Besilni elektromagnetizam

Luka Gulin
Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagebu
(Dated: 15. rujna 2016.)

Besilni elektromagnetizam (Force-Free Electrodynamics) opisuje magnetski dominiranu relativističku plazmu. Pristup se temelji na aproksimaciji da je izmjena impulsa i energije između polja i materije zanemariva što nam omogućava praćenje evolucije polja ne uzimajući u obzir dinamiku nabijene materije, pa pozornost možemo zadržati isključivo na polju. Razmatranje kreće prvo od jednostavnih primjera nakon čega se razvijaju alati da bi se mogli promatrati i općenitiji slučajevi. Izvest ćemo jednadžbu toka te uz pomoć nje nametnuti ograničenja na topologije magnetosfera pulsara i crnih rupa.

I. UVOD

A. Besilni elektromagnetizam u tenzorskom jeziku

1. *Postav problema*

Maxwellove jednadžbe u tenzorskom jeziku, koristeći Lorenzovo baždarenje dobivaju idući, jednostavni oblik:

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla_b F^{ab} = j^a \tag{2}$$

Gdje je

$$F_{ab} = 2\nabla_{[a}A_{b]} \tag{3}$$

Veličina A je četveropotencijal definiran kao $A = (\phi, \vec{A})$. F_{ab} je definiran ekvivalentno i pomoću samih polja:

$$E_b = -u^a F_{ab} \tag{4}$$

$$B_b = u^a * F_{ab} \tag{5}$$

Elektromagnetsko polje F_{ab} u sebi sadrži spremljenu energiju i impuls. Navedena svojstva opisujemo tenzorom energije-impulsa kako slijedi:

$$T^{\mathrm{EM}}_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}g_{ab} \tag{6}$$

Zakon očuvanja energije-momenta, koji se može dobiti iz Maxwellovih jednadžbi, glasi:

$$\nabla^b T^{\mathrm{EM}}_{ab} + F_{ab}j^b = 0 \tag{7}$$

Ovdje stižemo do srca naše teorije. $F_{ab}j^b$ je gustoća 4-sile, koja opisuje transfer energije (komponenti vremenskog tipa) te impulsa (komponentama prostornog tipa). Budući da besilni elektromagnetizam opisuje interagiranje električnog polja s plazmom, a u tom režimu transfer energije i impulsa može biti zanemaren zbog toga što su tada energija i moment u polju puno veći od energije i momenta koje nose nabijene čestice. Zbog toga dobijamo jednadžbu koja, uz Maxwellowe opisuje besilni elektromagnetizam.

$$F_{ab}j^b = 0 \tag{8}$$

Budući da sad imamo jednu jednadžbu više, možemo se riješiti j^a iz Maxwellovih jednadžbi tako da drugu jednadžbu pomnožimo s tenzorom polja te na desnoj strani iskoristimo dobiveni identitet. Tada jedandžbe izgledaju:

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{9}$$

$$F_{ab}\nabla_c F^{bc} = 0 \tag{10}$$

2. *Determinizam*

Evolucija polja uz određene početne uvjete biti će deterministički određena ako je polje magnetski dominantno tj. da relativstička invarijanta $F_{ab}F^{ab} = 2(B^2 - E^2) > 0$. Da bi to pokazali, poslužit ćemo se vektorskom analizom elektromagnetskog polja.
Besilni uvjet sada ima oblik:

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = 0 \tag{11}$$

$$\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = 0$$

Pod uvjetom da gustoća naboja i struje nisu nula, ove dvije jednadžbe impliciraju još jednu relativističku invarijantnu, a to je da je

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \tag{12}$$

Maxwellove jednadžbe koje određuju evoluciju su

$$\partial_t\vec{B} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} \tag{13}$$

$$\partial_t\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{j} \tag{14}$$

Pošto radimo u magnetsko dominiranom okruženju, u svim referentnim sustavima će biti $|\vec{B}| \neq 0$. Stoga, drugu jedadžbu u 11 možemo vektorski pomnožiti s desne strane s $\vec{B}$ te iz toga dobijemo komponentu struje koja je okomita na magnetsko polje.

$$\vec{\jmath}_{\perp} = \frac{1}{|\vec{B}|^2}\rho\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{|\vec{B}|^2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}\times\vec{B} \tag{15}$$

Paralelnu komponentu dobijemo iz Maxwellovih jednadžbi i činjenice da vremenska derivacije 12 iščezava.

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t\vec{E})\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot(\partial_t\vec{B}) && (16)\\ &= (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{E} - \vec{\jmath}\cdot\vec{B} && (17)\end{aligned}$$

Odavde iščitamo i paralelnu komponentu, te zajedno s okomitom, $\vec{\jmath}$ možemo pisati kao:

$$\vec{\jmath} = \frac{1}{|\vec{B}|^2}\Big((\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}\times\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{B}\Big) \tag{18}$$

Budući da smo $\vec{\jmath}$ prikazali bez vremenskih derivacija, vremenske derivacije u jedadžbama 13 i 14 su određene te su ograničenja $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ i $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ očuvana vremenskom evolucijom.

3. *Degenerirana elektromagnetska polja*

Elektromagnetska polja za koja postoji vektor w^a tako da:

$$w^a F_{ab} = 0 \tag{19}$$

nazivaju se degenerirana elektromagnetska polja. Za primjetiti je da ukoliko vektor w^a identificiramo s j^a dobijemo uvjet za besilna elektromagnetska polja. Međutim, klasa degeneriranih elektromagnetskih polja može sadržavati i polja za koje ne vrijedi besilni uvjet. Primjer su polja unutar savršenih vodiča gdje mora vrijediti $F_{ab}U^b$ gdje je U^b 4-brzina referentnog sustava u kojem vodič miruje.
Nadalje, gornji uvjet možemo pisati i kao

$$w^a F_{[ab}F_{cd]} = 0 \tag{20}$$

obzirom da svaki član antisimetrizacije iščezava upravo iz jednadžbe 19. Pošto je svaki potpuno antisimetrični tenzor ranga 4 proporcionalan volumnom elementu, pišemo:

$$F_{[ab}F_{cd]} = \beta\epsilon_{abcd} \tag{21}$$

Gdje je β neka funkcija. Uvrštavanjem dobivamo

$$\beta w^a \epsilon_{abcd} = 0 \tag{22}$$

no volumni element nema svojstveni vektor s svojstvenom vrijednosti 0, stoga zaključujemo da je $\beta = 0$ što znači da je tenzor $F_{[ab}F_{cd]}$ sam za sebe 0.
Stoga, tenzor F_{ab} možemo napisati kao:

$$F_{ab} = 2\alpha_{[a}\beta_{b]} \tag{23}$$

Što se lako vidi iz idućega: Neka su v^a i w^a vektori t.d vrijedi $v^a w^b F_{ab} \neq 0$. Budući da je $F_{[ab}F_{cd]}$ sam po sebi 0, možemo pisati:

$$v^a w^b F_{[ab}F_{cd]} = 0 \tag{24}$$

Proširivanje antisimetrizacije u indeksima, dobijemo slijedeće:

$$v^a w^b F_{ab}F_{cd} + \big[(v^a F_{ac})(w^b F_{bd}) - (v^a F_{ad})(w^b F_{bc})\big] = 0 \tag{25}$$

Kako je $v^a w^b F_{ab} \neq 0$ cijelu jednadžbu možemo dijeliti s tim faktorom, a kovektore nastale u kontrakciji u uglatim zagradama, uz pripadajuće faktore, možemo identificirati kao u 23.
Zbog toga što se F_{ab} može zapisati kao $F_{ab} = 2\alpha_{[a}\beta_{b]}$, jezgra od F_{ab} definirana kao

$$\ker F = \{w^a | w^a F_{ab} = 0\} \tag{26}$$

je dvodimenzionalna što se lako vidi iz idućeg:

$$\begin{aligned} w^a F_{ab} &= 2w^a\alpha_{[a}\beta_{b]}\\ &= (w^a\alpha_a)\beta_b - (w^a\beta_a)\alpha_b && (27)\end{aligned}$$

No budući da su α_a i β_a linearno neovisni (da nisu F_{ab} bi bio 0, što se vidi iz 23). Ovo za poslijedicu ima da su koeficijenti ispred tih kovektora 0.

$$\begin{aligned} w^a\alpha_a &= 0\\ w^a\beta_a &= 0 && (28)\end{aligned}$$

Što znači da je w^a u jezgri od α_a i β_a. Jednadžbe 28 daju jedno ograničenje na 4-dimenzionalni prostor u kojem inače radimo, što znači da jezgre imaju jednu dimenziju manje pa su trodimenzionalne. Budući da je jezgra F_{ab} presjek jezgri α_a i β_a, ona je dvodimenzionalna jer presijek dva trodimenzionalna potprostora u 4 dimenzije dvodimenzionalan.
Ovi kovektori, također, razapinju (ko)ravninu te ih

možemo odabrati da su okomiti. Tada je kvadrat polja dan s:

$$F^2 = F_{ab}F^{ab} = 2(B^2 - E^2) = 2\alpha^2\beta^2 \tag{29}$$

Kako ne postoje dva okomita vektora vremenskog tipa, ovo je pozitivno samo ako su oba vektora prostornog tipa. Stoga je za magnetski dominiran slučaj ravinina $\alpha - \beta$ prostornog tipa, a jezgra joj je vremenskog tipa.
Kada degenerativno polje F_{ab} zadovolja Maxwellovu jedadžbu $\nabla_{[c}F_{ab]} = 0$ tada su dvodimenzionale jezgre F_{ab} integrabilne tj. tvore dvoddimenzionalne podmnogostrukosti, što ćemo pokazati u idućem potpoglavlju. U magnetskom slučaju ($F^2 > 0$) te mnogostrukosti su vremenskog tipa. Ukoliko presječemo takve mnogostrukosti vremenskog tipa s hiperplohom prostornog tipa, dobit ćemo silnice magnetskog polja kako ih vidi promatrač čija je četverobrzina ortogonalna na prethodno navedenu hiperplohu. Zbog svega navedenog, podmnogostrukosti koje čine jezgru F_{ab} predstavljaju evoluciju silnica polja pa je zbog toga nazivamo ploha polja. Za primjetiti je kako ploha polja ne ovisi o promatraču, za razliku od samoga polja, što bitno pojednostavljuje promatranje problema. Nadalje, uvjet besilnosti $F_{ab}j^b = 0$ se svodi na to da struja j^a je tangencijalna na plohu polja. To za poslijedicu ima da je u besilnoj plazmi, u kojoj nema električnog polja, struja tangencijalna silnicama magnetskog polja. Mikroskopski, čestice će ciklotronski obilaziti silnice polja, međutim, makroskopski će izgledati kao da su priljepljene za silnicu.

