo koristiti funkcije od v, $g_{+\omega}(v)$ i $g^*_{+\omega}(v)$, za razvoj lijevo gibajućeg $\hat{\phi}_+(V)$.

$$\hat{\phi}_+(V > 0) = \int_0^\infty d\omega\big(\hat{a}^R_\omega g_\omega(v) + \hat{a}^{R\dagger}_\omega g^*_\omega(v)\big) \tag{42}$$

Za $V < 0$ slično imamo.

$$\hat{\phi}_+(V < 0) = \int_0^\infty d\omega\big(\hat{a}^L_\omega g_\omega(\tilde{v}) + \hat{a}^{L\dagger}_\omega g^*_\omega(\tilde{v})\big) \tag{43}$$

Nas zapravo zanimaju Bogolubovi koeficijenti između baze f Kartezijevih rješenja i baze g Rindlerovih rješenja, stoga razvijamo $g_\omega(v)$ i $g_\omega(\tilde{v})$ preko $f_k(V)$ i $f^*_k(V)$.

$$\theta(V) g_\omega(v) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\big(\alpha^R_{\omega k} e^{-ikV} + \beta^R_{\omega k} e^{ikV}\big) \tag{44}$$

$$\theta(-V) g_\omega(\tilde{v}) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\big(\alpha^L_{\omega k} e^{-ikV} + \beta^L_{\omega k} e^{ikV}\big) \tag{45}$$

Heaviside step funkcije $\theta(V)$ ulaze u igru zbog domena na kojim su definirane g_ω (točnije v i $\tilde{v}$). Pomnožimo li prvi izraz sa $e^{ikV}/2\pi$ i integriramo po V od $-\infty$ do $+\infty$ dobijemo izraz za $\alpha^R_{\omega k}$.

$$\alpha^R_{\omega k} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dV}{2\pi} \theta(V) g_\omega(v) e^{ikV}$$

Mod $g_\omega(v)$ možemo izraziti preko V.

$$g_\omega(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v} = \frac{e^{-i\omega(a^{-1}\ln(aV))}}{\sqrt{4\pi\omega}} = \frac{(aV)^{-i\omega/a}}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

Pa obavimo integraciju za koeficijent uz substituciju $V = ix/k$.

$$\begin{aligned}\alpha^R_{\omega k} =& \sqrt{\frac{k}{\omega}} \int_0^\infty \frac{dV}{2\pi}(aV)^{-\frac{i\omega}{a}} e^{ikV} \\ =& \sqrt{\frac{k}{\omega}} \frac{a^{-\frac{i\omega}{a}}}{2\pi}\Big(\frac{i}{k}\Big)^{1-\frac{i\omega}{a}} \int_0^\infty x^{-\frac{i\omega}{a}} e^{-x} dx\end{aligned}$$

Prepoznajući definiciju gama funkcije $\Gamma(z)$ (imamo uvjet da je $\Re(z) > 0$ što je ovdje istina jer je to 1) i koristeći $i = e^{i\pi/2}$ za sređivanje dobijamo prvi Bogolubov koeficijent.

$$\alpha^R_{\omega k} = \frac{i(a/k)^{-i\omega/a}}{2\pi\sqrt{\omega k}} e^{\pi\omega/2a}\Gamma(1 - \frac{i\omega}{a}) \tag{46}$$

Za drugi koeficijent imamo jako sličan izraz, koristimo drugu supstituciju $V = -ix/k$ pa se pojavljuje $(-i)^{-i\omega/a}$.

$$\beta^R_{\omega k} = \frac{-i(a/k)^{-i\omega/a}}{2\pi\sqrt{\omega k}} e^{-\pi\omega/2a}\Gamma(1 - \frac{i\omega}{a}) \tag{47}$$

Na analogan način računamo preostala dva koeficijenta.

$$\begin{aligned}\beta^L_{\omega k} =& \sqrt{\frac{k}{\omega}} \int_{-\infty}^0 \frac{dV}{2\pi}(-aV)^{\frac{i\omega}{a}} e^{-ikV} \\ =& \sqrt{\frac{k}{\omega}} \frac{a^{i\omega/a}}{2\pi} \int_\infty^0 (-dV) V^{i\omega/a} e^{ikV} \\ =& \sqrt{\frac{k}{\omega}} \frac{a^{\frac{i\omega}{a}}}{2\pi}\Big(\frac{i}{k}\Big)^{1+\frac{i\omega}{a}} \int_0^\infty x^{\frac{i\omega}{a}} e^{-x} dx\end{aligned}$$

$$\beta^L_{\omega k} = \frac{i(a/k)^{i\omega/a}}{2\pi\sqrt{\omega k}} e^{-\pi\omega/2a}\Gamma(1 + \frac{i\omega}{a}) \tag{48}$$

$$\alpha^L_{\omega k} = \frac{-i(a/k)^{i\omega/a}}{2\pi\sqrt{\omega k}} e^{\pi\omega/2a}\Gamma(1 + \frac{i\omega}{a}) \tag{49}$$

