SEMINAR ZA KOLEGIJ DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA U FIZICI

Uvod u Finslerove prostore na primjeru neravnotežne termodinamike

Lucija Nora Farkaš

26. rujna 2018.

Razmatramo ravnotežne i neravnotežne (ali ravnoteži bliske) klasične termodinamičke sustave za koje nalazimo Riemannovu metriku induciranu informacijskom dobiti, analogonom entropije. Za neravnotežne sustave prelazimo na metriku induciranu produkcijom entropije. Dobivena metrika je Finslerovog tipa, te motivira razmatranje Finslerove geometrije. U tom razmatranju mogli smo se bazirati na rafiniranju opisa neravnotežne termodinamike uvođenjem prikladnih derivacija, tenzora zakrivljenosti i sličnih geometrijskih struktura na pripadnoj Finslerovoj mnogostrukosti, no cilj ovog seminara je izložiti osnovne pojmove vezane uz Finslerovu geometriju. Time se stiču temelji koje je nužno savladati prije razrađivanja matematičkih alata prilagođenih konkretnom fizikalnom problemu. Tako, između ostalog, u razmatranju Finslerovih mnogostrukosti uvodimo i neke digresije u odnosu na konkretni termodinamički problem, poput Legendreovih transformacija i Euler-Lagrangeovih jednadžbi kao uvjeta geodezičnosti.

1. UVOD

1.1. TERMODINAMIČKI SUSTAVI

Razmatramo dvije distribucije vjerojatnosti koje predstavljaju sustave među kojima želimo definirati udaljenost, $f(\xi)$ i $g(\xi)$, $\xi \in \Omega$, gdje je (Ω, Σ) Borelov prostor (prostor s mjerom) mikroskopskih varijabli faznog prostora promatranog sustava, to jest Σ je σ-algebra prostora Ω: $\Sigma = \{A | A \subseteq \Omega\}$ je takav skup da sadrži prazan skup, zatvoren je na komplemente svojih članova kao i na prebrojive unije i prebrojive presjeke. Kako se ne bavimo izravno teorijom mjera, nadalje samo pretpostavljamo da funkcije $f(\xi)$ i $g(\xi)$ zadovoljavaju potrebne uvjete (međusobno su apsolutno neprekidne), tako da možemo definirati njihovu informacijsku dobit kao

$$I\left(f|g\right)=\int f\left(\xi\right)\ln\left(\frac{f\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)}\right)d\xi. \tag{1.1}$$

Termodinamika nije formulirana u jeziku mikroskopskih, već makroskopskih parametara. Već u prvom zakonu termodinamike $dU=TdS-pdV+\mu dN$, susrećemo se s nekim mogućnostima za te parametare, poput temperature, tlaka ili kemijskog potencijala. Tako i tipične distribucije ovise i o makroskopskim termodinamičkim parametrima, koji su generalno interesantniji, budući da ih je jednostavnije mjeriti i ono su što opažamo u svakodnevici. Makroskopske parametre koji su zadani okolinom označujemo sa p^i, $(i\in\mathbb{N})$, te ih još nazivamo statističkim temperaturama. Ostale makroskopske veličine (koje nisu fiksirane okolinom) konjugirane p^i veličinama ovise o realizaciji konfiguracije u faznom prostoru (za koju smo uveli oznaku ξ), te ih nazivamo stohastičkim varijablama, a dane su funkcijama $F_i:\Omega\to\mathbb{R}$. Ovdje valja uzeti u obzir da uz restrikciju na zadane statističke temperature p imamo razne "realizacije" sustava u smislu konfiguracija u faznom prostoru, to jest $f\left(\xi\right)$ predstavljaju članove ansambla zadanog s p, te su u tom smislu konjugirane veličine F_i određene ξ-jem, iako u stvarnim mjerenjima uglavnom za dovoljno velike sustave i zadane temperature uvijek mjerimo iste vrijednosti i za F_i uz neke male fluktuacije ([1], [2]), upravo zato što se fizikalna stvarnost dobiva usrednjavanjem po članovima ansambla zadanog točkom $p\in\mathscr{P}$. Te veličine generalno mogu biti "statistički ovisne" i u slučaju koji se pretpostavlja u daljnjem računu: da su linearno neovisne i da nijedna ne predstavlja identitetu, za koju se uvodi oznaka $F_0=I$. Ako je za sustav koji promatramo primjenjivo n $(n\in\mathbb{N})$ takvih parametara, pretpostavljamo da imamo n-dimenzionalnu diferencijabilnu mnogostrukost $\mathscr{P}$ čije su točke $p=\left(p^1,p^2,\ldots,p^n\right)$. Od interesa su dvije identične funkcije distribucije f i g s različitim numeričkim vrijednostima statističkih temperatura p: one (sustavi koje prikazuju) su na $\mathscr{P}$ prikazane različitim točkama p i p', pa možemo pisati $f\left(\xi,p\right)=f\left(\xi\right)$ i $f\left(\xi,p'\right)=g\left(\xi\right)$. Želimo uvesti neku veličinu koja bi predstavljala udaljenost na mnogostrukosti $\mathscr{P}$ među sustavima predstavljenim tim distribucijama, a induciranu informacijskom dobiti. Kako je od udaljenosti prirodno zahtijevati simetričnost (da udaljenost od p do p' bude jednaka udaljenosti od p' do p), uvodimo simetriziranu informacijsku dobit

$$J\left(f,g\right)=J\left(g,f\right)=I\left(f|g\right)+I\left(g|f\right)=\int\left[f\left(\xi\right)-g\left(\xi\right)\right]\ln\left(\frac{f\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)}\right)d\xi. \tag{1.2}$$

Razmatramo dvije gustoće vjerojatnosti predstavljene u $\mathscr{P}$ onime što ćemo smatrati susjednim točkama p i $p'=p+\Delta p$, te pišemo:

$$\begin{gathered} f\left(\xi,p\right)=f\left(p\right),\qquad f\left(\xi,p'\right)=f\left(p+\Delta p\right); \\ J\left(f\left(p\right),f\left(p+\Delta p\right)\right)=J\left(p,p+\Delta p\right), \end{gathered} \tag{1.3}$$

fiksiravši ξ. Pretpostavljamo da $J\left(p,p+\Delta p\right)$ zadovoljava uvjete za razvoj u Taylorov red, te uzimamo samo prvi neiščezavajući član:

$$J\left(p,p+\Delta p\right)=g_{ij}\left(p\right)\Delta p^i\Delta p^j, \tag{1.4}$$

gdje je

$$g_{ij}(p) = \int f(\xi, p) \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^i} \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^j} d\xi = \langle \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^i} \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^j} \rangle. \tag{1.5}$$

Oznaka <> predstavlja usrednjavanje po pripadnoj distribucijskoj funkciji. Iz definicijskog integrala vidi se da su $g_{ij}(p)$ simetrični koeficijenti koji predstavlaju elemente Fisherove informacijske matrice [3], te je s toga kvadratna forma 1.4 pozitivno semidefinitna. Sada je vidljivo da oznaka $g_{ij}(p)$ nije samo zlouporaba notacije, već se g_{ij} može uzeti kao Riemannova metrika [4] na mnogostrukosti statističkih temperatura $\mathscr{P}$.

