Relativistički rigidni objekti

Fran Ilčić*

Fizički odsjek, PMF Zagreb

*E-mail: ilcic.fran@gmail.com

Koncept krutog (rigidnog) tijela iz klasične mehanike neodrživ je u vidu teorije relativnosti. Razmatramo dva poopćenja rigidnosti kompatibilna s relativnošću - rigidna gibanja i elastična tijela kojima je brzina zvuka jednaka brzini svjetlosti. Iznosimo nekoliko osnovnih teorema o rigidnom gibanju i njihove interpretacije. Ukratko pregledavamo relativističku teoriju elastičnosti i rigidnih tijela, izvodimo jednadžbu gibanja za slučaj 1D prostora te ju rješavamo za neke jednostavne situacije.

Uvod

Kruto tijelo, ili *rigidan* objekt, nerelativistički je definirano zahtjevom da je udaljenost svakog para čestica tijela konstantna u vremenu. Jedna posljedica takve definicije je beskonačno brz odziv cijelog tijela na silu primijenjenu na neku njegovu točku. To je nužno tako budući da bi prijenos sile tijelom konačnom brzinom implicirao privremeno zgušnjavanje (ili razvlačenje, smicanje ili torziju) čestica, a time promjenu njihovih udaljenosti. Ovakva beskonačna brzina prijenosa sile očito krši relativistički princip maksimalne brzine propagacije informacija, c. Stoga moramo dozvoliti konačnu brzinu propagacije deformacija, ograničivši se na elastična tijela. Drugi problem koji se javlja u općenitim relativističkim gibanjima je odsutnost objektivne definicije prostorne udaljenosti točaka. Za početak, u različitim koordinatnim sustavima imamo različite duljine objekata, što bismo mogli riješiti promatranjem vlastitog sustava mirovanja dotičnog objekta. No, budući da sile ne utječu instantno na cijelo tijelo, moguće je da se sustavi mirovanja različitih točaka tijela međusobno razlikuju, odnosno da točke imaju različite četverovektore brzine u^μ.

U poopćivanju koncepta rigidnosti iz klasične mehanike u relativističku, postoje dvije smislene opcije, ovisno o svojstvima koja želimo očuvati. Prva od njih je tzv. *Bornova rigidnost* gibanja, nazvana po Maxu Bornu. Ona je svojstvo gibanja tijela (a ne svojstvo samog tijela) koje se temelji na ideji očuvanja klasičnog zahtjeva konstantnosti udaljenosti, ali samo lokalno. Naime, gibanje je po Bornu rigidno ukoliko je udaljenost svjetskih linija infinitezimalno bliskih točaka objekta konstantna duž svjetskih linija, gdje udaljenost definiramo u prostoru ortogonalnom na svjetske linije, odnosno na lokalni vektor brzine u^μ. Matematički adekvatna definicija, uz teorijsku pozadinu, bit će izložena u sljedećem poglavlju, kao i tipovi rigidnih gibanja.

Drugi put kojim možemo krenuti temelji se na nastavku promatranja tipa tijela, a ne tipa gibanja. Budući da brzina širenja deformacije kroz tijelo ne može biti veća od brzine svjetlosti, možemo rigidnim tijelima nazvati tijela kojima je ona upravo jednaka c. No, s obzirom da su brzine širenja različite ovisno o vrsti deformacije, promatramo onu najveću, brzinu širenja longitudinalnih udarnih valova, koju nazivamo *brzina zvuka*, te za nju zahtijevamo da je jednaka c. Tako dobivamo elastična tijela maksimalne brzine reagiranja na podražaje. U trećem poglavlju izlažemo teoriju takvih tijela te jednadžbu gibanja i primjere jednostavnih situacija s rigidnim tijelima u 1-dimenzionalnom prostoru.

Rigidno gibanje

Kako bismo formalizirali gibanje tijela u prostorvremenu specijalne teorije relativnosti, koristimo diferencijalnu geometriju. Prostorvrijeme predstavljamo mnogostrukosti $\mathcal{M}$ s metrikom $g_{\mu\nu}$ (koristimo konvenciju $(-,+,+,+)$ te $c=1$), a tijelo otvorenom podmnogostrukosti $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ na kojoj svakoj točki tijela korespondira jedna svjetska linija, odnosno integralna krivulja pripadnog normaliziranog vektora toka u^μ vremenskog tipa $(u_\mu u^\mu = -1)$. U svakoj točki $\mathcal{M}'$ definiramo tenzor $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu. \tag{1}$$

Kako imamo svojstva

$$\gamma_{\mu\nu} u^\nu = g_{\mu\nu} u^\nu + u_\mu u_\nu u^\nu = u_\mu - u_\mu = 0, \tag{2}$$

$$\gamma_{\mu\nu} \gamma^{\nu\sigma} = g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} + u_\mu u_\nu g^{\nu\sigma} = g_\mu^{\ \sigma} + u_\mu u^\sigma = \gamma_\mu^{\ \sigma}, \tag{3}$$

(gdje smo u (3) koristili (2)), $\gamma_{\mu\nu}$ u svakoj točki $\mathcal{M}'$ možemo koristiti kao metriku na prostoru ortogonalnom vektoru toka u^μ. Naime, za svaki vektor ortogonalan na u^μ, kao i svaku 1-formu ortogonalnu na u_μ, u kontrakciji s $\gamma_{\mu\nu}$, odnosno $\gamma^{\mu\nu}$, drugi član će biti nula te će γ djelovati kao metrika. Sve ostale vektore i 1-forme možemo prikazati kao zbroj ortogonalnog dijela i dijela proporcionalnog s u^μ, odnosno u_μ, koji će, prema (2), dati nulu u kontrakciji s γ. Ovo se može jednostavno interpretirati kao projekcija na hiperplohu ortogonalnu s u. Svi tenzori višeg ranga su produkti ovih vektora i 1-formi pa za njih vrijedi isto - tenzor γ projicira na ortogonalnu hiperplohu te na njoj djeluje kao metrika. Stoga, naš zahtjev rigidnosti gibanja možemo izraziti kao konstantnost tenzora γ. No, trebamo specificirati što znači *konstantnost*. Budući da se ideja rigidnosti temelji na očuvanju udaljenosti točaka tijela iz perspektive samog tijela, dakle iz lokalnog sustava kojem je vlastita brzina upravo u^μ, zahtijevamo konstantnost metrike γ duž linija toka u^μ, odnosno koristimo *Liejevu derivaciju* $\mathcal{L}_u$ s obzirom na polje u^μ. Sada zahtjev Bornove rigidnosti možemo zapisati kao