B. Diferencijalne forme

Jezik diferencijalni formi je onaj u kojem klasična elektrodinamika poprima najljepši oblik. Štoviše, budući da je svako besilno polje degenerirano, jezik diferencijalnih formi postaje još korisniji i pruža nam mnoštvo alata s kojima možemo promatrati probleme.
Tenzor polja F_{ab} je, zbog svoje antisimetričnosti, 2-forma F koja je zatvorena

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{30}$$

Što izravno slijedi iz Faradayevog zakona.
Uvjet degeneriranosti, u jeziku formi izražavamo pomoću vanjskog produkta kao:

$$F \wedge F = 0 \tag{31}$$

Što nije ništa drugo nego jednadžba $F_{[ab}F_{cd]} = 0$.
Također, vidimo da se u 23 upravo skriva definicija vanjskog produkta stoga pišemo:

$$F = \alpha \wedge \beta \tag{32}$$

Forme koje imaju ovo svojstvo nazivaju se jednostavne.

1. *Teorem smrznutog toka*

Ukoliko električno polje u referntnom sustavu definiranom s četverovektorom U^a iščezava,

$$U \cdot F = 0 \tag{33}$$

tada je magnetski tok "smrznut" niz tok vektora U^a. Tj. trebamo pokazati:

$$\mathcal{L}_U F = 0 \tag{34}$$

Pomoću Cartanove magične formule dokaz je trivijalan.

$$\mathcal{L}_U F = U \cdot \mathrm{d}F + \mathrm{d}(U \cdot F) \tag{35}$$

Prvi član iščezava zbog Faradayevog zakona, a drugi iz pretpostavke teorema.
Teorem smrznutog toka nam je bitan zbog dokazivanja integrabilnosti jezgre F. Da dokažemo da dvodimenzionalni vektor definiran jezgrom F formira plohu radimo slijedeće. Izaberemo bilo koji vektor u t.d. $u \cdot F = 0$. Po teoremu smrznutog toka, ovo implicira $\mathcal{L}_u F = 0$. Zatim izaberemo drugo vektorsko polje b za koje vrijedi isto $b \cdot F = 0$, ali da je na 3-plohi koja je okomita na u. Sada proširimo b s plohe u prostor tako da cijelo vrijeme imamo $\mathcal{L}_u b = 0$. Ukoliko pogledamo Leibnitzovo pravilo za Liejeve derivacije veličine $\mathcal{L}_u(b \cdot F)$ dobijemo

$$\mathcal{L}_u(b \cdot F) = b\mathcal{L}_u F + (\mathcal{L}_u b)F \tag{36}$$

Prvi član iščezava iz definicije u, a drugi zbog načina na koji smo proširili b u prostor. Stoga je

$$\mathcal{L}_u(b \cdot F) = 0 \tag{37}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba prvog reda, no za početni uvjet smo imali da je $b \cdot F = 0$ na plohi. To nam pokazuje da se tijekom proširenja polja b u prostor produkt ne mijenja što znači da u čitavom prostoru imamo

$$b \cdot F = 0 \tag{38}$$

Pokazavši ovo, pronašli smo i drugi vektor koji u čitavom prostoru anihilira F, ali pokazali smo da i ta dva vektora moraju komutirati zbog načina na kojeg smo vektor b proširili u prostor. Budući da vektori anihiliraju F to su upravo vektori koji čine jezgru F, a pošto komutiraju formiraju plohu pa je stoga jezgra F integrabilna i čini plohu polja.

2. Eulerovi potencijali

Iz Maxwellovih jedadžbi slijedi, barem lokalno, da 2-formu polja F možemo dobiti iz 1-forme A koristeći vanjsku derivaciju

$$F = \mathrm{d}A \tag{39}$$

Za zatvorene, jednostavne 2-forme, zbog postojanja plohe polja, možemo pisati

$$F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 \tag{40}$$

Ovo se lako pokaže. Izaberemo kordinate (x^{A}, y^i), A, i = 1, 2. I neka u tim kordinatama y^i bude konstantan na plohi polja. Tada F možemo pisati kao $F = f(x^{\mathrm{A}}, y^i)\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2$. Tada je:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial f}{\partial x^{\mathrm{A}}}\mathrm{d}x^{\mathrm{A}} \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \tag{41}$$

No iz Faradyevog zakona znamo da ova forma mora iščezavati. Članovi s parcijalnim derivacijama po y kordinatama iščezavaju jer radimo vanjski produkt istih formi, a u prvom članu vidimo da mora vrijediti $f = f(y^i)$ da bi uvjet bio ispunjen. Redefiniranjem jedne od dvije kordinate kao

$$\bar{y^1}(y^1, y^2) = \int^{y^1} f(t, y^2)\mathrm{d}t \tag{42}$$

Možemo dobiti traženi oblik jer

$$\mathrm{d}\bar{y^1} = f(y^1, y^2)\mathrm{d}y^1 + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\int^{y^1} f(t, y^2)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y^2 \tag{43}$$

Vanjskim produktom s $\mathrm{d}y^2$ dobijemo

$$\mathrm{d}\bar{y^1} \wedge \mathrm{d}y^2 = f(y^i)\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 = F \tag{44}$$

Plohe polja su presjeci hiperploha konstantnih ϕ_1 i ϕ_2, po definiciji. U Eulerovim potencijalima, koji su dva skalarna polja, zapisana je sva sloboda koju može imati bilo koje degenerirano elektromagentsko polje.
Budući da su sva degenerativna polja besilna, formuliramo besilnu teoriju kao teoriju dva skalarna polja. Uvjet 8 s početka možemo zapisati pomoću 3-struje J koja je Hodgeov dual 1-struje koje smo do sada koristili, $J = *j$ pa iz definicije duala imamo:

$$F_{a[b}J_{cde]} = 0 \tag{45}$$

Koristeći 1-forme α i β gornji uvjet možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge J &= 0 \\ \beta \wedge J &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

Koristeći Maxwellovu jednadžbu $\mathrm{d} * F = J$ te $\alpha = \mathrm{d}\phi_1$ i $\beta = \mathrm{d}\phi_2$ možemo gornje jednadžbe napisati kao

$$\mathrm{d}\phi_i \wedge \mathrm{d} * F = 0, i = 1, 2 \tag{47}$$

Budući da je $\mathrm{d}^2 = 0$, gornju jednadžbu možemo pisati kao

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi_i \wedge *F) = 0 \tag{48}$$

Veličine u zagradi, $\mathrm{d}\phi_i \wedge *F$, nazivamo Eulerovim strujama jer vidimo da za njih vrijedi zakon kontinuiteta.
Akciju možemo isto tako zapisati pomoću Eulerovih potencijala. Krenemo od standardnog oblika

$$S = -\frac{1}{2}\int F \wedge *F \tag{49}$$

Te samo uvrstimo Eulerove potencijale

$$S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 \wedge *(\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2) \tag{50}$$

Variranje ove akcije po potencijalima ϕ_1 i ϕ_2 producira Eulerove struje kao par Euler-Lagrangeovih jednadžbi.
Ova akcija je skalar, što implicira očuvanje tenzora energije i momenta kada su jednadžbe gibanja ispunjene. Ovo smo i očekivali zbog toga što smo i počeli s besilnim uvjetom koji upravo to govori.

II. RJEŠENJA

A. Magnetski monopol

2-forma F elektromagnetskog polja za magnetski monopol glasi:

$$F = q \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \tag{51}$$

Uz napomenu da je magnetski naboj u ovom slučaju dan kao $4\pi q$ zbog faktora koji dođe nakon integracije toka

$$\Phi = \int_{S^2} F = q\int \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = 4\pi q \tag{52}$$

Da je ovo uistinu 2-forma elektromagnetskog polja magnetskog monopola, možemo se uvjeriti iz rastava 2-forme F na električno i magnetsko polje:

$$E = -X \cdot F \tag{53}$$

$$B = X \cdot *F \tag{54}$$

Gdje je X neko općenito vektorsko polje, ali u ovom slučaju ćemo uzeti da je to 4-brzina promatrača u.

Za stacionarnog promatrača s 4-brzinom $u = \partial_t$ odmah vidimo da sve komponente električnog polja $E = E_\mu \mathrm{d}x^\mu$ iščezavaju. Da bi izračunali magnetsko polje, potrebno je izračunati Hodgeov dual elektromagnetskog tenzora čija je formalna definicija komplicirana, ali se za jednostavne forme lako pogodi i glasi:

$$*F = \frac{q}{r^2}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r \tag{55}$$

Lako se vidi da magnetsko polje ima oblik

$$B = \frac{q}{r^2}\partial_t \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r = \frac{q}{r^2}\mathrm{d}r \tag{56}$$

Što u vektorskom jeziku ima poznatu formu

$$\vec{B} = \frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{57}$$

Kad smo pokazali da je 51 zaista tenzor magnetskog monopola, možemo pokazati i da zadovoljava besilne uvjete. To odmah slijedi iz jednadžbi 46 i činjenice da je 3-forma struje jednaka 0 što znači da je ovo i vakuumsko rješenje.

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{d} * F = \mathrm{d}\left(\frac{q}{r^2}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r\right) \\ &= -2\frac{q}{r^3}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r \\ &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

Sada znamo da ovo polje možemo napisati pomoću dva Eulerova potencijala, međutim to je za ovako jednostavno polje bilo i prije očito. Imamo:

$$\begin{aligned} F &= q \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \\ &= \mathrm{d}(-q\cos\theta) \wedge \mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{59}$$

I očitamo Eulerove potencijale kao: $\phi_1 = -q\cos\theta$ i $\phi_2 = \varphi$.