1.2. Ravnotežna stanja

Cilj ovog seminara je upoznavanje s osnovnim formalizmom Finslerovih prostora, što motiviramo između ostalog razmatranjem neravnotežnih stanja. Fokusiramo se na stanja bliska ravnotežnima, stoga je potrebno uvesti formalizam koji ih opisuje. U statističko-fizičkom opisu ravnotežnih sustava uglavnom se koriste distribucijske funkcije oblika ([1], [2])

$$f(\xi, p) = \frac{1}{Z(p)} \exp\left(-p^i F_i(\xi)\right), \quad i = 1, .., n, \tag{1.6}$$

gdje je korištena Einsteinova sumacijska konvencija. Ovdje normalizacija $Z(p)$ daje generaliziranu particijsku funkciju

$$Z(p) = \int_\Omega \exp\left(-p^i F_i(\xi)\right) d\xi. \tag{1.7}$$

Sad možemo konkretizirati usrednjenje stohastičkih varijabli:

$$\begin{aligned} < F_i > &= \int_\Omega F_i(\xi) f(\xi, p) \, d\xi = \\ &= \int_\Omega F_i(\xi) \frac{1}{Z(p)} \exp\left(-p^i F_i(\xi)\right) d\xi = -\frac{\partial \ln Z}{\partial p^i}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Stohastičke varijable fluktuiraju oko svojih srednjih vrijednosti [2].
Sada na prostoru $\mathscr{P}$ opremljenom distribucijskom funkcijom oblika 1.6 možemo uvesti Riemannovu strukturu [4] preko kvadrata infinitezimalne udaljenosti među točkama p i $p + dp$ danog formulom

$$dl^2 = J(p, p + dp) = g_{ij}(p) \, dp^i dp^j. \tag{1.9}$$

Komponente Riemannovog metričkog tenzora povezujemo s fizikalnim veličinama:

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) =& \langle \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^i} \frac{\partial \ln f(\xi, p)}{\partial p^j} \rangle = \frac{\partial^2 \ln Z(p)}{\partial p^i \partial p^j} = -\frac{\partial < F_i >}{\partial p^j} = -\frac{\partial < F_j >}{\partial p^i} = \\ =& \langle (F_i - < F_i >)(F_j - < F_j >) \rangle = \langle F_i F_j \rangle - < F_i >< F_j > . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ovdje vidimo da komponente metričkog tenzora govore o statističkoj (ne)ovisnosti stohastičkih varijabli, budući da su g_{ij} po izrazu 1.10 dani njihovim kovarijancama [2]. Dijagonalni elementi g_{ii} dani su varijancama (drugim momentima) F_i. Tenzor $\mathbf{g}$ je degeneriran ako su F_i i F_j za neke $i,\ j \in \mathbb{N}$ statistički potpuno ovisne, u smislu $\langle F_i F_j\rangle - <F_i><F_j> = 0$. Vidimo da su ove komponente nenegativne [2], simetrične i ovise samo o točkama u $\mathscr{P}$. Kako bi metrika zbilja bila Riemannova, još je potrebno zahtijevati $\langle F_i F_j\rangle - <F_i><F_j> \neq 0$. Uvrštavanjem izraza 1.10 u izraze za Christoffelove simbole i Riemannov tenzor [4] te spuštanjem kovarijantnih indeksa dobiva se:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} =& \frac{1}{2}\langle (F_i - <F_i>)\left(F_j - <F_j>\right)(F_k - <F_k>)\rangle, \\ R_{ijkl} =& g^{mn}\left(\Gamma_{mil}\Gamma_{njk} - \Gamma_{mik}\Gamma_{njl}\right),\end{aligned} \tag{1.11}$$

to jest te geometrijske veličine ovise o drugim i trećim korelacijama stohastičkih varijabli. Numeričkim računom može se pokazati [5] da se $1/R$, gdje je R Riemannov skalar [4], može koristiti kao mjera stabilnosti sustava (na primjer 1D Isingovog modela) i $1/R \to 0$ u kritičnim točkama.

1.3. Neravnotežna stanja

Promatramo stanja bliska ravnotežnim, koja označavamo s $f_{eq}(\xi)$. U neravnotežnoj termodinamici stanja ne ovise samo o mikroskopskim varijablama, već i o vremenu. Za opis skoro ravnotežnih stanja možemo koristit distribucijsku funkciju oblika [5]

$$f(\xi, t) = f_{eq}(\xi)\exp\left[-b^0(t) - b^i(t)F_i(\xi)\right], \quad i = 1, ..., n, \tag{1.12}$$

gdje stanje 1.12 evoluira u ravnotežno stanje $f_{eq}(\xi)$ (no ne mora ga dosegnuti u konačnom vremenu). Ovdje je vremenski ovisan faktror $Y(b) = \exp\left[b^0(t)\right]$ zadužen za normalizaciju:

$$Y(b) = \exp\left[b^0(t)\right] = \int_\Omega f_{eq}(\xi)\exp\left[-b^i(t)F_i(\xi)\right]d\xi. \tag{1.13}$$

Uviđamo da vremenski ovisne veličine $b^i(t)$ predstavljaju termodinamičke sile [1] koje teže smanjiti devijaciju sustava od ravnotežnog stanja, te su također makroskopski parametri promatranog sustava. Analogno ravnotežnom slučaju računamo vremenski ovisne srednje vrijednosti stohastičkih varijabli po izrazu

$$<F_i>(t) = \int_\Omega F_i(\xi) f(\xi, t)\, d\xi = -\frac{\partial \ln Y(b)}{\partial b^i} = -\frac{\partial b^0}{\partial b^i}, \tag{1.14}$$

gdje pretpostavljamo da su $b = \left(b^1, b^2, ..., b^n\right)$ elementi diferencijabilne n-mnogostrukosti $\mathscr{B}$. Također na uvedenoj $\mathscr{B}$ mnogostrukosti dajemo kvadrat infinitezimalne udaljenosti duž putanje $b^i(t)$, vodeći se ravnotežnim izrazom 1.9:

$$(dl)^2 = J(b, b+db) = g_{ij}db^i db^j = |\dot{b^i} = \frac{db^i}{dt}| = g_{ij}\dot{b}^i\dot{b}^j(dt)^2 = |L = \sqrt{g_{ij}\dot{b}^i\dot{b}^j}| = L^2\cdot(dt)^2. \tag{1.15}$$

Ovdje je Rieamnnova metrika dana s

$$g_{ij}(b) = \frac{\partial^2 b^0(b)}{\partial b^i \partial b^j}. \tag{1.16}$$

U ovakvom opisu neravnotežnih stanja veličine od interesa su sami sustavi, njihove putanje $b(t)$ i brzine $\dot{b}(t)$. Učestaliji pristup, koji generalno pojednostavljuje račun [1] je razmatranje produkcije entropije. Želimo li definirati udaljenost preko tog pojma, potrebno je upoznati se s osnovama Finslerovih prostora.

2. PRIPREMA ZA FINSLEROVE PROSTORE

Uvodimo pojmove potrebne za izricanje definicije Finslerove mnogostrukosti. U daljnjem tekstu, V je konačnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, a V^* njegov dualni prostor.

2.1. NORMA MINKOWSKOG

Definicija 1. (Pozitivna homogenost)
Za funkciju $f : V \to \mathbb{R}$ kažemo da je pozitivno s-homogena ako za svaki $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ vrijedi $f(\lambda v) = \lambda^s f(v)$.

Nadalje koristimo pokratu homogenost (umjesto pozitivna homogenost).

Propozicija 1. *(Eulerov teorem)*
Za glatku s-homogenu funkciju f je $\frac{\partial f}{\partial y^i}$ $(s-1)$ homogena funkcija i vrijedi $\frac{\partial f}{\partial y^i}(v)\, v^i = s f(v)$, $\forall v \in V$.

Dokaz Eulerovog teorema može se naći u večini udžbenika o klasičnoj mehanici, poput [6]. U daljnjem tekstu slovom g označavamo razne veličine. Na koju se misli jasno je iz konteksta.