$$\mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

Ova jednadžba je istog oblika kao jednadžba Killingovog polja $\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = 0$, uz zamjenu metrike s ortogonalnom metrikom $\gamma_{\mu\nu}$. S ciljem dovođenja ovih dviju jednadžbi u jasniju vezu, definiramo tenzor ortogonalne projekcije:

$$\Pi^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} + u^\mu u_\nu. \tag{5}$$

Važno je uočiti da Π^μ_ν samo projicira na ortogonalnu hiperplohu, odnosno uklanja dio paralelan s tokom u^μ, dok $\gamma_{\mu\nu}$ djeluje kao metrika na ortogonalnoj hiperplohi. Sada imamo

$$\gamma_{\mu\nu} = \Pi(g_{\mu\nu}) := g_{\sigma\rho} \Pi^\sigma_{\ \mu} \Pi^\rho_{\ \nu}. \tag{6}$$

Može se pokazati [2] da vrijedi

$$\mathcal{L}_{fu} \gamma_{\mu\nu} = f \mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu} \tag{7}$$

$$\mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_u(\Pi(g_{\mu\nu})) = \Pi(\mathcal{L}_u g_{\mu\nu}) \tag{8}$$

za svaku diferencijabilnu realnu funkciju na $\mathcal{M}'$. Jednadžba (7) nam govori da rigidnost gibanja nije ovisna o skaliranju vektorskog polja toka, već ovisi samo o geometriji svjetskih linija. To bismo i očekivali, s obzirom na manjak objektivne definicije istovremenosti točaka tijela (koliko 'brzo' se točka giba po svojoj svjetskoj liniji stvar je izbora parametra, a ne prirode gibanja). Jednadžba (8) daje nam traženu vezu jednadžbi rigidnog i Killingovog gibanja polja toka. Vidimo da ako je gibanje Killingovo, nužno je i rigidno. No suprotno ne vrijedi uvijek.

Općenita gibanja tijela možemo klasificirati koristeći rastav kovarijantne derivacije polja u_a:

$$u_{\mu;\nu} = \nabla_\nu u_\mu = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - a_\mu u_\nu, \tag{9}$$

gdje je $a^\mu = \nabla_u u^\mu = u^\mu_{\ ;\nu} u^\nu$ vektor akceleracije, $\theta_{\mu\nu}$ simetričan i $\omega_{\mu\nu}$ antisimetričan ortogonalni dio.

$$\theta_{\mu\nu} = \Pi(u_{(\mu;\nu)}) = \theta_{(\mu\nu)} \tag{10}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \Pi(u_{[\mu;\nu]}) = \omega_{[\mu\nu]} \tag{11}$$

Tenzor $\theta_{\mu\nu}$ dalje se rastavlja na *smicanje* $\sigma_{\mu\nu}$ (dio s tragom nula) i *ekspanziju* θ (dijagonalni dio),

$$\theta_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta\gamma_{\mu\nu}, \tag{12}$$

$$\theta = \theta^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = u_{\mu}^{;\mu}. \tag{13}$$

Antisimetrični dio $\omega_{\mu\nu}$ naziva se *vorticitet*. Ovi nazivi imaju smisla s obzirom da se u antisimetričnom dijelu kovarijantne derivacije polja toka materije (prostorne projekcije, koju promatramo) nalaze informacije o zatvorenim putanjama, odnosno o rotacijama, što znači da simetričan dio implicira ostale komponente gibanja, dok je zadnji član odgovoran za vremenski dio. Odavde također možemo naslutiti da simetričan dio implicira promjenu udaljenosti točaka tijela, što ispada dokazivo točno. Naime, uz vezu Liejeve derivacije metrike i kovarijantne derivacije

$$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = 2u_{(\mu;\nu)} \tag{14}$$

može se pokazati [2]:

Propozicija *Neka je u^{μ} normalizirano vektorsko polje vremenskog tipa. Gibanje koje njegov tok opisuje je rigidno akko mu smicanje i ekspanzija iščezavaju, tj. $\theta_{\mu\nu} = 0$.*

Gibanja s neiščezavajućim $\omega_{\mu\nu}$ nazivamo *rotacijska* gibanja, a preostala *nerotacijska*. Jedan od bitnijih rezultata u teoriji Bornove rigidnosti je sljedeći teorem, kojem je dokaz nešto zahtjevniji pa ga ovdje izostavljamo.

Teorem (Noether i Herglotz, prvi dio) *Rotacijsko rigidno gibanje u prostoru Minkowskog je nužno Killingovo gibanje.*

Ako imamo Killingovo rotacijsko gibanje, odnosno rotaciju tijela oko zadane osi konstantnom kutnom brzinom, u ortogonalnoj metrici $\gamma_{\mu\nu}$ dobit ćemo član koji ovisi o iznosu brzine svake točke (definicija 1), no točke na jednakoj udaljenosti od osi imat će jednake brzine, što znači da se dotična metrika ne mijenja duž pojedine linije, koja u prostoru ne mijenja udaljenost od osi. S druge strane, kada bismo počeli mijenjati kutnu brzinu rotacije, taj član u metrici bi se počeo mijenjati iako ostajemo na jednakoj udaljenosti od osi. Drugim riječima, rotacijsko gibanje je rigidno jedino za konstantne iznose kutnih brzina, dok pokretanje rotacije ili promjena kutne brzine nužno slama rigidnost.