B. Izlazni tok energije

Za razliku od prethodnog rješenja, ovo rješenje će imati struju j^a različitu od 0 te će biti besilno. Pretpostavimo idući oblik rješenja:

$$F = \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u \tag{60}$$

Gdje je u retardirano vrijeme $u = t - r_*$, a $\zeta = \zeta(\theta, \varphi, u)$. Za primjetiti je kako smo odabrali da nemamo eksplicitnu ovisnost o r. Ovo rješenje je očito zapisano u obliku dva Eulerova potencijala u i ζ, ali to ne znači da je besilno. Moramo još provjeriti besilni uvjet, tj. $\mathrm{d}\phi_i \wedge J = 0$ za što nam treba hodge dual kod računanja struje J. Rješenje u Schwarzschildovom prostor vremenu ima zanimljiva svojstva koja će nam pomoći pri tome. Prvo, što smo mogli i naslutiti, 1-forma $\mathrm{d}u$ je svjetlosnog tipa. To lako provjerimo ukoliko pokušamo napraviti skalarni produkt u tortroise kordinatama koji je 0 zbog toga što se faktori ispred $\mathrm{d}t^2$ i $\mathrm{d}u^2$ razlikuju samo do na predznak. Nadalje, ukoliko rastavimo $\mathrm{d}\zeta$ na komponente:

$$\mathrm{d}\zeta = \zeta_{,u}\mathrm{d}u + \zeta_{,\theta}\mathrm{d}\theta + \zeta_{,\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{61}$$

Vidimo da u produktu $\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u$ prvi član otpada zbog toga što je $\mathrm{d}u$ svjetlosnog tipa. Međutim, otpadaju i ostala dva člana zato što je metrika dijagonalna. Budući da tražimo dual, a dual se mora sastojati od dvije forme koje su okomite na početne dvije, odmah vidimo da je $\mathrm{d}u$ i u dualu zbog toga što zadovoljava navdene uvjete. Što se tiče druge forme, $\mathrm{d}\zeta$, za nju moramo pronaći neku 1-formu koja rotirana za $\pi/2$ u 2D ravnini okomitoj na $\mathrm{d}u$. Za primjetiti je kako ta ravnina nije jednoznačno određena jer uvijek možemo dodati $\mathrm{d}u$ dio na nju. Međutim, to nam ne stvara problem zbog toga što na kraju imamo vanjski produkt s $\mathrm{d}u$ koji taj dio poništi. Takvu operaciju označavamo s $\star$. Dual tada izgleda kao:

$$\begin{aligned} *F &= *(\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u) \\ &\sim \star\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{62}$$

Struja je vanjska derivacija duala

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{d} * F \\ &\sim \mathrm{d}(\star\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}u) \\ &\sim (\mathrm{d}\star\mathrm{d}\zeta) \wedge \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{63}$$

Kako je $\mathrm{d}\star\mathrm{d}\zeta$ 2-forma i sastavljena je samo $\mathrm{d}\theta$ i $\mathrm{d}\varphi$, ona im mora biti proporcionalna. Zato imamo:

$$J \sim \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \tag{64}$$

Konkretno, dobije se točna relacija kao:

$$J = (\Delta_2\zeta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \tag{65}$$

Odavde se lako vidi da vanjski produkt ovakve struje s vanjskim derivacijama Eulerovih potencijala iščezava i da je rješenje besilno. Energija koja se zrači iz ovog sustava se, kao i uvijek, može iskazati pomoću tenzora energije-impulsa:

$$T_{ab} = |\mathrm{d}\zeta|^2(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b \tag{66}$$

što implicira da je tok Killingove energije u vremenu u na $r = \infty$

$$\mathcal{P}(u) = \lim_{r\to\infty}\int T_{ab}(\partial_t)^a(\mathrm{d}r)^b \mathrm{d}\Omega = \int |\mathrm{d}\zeta|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{67}$$

Primjećujemo da je ovo čisto izlazno rješenje, da nema nikakvog raspršenja prema natrag od zakrivljeno prostor vrijeme, što je otkrio Robinson.

C. Izlazni tok u Kerrovom prostorvremenu

Kerrova metrika u Boyer-Lindquistovim kordinatama ima slijedeći oblik:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{3Mar\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\ &+ \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 \\ &= -\frac{\Sigma\Delta}{A}\mathrm{d}t^2 + \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi - \Sigma_Z\mathrm{d}t)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2\end{aligned} \tag{68}$$

Gdje su: $\Sigma = r^2+a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2-2Mr+a^2$, $A = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$ i $\Omega_z = 2Mar/A$. Ukoliko upotrijebimo iduću supstituciju:

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u + ((r^2+a^2)/\Delta)\mathrm{d}r \tag{69}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\bar{\varphi} + (a/\Delta)\mathrm{d}r \tag{70}$$

dobijemo kordinate koje su regularne na *prošlom* horizontu događaja pa su korisne prilikom opisa radijacije. Metrika izgleda:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}r(\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}) + (r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}^2 \\ &+ \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \frac{2Mr}{\Sigma}(\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi})^2\end{aligned} \tag{71}$$

Možemo vidjeti da je forma $(\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi})^2$ svjetlosnog tipa i okomita na $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}\bar{\varphi}$ te $\mathrm{d}\theta$.
Zbog svega navedenog, iz analogije slučaja u Schwarzschildom prostor vremenu, pišemo ansatz

$$F = \mathrm{d}\zeta \wedge (\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}) \tag{72}$$

Međutim, primjećujemo ako kao prije ostavimo ζ kao funkciju retardiranog vremena u, nemamo garancije da će $\mathrm{d}F$ iščezavati. Zbog toga moramo pretpostaviti malo općenitiji ansatz u obliku

$$F = (A\mathrm{d}\theta + B\mathrm{d}\bar{\varphi}) \wedge (\mathrm{d}u - a\sin^2\theta\mathrm{d}\bar{\varphi}) \tag{73}$$

Gdje su A i B funkcije u, θ i $\bar{\varphi}$. Nametanje Faradayevog zakona daje

$$\mathrm{d}F = (A_{,\bar{\varphi}} - B_{,\theta} + a\sin^2\theta A_{,u})\mathrm{d}\bar{\varphi}\wedge\theta\wedge\mathrm{d}u \tag{74}$$

Što znači da imamo diferencijalnu jednadžbu

$$A_{,\bar{\varphi}} - B_{,\theta} + a\sin^2\theta A_{,u} = 0 \tag{75}$$

kao uvjet na funkcije A i B.
Kao i prethodnom slučaju, opet nema odbijanja raspršenja nazad o potencijal.

D. Michelov monopol

Ukoliko plohu zvijezde uzmemo kao savršeni vodič koji se rotira kutnom brzinom Ω i u središte takve zvijezde stavimo magnetski monopol dobijemo Michelovo rješenje. 4-brzina vodiča je $u \propto \partial_t + \Omega\partial_\phi$. Za primjetiti je kako rotirajući vodič u monopolnom magnetskom polju razvije na svojoj plohi raspodjelu naboja σ koja je proporcionalna $\cos\theta$. Zbog toga vidimo da nam uvjet degeneriranosti $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ ne stoji. To lako da provjeriti tako što znamo da je električno polje okomito na vodič u njegovoj blizini što za poslijedicu ima da je su električna i magnetska polja na polovima paralelni i različiti od nule. Međutim, slučaj koji promatramo je takav da je kutna brzina Ω dovoljno velika da čupa naboje s polova i stvara plazmu i time zasjeni površinsku raspodjelu naboja i napravi uvjete u kojima možemo koristiti formalizam besilnog elektromagnetizma.
Za početak, moramo pretpostaviti da električno polje nema paralelnu komponente s površinom, tj. $u \cdot F$ je 0 u paralelnom smjeru. F koji zadovoljava taj uvjet ćemo pokušati pronaći superponirajući monopolno polje i polje izlaznog toka. Za primjetiti je da su monopolno polje i F izlaznog toka rješenja jednadžbi besilnog elektromagnetizma, no zbog nelinearnosti istih, nemamo garanciju da je i njihova superpozicija besilno rješenje. Međutim, monopolno rješenje je vakuumsko, nema izlazne struje pa je superpozicija takvog rješenja i nekog drugog opet rješenje. Zbog toga onda slijedi ansatz

$$F = q\sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\phi + C\mathrm{d}u) \tag{76}$$

Gdje je C neka funkcija kordinata θ i u. Rubni uvjet nam govori

$$\begin{aligned}u \cdot F &\propto (\partial_t + \Omega\partial_\varphi)\cdot\mathrm{d}\theta\wedge(\mathrm{d}\varphi + C\mathrm{d}u) \\ &\propto \mathrm{d}\theta(\Omega + C)\end{aligned} \tag{77}$$

Uvjet je da tangencijalna komponenta $u \cdot F$ te budući da je $\mathrm{d}\theta$ tangencijalna na sferu, fiksiramo konstantu C kao

$$C = -\Omega \tag{78}$$

Tada je polje

$$F = q\sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\varphi - \Omega\mathrm{d}u) \tag{79}$$

Ovo je zapravo generalizirani Michelov monopol jer je on radio s konstantnim Ω, a ovdje vidimo da to može biti funkcija θ i u. Mi ćemo ga nadalje smatrati konstantnim.

Struja $J = \mathrm{d} * F$ ovog rješenja se dobije kao u odjeljku s izlaznim tokom jer monopol ne doprinosi.

$$\begin{aligned} J = \mathrm{d} * F &= \mathrm{d} * [(-q\Omega \sin\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi)] \\ &= -q\Omega \mathrm{d}(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u) \\ &= -2q\Omega \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{80}$$

Ukoliko normaliziramo ove diferencijalne forme množenjem i dijeljenjem s r

$$J = -\frac{2q\Omega\cos\theta}{r^2} r\mathrm{d}\theta \wedge r\sin\theta \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \tag{81}$$

prepoznajemo da gornjoj formi nedostaje $\mathrm{d}r$ do volumne stoga, zbog duala, vektor 4-struje glasi

$$j^a = -\frac{2q\Omega\cos\theta}{r^2}(\partial_r)^a \tag{82}$$

Tenzoru energije-impulsa ne pridonosi monopolski dio pa imamo, kao prije, $T_{ab} = |\mathrm{d}\zeta|^2(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b$ što se evaluira u

$$T_{ab} = q^2\Omega^2 \sin^2\theta(\mathrm{d}u)_a(\mathrm{d}u)_b \tag{83}$$

što nakon integracije po sferi daje

$$\mathcal{P} = \frac{8\pi}{3} q^2\Omega^2 \tag{84}$$

Zanimljiva stvar je pogledati i plohu polja za Michelov monopol u ravnom prostoru. Eulerovi potencijali se lagano očitaju

$$\phi_1 = q\cos\theta \tag{85}$$

$$\phi_2 = \varphi - \Omega(t - r) \tag{86}$$

Za $t = const.$ linije polja su dane s

$$\begin{aligned} \theta &= const. \\ \varphi + \Omega r &= const. \end{aligned} \tag{87}$$

Primjećujemo da silnice polja, za određeni $\theta = \theta_0$ sada nisu više pravci, nego postaju arhimedove spirale da bi se očuvala priroda vremenskog tipa plohe polja. Jer ukoliko bi silnice polja bile pravci, postojala bi neka udaljenost na kojoj bi se rotirale brzinom bržom od brzine svjetlosti. Dodatno, pogledajmo induciranu metriku na plohi polja. Metrika Minkowskog je

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2) \tag{88}$$

Supstituiranjem dobijamo

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + r^2\sin^2\theta_0\Omega^2\mathrm{d}u^2 \tag{89}$$

$$= (-1 + H^2r^2)\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r \tag{90}$$

gdje je $H = \sin^2\theta_0\Omega^2$ Hubbleova konstanta Sitterovog prostora, analogon prostora Minkowskog na 4-sferi.