Odmah možemo primjetiti vezu između koeficijenata.

$$\alpha^{R*}_{\omega k} = \frac{-i(a/k)^{i\omega/a}}{2\pi\sqrt{\omega k}} e^{\pi\omega/2a}\Gamma(1 + \frac{i\omega}{a}) = -e^{\pi\omega/a}\beta^L_{\omega k}$$

$$\beta^R_{\omega k} = -e^{-\pi\omega/a}\alpha^{L*}_{\omega k} \tag{50}$$

$$\alpha^{R*}_{\omega k} = -e^{\pi\omega/a}\beta^L_{\omega k} \tag{51}$$

Ovakve relacije možemo iskoristiti da bi našli funkcije koje će biti čisto pozitivne frekvencije, odnosno moći ćemo ih razviti samo po e^{-ikV}. Pogledajmo $g^*_\omega(\tilde{v})$.

$$\begin{aligned}\theta(-V) g^*_\omega(\tilde{v}) =& \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\big(\alpha^{L*}_{\omega k} e^{ikV} + \beta^{L*}_{\omega k} e^{-ikV}\big) \\ =& \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\big(-e^{\pi\omega/a}\beta^R_{\omega k} e^{ikV} - e^{-\pi\omega/a}\alpha^R_{\omega k} e^{-ikV}\big) \\ =& e^{\pi\omega/a} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}}\big(-\beta^R_{\omega k} e^{ikV} - e^{-2\pi\omega/a}\alpha^R_{\omega k} e^{-ikV}\big)\end{aligned}$$

Prebacujući eksponencijalu ispred integrala i zbrajajući s $\theta(V) g_\omega(v)$ dobijamo kombinaciju samo Minkowski modova pozitivne frekvencije definiranu na oba Rindlerova klina.

$$G_\omega(V) = \theta(V) g_\omega(v) + \theta(-V) g^*_\omega(\tilde{v}) e^{-\pi\omega/a} \tag{52}$$

Ili,

$$G_\omega(V) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \alpha^R_{\omega k}(1 - e^{-2\pi\omega/a}) e^{-ikV}$$

Relacije među koeficijentima su simetrične na zamjenu indeksa $R \leftrightarrow L$, što je analogno zamjeni $(v, V) \leftrightarrow (\tilde{v}, -V)$, pa imamo još jednu kombinaciju modova pozitivne frekvencije.

$$\widetilde{G}_\omega(V) = \theta(-V) g_\omega(\tilde{v}) + \theta(V) g^*_\omega(v) e^{-\pi\omega/a} \tag{53}$$

$$\widetilde{G}_\omega(V) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \alpha^L_{\omega k}(1 - e^{-2\pi\omega/a})e^{-ikV}$$

Ovakav razvoj dovoljan je dokaz da su $G_\omega, \tilde{G}_\omega$ pozitivne frekvencije u odnosu na ∂_t. Ali zanimljivo je raspraviti originalni argument kojeg je Unruh koristio 1976. za proširenje rješenja pozitivne frekvencije na negativnu realnu liniju $\Re(V) < 0$. Pošto je Minkowski rješenje pozitivne frekvencije $f_k \sim e^{-ikV}$ analitično, odnosno ne divergira na donjem dijelu imaginarne V ravnine ($\Im(V) \leq 0$), jer $f_k \sim e^{-ik\Re(V)}e^{k\Im(V)}$, rješenje $g_\omega(v) \sim (V)^{-i\omega/a}$, $V > 0$ bi trebalo produljiti izbjegavajući singularitet u $V = 0$ po malom polukrugu u donjem dijelu kompleksne V ravnine, što je konzistentno s izborom $-1 = e^{-i\pi}$. To nas navodi na $(-1)^{-i\omega/a}(-V)^{-i\omega/a} = e^{-\pi\omega/a}(-V)^{-i\omega/a} \sim e^{-\pi\omega/a}g^*_\omega(\tilde{v})$, $V < 0$.