Teorem (Noether i Herglotz, drugi dio) *Svako nerotacijsko rigidno gibanje u prostoru Minkowskog dobije se sljedećom konstrukcijom: uzmimo neku dvostruko diferencijabilnu krivulju $\tau \mapsto z^{\mu}(\tau)$ u prostoru Minkowskog, gdje je τ vlastito vrijeme, td. $\dot{z}^2 = -1$ (ili $-c^2$ u SI). Neka je $H_{\tau} := z^{\mu}(\tau) + (\dot{z}^{\mu}(\tau))^{\perp}$ hiperploha koja siječe z^{μ} okomito u $z^{\mu}(\tau)$. Neka je $\Omega \subset \mathcal{M}$ tubularna okolina krivulje z^{μ} unutar koje se nijedan par hiperploha $H_{\tau}, H_{\tau'}$ ne sijeku za $\tau \neq \tau'$.*

U Ω definirajmo u^μ kao jedinstveno diferencijabilno normalizirano vektorsko polje okomito na sve H_τ. Tok polja u^μ je rigidno gibanje.

Iz drugog dijela teorema vidimo kako izgledaju sva ostala rigidna gibanja. Budući da su okomite ravnine u svakoj točki jedinstvene jednom kada smo zadali početnu svjetsku liniju jedne od točaka tijela, dobili smo kao posljedicu teorema da svjetska linija bilo koje točke tijela zadaje rigidno gibanje cijelog tijela, kao što bi slučaj bio i klasično (za nerotacijsko gibanje). Kako je početna krivulja proizvoljna, vidimo da možemo rigidno translacijski ubrzavati tijelo po volji, dok god je dovoljno malo, odnosno dovoljno male akceleracije, da stane u dio prostora u kojem se okomite hiperplohe međusobno ne sijeku.

Rigidna tijela

Rigidna tijela definiramo, kao što je već rečeno, kao ona u kojima je brzina zvuka jednaka brzini svjetlosti c. Ovakav nas zahtjev nužno stavlja u kontekst teorije elastičnosti, budući da je longitudinalan prijenos podražaja na neograničene udaljenosti, odnosno prijenos zvuka, svojstvo elastičnih tijela. Slijedi sažetak relativističke teorije elastičnosti.

Teorija elastičnosti

Tijelo nad kojim se ne vrši nikakva sila možemo promatrati kao 3D mnogostrukost $\mathcal{X}$, čije točke predstavljaju idealizirane čestice tvari, na kojoj nemamo metriku, budući da se raspored čestica u stvarnom prostoru mijenja tijekom vremena, no imamo mjeru gustoće broja čestica samog tijela. Nju opisujemo totalno antisimetričnim tenzorom $n_{abc} = n_{[abc]}$, gdje je broj čestica u volumnom elementu $dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c$ dan s

$$dN = n_{abc} dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c. \tag{15}$$

Kako bismo umetnuli ovu mnogostrukost u 4D prostorvrijeme $\mathcal{M}$, koristimo kanonsku diferencijabilnu projekciju

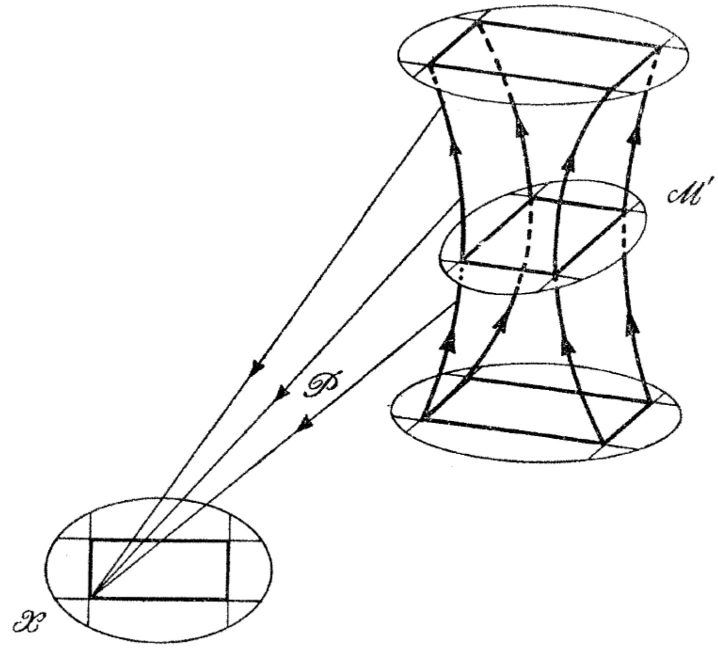
$$\mathcal{P} : \mathcal{M}' \to \mathcal{X}, \tag{16}$$

gdje je $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, kao i prije, dio prostorvremena kroz koji tijelo prolazi. Pri zadavanju ove projekcije trebamo poštivati dva njena svojstva:

(1) praslika $\mathcal{P}^{-1}(X)$ za svaku točku $X \in \mathcal{X}$ je krivulja vremenskog tipa u $\mathcal{M}$, gdje tu krivulju interpretiramo kao svjetsku liniju promatrane čestice tijela,

(2) svaka točka svake diferencijalno uložene hiperplohe prostornog tipa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{M}$ ima ima okolinu $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ za koju je inducirano preslikavanje $\mathcal{P} : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ diferencijabilno ulaganje.