E. Magnetosfera crne rupe

Pretpostavimo da imamo rotirajuću crnu rupu u asimptotski uniformom magnetskom polju. Iako crna rupa nema površinu pa tako ne može ni razviti površinsku gustoću naboja, dobije se slično rješenje kao i u prethodnom slučaju. No, ovog puta superponiramo magnetski monopol i tok na rotirajućoj crnoj rupi što zahtjeva korištenje Kerrove metrike. Problem je što to, ovoga puta, ne možemo učiniti analitički pa se moramo koristiti preturbacijskim računom. Perturbiramo preko parametra a što je ekvivalentno perturbaciji preko brzine rotacije horizonta Ω_H koji su povezani relacijom

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \tag{91}$$

Iako smo prije radili u ravnom prostoru, rješenje koje smo dobili je valjano i u Schwarzschildovom. Također, u nultom redu računa smetnje, ovo rješenje je rješenje samo Michelovog monopola. Zato možemo pretpostaviti ansatz u koji je isti kao i u Schwarzschildovom slučaju s time da, uz zamjernu pripadajućih metrika, Schwarzschildove kordinate zamijenimo Boyer-Lindquistovim. Stoga je ansatz:

$$F = q\sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\varphi - \Omega\mathrm{d}u) \tag{92}$$

Ovdje treba paziti i ne izjednačavati Ω s Ω_H zbog toga što nemamo vodič na površini i situacija je bitno drugačija. Zbog toga nam treba neki drugi rubni uvjet za rješenje, a to se pokaže da je regularnost na horizontu događaja. Za provjeru ovog rješenja, prvo moramo ustanoviti da je $\mathrm{d}F = 0$ što je trivijalno. Nadalje, moramo pokazati da gornji ansatz zadovoljava besilne jednadžbe u prvom redu računa smetnje. Budući da je nulti red računa smetnje Michelov monopol, znamo da struja J nema nulti red, nego samo korekcije u višim redovima. Zbog toga možemo pisati, za prvi red:

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} \wedge J^{(1)} &= 0 \\ \alpha^{(0)} \wedge J^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{93}$$

Lako se vidi da onda gornje jednadžbe postaju

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta \wedge J^{(1)} &= 0 \\ \mathrm{d}\varphi \wedge J^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{94}$$

Da bi ovo izračunali moramo znati korekciju struje u prvom redu. Pa je

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \mathrm{d}(*F)^{(1)} \\ &= \mathrm{d}\left(*^{(0)}F^{(1)}\right) + \mathrm{d}\left(*^{(1)}F^{(0)}\right) \end{aligned} \tag{95}$$

Što će iščeznuti zbog toga što oba oba dijela u sebi imaju forme $\mathrm{d}\theta$ i $\mathrm{d}\varphi$.
Sada moramo pripaziti na rubne uvjete. Budući da su $\mathrm{d}\varphi$ i $\mathrm{d}u$ singularni na horizontu, možda postoji neka vrijednost Ω koja je točno takva da horizont postane regularan. Zbog toga uvodimo nove kordinate

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\tilde{\varphi} - \frac{a}{\Delta}\mathrm{d}r \tag{96}$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v - \frac{2r^2 + a^2}{\Delta}\mathrm{d}r \tag{97}$$

Koje eliminiraju singularnosti. Supstituiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi - \Omega\mathrm{d}u &= \mathrm{d}\tilde{\varphi} - \Omega\mathrm{d}u \\ &+ \frac{\mathrm{d}r}{\Delta}\left(2\Omega(r^2 + a^2) - \Omega_H(r^2 + a^2)\right)\end{aligned} \tag{98}$$

Budući da je Δ iščezava na horizontu, jedini način da ovo bude regularno je da vrijedi

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_H \tag{99}$$

I onda je elektromagnetsko polje

$$F = q\sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge (\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\Omega_H\mathrm{d}u) \tag{100}$$

regularno na budućem horizontu.

F. Podijeljeni monopol

Ukoliko sada pretpostavimo da je crna rupa nabijena dipolnim nabojem, dobijemo zanimljivo rješenje. Unutar svjetlosnog cilindra se ne događa ništa zanimljivo, no izvan njega postoje snažne indikacije da silnice polja više nisu zatvorene te asimptotski izgledaju radijalno, kao kod monopola. Problem je, međutim, što iz gornjeg dijela silnice izlaze, a u donji ulaze. To stvara diskontinuitet u ekvatorijalnoj ravnini i inducira površinsku raspodjelu struje. Stoga se vidi da je dipol najbolje modelirati podijeljenim monopolom što nije nikakav problem u Kerrovoj metrici zbog toga što je simetrična na takve refleksije. Jedino nam preostaje odrediti plohu struje kao rubni uvjet. Dakle, ukoliko polje pišemo kao

$$F = \mathrm{sign}(\cos\theta)F^{\mathrm{Michel}} \tag{101}$$

Iz Amperovog zakona lako se dobije površinska kako izgleda jedandžba za površinsku struju

$$F|_{\mathcal{S}} = 0 \tag{102}$$

$$*F|_{\mathcal{S}} = K/2 \tag{103}$$

Te računanjem duala kao i svaki puta do sada, dobijamo:

$$K = \frac{2q}{r^2}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r + 2q\Omega\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \tag{104}$$

III. POLJE SA SIMETRIJAMA

A. Polje s jedno simetrijom

Uzevši da je polje F degenerirano i da ima neku simetriju, zanima nas što možemo reći o Eulerovim potencijalima za takvo polje. Za početak pretpostavimo da postoji Killingovo vektorsko polje X^a tako da

$$\mathcal{L}_X F = 0 \tag{105}$$

Koristeći Cartanovu magičnu formulu i Faradayev zakon $\mathrm{d}F = 0$ gornji uvjet se može prepisati kao

$$\mathrm{d}(X \cdot F) = 0 \tag{106}$$

Što nadalje znači da postoji neka funkcija f za koju vrijedi

$$X \cdot F = \mathrm{d}f \tag{107}$$

Budući da je $F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2$, gornji izraz postaje

$$(X \cdot \mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (X \cdot \mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{d}f \tag{108}$$

Ukoliko pretpostavimo da je $\mathrm{d}f = 0$, zbog toga što su Eulerovi potencijali linearno neovisni, oba člana u gornjem izrazu iščezavaju. To znači da su funkcije $\phi_{1,2}$ konstantne niz X^a. Drugim riječima, Eulerovi potencijali su neovisni o kordinatama. Međutim, to je samo posebni slučaj.
Za generalizaciju, koristimo činjenicu da Eulerovi potencijali nisu jednoznačno određeni. Možemo koristiti bilo koje druge potencijale za koje vrijedi $F = \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 = \mathrm{d}\tilde{\phi_1} \wedge \mathrm{d}\tilde{\phi_2}$. Što je samo uvjet da preslikavanje $(\phi_1, \phi_2) \to (\tilde{\phi_1}, \tilde{\phi_2})$ ima jedinični Jacobijan. Koristeći ovu slobodu, možemo izabrati $\tilde{\phi_1} = -f$, dok drugi potencijal, $\tilde{\phi_2}$, dobijemo rješavanjem diferencijalne jednadžbe koja slijedi iz Jakobijana. Nova jednadžba 108 tada postaje

$$(X \cdot \mathrm{d}\tilde{\phi_1})\mathrm{d}\tilde{\phi_2} - (X \cdot \mathrm{d}\tilde{\phi_2})\mathrm{d}\tilde{\phi_1} = -\mathrm{d}\tilde{\phi_1} \tag{109}$$

Stoga, direktno iz ovoga zaključujemo

$$\begin{aligned} X \cdot \mathrm{d}\tilde{\phi_1} &= 0 \\ X \cdot \mathrm{d}\tilde{\phi_2} &= 1 \end{aligned} \tag{110}$$

Dakle, zaključujemo da možemo izabrati takve potencijale da je jedan invarijantan na X^a, dok drugi ima konstantnu derivaciju uz vektorsko polje koje generira simetriju.