Definicija 2. (Norma Minkowskog)
Norma Minkowskog na V je 1-homogena funkcija $F : V \to [o, +\infty\rangle \subset \mathbb{R}$ glatka na $V\backslash\{0\}$ takva da je pripadna simetrična bilinearna forma

$$\begin{aligned} g_y :& V \times V \to \mathbb{R} \\ &(u, v) \mapsto \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2\left(y + su + tv\right)}{\partial s \partial t}\Big|_{t=s=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(y\right) u^i v^j \end{aligned}$$

pozitivno definitna. Uvodimo oznaku $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(y\right) = g_{ij}\left(y\right)$.

Može se pokazati da za F vrijedi nejednakost trokuta i Cauchy-Schwarzova nejednakost ([7], [8]). Nedegeneriranost (u smislu $F\left(y\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$) slijedi iz 1-homogenosti i pozitivne definitnosti g_y ($F(0) = F(2\cdot 0) = 2F(0) \implies F(0) = 0$, te za drugi smjer pretpostavimo $y \neq 0$ i $F\left(y\right) = 0 \implies 0 = F^2\left(y\right) = g_y$, što je u kontradikciji s pozitivnom definitnosti g_y).
Raspisujemo neka od korisnih svojstava uvedene bilinearne forme:

$$g_{\lambda y}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)\partial(\lambda y^j)} u^i v^j = |\text{1-homogenost } F\text{-a}| = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2 F^2(y)}{\partial y^i \partial y^j} u^i v^j = g_y(u,v), \tag{2.1}$$

$$g_y(y,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial F^2}{\partial y^j} y^j\right) u^i = |\text{Eulerov teorem}| = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y)\, u^i = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2(y+tu)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \tag{2.2}$$

$$g_y(y,y) \overset{2.2}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y)\, y^i = |\text{Eulerov teorem i 2-homogenost } F^2| = F^2(y). \tag{2.3}$$

2.2. Legendreove transformacije

Legendreove transformacije prešutno su nezaobilazne pri razmatranju kanonskih transformacija u okviru klasične mehanike [6] i termodinamičkih potencijala [1], [2], te se rijetko ulazi u njihovu prirodu (čak i na jednostavnim primjerima poput onih navedenih u didaktičkom članku [9]), no već i sama njihova pojava u ovako temeljnim temama dovoljna je motivacija za razmatranje njihovog proširenja u formalizam diferencijalne geometrije, osim što su korisne za daljnji razvoj koncepata iz Finslerove geometrije.

Definicija 3. (Dualna norma Minkowskog)
Dualna norma Minkowskog je funkcija $F^*: V^* \to \mathbb{R}$ definirana kao

$$F^*(\xi) = \max\left\{\xi(y) : y \in V, F(y) = 1\right\}, \quad \xi \in V^*.$$

Iz definicije 3 čini se da smo se ograničili na $y \in V$ takve da $F(y) = 1$, ali možemo normirati $y \to y/F(y)$, budući da s-homogenost promatranih funkcija omogućuje jednostavno izlučivanje norme iz većine izraza, pa možemo promatrati sve $y \in V$ bez posebnih komplikacija. Želimo pokazati da je dulana norma Minkowskog također norma Minkowskog na V^*. To činimo plazeći od poznatog, norme Minkowskog F na prostoru V, pa nam treba neka funkcija $l: V \to V^*$ koja povezuje te prostore. U okviru Finslerovih prostora, to je motiv razmatranja Legendreovih transfomacija.

Definicija 4. (Legendreova transformacija)
Legendreova transformacija $l: V \to V^*$ definirana je kao $l(y) = g_y(y,\cdot)$ za $y \in V\backslash\{0\}$ i $l(0) = 0$.

Kaže se da je l inducirana funkcijom F. Sljedeća propozicija daje jasnu poveznicu između norme Minkovskog i njoj dualne norme:

Propozicija 2.

- $F(y) = F^*(l(y)), \forall y \in V$, *to jest* $F = F^* \circ l$,

- *Legendreova transformacija l je bijekcija.*

Dokaz:

- Za $y=0$ slijedi odmah, pa pretpostavljamo $y \neq 0$:

$$F(y) = \frac{1}{F(y)} F^2(y) \overset{2.3}{=} \frac{1}{F(y)} g_y(y,y) = |\text{1-homogenost } g_y| =$$
$$= g_y\left(y, \frac{y}{F(y)}\right) = l_y\left(\frac{y}{F(y)}\right)$$
$$\text{Također: } F^* \circ l(y) = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} l_y\left(\frac{v}{F(v)}\right) \implies F^* \circ l(y) \geq F(y).$$

  Ovdje je korištena kompaktnost skupa $\{v \in V | F(v) = 1\}$ [7]. Normirali smo v kako bismo mogli koristiti F^*. Još je potrebno pokazati $F^* \circ l(y) \leq F(y)$. Za to koristimo Cauchy-Schwartzovu nejednakost koja glasi $v, y \neq 0 \in V$; $g_y(y,v) \leq F(y) F(v)$:

$$F^* \circ l(y) = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} l_y\left(\frac{v}{F(v)}\right) = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{g_y(y,v)}{F(v)} \leq F(y),$$

  gdje zadnja nejednakost vrijedi za svaki v, pa tako i onaj koji čini supremum.
  Sada zaključujemo $[F^* \circ l(y) \geq F(y) \quad \& \quad F^* \circ l(y) \leq F(y)] \implies F = F^* \circ l$.

- Ukoliko je l bijektivno preslikavanje, ima (bijektivni) inverz označen s l^{-1}, te $F^* = F \circ l^{-1}$, iz čega slijedi tvrdnja. Budući da vrijedi $l(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, preostaje pokazati da je $l : V\setminus\{0\} \implies V^*\setminus\{0\}$ bijektivno.
  Započinjemo injektivnošću, te pokazujemo:

$$v, y \in V\setminus\{0\} : \quad \left(g_v(v,w) = g_y(y,w), \quad \forall w \in V\right) \implies v = y. \tag{2.4}$$

  Stavljamo $w = v$ i $w = y$, te koristimo Cauchy-Schwarzovu nejednakost:

$$\left.\begin{array}{l} F^2(v) = g_y(y,y) = |\text{Pretpostavka iz 2.4}| = g_y(y,v) \leq F(v) F(y) \\ F^2(y) = |\text{analogno } \uparrow| = g_v(v,y) \leq F(v) F(y) \end{array}\right\} \implies F(v) = F(y).$$

  Kako u Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti jednakost vrijedi samo kada promatramo dvije iste točke, imamo

$$F^2(y) = g_y(y,v) = F(y) F(v) \implies v = y, \tag{2.5}$$

  čime smo pokazali injektivnost.
  Preostaje pokazati surjektivnost, za što je potrebno malo više inovativnosti [7]. Za početak pretpostavljamo $\xi \in V^*\setminus\{0\}$, te neka $y \in V$ takav da $F(y) = 1$ i $\xi(y) = F^*(y)$. Sad pokazujemo da $w \in W_Y = \{w \in V : g_y(y,w) = 0\}$ povlači $\xi(w) = 0$: uvodimo glatku krivulju $\gamma :< -\epsilon, \epsilon > \subset \mathbb{R} \to F^{-1}(1)$, gdje je $F^{-1}(1)$ praslika i $\gamma(t) = \dfrac{y + tw}{F(y+tw)}$, $t \in < -\epsilon, \epsilon >$ glatko

preslikavanje koje daje normalizirani vektor. Prmječujemo da $v \mapsto \xi(v)$ ima maksimum u $y = \gamma(t=0)$:

$$\begin{aligned}
\xi(y) &= \max\{\xi(v) : v \in V, F(v) = 1\} \\
\implies 0 = \frac{d}{dt}\xi[\gamma(y)]\Big|_{t=0} &= \xi\left[\frac{w}{F(y)} - \frac{y}{F^2(y)}\frac{\partial F}{\partial y^i}(y)\, w^i\right] = \\
&= |F(y) = 1| = \xi\left[w - y\frac{\partial F}{\partial y^i}(y)\, w^i\right] = \\
&\overset{2.2}{=} |\frac{\partial F}{\partial y^i}(y)\, w^i = 2g_y(y,w) = 0| = \xi(w).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sad koristimo 2.6 za pokazivanje surjektivnosti Legendreovog transformata:

Za $\forall v \in V$ možemo staviti $w = v - g_y(y,v)\, y$:

$$\begin{aligned}
\implies g_y(y,w) &= g_y(y,v) - g_y(y,v)\, g_y(y,y) = |g_y(y,y) = F(y) = 1| = \\
&= g_y(y,v) - g_y(y,v) = 0 \\
&\implies w \in W_y.
\end{aligned}$$

To jest, $\forall v \in V$ ima dekompoziciju $v = w + g_y(y,v)\, y$, $w \in W_y$, te stoga imamo

$$\begin{aligned}
\xi(v) = \xi\left(w + g_y(y,v)\, y\right) &= \xi(w) + g_y(y,v)\,\xi(y) = g_y(y,v)\,\xi(y) = \\
&= g_y(y,v)\, F^*(\xi) \overset{\text{Def. 4}}{=} l\left(F^*(\xi)\, y\right)(v).
\end{aligned}$$

Time smo za svaki $\xi \in V^* \backslash \{0\}$ u kodomeni l-a konstruirali $l\left(F^*(\xi)\, y\right)$ koji ga "pogađa", čime smo pokazali surjektivnost.

□

Sad koristimo ovu pripremu da pokažemo željeni rezultat:

Propozicija 3.

- *Dualna norma Minkowskog je norma Minkowskog na V^*.*
- *Neka*

$$g^{*ij}(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi), \quad \xi \in V^* \backslash \{0\}, \tag{2.7}$$

onda

$$l^{-1}(\xi) = g^{*ij}(\xi)\, \xi_i e_i, \tag{2.8}$$

$$g^{ij}(y) = g^{*ij} \circ l(y). \tag{2.9}$$

Gdje ćemo koristiti $\{e_i\}$ kao bazu na V, a $\{\theta^i\}$, $\theta^j(e_i) = \delta^j_i$ kao njoj dualnu bazu na V^* (kad u slijedećem pododjeljku prijeđemo na "jezik" diferencijalne geometrije, imat ćemo $e_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $\theta^i = dy^i$).

Dokaz:

- Treba pokazati glatkoću na $V^*\backslash\{0\}$, 1-homogenost koja odmah slijedi iz $F = F^* \circ l$ i pozitivnu definitnost pridružene forme. Glatkoća također slijedi iz oba dijela propozicije 2, ukoliko pokažemo da je l^{-1} glatko. Zbog toga razmatramo $l(y) = g_{ij}(y)\, y^i \theta^i$, što je glatko i ima Jakobijan $(Dl)_{ij} = g_{ij}$ koji je po pretpostavci nedegeneriran. Po teoremu o inverzu funkcije imamo glatki inverz. Narednim raspisom pokazujemo pozitivnu definitnost g^{*ij}:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^i} \Big/ F^2(y) =& F^{*2} \circ l(y) \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) =& \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}\left[F^{*2} \circ l(y)\right] = \frac{1}{2}(Dl)_{ki}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k} \circ l(y) = \\ &= \frac{1}{2} g_{ki}(y) \frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k} \circ l(y).\end{aligned} \tag{2.10}$$

  Sad parcijalno deriviramo po y^j:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y) = g_{ij}(y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}(y) \cdot \frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k} \circ l(y) + \frac{1}{2} g_{ki}(y) \cdot g_{lj}(y) \cdot \frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \circ l(y) = \\ &\overset{2.7}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}(y) \cdot \frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k} \circ l(y) + g_{ki}(y) \cdot g_{lj}(y) \cdot \left(g^{*kl} \circ l\right)(y).\end{aligned}$$

  Koristeći 2.2 i 2.10 dobiva se $l_i(y) = g_{ki}(y)\, y^k = \left(g^{*kj} \circ l\right)(y)\, l_j(y)\, g_{ki}(y)$, stoga imamo $y^k = \left(g^{*kj} \circ l\right)(y)\, l_j(y)$, te raspisujemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}(y) \cdot \frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k} \circ l(y) &= \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}(y) \cdot \left(g^{*km} \circ l\right)(y)\, l_m(y) = \\ &= \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}(y)\, y^k = |\text{Eulerov teorem i 0-homogenost } g_{ij}| = 0 \\ &\Longrightarrow g_{ij}(y) = g_{ki}(y) \cdot g_{lj}(y) \cdot \left(g^{*kl} \circ l\right)(y).\end{aligned}$$

  Dvokratnim množenjem zadnjeg izraza inverzom bilinearne forme jednostavno se dobiva izraz 2.9, koji implicira pozitivnu definitnost forme g^{*ij}.

- Izraz 2.9 je nusprodukt prošle točke ovog dokaza.
  Izraz 2.8 dobiva se iz $l(y) = g_{ij}(y)\, y^i \theta^j$ za $y \in V\backslash\{0\}$ (što proizlazi izravno iz definicije 4), i definicije inverza: $l^{-1} \circ l = id_V$, $l \circ l^{-1} = id_{V^*}$.

□

3. FINSLEROVA GEOMETRIJA

Prelazimo na razmatranje glatke mogostrukosti M koja je topološki Hausdorffov prostor prebrojive baze lokalno homeomorfan s $\mathbb{R}^n$ (s C^∞ prijelaznim funkcijama) [7]. Koristimo uobičajne oznake (na primjer, TM za pripadni tangentni prostor i slično, poput [4]).

3.1. FINSLEROVA MNOGOSTRUKOST

Definicija 5. (Finslerova mnogostrukost i norma)
Finslerova mnogostrukost je par (M, F) mnogostrukosti M i funkcije $F : TM \to [0, +\infty\rangle$ glatke na $TM\backslash\{0\}$ takve da je $F|_{T_xM} : T_xM \to [0, +\infty\rangle$ norma Minkowskog za $\forall x \in M$. Ovdje je $TM\backslash\{0\} = \bigcup\{T_xM|\{0\} : x \in M\}$. F zovemo Finslerovom normom.

Definicija 6. (Ko-Finslerova norma)
Ko-Finslerova norma na mnogostrukosti M je funkcija $H : T^*M \to [0, +\infty\rangle$ glatka na $T^*M\backslash\{0\}$ takve da je $H|_{T_x^*M} : T_xM \to [0, +\infty\rangle$ norma Minkowskog za $\forall x \in M$.

Sada generaliziramo Legendreove transformacije na transformacije između TM i T^*M. Počinjemo od transformacija $TM \to T^*M$.