Invertiramo (52) i (53).

$$\theta(V)g_\omega(v) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega/a}}(G_\omega(V) - e^{-\pi\omega/a}\widetilde{G}^*_\omega(v)$$

$$\theta(-V)g_\omega(\tilde{v}) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\omega/a}}(\widetilde{G}_\omega(V) - e^{-\pi\omega/a}G^*_\omega(v)$$

Neka je $\mathcal{N} = (1 - e^{-2\pi\omega/a})^{-1}$. Sada možemo rješenja koja se gibaju ulijevo $\phi_+(V)$ razviti za sve V u Rindlerove modove, koje ćemo onda prikazati kao kombinacije pozitivnih modova G_ω, $\widetilde{G}_\omega$. Prelazimo u operatore.

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_+(V) = &\int_0^\infty d\omega \Big\{\theta(V)[\hat{a}^R_\omega g_\omega(v) + \hat{a}^{R\dagger}_\omega g^*_\omega(v)] + \\ &+ \theta(-V)[\hat{a}^L_\omega g_\omega(\tilde{v}) + \hat{a}^{L\dagger}_\omega g^*_\omega(\tilde{v})]\Big\} \\ = &\int_0^\infty d\omega\mathcal{N}\Big\{\hat{a}^R_\omega[G_\omega - e^{-\pi\omega/a}\widetilde{G}^*_\omega] + \hat{a}^{R\dagger}_\omega[G^*_\omega - e^{-\pi\omega/a}\widetilde{G}_\omega] + \\ &+ \hat{a}^L_\omega[\widetilde{G}_\omega - e^{-\pi\omega/a}G^*_\omega] + \hat{a}^{L\dagger}_\omega[\widetilde{G}^*_\omega - e^{\pi\omega/a}G_\omega]\Big\} \\ = &\int_0^\infty d\omega\mathcal{N}\Big\{G_\omega[\hat{a}^R_\omega - e^{-\pi\omega/a}\hat{a}^{L\dagger}_\omega] + G^*_\omega[\hat{a}^{R\dagger}_\omega - e^{-\pi\omega/a}\hat{a}^L_\omega] + \\ &+ \widetilde{G}_\omega[\hat{a}^L_\omega - e^{-\pi\omega/a}\hat{a}^{R\dagger}_\omega] + \widetilde{G}^*_\omega[\hat{a}^{L\dagger}_\omega - e^{\pi\omega/a}\hat{a}^R_\omega]\Big\}\end{aligned}$$

Uz modove pozitivne frekevencije nalaze se odgovarajući operatori poništenja. Minkowski vakuum će biti njihovo svojstveno stanje sa svojstveno vrijednosti nula. Imamo dvije jednadžbe koje jedinstveno određuju Minkowski vakuum.

$$(\hat{a}^R_\omega - e^{-\pi\omega/a}a^{L\dagger}_\omega)|0_M\rangle = 0 \tag{54}$$

$$(\hat{a}^L_\omega - e^{-\pi\omega/a}a^{R\dagger}_\omega)|0_M\rangle = 0 \tag{55}$$

Primjetimo opet da je ovaj sistem jednadžbi simetričan na zamjenu $R \leftrightarrow L$. Računamo očekivanu vrijednost Rindler operatora broja $\hat{N}^R_\omega = \hat{a}^{R\dagger}_\omega$ u stanju Minkowski vakuuma.

$$\begin{aligned}N^R_\omega =&\langle 0_M|\hat{a}^{R\dagger}_\omega\hat{a}^R_\omega|0_M\rangle \\ =&\langle 0_M|\hat{a}^{R\dagger}_\omega e^{-\pi\omega/a}\hat{a}^{L\dagger}_\omega|0_M\rangle \\ =&e^{-2\pi\omega/a}\langle 0_M|\hat{a}^L_\omega\hat{a}^{L\dagger}_\omega|0_M\rangle \\ =&e^{-2\pi\omega/a}(1 + \langle 0_M|\hat{a}^{L\dagger}_\omega\hat{a}^L_\omega|0_M\rangle) \\ =&e^{-2\pi\omega/a}(1 + N^L_\omega)\end{aligned}$$

Iz simetrije slijedi $N^R_\omega = N^L_\omega$.

$$N^R(\omega) = N^L(\omega) = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \tag{56}$$