B. Polje sa dvije komutirajuće simetrije

Uzmimo sad da postoje dva vektorska polja X^a i Y^a takva da vrijedi $[X, Y] = 0$ i da su simetrije polja F, tj. $\mathcal{L}_X F = \mathcal{L}_Y F = 0$. Koristeći rezultate iz prethodnog potpoglavlja, znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} X \cdot F &= \mathrm{d}f \\ Y \cdot F &= \mathrm{d}g \end{aligned} \tag{111}$$

Ukoliko izračunamo vanjski produkt ove dvije veličine dobijemo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g &= (X \cdot F) \wedge (Y \cdot F) \\ &= (X \cdot Y \cdot F)F \end{aligned} \tag{112}$$

gdje skalar $X \cdot Y \cdot F = F_{ab} X^a Y^b$ mora biti konstantan jer:

$$\mathrm{d}(X \cdot Y \cdot F) = \mathcal{L}_Y (X \cdot F) - Y \cdot \mathrm{d}(X \cdot F) = 0 \tag{113}$$

Sada, problem kao i prije podijelimo na dva slučaja:

$$\begin{aligned} X \cdot Y \cdot F &= 0 \\ X \cdot Y \cdot F &\neq 0 \end{aligned} \tag{114}$$

U prvom slučaju, ukoliko obje veličine $X \cdot F$ i $Y \cdot F$ iščezavaju, onda su oba Eulerova potencijala invarijantni s obzirom ta vektorska polja. Zato pretpostavimo da je jedan od njih dva $X \cdot F \neq 0$. Sada, opet koristeći ono što smo dobili u slučaju s jednom simetrijom zaključujemo da možemo odabrati $\phi_1 = -f$. Budući da u ovom slučaju vrijedi $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = 0$, također zaključujemo da je funkcija $g = g(\phi_1)$. Tada pišemo

$$Y \cdot F = (Y \cdot \mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (Y \cdot \mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1 = g'(\phi_1)\mathrm{d}\phi_1 \tag{115}$$

Stoga, očitavamo

$$\begin{aligned} X \cdot \mathrm{d}\phi_1 &= 0, \quad X \cdot \mathrm{d}\phi_2 = 1 \\ Y \cdot \mathrm{d}\phi_1 &= 0, \quad Y \cdot \mathrm{d}\phi_2 = \kappa(\phi_1) \end{aligned} \tag{116}$$

gdje je $\kappa\phi_1 = -g(\phi_1)$.
Funkcija $\kappa\phi_1$ ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju. Budući da su oba potencijala su invarijantna s obzirom na

$$Z = Y - \kappa(\phi_1)X \tag{117}$$

polje Z^a generira simetriju polja i tangencijalno je na plohu polja. Ukoliko su X^a i Y^a prostornog tipa Killingovi vektori, tada je i Z^a Killingov vektor ukoliko je $\kappa(\phi_1)$ konstantan. No kako su Eulerovi potencijali konstantni na plohi polja, zaključujemo da je Z^a uvijek Killingov vektor na induciranoj metrici plohe polja. Stoga kažemo da je Z^a Killingov vektor plohe polja.
U drugom slučaju kada je $X \cdot Y \cdot F \neq 0$, zaključujemo da obje veličine X^a i Y^a moraju biti različite od nule zbog linearne neovisnosti Eulerovih potencijala. Tada možemo izabrati Eulerove potencijale jednostavno kao $\phi_1 = -f$ i $\phi_2 = g/\lambda$, gdje je $\lambda = F_{ab} X^a Y^b$. Tada, zbog svega navedenog poviše, jednostavno dobijemo

$$\begin{aligned} X \cdot \mathrm{d}\phi_1 &= 0, \quad X \cdot \mathrm{d}\phi_2 = 1 \\ Y \cdot \mathrm{d}\phi_1 &= \lambda, \quad Y \cdot \mathrm{d}\phi_2 = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

U ovom slučaju ni jedna linearna kombinacija od X^a i Y^a neće biti tangencijalna na plohu polja.

IV. POLJE S STACIONARNOM OSNOM SIMETRIJOM

A. 2+2 dekompozicija prostor vremena

U ovom slučaju Killingovi vektori su dani s

$$\begin{aligned} X &= \partial_\varphi \\ Y &= \partial_t \end{aligned} \tag{119}$$

Ukoliko se radi da je $\partial_t \cdot F = 0$ i $\partial_\varphi \cdot F = 0$, tada je polje samo u smjeru $F \sim \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$.
Za $\partial_\varphi \cdot F \neq 0$ koristeći dobivene rezultate možemo pisati:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi(r, \theta) \\ \phi_2 &= \psi_2(r, \theta) + \varphi + \Omega_F(\psi)t \end{aligned} \tag{120}$$

Gdje smo κ preimenovali u $-\Omega_F$. Polje tada izgleda

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 \\ &= \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\psi_2 + \mathrm{d}\psi \wedge \eta \end{aligned} \tag{121}$$

gdje je $\eta = \mathrm{d}\varphi + \Omega_F(\psi)\mathrm{d}t$. Za vanjsku derivaciju Ω_F se ne moramo brinuti budući da u polje ulazi kao vanjski produkt s $\mathrm{d}\psi$.
Zbog navedenih simetrija, prostor-vrijeme možemo podijeliti na dva dijela. Poloidalni (r, θ) dio i toroidalni (t, φ) dio. Iako je toroidalni dio inače samo φ dio, ovdje je prirodno uključiti i vrijeme t. Ovo je posebno korisno jer u Kerrovoj metrici, koristeći Boyer-Lindquistove kordinate, ne matrični elementi koji miješaju ova dva dijela tj. metrika je blok dijagonalna s obzirom na poloidalni i

toroidalni dio. Zbog tih svojstava možemo pisati relacije

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^T \wedge \epsilon^P \\ *\epsilon^T &= -\epsilon^P \\ *\epsilon^P &= \epsilon^T \end{aligned} \tag{122}$$

Gdje su

$$\begin{aligned} \epsilon^T &= \sqrt{-g^T} \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi \\ \epsilon^P &= \sqrt{-g^P} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{123}$$

Sada pretpostavimo da imamo vanjski produkt dvije forme $\omega^P \wedge \omega^T$. Dualna forma, zbog ortogonalnosti se sada jednostavno nađe. Uvodimo operator $\star$ koji označava dual na pripadnom podprostoru

$$\begin{aligned} *(\omega^P \wedge \omega^T) &= -(\star\omega^P) \wedge (\star\omega^T) \\ *\omega^P &= \star\omega^P \wedge \epsilon^T \end{aligned} \tag{124}$$

Sada, se vratimo na jednadžbu 121 i primjetimo da su forme koje se nalaze u vanjskom produktu čisto polodijalne ili torodijalne. Prvi član je poloidalan zato imamo

$$*F = \frac{I}{2\pi} \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi - (\star \mathrm{d}\psi_2) \wedge (\star\eta) \tag{125}$$

Gdje je $I = I(\psi)$ funkcija koju ćemo kasnije odrediti, sada je samo znamo kao

$$*(\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\psi_2) = \frac{I}{2\pi} \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi \tag{126}$$

F, također, možemo napisati na idući način

$$F = \frac{I}{2\pi\sqrt{-g^T}} \epsilon^P + \mathrm{d}\psi \wedge \eta \tag{127}$$

Invarijanta F^2 je suma neovisni toroidalnih i poloidalnih djelova pa imamo

$$F^2 = \frac{I^2}{2\pi^2(-g^T)} + |\mathrm{d}\psi|^2 |\eta|^2 \tag{128}$$

Primjećujemo da samo član $|\eta|^2$ jedini može mijenjati predznak dok su ostali pozitivni jer je g^P metrika koja igra ulogu u $|\mathrm{d}\psi|^2$ Riemannovog tipa.

B. Funkcija toka i polarna struja

Za veličinu I pokaže se da ima vrlo zanimljivu interpretaciju. Ukoliko pokušamo izračunati tok kroz kuglinu kapu definiranu ishodištem koordinatnog sustava kao središtem kugle, osi z kao osi simetrije kugline kape te točkom (r, θ) koja definira radijus kugle i veličinu kape dobijemo iduće

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} F &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\phi_2 \\ &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}(\psi \mathrm{d}\phi_2) \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \psi \mathrm{d}\phi_2 \end{aligned} \tag{129}$$

Gdje smo u zadnjoj liniji iskoristili Stokesov teorem. No, ψ je funkcija samo r i θ. Dakle, ne ovise o varijabli integracije te funkcija može izaći ispred integrala. Za ϕ_2 vidimo da jedini doprinos da je φ stoga imamo

$$\int_{\mathcal{S}} F = 2\pi\psi \tag{130}$$

Zbog ovoga gore, funkciju ψ nazivamo funkcijom magnetskog toka.
Zatim pokušamo izračunati struju koja je protekla kroz istu površinu. Struja je, kao 3-forma, dana s $J = \mathrm{d} * F$. Budući da će integral ove veličine po 3-plohi(volumenu) $\mathcal{S} \times \Delta t$ biti naboj, ponovno koristeći Stokesov teorem možemo integrirati po plohi koji taj volumen obuhvaća.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J &= \int_{\mathcal{S}\times\Delta t} \mathrm{d} * F \\ &= \int_{\mathcal{C}\times\Delta t} *F \end{aligned} \tag{131}$$

Pošto se integrali po početnoj i završnoj kopiji kružne kape $\mathcal{S}$ poništavaju, ostaje samo $\int J = \int_{\mathcal{C}\times\Delta t}$. $*F$ očitamo iz 126 i budući da su r i θ, samo prvi dio jednadžbe sudjeluje u integraciji stoga imamo jednostavno

$$\int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J = I(r, \theta)\Delta t \tag{132}$$

Dakle,

$$I(r, \theta) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{S}\times\Delta t} J \tag{133}$$

Sada je očita interpretacija veličine I. To je polarna struja. Nazivamo je polarna, a ne poloidalna jer to ime hoćemo sačuvati za lokalnu gustoću struje već definiranom poloidalnom smjeru.

C. Killingov vektor plohe polja

Već je jasno da forma

$$\eta = \mathrm{d}\varphi - \Omega_F(\psi)\mathrm{d}t \tag{134}$$

ima važnu ulogu u opisivanju magnetosfere. Za bolje razumijevanje prvo pogledajmo brzinu kojom se moramo kretati da bi ostali na plohi polja.

$$\begin{aligned}(\partial_t + \Omega\partial_\varphi)F &= 0 \\ (\partial_t + \Omega\partial_\varphi)\cdot(\mathrm{d}\varphi - \Omega_F(\psi)\mathrm{d}t) &= 0 \\ \Omega - \Omega_F(\psi) &= 0 \qquad (135)\end{aligned}$$

Iz F sudjeluje samo poloidalni dio, a to je η. Dakle, da bi ostali na istoj plohi polja moramo se rotirati brzinom $\Omega = \Omega_F(\psi)$ koja ovisi gdje se nalazimo u poloidalnom prostoru. Definiranjem vektora

$$\chi_F = \partial_t + \Omega_F\partial_\varphi \qquad (136)$$

definirali smo Killingov vektor na plohi polja jer je ψ konstantan na plohi polja, za razliku od prostor-vremena gdje ψ mijenja vrijednost. Ovaj vektor, je uz to ortogonalan na η što smo gore vidjeli postavljanjem uvjeta. To nas vodi na zanimljivu činjenicu. Ukoliko je F električni dominanto tj. $F^2 < 0$ iz jednadžbe 128 dobivamo da η mora biti vremenskog tipa, što zbog ortogonalnosti znači da je χ_F prostornog tipa što znači da bi se trebali rotirati brže od brzine svjetlosti da bi ostali na plohi polja, a to nije moguće. Također, definiramo svjetlosne plohe koje u plohe koje čine vektori η i χ_F kada su oni svjetlosni.