Definicija 7. (Globalna Legendreova transformacija $TM \to T^*M$)
Neka je F Finslerova norma na mnogostrukosti M, $l_x : T_xM \to T_x^*M$ za $\forall x \in M$ Legendreova transformacija inducirana normom Minkowskog danom s $F|_{T_xM}$, a $\pi : TM \to M$ kanonska projekcija. Tada definiramo globalne Legendreove transformacije kao

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : TM &\to T^*M, \\ y &\mapsto l_{\pi(y)}(y). \end{aligned}$$

Propozicija 4.
Ako je $\mathscr{L}$ Legendreova transformacija inducirana Finslerovom normom F, tada je:

- *$\mathscr{L}$ bijekcija $TM \to T^*M$ i difeomorfizam $TM\backslash\{0\} \to T^*M\backslash\{0\}$,*
- *$H = F \circ \mathscr{L}^{-1}$ ko-Finslerova norma,*
- *te ako je*

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y), \quad y \in TM\backslash\{0\}, \\ h^{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi), \quad \xi \in T^*M\backslash\{0\}, \end{aligned}$$

a h_{ij} inverz h^{ij}, možemo pisati:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(y) &= g_{ij}(y)\, y^i dx^j, \quad y \in TM\backslash\{0\}, \\ \mathscr{L}^{-1}(\xi) &= h^{ij}(\xi)\, \xi_i d\xi_j, \quad \xi \in T^*M\backslash\{0\}, \\ h^{ij}(y) &= g^{ij} \circ \mathscr{L}^{-1}(\xi), \quad \xi \in T^*M\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Analogno dosadašnjem razmatranju gledamo i transformat $T^*M \to TM$:

Definicija 8. (Globalna Legendreova transformacija $T^*M \to TM$)
Neka je H ko-Finslerova norma na mnogostrukosti M, a $l_x : T_x^*M \to T_x^{**}M$ za $\forall x \in M$ Legendreova transformacija inducirana normom Minkowskog danom s $H|_{T_x^*M}$, a $\pi : T^*M \to M$ kanonska projekcija. Uvodimo kanonski linearni izomorfizam $\iota : T_xM \to T_x^{**}M$ tako da za $\{e_i\} = \{\partial_i\}$, $\{\theta^i\} = \{dx^i\}$ i $\{\Delta_i\}$, što su redom oznake za baze na TM, T^*M i $T^{**}M$, vrijedi $\theta^i\left(e_j\right) = \delta^i_j$, $\Delta_i\left(\theta^j\right) = \delta^j_i$ i $\iota(e_i) = \Delta_i$ te $\iota^{-1}(\Delta_i) = e_i$. Tada definiramo globalne Legendreove transformacije kao

$$\begin{aligned}\mathscr{L} : T^*M &\to TM,\\ \xi &\mapsto \iota^{-1} \circ l_{\pi(\xi)}(\xi).\end{aligned}$$

Propozicija 5.
Ako je $\mathscr{L}$ Legendreova transformacija inducirana ko-Finslerovom normom H, tada je:

- *$\mathscr{L}$ bijekcija $T^*M \to TM$ i difeomorfizam $T^*M\backslash\{0\} \to TM\backslash\{0\}$,*
- *$F = H \circ \mathscr{L}^{-1}$ Finslerova norma na M,*
- *te ako vrijede oznake iz treće točke propozicije 4, možemo pisati:*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\xi) =& h^{ij}(\xi)\,\xi_i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \xi \in T^*M\backslash\{0\},\\ \mathscr{L}^{-1}\left(y\right) =& g_{ij}\left(y\right) y^i dx^j, \quad y \in TM\backslash\{0\},\\ g_{ij}\left(y\right) =& h_{ij} \circ \mathscr{L}^{-1}\left(y\right), \quad y \in TM\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

Propizicije 4 i 5 navedene su bez dokaza, koji se mogu naći u članku [7], jer njihov raspis ne daje novi uvid, ali su interesantne jer se iz izraza $\mathscr{L}(\xi) = h^{ij}(\xi)\,\xi_i \frac{\partial}{\partial x^j}$ i $\mathscr{L}\left(y\right) = g_{ij}\left(y\right) y^i dx^j$ direktno dobiva sljedeći korolar:

Korolar 1.
Neka je $\mathscr{L}_H$ Legendreova transformacija inducirana ko-Finslerovom normom H, a $\mathscr{L}_F$ Legendreova transformacija inducirana Finslerovom normom $F = H \circ \mathscr{L}_H^{-1}$, ili $\mathscr{L}_F$ Legendreova transformacija inducirana Finslerovom normom F, a $\mathscr{L}_H$ Legendreova transformacija inducirana ko-Finslerovom normom $H = F \circ \mathscr{L}_F^{-1}$. Tada vrijedi

$$\mathscr{L}_F = \mathscr{L}_H^{-1}.$$

Iz ovog korolara se vidi postojanje jedinstvene veze Finslerovih i ko-Finslerovih normi na danoj mnogostrukosti M [7].

3.2. Varijacije i Euler-Lagrangeove jednadžbe

Tražit ćemo uvjete ekstremalnosti funkcija koje nazivamo duljinama i energijama.

Definicija 9. (Duljina i energija)
Definiramo duljinu krivulje c

$$L(c) = \int_a^b F \circ \hat{c}(t)\, dt,$$

te njenu energiju

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b F^2 \circ \hat{c}(t)\, dt.$$

Ovdje je (M, F) Finslerova mnogostrukost, krivulja $c : \langle a, b\rangle \to M$ glatko preslikavanje, a $\hat{c}(t)$ njen tangentni vektor u $t \in \langle a, b\rangle$ [7], [4]. Za krivulju za koju vrijedi $F \circ \hat{c} = 1$ kažemo da je duljinski parametrizirana ("path-length parametrized").

Ako želimo nekad povezati ovako definiranu duljinu s nekom fizikalnom duljinom bitan je rezultat sljedeće propozicije koji kaže da duljina krivulje ne ovisi o njenoj parametrizaciji:

Propozicija 6.
Neka je c krivulja na (M, F)*. Ukoliko je* $\alpha : \left(a', b'\right) \to (a, b)$ *difeomorfizam za koji vrijedi* $\frac{d\alpha}{dt} > 0$, *onda vrijedi* $L(c \circ \alpha) = L(c)$*. Također, postoji takav difeomorfizam* $\alpha : (0, L(c)) \to (a, b)$ *da vrijedi* $F \circ \widehat{c \circ \alpha} = 1$.

Dokaz.
Iz linearnosti derivacije i pravila za lančano deriviranje kompozicije funkcija slijedi $\widehat{c \circ \alpha} = \frac{d\alpha}{dt}\hat{c} \circ \alpha$. Sada to uvrštavamo u definiciju duljine krivulje:

$$\begin{aligned}
L(c \circ \alpha) &= \int_{a'}^{b'} F\left(\frac{d\alpha}{dt}\hat{c} \circ \alpha\right) dt = |\frac{d\alpha}{dt} > 0 \text{ i pozitivna 1-homogenost } F\text{-a}| = \\
&= \int_{a'}^{b'} F(\hat{c} \circ \alpha)\frac{d\alpha}{dt} dt = \int_a^b F(\hat{c}(\alpha))\, d\alpha = L(c).
\end{aligned}$$

Da bismo pokazali da je moguće duljinski parametrizirati bilo koju krivulju, prvo definiramo fnkciju $\beta : \langle a, b\rangle \to \langle 0, L(c)\rangle$ kao

$$\beta(s) = \int_a^s F \circ \hat{c}(t)\, dt.$$

Iz $\frac{d\beta}{dt}(s) = F \circ \hat{c}(s) > 0$ slijedi da je β strogo rastuća funkcija, te stoga invertibilna. Jasno je da su β i β^{-1} glatke i β^{-1} može poslužiti kao difeomorfizam. Uz $\alpha = \beta^{-1}$ i prvi dio tvrdnje ove propozicije:

$$\begin{aligned}
F \circ \widehat{c \circ \alpha} &= F\left(\frac{d\left(\beta^{-1}\right)}{dt}\hat{c} \circ \alpha\right) = |\text{1-homogenost } F\text{-a}| = \frac{d\left(\beta^{-1}\right)}{dt} F(\hat{c} \circ \alpha) = \\
&= |\beta^{-1} \circ \beta = id_{\langle a,b\rangle} \implies \frac{\left(\beta^{-1}\right)}{dt} = \frac{1}{\frac{\beta}{dt} \circ \beta^{-1}}| = \frac{1}{\frac{\beta}{dt} \circ \beta^{-1}} F \circ \hat{c} \circ \alpha = \\
&= |\beta^{-1} = \alpha,\ \frac{d\beta}{dt} = F \circ \hat{c}| = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Da bismo našli ekstreme funkcija poput L i E, moramo ih nekako "derivirati po krivuljama". U tu svrhu definiramo varijacije krivulja:

Definicija 10. (Varijacija)
Varijacija krivulje $c : \langle a,b\rangle \to M$ je preslikavanje $H : [a,b] \times \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$ za neki $\epsilon > 0$, glatko na $\langle a,b\rangle \times \langle -\epsilon,\epsilon\rangle$, za koje uz notaciju $c_s(\cdot) = H(\cdot, s)$ vrijedi $c_0(t) = c(t)$, $\forall t \in [a,b]$, a krivuljama $c_s(t)$ su fiksirani krajevi (u smislu da $c_s(a)$ i $c_s(b)$ ne ovise o s).