Normalizirani tangentni vektori krivulja iz prvog zahtjeva ponovo čine polje toka u^μ (s istom interpretacijom kao u prošlom poglavlju) koje generira ortogonalnu metriku $\gamma_{\mu\nu}$. Budući da tijelo kao prostor $\mathcal{X}$ ima zadanu gustoću čestica, umetanje u $\mathcal{M}$ određuje stlačivanje i razvlačenje



Slika 1: Preuzeto iz [4]. Slikovit prikaz projekcije $\mathcal{P}$. Svaka vremenska linija (linije sa strelicama) u 4D podmnogostrukosti $\mathcal{M}'$ (na slici prikazanoj kao 3D) projicira se u jednu točku u 3D mnogostrukosti $\mathcal{X}$ (prikazanu na slici kao 2D), gdje predstavlja jednu točku tijela.

dijelova tijela, što kvantificira upravo $\gamma_{\mu\nu}$, koju se zbog ovoga također naziva lokalno *stanje naprezanja*.

Jednom kada imamo projekciju $\mathcal{P}$, odnosno smjestili smo tijelo u prostorvrijeme, možemo promatrati korespondenciju tenzora na $\mathcal{X}$ i na $\mathcal{M}$. Za početak promatramo *ortogonalne tenzore* na $\mathcal{M}$. Budući da ih želimo uspoređivati s tenzorima na $\mathcal{X}$, koje zovemo *materijalni tenzori*, moramo promatrati tenzore koji, tako reći, ne koriste vremensku dimenziju. Stoga ih definiramo kao tenzore kojima iščezavaju sve kontrakcije s vektorom toka u^μ. Posljedica ovakve definicije je da i za njih možemo koristiti ortogonalnu metriku $\gamma_{\mu\nu}$, koja će dati isti rezultat kao i $g_{\mu\nu}$ jer joj je drugi član $u_\mu u_\nu$.

Sljedeći korak su tenzorska polja. Kako bi neko tenzorsko polje bilo ekvivalentno nekom materijalnom tenzorskom polju, ne može ovisiti o vremenskoj koordinati promatrane točke. Stoga koristimo $\mathcal{P}$ kako bismo dobili preslikavanje 1-formi i vektora između $\mathcal{X}$ i $\mathcal{M}$. Za danu točku $x \in \mathcal{M}$ te $X = \mathcal{P}(x) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{P}$ inducira povlačenje 1-formi s $\mathcal{X}$ u $\mathcal{M}$ te guranje vektora iz $\mathcal{M}$ u $\mathcal{X}$. Ako se u $\mathcal{M}$ ograničimo na ortogonalne 1-forme i vektore, dobivamo izomorfizme. Ostale ortogonalne tenzore možemo prikazati kao produkte ortogonalnih 1-formi i vektora te tako dobivamo izomorfizam ortogonalnih i materijalnih tenzora

$$T(x) \leftrightarrow \mathcal{P}(T)(X) \tag{17}$$

Ortogonalna tenzorska polja i dalje mogu odgovarati različitim materijalnim tenzorskim poljima duž vremenske koordinate. Zato definiramo *materijalno konstantna* tenzorska polja $T(x)$ kao ona kojima slika $\mathcal{P}(T(x))(X)$ u $\mathcal{X}$, ni za jedan $X = \mathcal{P}(x)$, ne ovisi o izboru x na svjetskoj liniji $\mathcal{P}^{-1}(X)$.

Budući da podizanje i spuštanje indeksa ovisi o ortogonalnoj metrici koja se mijenja duž svjetskih linija, tenzorsko polje može prestati biti materijalno konstantno pri podizanju ili spuštanju indeksa. Iznimku daje slučaj kada kada je metrika $\gamma_{\mu\nu}$ sama materijalno konstantna, odnosno konstantna duž svjetskih linija, što je upravo slučaj rigidnog gibanja proučenog u prošlom poglavlju.

Pomoću ovog izomorfizma tenzorskih polja, umjesto polja n_{abc} na $\mathcal{X}$ možemo koristiti njemu izomorfno, ortogonalno i materijalno konstantno, polje $n_{\mu\nu\sigma}$ na $\mathcal{M}'$. Još jedan zanimljiv tenzor fundamentalne mjere na $\mathcal{M}$ je totalno antisimetrični tenzor $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$, zadan (do na predznak) uvjetima

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = \epsilon_{[\mu\nu\sigma\rho]} \tag{18}$$

$$\text{i} \quad \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = 4!, \tag{19}$$

dok nam na tangentnom prostoru ortogonalnom na tok u^μ prostorno-volumnu mjeru daje

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}u^\rho, \tag{20}$$

koji očito zadovoljava svojstva

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma} = \epsilon_{[\mu\nu\sigma]}, \tag{21}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma}u^\sigma = 0. \tag{22}$$

Kontrakcijom s $n_{\mu\nu\sigma}$ dobivamo gustoću idealiziranih čestica prilagođenu ovoj volumnoj mjeri

$$n = \epsilon^{\mu\nu\sigma}n_{\mu\nu\sigma}. \tag{23}$$

Budući da predznak tenzora $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ nije zadan uvjetima 18 i 19 uvijek ga možemo odrediti tako da n bude pozitivan (što je globalni uvijet ukoliko je mnogostrukost orijentabilna).