D. Tok energije i angularnog momenta

Ukoliko imamo Killingovo vektorsko polje ξ^a onda postoji pridružena Noetherina struja $\mathcal{J}_\xi$. Za elektromagnetsko polje ona glasi

$$\mathcal{J}_\xi = -(\xi\cdot F)\wedge *F + \frac{1}{4}F^2\xi\cdot\epsilon \qquad (137)$$

Ovo je dual od $-T^a_b\xi^b$ i struja je očuvana samo kada $F_{ab}J^b\xi^a = 0$ tj. kada komponente 4-sile iščezavaju u ξ smjeru. Također, drugi član iščezava ukoliko polje F dijeli simetriju ξ s prostor vremenom. Za prvi član imamo

$$\begin{aligned}\xi\cdot F &= \xi\cdot(\mathrm{d}\phi_1\wedge\mathrm{d}\phi_2) \\ &= (\xi\cdot\mathrm{d}\phi_1)\mathrm{d}\phi_2 - (\xi\cdot\mathrm{d}\phi_2)\mathrm{d}\phi_1 \qquad (138)\end{aligned}$$

Za stacionarna, osnosimetrična polja, prvi član iščezava, a iz drugog ostaje samo $\mathrm{d}\phi_1 = \mathrm{d}\psi$. Za kutno Killingovo polje ∂_φ faktor ispred drugog člana je $\Omega_F(\psi)$, a za vremensko ∂_φ faktor je 1. Stoga dijelimo Noetherinu struju na struju angularnog momenta i struju energije kao

$$\mathcal{J}_L = -\mathrm{d}\psi\wedge *F - \frac{1}{4}F^2\partial_\varphi\cdot\epsilon \qquad (139)$$

$$\mathcal{J}_E = -\Omega_F(\psi)\mathrm{d}\psi\wedge *F + \frac{1}{4}F^2\partial_t\cdot\epsilon \qquad (140)$$

Do sada nismo koristili besilne uvjete, govorili smo općenito o degeneriranim poljima. Budući da je $\phi_1 = \psi$, uvjet izgleda kao $\mathrm{d}\psi\wedge *F = 0$. Koristeći jednadžbu 125 imamo

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}\psi\wedge *F \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}I\wedge\varphi\wedge\mathrm{d}t - \mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}(\star\mathrm{d}\psi\wedge\star\eta) \qquad (141)\end{aligned}$$

Drugi član iščezava zato jer, kad se primjeni vanjska derivacija, sadrži 3 1-forme u poloidalnom prostoru koji je dvodimenzionalan. Iz toga slijedi

$$\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}I = 0 \qquad (142)$$

Što implicira da je $I = I(\psi)$. Stoga je, za stacionalno osnosimetrična polja polarna struja kao i kutna brzina silnica polja Ω_F funkcija samo ψ. Fizikalna interpretacija toga je da poloidalna struja teče uz poloidalne magnetske linije tako da Lorentzova sila uz ∂_φ iščezava. Struje angularnog momenta i energije obje sadrže faktor $\mathrm{d}\psi$ što znači da iščezavaju na plohama konstantnog ψ. Da bi izračunali tok pretpostavimo da imamo krivulju $\mathcal{P}$ u poloidalnom prostoru, drugim riječima, krivulju tijekom koje je $\mathrm{d}\psi = 0$. Rotiranjem oko osi i propagiranjem u vremenu možemo generirati plohu $\mathcal{S} = \mathcal{P}\times S^1\times\Delta t$. Ukupni angularni moment i energija dobiju se integracijom pripadne struje preko $\mathcal{S}$. Drugi članovi u izrazima ne doprinose jer nestaju jer njihovo povlačenje na plohu iščezava. Stoga su tokovi dani kao:

$$\int_{\mathcal{S}}\mathcal{J}_L = -\int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\psi\wedge *F \qquad (143)$$

$$\int_{\mathcal{S}}\mathcal{J}_E = -\int_{\mathcal{S}}\Omega_F(\psi)\mathrm{d}\psi\wedge *F \qquad (144)$$

Budući da je $\mathrm{d}\psi$ poloidalna forma, integral iščezava u smjerovima φ i t. Tok angularnog momenta i Killingove energije možemo tada izraziti vrlo jednostavno koristeći 125 kao

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{P}} I(\psi)\mathrm{d}\psi \qquad (145)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{P}}\Omega_F(\psi)I(\psi)\mathrm{d}\psi \qquad (146)$$

Ovo rješenje nam zapravo govori da su energija i angularni moment očuvani niz poloidalne krivulje budući da gornji integrali iščezavaju u tom smjeru. Zbog toga se kaže da pripadne struje teku niz poloidalne linije polja.

E. Jednadžba toka

Sada ćemo iskoristiti drugu besilnu jednadžbu da izvedemo jedandžbu toka koja se naziva Grad-Shafranova

jednadžba, trans-field jednadžba i u ravnom prostor-vremenu jednadžba pulsara. To je nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba u funkciji ψ.
Drugi besilni uvjet glasi

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}\phi_2 \wedge \mathrm{d} * F \\ &= (\mathrm{d}\psi_2 + \eta - \Omega_F' t \mathrm{d}\psi) \wedge \left(\frac{I'}{2\pi}\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \varphi - \mathrm{d}(\star\mathrm{d}\psi \wedge \star\eta)\right) \\ &= \frac{I'}{2\pi}\mathrm{d}\psi_2 \wedge \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \varphi - \eta \wedge \mathrm{d}(\star\mathrm{d}\psi \wedge \star\eta) \\ &= \frac{II'}{4\pi^2 g^T}\epsilon + \mathrm{d}(\eta \wedge \star\mathrm{d}\psi \wedge \star\eta) - \eta \wedge \star\mathrm{d}\psi \wedge \star\eta \\ &= \frac{II'}{4\pi^2 g^T}\epsilon - \mathrm{d}(|\eta|^2 \star \mathrm{d}\psi \wedge \epsilon^T) + \Omega_F' \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}t \wedge \star\mathrm{d}\psi \wedge \star\eta \\ &= \frac{II'}{4\pi^2 g^T}\epsilon - \mathrm{d}(|\eta|^2 * \mathrm{d}\psi) + \Omega_F' |\mathrm{d}\psi|^2 \langle \mathrm{d}t, \eta\rangle \epsilon \end{aligned} \tag{147}$$

U drugoj liniji smo koristili jednadžbe 120, 134, 125. Od 6 članova samo dva prežive u drugoj liniji, dva iščeznu zato što u sebi sadrže 3 poloidalne 1-forme, jedna iščezne zato što ima 3 toroidalne 1-forme i jedna iščezne zato što u sebi ima dvije iste forme. U idućoj liniji, koristimo dual iz 126, zajedno s 122 i 123. Ostala dva člana dođu od parcijalne integracije. Za slijedeću liniju, koristimo definiciju η iz 134. U poslijednjoj liniji koristimo 122 i 124 kao jednakost $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \epsilon$ uz definiciju produkta

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{p!}\alpha_{m_1 \dots m_p}\beta^{m_1 \dots m_p} \tag{148}$$

Konačno, budući da $\mathrm{d} * \omega = \nabla_a \omega^a$, jednadžbu možemo napisati kao:

$$\nabla_a(|\eta|^2 \nabla^a \psi) + \Omega_F' \langle \mathrm{d}t, \eta \rangle |\mathrm{d}\psi|^2 - \frac{II'}{4\pi^2 g^T} = 0 \tag{149}$$

U ovom obliku jednadžba toka funkcionira za bilo koju metriku koja se može napisati u blok dijagonalnom obliku. Jednadžbe toka za funkciju toka ψ imaju zanimljivo svojstvo da sadrže i funkcije $\Omega_F(\psi)$ i $I(\psi)$ koje također moraju biti nekako određene.
Ukoliko su takve funkcije određene, jednadžba toka postaje kvazilinearna za ψ. Za $|\eta|^2 \neq 0$ jednadžba je drugog reda, s eliptičkim glavnim dijelom. Stoga, u tom slučaju očekujemo jedinstveno rješenje. U slučaju da je η svjetlosni vektor, jednadžba toka je tada prvog reda.
Za analitička rješenja, moramo ograničiti ovisnost ψ na jednodimenzionalni podprostor polodijalnog prostora, tada jednadžba toka postaje obična diferencijalna jednadžba. Onda, ukoliko Ω_F proglasimo konstantom, rubni uvjet za ψ može odrediti $I(\psi)$.
Konačno, stacionarna osnosimetrična rješenja mogu se odrediti numerički tako da krenemo od vremenski ovisnih, ne besilnih početnih uvjeta uz to da ručno mičemo električna polja koja se mogu pojaviti.

F. Topologija silnica

U stacionarnom osnosimetričnom besilnom polju, možemo dobiti općenita ograničenja na polja.

1. *Nema zatvorenih petlji*

U stacionarnom osnosimetričnom besilnom magnetski dominiranom elektromagnetskom polju ne može postojati zatvorena poloidalna silnica polja.
Pod zatvorenom petljom mislimo na zatvoreni skup $\psi = const.$ na kojem $\mathrm{d}\psi \neq 0$. Za primjetiti je kako ove petlje ne odgovaraju pravim silnicama zbog toga što se one lome u ∂_φ smjeru. Da bi ovo pokazali, koristimo činjenicu da je Eulerova struja $J_2 = \mathrm{d}\phi_2 \wedge *F$ zatvorena 3-forma. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji zatvorena linija u poloidalnom smjeru, tj. neka je glatka level $\mathcal{C}$ krivulja zatvorena. Formirajmo plohu tako da krivulju $\mathcal{C}$ zavrtimo u torus u ∂_φ smjeru te propagiramo u vremenu tako da dobijemo zatvorenu 3-plohu $\mathcal{S} = \mathcal{C} \times S^1 \times \Delta t$. Integriranjem J_2 na ovoj plohi, početni i završni torus se ponište. Ploha vremenskog tipa koja ostaje je konstantnog ψ, ali ima $\mathrm{d}\psi \neq 0$. Stoga možemo iskoristiti činjenicu da ukoliko je neka ploha funkcija y i definirana je s $y = y_0$ i neka je vektor v takav da $v \cdot \mathrm{d}y = 1$ tada je povlačenje 3-forme ω jednako povlačenju $v \cdot (\mathrm{d}y \wedge \omega)$. Zato imamo

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\phi_2 \wedge *F \\ &= \int_{\mathcal{S}} v \cdot (\mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\phi_2 \wedge *F) \\ &= \int_{\mathcal{S}} v \cdot (F \wedge *F) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} F^2 v \cdot \epsilon \\ &= \pi \Delta t \oint_{\mathcal{C}} F^2 \sqrt{-g^T} v \cdot \epsilon^P \end{aligned} \tag{150}$$

gdje smo u zadnjoj liniji integrirali torioidalan dio integrala. Kontrakcija poloidalne 1-forme $v \cdot \epsilon$ s tangentnim vektorom od $\mathcal{C}$ iščezava samo ako je v također tanketan na $\mathcal{C}$, što ne može biti jer $v \cdot \mathrm{d}y = 1$. Stoga, ako je polje magnetski dominantno($F^2 > 0$) svuda na $\mathcal{C}$ integral ne može iščeznut zato imamo kontradikciju.