Definiciju varijacija koristimo za uvođenje geodezika na Finslerovim mnogostrukostima.

Definicija 11. (Geodezik)
Geodezik na Finslerovoj mnogostrukosti je svaka krivulja ekstremalne duljine, to jest stacionarna krivulja c za čiju svaku varijaciju c_s vrijedi

$$\frac{d}{ds} L(c_s)\Big|_{s=0} = 0.$$

Ljepota ovog pristupa je što je lokalni uvjet geodezičnosti krivulje u obliku Euler-Lagrangeovih jednadžbi [6], a komplikacija što, da bismo to pokazali, moramo koristiti vektore na TM, elemente TTM.
Zato ovdje sabiremo oznake i neka od svojstava koordinata i vektora na M, TM i TTM. S $\{x^i\}$ i $\{\tilde{x}^i\} = \{\tilde{x}^i(x^i)\}$ označavamo (različite) lokalne koordinate oko nekog $x \in M$, stoga imamo [4]

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_x .$$

Na TM uvodimo [10] $x^i = x^i \circ \tau$, gdje je $\tau : TM \to M$ kanonska projekcija. O kojim x^i se radi raspoznaje se iz konteksta: $\{(x^i, y^i)\}$ i $\{(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)\} = \{(\tilde{x}^i(x), \tilde{y}^i(x,y))\}$ su oznake za lokalne koordinate na TM, gdje su y^i komponente u $\partial/\partial x^i$ bazi. Za transformacijska svojstva vektora na TM ($\in TTM$), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_y &= \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r}\Big|_y + \frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\Big|_y = |y = \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \implies \tilde{y}^i \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}| = \\
&= \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r}\Big|_y + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^s} y^s \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\Big|_y, \\
\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_y &= |\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial y^i} = 0| = \frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\Big|_y = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\Big|_y .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Kad je iz konteksta jasno u kojim točkama izvrjednjujemo, pojednostavljuje se zapis $\partial/\partial x^i|_y = \partial/\partial x^i$ i slično. Zamjećujemo da nema smisla govoriti o "$\partial/\partial x^i$ smjeru" na $T(TM\backslash\{0\})$, budući da za razliku od $\partial/\partial x^i$ nema željena transformacijska svojstva (vektorski prostor razapet s $\partial/\partial x^i$ ovisi o lokalnim koordinatama). Zato se često Finslerov prostor dekomponira na okomt i vertikalan dio (npr. [7],[11]). Kako bismo slijedili taj postupak, sljedećom definicijom najprije potrebno uvesti neku strukturu na $TM\backslash\{0\}$:

Definicija 12. (Nelinearna koneksija)
Nelinearne koneksije na M su lokalno definirane 1-homogene funkcije N^i_j na $TM\backslash\{0\}$, koje zadovoljavaju transformacijska svojstva

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\tilde{N}^h_j = \frac{\partial \tilde{x}^h}{\partial x^j}N^j_i - \frac{\partial^2 \tilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j}y^j.$$

Konstruiramo novu veličinu

$$\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_y = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - N^k_i(y)\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_y \in T(TM\backslash\{0\}). \tag{3.2}$$

Raspisujemo, pomoću definicije 12 i izraza 3.1, transformacijska svojstva ove veličine:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta x^i} &= \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^s}y^s\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r} - \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^k}N^k_i\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r} = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^s}y^s\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r} - \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\tilde{N}^r_j + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^s}y^s\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r} = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r} - \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\tilde{N}^r_j\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r} = |\text{gluhi indeksi}| = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r} - \tilde{N}^k_r\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\right] = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^r}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Vidimo da se 3.2 transformira kao vektor [4], što nam odgovara. Ovo koristimo za dekomponiranje $2n$-dimenzionalnog prostora $T_y(TM\backslash\{0\})$ na dva n-dimenzionalna prostora: "vertikalni" $\mathcal{V}_yTM$, razapet s $\{\partial/\partial y_i|_y\}$ i "horizontalni" $\mathcal{H}_yTM$, razapet s $\{\delta/\delta x_i|_y\}$. Direktnom sumom po točkama imamo

$$T(TM\backslash\{0\}) = \mathcal{V}_TM \oplus \mathcal{H}_TM,$$

gdje je $\mathcal{A}TM = \bigcup_{y\in TM\backslash\{0\}}\mathcal{A}_yTM$, $\mathcal{A} = \mathcal{V}, \mathcal{H}$.

Analogan postupak može se provesti i za $T^*(TM\backslash\{0\})$ [7].
Euler-Lagrangeove jednadžbe na Finslerovoj mnogostrukosti javljaju se kao uvjet geodezičnosti krivulje, čime se bavi naredna lema.

Lema 1. *(Euler-Lagrangeove jednadžbe)*
Neka je $f : TM\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Krivulja $c : \langle a,b\rangle \to M$ je stacionarna za duljinu induciranu funkcijom f ako i samo ako za $\forall\, t \in \langle a,b\rangle$ postoje lokalne koordinate oko tangentnog vektora $\hat{c}(t)$ takve da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\hat{c}\right) = 0,$$

što nazivamo Euler-Lagrangeovim jednadžbama. Također, ovaj uvjet ne ovisi o lokalnim koordinatama.

Dokaz.
Skica dokaza:

prvo pokazujemo tvrdnju da Euler-Lagrangeove jednadžbe ne ovise (oblikom) o lokalnim koordinatama, koristeći transformacije koordinata 3.1:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\hat{c}\right) = \left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^r} + \frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^s}y^s\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\right)f\circ\hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}f\circ\hat{c}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^r} + \frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^s}y^s\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\right)f\circ\hat{c} - \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}f\circ\hat{c}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}f\circ\hat{c} = \\
&= |\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\right) = \frac{dx^s}{dt}\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^s\partial x^i} = y^s\frac{\partial^2\tilde{x}^r}{\partial x^s\partial x^i}| = \\
&= \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^i}\left[\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^r}\circ\hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}^r}\circ\hat{c}\right)\right] \\
&\qquad\qquad\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^r}\circ\hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}^r}\circ\hat{c}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Razmatramo lokalne koordinate u okolini vektora $c_s(t)$ za $\forall t$: moramo, i možemo, podijeliti interval $\langle a,b\rangle$ na intervale $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$, $i = 1,...,n-1$ tako da $a = t_1 < ... < t_n$ i svaki taj interval preslikan varijacijom c_s za fiksan s u jedan lokalni koordinatni sustav oko $c_s(t)$. Ako s K označimo preslikavanje

$$c \mapsto \int_a^b f\circ\hat{c}(t)\,dt,$$

onda imamo

$$\frac{d}{ds}K(c_s)\Big|_{s=0} = |\text{lančano pravilo}| = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_k+1}\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\hat{c}(t)\frac{\partial H^i}{\partial s}(t,0) + \frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\hat{c}(t)\frac{\partial^2 H^i}{\partial t\partial s}(t,0)\right]dt. \tag{3.4}$$