Tretman ortogonalnih tenzorskih polja koja nisu materijalno konstantna temelji se na ideji korespondencije s vremenski ovisnim materijalnim tenzorskim poljima. Tenzorskom polju $T(x)$ na $\mathcal{M}$ pridružujemo kontinuum tenzorskih polja na $\mathcal{X}$ parametriziranih koordinatom vlastitog vremena $\tau(x)$:

$$T(x) \leftrightarrow \mathcal{P}(T)(X, \tau). \tag{24}$$

Zahtjev da τ bude vlastito vrijeme, odnosno da mu je gradijent vremenskog tipa te da vrijedi $u^a \partial_a \tau = 1$, nije dovoljan da ga u potpunosti odredi na cijelom $\mathcal{M}$, no dovoljan je da definira tzv. *konvektirani diferencijal* $dT(x)$ preko odnosa sa diferencijalom odgovarajućeg prostornog tenzora (tj. *materijalnim diferencijalom*) pri pomaku po svjetskoj liniji za $d\tau$:

$$\mathcal{P}(dT(x)) = d\mathcal{P}(T)(X, \tau). \tag{25}$$

Ovaj diferencijal omogućava definiranje ortogonalnog tenzorskog polja na $\mathcal{M}$ zvanog *konvektirana derivacija* $[T]^{\bullet}$ kao

$$[T]^{\bullet}(x) = dT(x)/d\tau. \tag{26}$$

Kako se svaki tenzor može rastaviti *ortogonalnom dekompozicijom*, bilo kojem od ortogonalnih tenzora o kojima smo do sada govorili možemo dodati dio koji nije ortogonalan i time proširiti definicije materijalno konstantnih tenzora i konvektirane derivacije na općenite tenzore na $\mathcal{M}$, primijenjujući definicije na njihove ortogonalne dijelove u kompoziciji. Time smo dovršili izgradnju alata za proučavanje elastičnih relativističkih tijela.

Neki od rezultata koje dobivamo [4] ovom formulacijom povezuju ortogonalnu metriku $\gamma_{\mu\nu}$ ili tenzor $\epsilon_{\mu\nu\sigma}$ sa smicanjem i ekspanzijom, odnosno simetričnim ortogonalnim dijelom rastava 9, $\theta_{\mu\nu}$:

$$[\gamma_{\mu\nu}]^{\bullet} = 2\theta_{\mu\nu}, \tag{27}$$

$$[\gamma^{\mu\nu}]^{\bullet} = -2\theta^{\mu\nu}, \tag{28}$$

$$[\epsilon_{\mu\nu\sigma}]^{\bullet} = \theta\epsilon_{\mu\nu\sigma}, \tag{29}$$

$$[\epsilon^{\mu\nu\sigma}]^{\bullet} = -\theta\epsilon^{\mu\nu\sigma}, \tag{30}$$

iz kojih, uz zakon očuvanja

$$[n_{\mu\nu\sigma}]^{\bullet} = 0, \tag{31}$$

koji odmah dobivamo iz činjenice da je $n_{\mu\nu\sigma}$ materijalno konstantno tenzorsko polje, slijedi i

$$\dot{n} = -\theta n. \tag{32}$$

Ova jednadžba ekvivalentna je [4] lokalnom zakonu očuvanja čestica

$$\nabla_{\mu}(nu^{\mu}) = 0. \tag{33}$$

Teorija elastičnosti dalje se bavi proučavanjem objekata poput *tenzora energije i impulsa* u terminima ortogonalnih tenzora $T_{\mu\dots}{}^{\nu\dots}$ koji su *funkcije naprezanja*, u smislu da su komponente odgovarajućih materijalnih tenzora $\mathcal{P}(T_{\mu\dots}{}^{\nu\dots})$ funkcije komponenti od $\mathcal{P}(\gamma_{\mu\nu})$. Drugim riječima, za opisivanje gibanja elastičnih tijela dovoljno je promatrati materijalne tenzore, dobivene izomorfizmom s odgovarajućim ortogonalnim tenzorima u prostorvremenu, u ovisnosti o njihovom naprezanju, odnosno elastičnim deformacijama.

1D rigidna tijela

Neke primjere kretanja rigidnih tijela istražit ćemo u jednostavnijem kontekstu – jednodimenzionalnom prostoru. Elastična tijela u 1D ponašaju se kao štapovi ili niti (strune), ovisno o kontekstu, dok rigidnost znači da podražaji kroz njih putuju brzinom svjetlosti. Za razliku od trodimenzionalnog slučaja, gdje smo za gustoću čestica morali koristiti tenzor ranga 3, ovdje možemo koristiti gradijent skalarne funkcije. Točnije, tijelo opisujemo skalarnim poljem $\lambda : \mathcal{M}' \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ (gdje je $\mathcal{M}$ sada 2D prostorvrijeme), kojem je gradijent ortogonalan vektor (tj. ortogonalan je na polje toka u^μ), odnosno tangentan na potprostor lokalne istovremenosti, te nigdje ne iščezava. Linije u $\mathcal{M}$ na kojima je λ konstantno interpretiramo kao svjetske linije pojedinih čestica tijela, dok gradijent daje lokalnu gustoću čestica. Budući da je gradijent ortogonalan, polje toka možemo prikazati kao

$$u^\mu = \frac{1}{n}\epsilon^{\mu\nu}\nabla_\nu\lambda, \tag{34}$$

gdje je n gustoća čestica, odnosno $n^2 = |\text{grad } \lambda|^2 = \nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\lambda$. Kako je n gustoća čestica u 1D, $s = \frac{1}{n}$ je proporcionalan udaljenosti među česticama. Ako uzmemo da je $n = 1$ u opuštenom stanju, s nam predstavlja *faktor rastezanja*.

Kako bismo pronašli jednadžbu gibanja za λ, promatramo tenzor energije i impulsa $T^{\mu\nu}$ uz gustoću energije $\rho(n)$ i tlak $p(n)$, koji je u 1D slučaju zapravo sila. Kako je sva informacija o deformaciji sadržana u udaljenosti čestica u odnosu na opuštenu, opravdano je pretpostaviti da ρ i p ovise samo o n. Tenzor $T^{\mu\nu}$ ima oblik [1]

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p\gamma_{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \tag{35}$$

Sada raspisujemo zakon očuvanja energije i impulsa

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{36}$$

$$\nabla_u(\rho + p)u^\nu + (\rho + p) \text{ div } u\; u^\nu + (\rho + p)\nabla_u u^\nu + \nabla^\nu p = 0 \quad / \, u_\nu \tag{37}$$

$$-\nabla_u\rho - \nabla_u p - (\rho + p) \text{ div } u + (\rho + p)u_\nu\nabla_u u^\nu + \nabla_u p = 0 \tag{38}$$