2. Lema za svjetlosnu plohe

Svjetlosne plohe su plohe definirane kao plohe koje čine vektori η i χ_F kada su oni svjetlosni. Ova lema će biti jako korisna u magnetosferama pulsara i crnih rupa. Ona glasi:
Ni jedna silnica poloidalnog polja može proći kroz svjetlosnu porvšinu u područjia gdje $\Omega'_F = I' = 0$.
Dokaz se bazira na očuvanju druge Eulerove struje koja se može napisati i kao

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}\phi_2 \wedge *F) = \mathrm{d}(|\eta|^2 * \mathrm{d}\psi) \tag{151}$$

Ovaj rezultat slijedi direktno iz jednadžbe toka, $\nabla_a(|\eta|^2\nabla^a\psi) = 0$. Opet pretpostavimo suprotno, da poloidalna linija polja siječe svjetlosnu plohu dva puta. Tada bi mogli konstruirati 3-plohu koja se sastoji od te svjetosne plohe i te poloidalne linije produžene u vremenskom ∂_t i prostornom ∂_φ smjeru. Integrirajući $|\eta|^2 * \mathrm{d}\psi$ preko ove plohe, integrali po početnim i krajnjim plohama se ponište zbog stacionarnosti. Dio po svjetlosnoj plohi išžezne zbog toga što je tamo, po definiciji, $|\eta| = 0$. Ostane nam dio plohe s konstantnim ψ, ali s $\mathrm{d}\psi \neq 0$. Kao i prije

$$\begin{aligned} 0 &= \int |\eta|^2 v \cdot (\mathrm{d}\psi \wedge *\mathrm{d}\psi) \\ &= \int |\eta|^2 |\psi|^2 \cdot \epsilon \end{aligned} \tag{152}$$

Po pretpostavci, η nije svjetlosni vektor svuda na liniji stoga ne može mijenjati predznak. Nadalje, poloidalni prostor je Riemannovog tipa stoga je $|\psi|^2$ što implicira da ovaj integral ne može iščeznuti.

G. Poseban slučaj bez poloidalnog polja

Eulerovi potencijali koje smo koristili prije su valjani samo u slučaju $F \cdot \partial_\varphi \neq 0$ Pogledajmo sada i rješenje kada je $F \cdot \partial_\varphi = 0$. Nove Eulerove potencijale biramo kao

$$\phi_1 = \chi(r,\theta), \quad \phi_2 = \chi_2(r,\theta) + t \tag{153}$$

Polje je tada

$$F = \frac{I}{2\pi(-g^T)^{1/2}}\epsilon^P + \mathrm{d}\chi \wedge t \tag{154}$$

Gdje je I analogan onome što smo imali prije:$*(\mathrm{d}\chi \wedge \mathrm{d}\chi_2) = (I/2\pi)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\varphi$. Prva besilna jednadžba implicira, slično kao i prije, $I = I(\chi)$, dok iz druge dobijemo, koristeći iste korake, jednadžbu toka

$$\nabla_a(|\mathrm{d}t|^2\nabla^a\chi) - \frac{II'}{4\pi^2 g^T} = 0 \tag{155}$$

Primjećujemo da smo dobili jednadžbu toka kao i prije uz zamjene $\psi \to \chi$, $\varphi \to t$ te $\Omega_F \to 0$. No budući da ψ opisuje poloidalno polje, koje u ovom slučaju iščezava, fizikalnije je ove limese promatrati kao $\psi \to 0$, $\Omega_F\psi \to -\chi$ te $\Omega_F \to \infty$.
Primjer ovog limesa je Michelov monopol s rješenjem $-q\mathrm{d}(\cos\theta) \wedge (\mathrm{d}\varphi - \Omega_F \mathrm{d}u)$. U limesu $q \to 0$, $\Omega_F \to \infty$, a njihov produkt u konstantu dobijemo rješenje izlaznog toka $q\Omega_F \mathrm{d}(\cos\theta) \wedge \mathrm{d}u$.

V. MAGNETOSFERA PULSARA

Ovdje ćemo promatrati svojstva magnetosfere oko vodljivih, rotirajućih i magnetiziranih zvijezda. Također, našim sustavima će os rotacije i magnetska os biti paralelne. Takvi sustavi neće pulsirati, ali mogu poslužiti kao dobar primjer sustava kojima su osi skoro poravnate. Inače su ovakvi sustavi diskutirani u ravnom prostorvremenu, no nama je jedini zahtjev da metrika bude blok dijagonalna tj. da postoji poloidalni i torodiajalni dio da možemo primjeniti formalizam koji smo ovdje razvijali.

A. Kutna brzina silnica polja

Brzina Ω_F silnica polja može se odrediti pod pretpostavkom savršene vodljivosti zvjezdane površine, što je dobra aproksimacija za neutronske zvijezde. Za takav sustav znamo da električno polje u referentnom sustavu vodiča mora iščezavati u tangencijalnom smjeru. Ukoliko se zvijezda rotira brzinom $\partial_t + \Omega\partial_\varphi$ tada koristeći 121 imamo $U \cdot F = -(U \cdot \eta)\mathrm{d}\psi \propto (\Omega_F - \Omega)\mathrm{d}\psi$. Stoga, ukoliko magnetsko poje nije tangencijalno na površinu zvijezde imamo $\Omega_F = \Omega$. Dakle, za stacionarna osnosimetrična polja vrijedi:
Netangencijalne poloidalne linije polja koje presijecaju zvijezdu čija površina je savršeni vodič imaju kutnu brzinu $\Omega_F = \Omega$.
Isto tako vidimo da zbog $U \cdot F = 0$ nemamo induciranog površinskog naboja u rotirajućem referentnom sustavu. Općenito, u stacionarnom referentnom sustavu promatrači će mjeriti površinsku gustoću naboja. Ovo je direktna poslijedica toga što je polje degenerirano.

B. Otvorene i zatvorene zone

Otvorene linije polja definiramo kao one koje presjecaju zvijezdu jednom, a zatvorene kao one koje presjecaju zvijezdu dvaput. Kao što je ranije spomenuto, bitno svojstvo svih diskutiranih konfiguracija je da zatvorene linije polja ostaju unutar svjetlosnog valjka ukoliko ne prođu kroz dio prostora koji nije besilan. Iako se često spominje da zatvorene linije moraju biti unutar svjetlosnog cilindra, nigdje se ne može pronaći dokaz takvoj tvrdnji. U ovom poglavlju ćemo pokušati to objasniti koristeći razne pretpostavke, iako njih ne možemo dokazati.
Stacionarno osnosimetrično polje ne može ostati magnetski dominirano izvan svjetlosnog valjka ako polje nema toroidalnu komponentu. To se vidi iz činjenice da je izostanak toroidalno polja jednak uvjetu $I = 0$ što implicira $F^2 = |\mathrm{d}\psi|^2|\eta|^2$. Prvi član je uvijek pozitivan zbog metrike Riemannovog tipa, dok je drugi negativan po definiciji. Što je u suprostosti s magnetskom dominacijom izvan svjetlosnog cilindra. To nas navodi na zaključak:
U stacionarnom, osnosimetričnom, degeneriranom, magnetski dominiranom polju, silnice polja s $I = 0$ moraju biti unutar svjetlosnog cilindra.
Također, možemo zaključiti da:
Refleksijska simetrija i besilni uvjeti impliciraju da zatvorene linije polja koji prolaze kroz ekvatorijalnu ravninu moraju imati $I = 0$.
Ovo vidimo iz činjenice da je ψ konstantan na silnicama polja što znači da je i $I(\psi)$ tamo konstantan. Budući da imamo refleksijsku simetiriju zaključjemo da I je parna funkcija, ali mora biti neparan jer je polje parno, a ϵ^P neparno. Stoga je jedino moguće da bude 0. Kombinirajući prethodne dvije tvrdnje imamo:
U stacionarnom, osnosimetričnom, besilnom, magnetski dominiranom polju koje je simetrično na refleksije silnice polja koje prolaze ekvatorijalnu ravninu moraju imati $I = 0$ i biti unutar svjetlosnog valjka.
Primjećujemo da zbog refleksijske simetrije silnice polja koje izlaze i zvijezde i prolaze ekvatorijalnu ravninu moraju biti zatvorene. Nadalje, uvjet magnetskog dominiranog polja možemo zamijeniti s $\Omega'_F = 0$ kao što smo pokazali u prethodnom potpoglavlju.
Zbog svega gore navedenog, ukoliko imamo zvijezdu s magnetskim dipolnim nabojem, vidimo da ona izgleda kao dipol samo u unutar svjetlosnog cilindra, tj. da se silnice polja koje izviru blizu ekvatora stignu zatvoriti, a one blizu polova ne stignu. Stoga izvan svjetlosnog cilindra imamo samo otvorene linije koje tako sežu u beskonačnost. Zbog drugog smjera koje te linije imaju, na ekvatorijalnoj ravnini na udaljenostima izvan svjetlosnog cilindra stvara se ravninska raspodijela naboja koja je poslijedica Amperovog zakona i rotacije u magnetskom polju.