Parcijalna integracijom drugog pribrojnika, uz rubne uvjete fiksiranosti rubnih točaka $(\frac{\partial H^i}{\partial s}(a,0) = \frac{\partial H^i}{\partial s}(b,0) = 0$ iz definicije 10) daje

$$\frac{d}{ds}K(c_s)\Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_k+1}\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\hat{c}(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\hat{c}(t)\right)\right]\frac{\partial H^i}{\partial s}(t,0)\,dt.$$

Restrikcije stacionarne funkcije na otvorene podintervale domene također su stacionarne [7], pa ukoliko imamo stacionarnost možemo promatrati restrikcije na podintervaliće i onda na svakom od njih dobiti Euler-Lagrangeove jednadžbe. S druge strane, pokazali smo da Euler-Lagrangeove jednadžbe ne ovise o lokalnom koordinatnom sustavu, pa ako one vrijede možemo ih primjeniti na svakom podintervaliću i dobivamo stacionarnost. □

Za zapis uvjeta stacionarnosti energije uvodimo geodetske koeficijente.

Definicija 13. (Geodetski koeficijenti)
Geodetskim koeficijentima na (M,F) nazivamo lokalo definirane funkcije

$$G^i(y) = \frac{1}{4}g^{ik}(y)\left(2\frac{\partial(g_{jk}(y))}{\partial x^l} - \frac{\partial(g_{jl}(y))}{\partial x^k}\right)y^j y^k, \quad y\in TM\backslash\{0\}.$$

U sljedećoj propoziciji, uz $f = F^2$ i primjenom Euler-Lagrangeovih jednadžbi dobivamo elegantan zapis uvjeta stacionarnosti energije.

Propozicija 7.
Krivulja $c : I \to M$ *stacionarna je točka za E ako i samo ako za* $\forall\, t \in I$ *postoje lokalne koordinate tako da vrijedi*

$$\frac{d^2c^i}{dt^2} + 2G^i \circ \hat{c} = 0.$$

Dokaz.
Koristimo $f\left(y\right) = F^2\left(y\right) = g_{ij}\left(y\right) y^i y^j$ i $\dfrac{\partial F^2}{\partial y^i} = 2g_{ij}\left(y\right) y^j$ te u Euler-Lagrangeove jednadžbe uvrštavamo $f = F^2$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F^2}{\partial x^i} \circ \hat{c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i} \circ \hat{c}\right) = \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} y^j y^k\right] \circ \hat{c} - 2\frac{d}{dt}\left\{\left[g_{ij} y^j\right] \circ \hat{c}\right\} = \\
&= \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} y^j y^k\right) \circ \hat{c} - 2g_{ij} \circ \hat{c} \cdot \frac{d\left(y^j \circ \hat{c}\right)}{dt} - 2\left[\frac{dx^l}{dt}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \cdot y^j\right] \circ \hat{c} = \\
&= | \frac{dx^l}{dt} = y^l, \frac{dy^j\left(\hat{c}(t)\right)}{dt} = \frac{d^2x^j\left(\hat{c}(t)\right)}{dt^2} = \frac{d^2c^j}{dt^2} | = \\
&= 2g_{ij} \circ \hat{c} \cdot \frac{d^2c^j}{dt^2} + \left(2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} y^l y^j - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} y^j y^k\right) \circ \hat{c}.
\end{aligned}$$

Tvrdnja se dobiva preimenovanjem nekih od gluhih indeksa i uporabom definicije inverza, $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$. □

Interesantno, pomoću G^i može se definirati nelinearna koneksija $N^i_j = \partial G^i / \partial y^j$ [7]. Ova tvrdnja se može potvrditi rapisom transformacijskih svojstava, za što su pak potrabna transformacijska vojstva geodetskih koeficijenata. Njihovo izvođenje zahtijevalo bi uvođenje geodetskih sprejeva ("geodesic sprays") i simpletičkih struktura [7], na kojima se također može formulitari geometrijska pozadina konzervativnih dinamičkih sistema [11].

4. Primjena na neravnotežnu termodinamiku

Osim pristupa u kojem promatramo putanje $b^i(t)$ i brzine $\dot{b}^i(t)$, uz žrtvovanje detaljnosti opisa na račun elegancije i jednostavnosti računa, može se razmatrati vremenske promjene relativne informacije, to jest produkciju entropije [1]. Proces se naziva produkcijom, jer je promjena uvijek pozitivna, to jest entropija sustava uvijek raste u vremenu (što se naziva drugim zakonom termodinamike). Kako bismo to pobliže razmotrili, odaberemo određenu krivulju $b(t)$, fiksiramo trenutak $\bar{t}$ te gledamo stanje $f(t)$, $t < \bar{t}$ koje s vremenom evoluira u $f\left(\bar{t}\right)$. Od interesa je relativna informacija ta dva stanja, koja je po rezultatima teorije informacija [5] (dio tih rezultata može se naći na primjer i u preglednom članku [12] ili sveobuhvatnom udžbeniku [3]) za $t < \bar{t}$ monotono opadajuća pozitivna funkcija dana s

$$I\left(f(t), f\left(\bar{t}\right)\right) = \int f(t)\left[\ln f(t) - \ln f\left(\bar{t}\right)\right] d\xi \geq 0. \tag{4.1}$$

Zanima nas promjena ove veličine u vremenu, te imamo

$$\frac{dI\left(f(t),f\left(\bar{t}\right)\right)}{dt}\bigg|_t = -\left[b^i(t) - b^i\left(\bar{t}\right)\right]\frac{d<F_i>(t)}{dt} \leq 0, \tag{4.2}$$

gdje nejednakost proizlazi iz spomenute monotonosti ove konkretne relativne informacije, a jednakost korištenjem činjenice da ona za $t = \bar{t}$ ima minimum, to jest

$$\frac{dI\left(f(t),f\left(\bar{t}\right)\right)}{dt} = 0 \quad \text{za } t = \bar{t}, \tag{4.3}$$

i raspisa

$$\frac{db^0(t)}{dt} = \frac{\partial b^0}{\partial b^i}\frac{db^i(t)}{dt} \overset{1.14}{=} -<F_i>(t)\frac{db^i(t)}{dt}. \tag{4.4}$$

Derivacija I iščezava u ravnoteži, što nije slučaj od interesa. To treba uzeti u obzir pri razmatranju pozitivne definitnosti metrike.
Za potrebe opisa produkcije entropije možemo uvesti novu metriku, za koju ćemo pokazati da osim što ovisi o stanjima b ovisi i o njihovim brzinama. Ako gledamo $b(t) \in \mathscr{B}$ kao integralne krivulje s parametrom t, možemo gledati brzine kao tangentna vektorska polja $\dot{b}(t) \in T\mathscr{B}$. Ovisnost metrike i o smjeru (tangentnom vektoru) u nekoj točki jedna je od odlika Finslerove metrike [7], tako da ovako dobivena metrika motivira razmatranje Finslerovih prostora. U svrhu njenog konstruiranja gledamo sustav koji je vremenski infinitezimalno bliz ciljnom sustavu $f\left(\bar{t}\right)$, to jest $\bar{t} = t + dt$. Taylorovim razvojem putanje $b\left(\bar{t}\right) \approx b(t) + \dot{b}(t)\,dt$ u izrazu 4.3 dobiva se linearna aproksimacija

$$\frac{dI\left(f(t),f(t+dt)\right)}{dt} = \dot{b}^i(t)\frac{d<F_i>(t)}{dt}dt = |1.14 \text{ i } \frac{d}{dt} = \dot{b}^j\frac{\partial}{\partial b^j}| = -\frac{\partial^2 b^0}{\partial b^i \partial b^j}\dot{b}^i\dot{b}^j dt = -\tilde{L}dt, \tag{4.5}$$

definiravši

$$\tilde{L}\left(b,\dot{b}\right) = \frac{\partial^2 b^0}{\partial b^i \partial b^j}\dot{b}^i\dot{b}^j \geq 0, \tag{4.6}$$

gdje za novu funkciju $\tilde{L}$ vrijedi

$$\tilde{L}dt = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(dl)^2\right]. \tag{4.7}$$