Pošto još pričamo o kontinuiranom ω radi se o gustoćama broja čestica u pojedinim klinovima. Vidimo da očekivani broj čestica za pojedinu frekvenciju odgovara Bose-Einstein raspodjeli za temperaturu $T = a/2\pi$. Minkowski vakuum ograničen na bilo koji od Rindlerovih klinova ponaša se kao termalno stanje, iako ovu tvrdnju još nismo do kraja dokazali. Potrebno je još pokazati da svako od lijevih i desnih Rindler svojstvenih stanja operatora broja (i energije) odgovara velekanonskom ansamblu ako se drugi klin zanemari. Odnosno potrebna nam je matrica gustoće Minkowski vakuuma u Rindlerovoj bazi. Na kraju ćemo uzeti parcijalni trag po stanjima iz lijevog (ili desnog klina) očekujući velekanonsku raspodjelu. Sada razmatramo diskretnu verziju ω_i. Jer $N^R = N^L$ vrijedi,

$$(a^{R\dagger}_{\omega_i}a^R_{\omega_i} - a^{L\dagger}_{\omega_i}a^L_{\omega_i})|0_M\rangle = 0$$

Koristimo $|0_R0_L\rangle = |0_R\rangle \otimes |0_L\rangle$. Minkowski vakuumsko stanje možemo razbiti na sumu Rindler stanja (koja neće biti samo osnovna), pretpostavljamo općenite koeficijente u razvoju i zapisujemo pomoću operatora stvaranja kao u (16). Produkt uzima u obzir sve frekvencije.

$$|0_M\rangle \sim \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} C_{n_i}|n_iR\rangle \otimes |n_iL\rangle$$

$$|0_M\rangle \sim \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{C_{n_i}}{n_i!}(a^{R\dagger}_{\omega_i}a^{L\dagger}_{\omega_i})^{n_i}|0_R0_L\rangle$$

Iskoristimo sada relaciju (50) da dobijemo rekurzijsku relaciju za koeficijente u sumi.

$$(a^R - e^{-\pi\omega_i/a}a^{L\dagger})|0_M\rangle = 0$$

$$\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} C_{n_i}[\sqrt{n_i} - e^{-\pi\omega_i/a}\sqrt{n_i+1}]|(n_i-1)R\rangle \otimes |(n_i+1)L\rangle = 0$$

U prvom članu pomičemo n_i za $+1$ da bi bio dobro definiran.

$$\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} [C_{n_i+1} - C_{n_i}e^{-\pi\omega_i/a}]\sqrt{n_i+1}|n_iR\rangle \otimes |(n_i+1)L\rangle = 0$$

Slijedi da $C_{n_i+1} = C_{n_i}e^{-\pi\omega_i/a} = C_ie^{-n_i\pi\omega_i/a}$. Iz uvjeta $\langle 0_M|0_M\rangle = 1$ dobijamo C_i.

$$C_i^2 \sum_{n_i} e^{-2\pi\omega_i n_i/a} = 1 \rightarrow C_i = \sqrt{1 - e^{-2\pi\omega_i/a}} = \sqrt{\mathcal{N}_i}$$

Možemo napisati normalizirano stanje Minkowski vakuuma raspisano preko Rindlerovih stanja.

$$|0_M\rangle = \prod_i \sqrt{\mathcal{N}_i} \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-n_i\pi\omega_i/a} |n_i R\rangle \otimes |n_i L\rangle \tag{57}$$

Sada tražimo matricu gustoće za ovakvo stanje $\hat{\rho} = |0_M\rangle \otimes \langle 0_M|$ i uzimamo parcijalni trag po stanjima u lijevom Rindlerovom klinu, tako da dobijemo matricu gustoće Minkowski vakuuma (samo lijevo gibajući dio) ograničenog na samo desni klin. Za dio polja koji se giba udesno može se napraviti analogna analiza i dobiti isti rezultat.

$$\hat{\rho}_R = \sum_{n_k} \langle n_k L| \big(|0_M\rangle \otimes \langle 0_M|\big) |n_k L\rangle$$

$$\hat{\rho}_R = \prod_{ij} \sqrt{\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j} \sum_{n_i n_j n_k} e^{-\pi(n_j\omega_j + n_i\omega_i)/a} \times \langle n_k L| \big(|n_i R\rangle\langle n_j R| \otimes |n_i L\rangle\langle n_j L|\big) |n_k L\rangle$$

$$\hat{\rho}_R = \prod_k \mathcal{N}_k \sum_{n_k} e^{-2\pi n_k\omega_k/a} |n_k R\rangle \otimes \langle n_k R| \tag{58}$$