VI. MAGNETOSFERA CRNE RUPE

Zbog postojanja horizonta događaja, magnetosfera crne rupe je bitno drugačija od magnetosfere zvijezde. Unutar zvijezde ne vrijede besilni uvjeti stoga je moguć prijenos energije i impulsa iz zvijezde u polje. S druge strane, kod crnih rupa je situacija malo kompliciranija. Zbog toga što je Killingov vektor, koji je pridružen vremenskoj translaciji, unutar ergosfere crne rupe postaje prostornog tipa, elektromagnetsko polje može imati negativnu lokalnu gustoću energije. Budući da takva energija može teći u crnu rupu, izvan crne rupe ostaje višak pozitivne energije što znači da smo neku količinu energije izvukli van iz crne rupe. Takva energija dolazi od rotacijske energije crne rupe te se ovakav proces naziva Penroseov proces.
Također, topologija silnica polja je nešto drugačija u slučaju crnih rupa. Kod zvijezda, vidjeli smo da se neke silnice zatvaraju, a neke ne. Situacija kod crnih rupa je da ni jedna silnica nije zatvorena ukoliko je prostor kroz koji prolazi besilan.
Konačno, na horizontu crne rupe, $2 + 2$ dekompozicija polja koju smo prije imali više ne funkcionira jer $\mathrm{d}r$ postaje svjetlosnog tipa pa poloidalni podprostor više nije prostornog nego svjetlosnog tipa. Također $\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}\varphi$ divergiraju. Ovaj problem možemo riješiti ili prelaskom na nove kordinate ili postavljanjem uvjeta koji nam osiguravaju regularnost na horizontu.
U ovom potpoglavlju probleme ćemo razmatrati u Kerrovoj metrici.

A. Znajekov uvjet na horizontu događaja

Da bi se zadovoljila regularnost polja na horizontu, veličine ψ, I i Ω_F više nisu neovisne, nego moraju zadovoljavati iduću relaciju:

$$I = 2\pi(\Omega_F - \Omega_H)\psi_{,\theta}\sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{\theta\theta}}} \tag{156}$$

Ovo vrijedi za svako osnosimetrično degenerirano rješenje Maxwellovih jedadnžbi uz uvjet $\partial_\varphi \cdot F \neq 0$. Veličina Ω_H

je kutna brzina horizonta događaja definirana tako da je Killingovo polje:

$$\chi = \partial_t + \Omega_H \partial_\varphi \tag{157}$$

tangentno svjetlosnim generatorima horizonta.
Ovo ćemo pokazati prvo tenzorskom derivacijom, pa derivacijom u regularnim kordiantama, te konačno, pokazat ćemo da jednadžba toka implicira postojanje ovakvog uvjeta.
Polje zadano kao u 121 skalarno pomnoženo s gornjim χ daje:

$$\chi \cdot F = (\Omega_F - \Omega_H)\mathrm{d}\psi \tag{158}$$

Nadalje imamo:

$$\begin{aligned} I/2\pi &= *F_{ab}\partial_t^a \partial_\varphi^b \\ &= *F_{ab}\chi^a \partial_\varphi^b \\ &= F_{ab} * (\chi^a \partial_\varphi^b) \\ &= F_{ab}\chi^a \partial_\theta^b \sqrt{g_{\varphi\varphi}/g_{\theta\theta}} \\ &= (\Omega_F - \Omega_H)\psi_{,\theta}\sqrt{g_{\varphi\varphi}/g_{\theta\theta}} \end{aligned} \tag{159}$$

U prvoj liniji koristili smo definiciju od I, u drugoj smo zbog antisimetrije F_{ab} mogli zamijeniti ∂_t i χ. U trećoj liniji smo prebacili dual s F_{ab}, u četvrtoj smo izračunali taj dual, a u zadnjoj liniji iskoristili smo ovu jednadžbu poviše.
Da bi pokazali kako ovaj uvjet garantira regularnost polja na horizontu, možemo ga izvesti i na slijedeći način. Budući da se F može napisati kao

$$F = \frac{I}{2\pi\sqrt{-g^T}}\epsilon_P + \mathrm{d}\psi \wedge \eta \tag{160}$$

I budući da je $\sqrt{-g^P/g^T} = (r^2 + a^2\cos^2\theta)/(\Delta \sin\theta)$ prvi član izgleda kao

$$\frac{I}{2\pi\sqrt{-g^T}}\epsilon_P = \frac{I}{2\pi}\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{\Delta \sin\theta}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \tag{161}$$

Primjećujemo da je ovo singularno na horizontu jer je $r = r_+$, a $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$. Drugi član $\mathrm{d}\psi \wedge \eta$ je također singularan jer se η sastoji od singularnih formi $\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}\varphi$. Da bi izolirali divergentno ponašanje, redefiniramo η kao

$$\tilde{\eta} = \mathrm{d}\tilde{\varphi} - \Omega_F \mathrm{d}v \tag{162}$$

što su kordinate slično kao u 96. η i $\tilde{\eta}$ se razlikuju do na singularnu formu proporcionalnu $\mathrm{d}r$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \eta + (\Omega_F(r^2 + a^2) - a)\frac{\mathrm{d}r}{\Omega} \\ &= \eta + (\Omega_F(r^2 + a^2) - \Omega_H(r_+^2 + a^2))\frac{\mathrm{d}r}{\Omega} \end{aligned} \tag{163}$$

Tada je drugi član dan kao

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi \wedge \eta = \mathrm{d}\psi \wedge \tilde{\eta} - \\ \psi_{,\theta}\frac{\Omega_F(r^2 + a^2) - \Omega_H(r_+^2 + a^2)}{\Delta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{164}$$

Čitavo polje je onda

$$F = \mathrm{d}\psi \wedge \tilde{\eta} + \frac{f(r)}{(r - r_+)(r - r_-)}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \tag{165}$$

Gdje je

$$f(r) = \frac{I(r^2 + a^2\cos^2\theta)}{2\pi \sin\theta} - \psi_{,\theta}(\Omega_F(r^2 + a^2) - \Omega_H(r_+^2 + a^2)) \tag{166}$$

Regularnost na horizontu nalaže $f(r_+) = 0$ što je ekvivalentno uvjetu

$$f(r) = 2\pi(\Omega_F - \Omega_H)\psi_{,\theta}\frac{(r_+^2 + a^2)\sin\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta} \tag{167}$$

Što je identično već dobivenom uvjetu.
Ukoliko napišemo jednadžbu toka u blizini horizonta:

$$\begin{aligned} \frac{II'}{4\pi^2} = \frac{A}{\Sigma}\sin\theta\partial_\theta\left[\frac{\sin\theta}{\Sigma}(\Omega_F - \Omega_H)^2\partial_\theta\psi\right] \\ -\frac{A}{\Sigma^2}\sin^2\theta\Omega_F'(\Omega_F - \Omega_H)(\partial_\theta\psi)^2 + O(\Delta) \end{aligned} \tag{168}$$

Koristeći $r = r_+ = const.$ na horizontu i $f' = \partial_\theta f/\partial_\theta\psi$ imamo

$$\begin{aligned} \partial_\theta\left(\frac{I^2}{8\pi^2}\right) &= \frac{II'}{4\pi^2}\partial_\theta\psi \\ &= \partial_\theta\left[\frac{A}{2\Sigma^2}\sin^2\theta(\Omega_F - \Omega_H)^2(\partial_\theta\psi)^2\right] \end{aligned} \tag{169}$$

Iz ovog slijedi

$$I^2 = 4\pi^2\frac{A}{\Sigma^2}\sin^2\theta(\Omega_F - \Omega_H)^2(\partial_\theta\psi)^2 + C \tag{170}$$

Zbog regularnosti na osi $C = 0$ što znači

$$I = \pm 2\pi\frac{\sqrt{A}}{\Sigma}\sin\theta(\Omega_F - \Omega_H)\partial_\theta\psi \tag{171}$$

Minus predznak je za bijelu rupu, a plus za crnu rupu.

B. Tok energije i kutnog impulsa

Koristeći Znajekov uvjet i činjenicu da je na horizontu $\mathrm{d}r = 0$ imamo

$$\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^\pi (\Omega_F - \Omega_H)(\partial_\theta \psi)^2 \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{\theta\theta}}} \mathrm{d}\theta \tag{172}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^\pi \Omega_F(\Omega_F - \Omega_H)(\partial_\theta \psi)^2 \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{\theta\theta}}} \mathrm{d}\theta \tag{173}$$

Odavde vidimo da pozitivna Killingova energija izlazi samo ako je Ω_F između 0 i Ω_H. Također, za primjetiti je da nužno moramo imati tok kutnog impulsa kada imamo tok energije.

C. Svjetlosne plohe u magnetosferi crne rupe

Svjetlosne plohe su hiperplohe u prostor-vremenu gdje Killingov vektor plohe polja $\chi_F = \partial_t + \Omega_F(\psi)$ je svjetlosnog tipa ili, ekvivalentno, plohe gdje je forma η svjetlosnog tipa. Takve plohe imaju praktičnu primjenu zbog toga što predstavljaju singularne točke u jednadžbi toka. U Kerrovom prostor vremenu, općenito postoje dvije svjetlosne plohe. Vanjska, kvalitativno slična svjetlosnom cilindru, dok se unutranja nalazi unutar ergosfere. Vanjska svjetlosna ploha se rotira s Ω_F i rotira se prebrzo da bi bila vremenskog tipa, dok se unutarnje rotira presporo da bi bila svjetlosnog tipa. Postojanje unutarnje svjetlosne plohe slijedi iz činjenice da se promatrači moraju rotirati nekom minimalnom brzinom da bi ostali u ergosferi.

D. Nepostojanje zatvorenih silnica polja

Pod zatvorenom silnicom podrazumijevamo glatku poloidalnu krivulju koja netangencijalno presjeca horizont događaja dva puta. Za zatvorenu krivulju vrijedi $I = 0$ i $\Omega_H = \Omega_F$ u besilnom području. Što vidi jer iz Znajekovog uvjeta slijedi da je predznak od I određen produktom $\Omega_F(\psi) - \Omega_H$, koji je konstantnog predznaka i $\psi_{,\theta}$ koji mijenja predznak. Budući da je I konstantan na silnici polja, dobivamo da mora iščezavati. Nadalje, uvjet regularnosti, uz $\psi_{,\theta} \neq 0$ zahtijeva $\Omega_H = \Omega_F$.
Nadalje, budući da je $\Omega_H = \Omega_F$ tada je sam horizont događaja svjetlosna ploha što dokazuje da ne mogu postojati zatvorene silnice polja.
Za napomenuti je kako zatvorene silnice polja ipak mogu postojati, no samo u slučaju da prolaze kroz područja u kojima ne vrijedi besilni uvjet kao što su akrecijski diskovi i slično.

VII. LITERATURA

[1]Gralla, Jacobson: Spacetime approach to force-free magnetospheres, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 445 (2014) 2500–2534 [arXiv:1401.6159]
[2]Smolić, Ivica: Diferencijalna geometrija u fzici,`http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/dgf.pdf`