Član s kovarijantnom derivacijom od u^ν duž svojih linija toka je nula budući da ona mora biti okomita na sam u^ν s kojim se kontrahira. Dobivamo

$$p = -\frac{\nabla_u\rho}{\text{div } u} - \rho = -\left(\frac{\nabla_u n}{\text{div } u}\right)\left(\frac{d\rho}{dn}\right) - \rho. \tag{39}$$

Iz 34 imamo

$$\text{div } u = -\frac{\nabla_\mu n}{n^2}\epsilon^{\mu\nu}\nabla_\nu\lambda + \frac{1}{n}\epsilon^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\lambda = -\frac{1}{n}\nabla_u n \tag{40}$$

pa dobivamo

$$p = n\frac{d\rho}{dn} - \rho. \tag{41}$$

Ovaj rezultat nam govori da su gustoća energije i tlak direktno povezani za elastična tijela u 1D. Njihov odnos ovisi jedino o vezi ρ i n, koju zadaje zahtjev rigidnosti tijela, odnosno brzina zvuka c (u prirodnom sustavu 1). Ovaj uvjet može se zapisati [1] kao

$$\frac{dp}{d\rho} = 1, \tag{42}$$

odnosno tlak u nekoj točki tijela raste i pada upravo jednako koliko i gustoća energije. Koristeći ovaj uvjet i pretpostavku da je tlak nula za opuštena tijela ($n = 1$), dobivamo traženu vezu:

$$\rho = \rho_0 + p \tag{43}$$

$$n\frac{d\rho}{dn} = 2\rho - \rho_0, \tag{44}$$

otkuda dobivamo izraze koji karakteriziraju rigidnu nit:

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(n^2 + 1), \tag{45}$$

$$p = \frac{\rho_0}{2}(n^2 - 1). \tag{46}$$

Kako bismo dobili jednadžbu za λ, uvrštavamo ove rezultate u izraz za tenzor energije i impulsa

$$T_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{2}\left[2n^2 u_\mu u_\nu + (n^2 - 1)g_{\mu\nu}\right] \tag{47}$$

te koristeći indentitet [1]

$$g_{\mu\nu} = -u_\mu u_\nu + \frac{1}{n^2}\nabla_\mu\lambda\nabla_\nu\lambda, \tag{48}$$

iz kojeg izrazimo n^2, dobivamo

$$T_{\mu\nu} = \rho_0\left(\nabla_\mu\lambda\nabla_\nu\lambda - \frac{1}{2}\nabla_\sigma\lambda\nabla^\sigma\lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{49}$$

Navedeni identitet je zapravo izraz za ortogonalnu metriku $\gamma_{\mu\nu}$, koja ovdje ima oblik normaliziranog produkta dvaju gradijenata skalarnog polja λ.

Rezultat koji smo dobili za $T_{\mu\nu}$ je jednak [1] onom za bezmaseno skalarno polje, uz dodatak zadnjeg člana koji je proporcionalan metrici. Ovo uvrštavamo u zakon očuvanja energije i impulsa:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_\nu\lambda\Box\lambda = 0, \tag{50}$$

gdje je $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$. Kako gradijent od λ po definiciji nigdje nije nula, jednadžba gibanja glasi

$$\Box \lambda = 0, \tag{51}$$

odnosno ona je zapravo valna jednadžba za jednu dimenziju prostora.

Primjeri

Za vizualizaciju i bolje shvaćanje rigidnih tijela, poželjno je riješiti dobivenu jednadžbu za neke specifične, jednostavne okolnosti.

Za početak promatramo 1D rigidnu nit oblika polupravca, odnosno beskonačnu s jedne strane, koja svojim krajem nalijeće na nepomičan zid, u prostoru Minkowskog. Prije nego udari u zid, pretpostavljamo da je nit opuštena, odnosno $n = 1$, te se giba u smjeru pozitivnog x brzinom v (u sustavu mirovanja zida, u kojem radimo cijelu analizu). Radi jednostavnosti, koristimo diferencijale koordinata kao i skalarnog polja λ. Možemo napisati

$$d\lambda = dx^\mu \partial_\mu \lambda = \dot{\lambda} dt + \lambda' dx, \tag{52}$$

što nam za n daje (u prostoru Minkowskog)

$$n^2 = \nabla_\mu \lambda \nabla^\mu \lambda = g^{\mu\nu} \partial_\mu \lambda \, \partial_\nu \lambda = |d\lambda|^2 = -(\dot{\lambda})^2 + (\lambda')^2 = 1. \tag{53}$$

Ovo prestaje vrijediti kada se nit zabije u zid, budući da prestaje biti opuštena. Brzinu povezujemo s λ promatrajući pojedine čestice niti, za koje je λ konstantan:

$$d\lambda = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda'}. \tag{54}$$

Rješenje 54 mora biti oblika

$$\dot{\lambda} = -\gamma v \; , \quad \lambda' = \gamma \; , \tag{55}$$

a uvrštavajući u 53 dobivamo

$$-\gamma^2 v^2 + \gamma^2 = 1 \tag{56}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}, \tag{57}$$

odnosno γ je Lorentzov faktor.