Prepoznamo $n_k\omega_k$ kako energiju stanja $|n_k\rangle$ i $a/2\pi$ kao temperaturu i ova matrica gustoće odgovara sistemu slobodnih bozona na temperaturi $T = a/2\pi$ (i dalje pravilno normalizirana $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$). Ovim smo dokazali da je dio Minkowski vakuuma $|0_M\rangle$ koji se giba ulijevo ϕ_+ (čestice koje se gibaju ulijevo) ograničen na lijevi ili desni Rindlerov klin termalno stanje. Analogan postupak možemo provesti i za dio polja (čestica) koji se giba udesno. Drugim riječima jednoliko ubrzani (Rindler) promatrač stanje Minkowski vakuuma $|0_M\rangle$ vidi kao termalno stanje s Bose-Einstein distribucijom. Unruh efekt nam na ovaj način ukazuje na termalnu prirodu vakuuma u kvantnoj teoriji polja.

Rindlerovi opažači kreću se na krivuljama konstantne koordinare ξ, za $\xi = 0$ akceleracija orbite iznosi a, a na nekoj drugoj putanji ξ =konst. orbita će imati akceleraciju $\alpha = ae^{-a\xi}$, vidi (38), pa će mjeriti termalnu radijaciju s temperaturom $T = \alpha/2\pi$.

Prije smo vidjeli da za dva statična promatrača koji se gibaju po orbiti nekog Killingovog vektora vrijedi (3).

$$\mathcal{V}_2\omega_2 = \mathcal{V}_1\omega_1$$

U našem slučaju znamo normu Killingovog polja ∂_η, faktor crvenog pomaka je onda $\mathcal{V} = \sqrt{-K^\mu K_\mu} = e^{a\xi}$

$$\omega_2 = e^{a(\xi_1 - \xi_2)}\omega_1$$

Stoga vidimo da se temperatura pomakne sa $T = a/2\pi$ u $T = ae^{-a\xi}/2\pi$ kada se pomaknemo od $\xi_1 = 0$ do $\xi_2 = \xi$. Vidimo da će temperatura otići u nulu za jako velike ξ. Rindler promatrač u beskonačnosti je skoro pa inercijalan ($\alpha \rightarrow 0$), pa će njegova definicija vakuuma sada biti puno bliža Minkowski vakuumu, što odgovara $T \rightarrow 0$, tome da temperatura odlazi u nulu. Očekivana vrijednost tenzora energije i momenta iščezava $\langle T_{\mu\nu}\rangle = 0$, pa kako to onda da Rindler promatrač vidi čestice. Da bi akceleracija detektora bila konstantna moramo konstantno ulagati energiju (energija nije očuvana). Iz perspektive Minkowski promatrača, Rindler detektor prilikom detekcije čestica emitira česticu i onda registrira silu reakcije. U konačnici, energija potrebna za pobuđenje detektora ne dolazi od pozadinskog tenzora energije i momenta, već dolazi od energije koja se ulaže da bi detektor imao konstantnu akceleraciju.

[1] Emil T. Akhmedov, Douglas Singleton, 2006, *On relation between Unruh and Sokolov-Ternov effects*, arXiv:hep-ph/0610391

[2] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez, 2003, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, Commun. Math. Phys. **243**, no. 3, 461–470

[3] Sean Carroll, 2004, *Spacetime and geometry, an introduction to general relativity* (Addison Wesley)

[4] Piotr Chmielowski, 1994, *States of scalar field on spacetimes with two isometries with timelike orbits*, Class. Quantum Grav. **11**, no. 1, 41-56

[5] Luis C.B. Crispino, Atsushi Higuchi, George E.A. Matsas, 2008, *Unruh effect and its applications*, Rev. Mod. Phys. **80**, 787; arXiv:0710.5373

[6] Paul C.W. Davies, 1975, *Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metric*, J. Phys. A **8**, 609-616

[7] Stephen A. Fulling, 1973, *Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time*, Phys. Rev. D **7**, no.10, 2850-2862

[8] Stephen A. Fulling, William G. Unruh, 2004, *Comment on "Boundary conditions in the Unruh problem"*

[9] William G. Unruh, Robert M. Wald, 1984, *What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle*, Phys. Rev. D **29**, 1047-1056

[10] William G. Unruh, 1976, *Notes on black hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870-892

[11] Robert M. Wald, 1984, *General relativity* (University of Chicago press)

[12] Robert M. Wald, 1994. *Quantum field theory in curved spacetimes, black-hole thermodynamics* (University of Chicago press)