Uzimamo da se sudar sa zidom događa u trenutku $t = 0$ na $x = 0$. Jednadžba za λ' određuje λ do na konstantu pa možemo uzeti

$$\lambda(t = 0, x < 0) = \gamma x. \tag{58}$$

Ova proizvoljnost je posljedica slobode u opisivanju tijela skalarnim poljem, s obzirom da je fizikalno bitna samo derivacija od λ. U trenutku $t = 0$ također vrijedi

$$\dot{\lambda}(0, x < 0) = -\gamma v, \tag{59}$$

dok nakon sudara ($t > 0$) imamo jednadžbu gibanja

$$\Box\lambda = 0 \tag{60}$$

i rubni uvjet ostanka čestice ruba niti pri zidu

$$\lambda(t, 0) = \dot{\lambda}(t, 0) = 0. \tag{61}$$

Opći oblik rješenja valne jednadžbe u 1D je

$$\lambda(t, x) = f(x - t) + g(x + t). \tag{62}$$

Slijedi računanje funkcija f i g iz početnih i rubnih uvjeta

$$58 \Rightarrow f(x) + g(x) = \gamma x \;, \quad x < 0 \;, \tag{63}$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f(x - t)}{\partial t} = -\frac{df(x - t)}{dx}, \tag{64}$$

$$\dot{g} = \frac{dg(x - t)}{dx}, \tag{65}$$

$$59 \Rightarrow \frac{d}{dx}(-f(x) + g(x)) = -\gamma v \Rightarrow -f(x) + g(x) = -\gamma v x + x_0 \;, \quad x < 0 \;, \tag{66}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\gamma(1 + v)x - x_0 \;, \quad g(x) = \frac{1}{2}\gamma(1 - v)x + x_0 \;, \quad x < 0 \;, \tag{67}$$

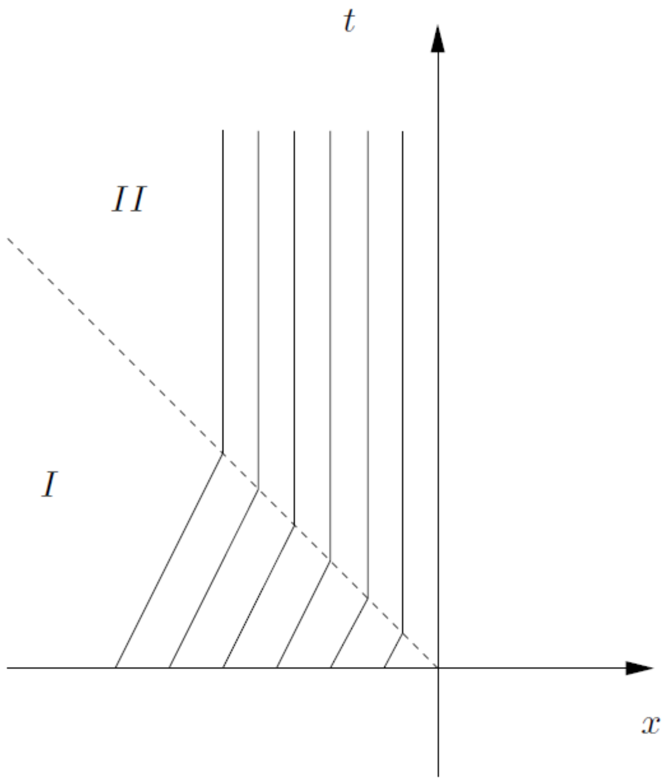
što u zbroju f i g čini x_0 nebitnim. Budući da promatramo kvadrant ($x < 0,\ t > 0$), uvijek vrijedi $x - t < 0$ pa izraz za $f(x)$ možemo primijeniti svugdje. S druge strane, za $g(x + t > 0)$ moramo koristiti

$$61 \Rightarrow f(-t) + g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = -f(-t) \;, \quad t > 0 \tag{68}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}\gamma(1 + v)t \;, \quad t > 0 \;, \tag{69}$$

odakle zbrajanjem $f(x - t)$ i $g(x + t)$ slijedi konačno rješenje

$$\lambda(t, x) = \gamma(x - vt) \;, \quad x + t < 0 \;, \tag{70}$$



Slika 2: Preuzeto iz [1]. Grafički prikaz gibanja polubeskonačne rigidne niti nakon sudara sa zidom u $x = t = 0$. Iscrtkana linija je pravac $t = -x$ kojim putuje informacija o sudaru sa zidom, a pune linije su svjetske linije jednoliko razmaknutih točaka niti. U području I točke niti još nisu primile informaciju o sudaru sa zidom te se gibaju udesno početnom brzinom. Nit je u opuštenom stanju. U području II informacija o sudaru je primljena te točke niti stoje na mjestu u sustavu zida. Ovdje je nit u sabijenom stanju, zdesna ju gura zid, a slijeva ostatak nadolazeće niti.

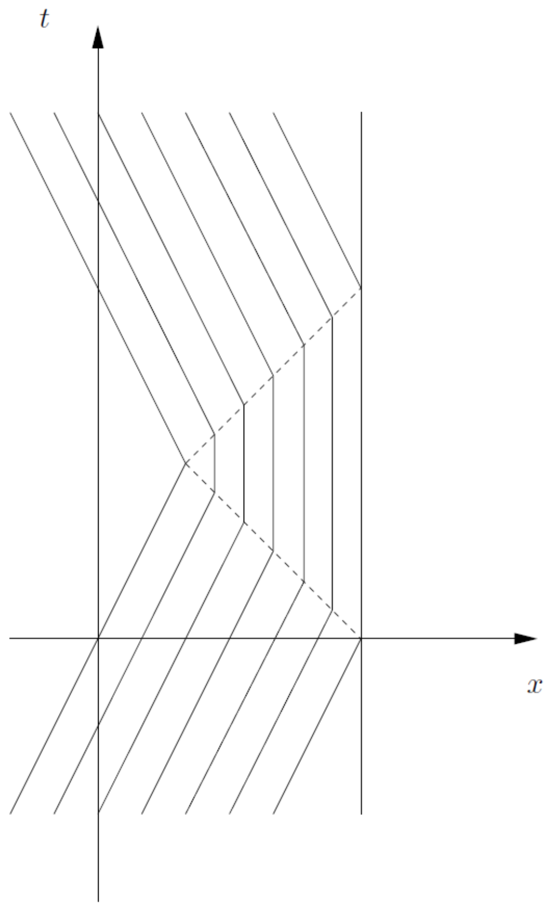
$$\lambda(t, x) = \gamma(1 + v)x \ , \quad x + t > 0 \ . \tag{71}$$

Pravac u prostorvremenu na kojem se mijenja oblik skalarnog polja λ, $t = -x$, je svjetlosnog tipa. To nam govori da se promjena režima gibanja čestica niti brzinom svjetlosti širi od početnog udara u zid. Prije dolaska informacije o sudaru ($t < -x$), čestice se gibaju kao i prije sudara, brzinom v, dok nakon njenog dolaska ($t > -x$) λ ovisi samo o x, odnosno čestice stoje na mjestu. Ako razmotrimo n s dviju strana pravca $t = -x$,

$$n^2 = |d\lambda|^2 = -\gamma^2 v^2 + \gamma^2 = 1 \ , \quad t < -x \ , \tag{72}$$

$$n^2 = |d\lambda|^2 = \gamma^2(1 + v)^2 = \frac{(1 + v)^2}{1 - v^2} = \frac{1 + v}{1 - v} > 1 \ , \quad t > -x \ , \tag{73}$$

vidimo da je prije stizanja informacije o sudaru nit opuštena, a nakon sabijena. Faktor rastezanja $s = \frac{1}{n} < 1$ je manji čim je veća početna brzina v te za brzinu svjetlosti iznosi nula.



Slika 3: Preuzeto iz [1]. Grafički prikaz sudara rigidnog štapa sa zidom u $x = l,\ t = 0$. Donja iscrtkana linija prikazuje širanje informacije o sudaru sa zidom, a gornja širenje informacije o početku odbijanja prema nazad.

Ovaj rezultat lako se uredi [1] za slične situacije. Jedna takva je sudar konačne niti (ili štapa) sa zidom, poznata kao zabijanje automobila relativističkom brzinom u stražnji zid garaže u koju ulazi. Dobiva se isti oblik sabijanja štapa kao za polubeskonačni, sve dok val deformacije ne stigne do kraja štapa. Tada se štap elastično počne odbijati, odnosno njegov stražnji kraj se opet počne rastezati u opušteno stanje, dobivajući brzinu jednaku početnoj, no u suprotnom smjeru. Na kraju, kada deformacija dođe do kraja štapa koji je u kontaktu sa zidom, štap je ponovo cijeli u opuštenom stanju te se giba unatrag brzinom jednakom početnoj. Cjelokupan proces je simetričan u vremenu. Duljina u potpunosti sabijenog štapa vlastite duljine l_0 (odnosno duljine u sustavu zida $l = l_0/\gamma$) iznosi $l_c = l_0/n = l/(1 + v)$. Dakle iako automobil momentalno dođe u stanje mirovanja, zbog sabijenosti nikada ne poveća svoju duljinu iznad one u sustavu garaže pri gibanju.

Slično se ponašaju i štapovi/niti u ostalim situacijama – sile sabijaju odnosno rastežu kraj na kojeg djeluju, dok se štap ponaša kao da je beskonačne duljine, sve dok informacija o sili ne dođe brzinom svjetlosti do drugog kraja. Od tog trenutka sila djeluje na cijeli štap. Nove promjene u iznosu sile ponovo se šire štapom brzinom svjetlosti, dok o tom iznosu ovisi faktor rastezanja.

Zaključak

Ukratko sumiramo što smo razmotrili i iznosimo najbitnije rezultate.

Rigidnost (krutost) tijela u teoriji relativnosti, suočeni s problemom konačnosti brzine svjetlosti i ravnopravnosti inercijalnih sustava, održavamo na dva načina – *rigidnost gibanja* i *rigidnost elastičnih tijela*. Prvi od njih je svojstvo gibanja tijela, odnosno svjetskih linija (linija toka četverobrzine) njegovih čestica, koje se u teoriji postiže preciznom primjenom sila na točke tijela. Gibanje je rigidno ukoliko je *tenzor ortogonalne metrike* konstantan duž linija toka. Ovaj zahtjev je ekvivalentan iščezavanju *smicanja* i *ekspanzije*. Rotacijska rigidna gibanja su nužno Killingova gibanja te obuhvaćaju isključivo gibanja nepromjenjive rotacije, odnosno dovođenje tijela u stanje rotacije ili mijenjanje te rotacije ne mogu biti rigidna gibanja. Svako nerotacijsko rigidno gibanje zadano je bilo kojom pojedinom vremenskom linijom jedne od svojih čestica.

Rigidna tijela su elastična tijela brzine zvuka jednake brzini svjetlosti. Njima se bavi teorija elastičnosti, promatrajući *ortogonalne* i *materijalno konstantne* tenzore kao *funkcije naprezanja*, odnosno ortogonalne metrike. U jednoj prostornoj dimenziji jednadžba skalarnog polja kojim opisujemo rigidno tijelo je valna jednadžba, koju smo riješili za primjer polubeskonačne rigidne niti/štapa. Također smo proširili i objasnili gibanje 1D rigidnih tijela na nešto općenitije situacije. Rješenje jednadžbe nam govori da se rigidno tijelo elastično rasteže ili sabija te se područje elastične deformacije širi brzinom svjetlosti.

Izvori

1. Natário, J. Relativistic elasticity of rigid rods and strings. *Gen Relativ Gravit* **46**, 1816 (2014). https://doi.org/10.1007/s10714-014-1816-x

2. D. Giulini: Algebraic and geometric structures of Special Relativity, [arXiv: math-ph/0602018] [Chapter 5.5]

3. L. Bento: Transverse Waves in a Relativistic Rigid Body, Int. J. eor. Phys. 24 (1985) 653–657

4. B. Carter and H. Quintana: Foundations of general relativistic high-pressure elasticity theory, Proc.R.Soc.Lond. A 331 (1972) 57–83