Ovdje je $(dl)^2$ dano izrazom 1.15, a $\tilde{L} \geq 0$ proizlazi iz negativnosti derivacije korištene relativne informacije. Funkcija $\tilde{L}$ koristit će nam za novu karakterizaciju udaljenosti. Definiramo produktnu $(n+1)$-mnogostrukost $\mathscr{F} = \mathscr{B} \times \mathbb{R}$ (gdje se $\mathbb{R}$ odnosi na vremensku os), s lokalnim koordinatama

$$x^a = \left(b^i, t\right); \quad a = 1,\ldots,n+1, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Tangentne vektore y na mnogostrukosti $\mathscr{F}$ uvodimo kao vektore tangentne na krivulje [4] $x^a(u) = \left(b^i(u), t(u)\right)$, gdje je u (ne nužno fizikalan) parametar:

$$y = \frac{dx}{du} = \left(\frac{db}{du}, \frac{dt}{du}\right). \tag{4.9}$$

Kad je u nefizikalan, i tangentni vektori y su nefizikalni, te ih se naziva i nefizikalnim brzinama [5]. Često se koristi parametrizacija vremenom, $u = t$. Cilj je iskoristiti $-dI/dt$ za definiciju metrike na prostoru $\mathscr{F}$, te tako definiramo funkcije $\mathscr{L}$, L_1 i L_2 izrazom

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dI}{dt} = \tilde{L}dt = \mathscr{L}du \\ &L_2^2 = \frac{\partial^2 b^0}{\partial\left(\frac{db^i}{du}\right)\partial\left(\frac{db^j}{du}\right)}\left(\frac{db^i}{du}\right)\left(\frac{db^j}{du}\right) \\ &L_1 = \frac{dt}{du} \end{aligned}\right\} \implies \mathscr{L} = \frac{L_2^2}{L_1}. \tag{4.10}$$

Iz izraza 4.10 vidljivo je da je funkcija $\mathscr{L}$ pozitivno 1-homogena u tangentnim vektorima y, te ju možemo koristiti kao Finslerovu normu 5, čime se dobivaju komponente Finslerovog metričkog tenzora

$$g^{\mathscr{F}}_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{L}^2}{\partial y^a \partial y^b}, \quad a, b = 1, \ldots, n+1. \tag{4.11}$$

Za slučaj parametrizacije vremenom raspisom izraza 4.11 direktno dobivamo sljedeće izraze za metrički tenzor:

$$\begin{aligned} &g^{\mathscr{F}}_{ij} = 2g_{ij}g_{kl}\dot{b}^k\dot{b}^l + 4g_{il}g_{mj}\dot{b}^l\dot{b}^m, \\ &g^{\mathscr{F}}_{i,n+1} = -4g_{ij}g_{kl}\dot{b}^j\dot{b}^k\dot{b}^l, \\ &g^{\mathscr{F}}_{n+1,n+1} = 3\left(g_{ij}\dot{b}^i\dot{b}^j\right)^2; \qquad i = 1, \ldots, n, \text{ a } g_{ij} \text{ su dani izrazom 1.16.} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Iz izraza 4.12 vidimo da su $g^{\mathscr{F}}_{ab}$ s-homogeni (redom $s = 2, 3, 4$) u brzinama y, te stoga iščezavaju u ravnotežnom stanju koje je stacionarno, za razliku od neravnotežne Riemannove metrike 1.16. U izrazu 4.11 radi se o Kropina metrici [5], čiju definiciju navodi [11].

5. Zaključak

Uveli smo formalizam opisa ravnotežnih i neravnotežnih klasičnih termodinamičkih sustava, prateći članak [5]. Za ravnotežne sustave uveli smo metriku Riemannovog tipa na mnogostrukosti danoj makroskopskim parametrima koje zadaje okolina. Ta metrika ima i fizikalno tumačenje: povezana je s kovarijancama stohastičkih funkcija koje predstavljaju varijable konjugirane statističkim temperaturama. Za karakterizaciju udaljenosti među neravnotežnim sustavima na mnogostrukosti danoj termodinamičkim silama odabrali smo produkciju entropije, te je iz tog razmatranja prirodno proizašla Finslerova norma. Na tom, što se uporabe Finslerovih prostora tiče, jednostavnom primjeru motivirali smo razmatranje osnovnih pojmova Finslerove geometrije, koje prati članak [7]. Korisnost uvođenja Finslerove metrike očituje se u obilju već obrađenih korisnih struktura (nelinearnih koneksija poput Cartanove i Berwaldove koneksije [7] ili Kropina koneksije s kojom smo se ovdje susreli [11], raznih tenzora zakrivljenosti, geometrijskih sprejeva, kompleksnih i simpletičkih mnogostrukosti...) i prilagodljivosti raznim sustavima. Mnoga korisna svojstva i primjeri uporabe ove i drugih Finslerovih metrika (neki npr. analogni i onom opisanom u ovom tekstu, ili vrlo zanimljiv primjer Volterra-Hamiltonovog predator-plijen modela za koralje i zvjezdače koji rezultira metrikom Berwaldovog tipa [7]) mogu se naći u udžbeniku [11]. Uglavnom je teško naći fizikalnu interpretaciju Finslerovih metrika [5], te je za dovođenje fizikalnog problema u pogodan oblik potrebno dosta iskustva ili intuicije. Svejedno, često je vrlo svrsishodno koristiti se Finslerovim prostorima, na primjer ukoliko uspijemo neki fizikalni problem svesti na jedan od mnogo već postoječih formalizama, ili zbog prirodnosti tretiranja varijacijskog računa.

LITERATURA

[1] D. K. Sunko: *Statistička fizika i termodinamika*,
(bilješke za istoimeni kolegij, 27. listopada 2016.)

[2] C. Kittel: *Elementary Statistical Physicscics*,
(John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.)

[3] S. Kullback: *Information Theory and Statistics*,
(Dover Books on Mathematics, 7. srpnja 1997.)

[4] I. Smolić: *Diferencijalna geometrija u fizici*,
(bilješke za istoimeni kolegij, 11. travnja 2018.)

[5] R. Mrugala: *Riemannian and Finslerian Geometry in Thermodynamics*,
(Open Syst Inf Dyn (1992), https://doi.org/10.1007/BF02228846)

[6] H. Goldstein, C. P. Poole Jr., J. L. Safko: *Classical Mechanics*, (ISBN 10: 0201657023)

[7] M. Dahl: *A brief introduction to Finsler geometry*, (2006.)

[8] I. Smolić: *Matematičke metode fizike*,
(bilješke za istoimeni kolegij, 2. lipnja 2018.)

[9] R. K. P. Zia, E. F. Redish, S. R. McKay: *Making Sense of the Legendre Transform*,
(arXiv:0806.1147v2 [physics.ed-ph], 4. ožujka 2009.)

[10] V. Oproiu: *A Pseudo–Riemannian Structure in Lagrange Geometry*,
(Analele Stiintifice ale Universitatii Al I Cuza din Iasi - Matematica, siječanj 1987.)

[11] P. L. Antonelli, Roman S. Ingarden, M. Matsumoto:
The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology,
(DOl 10.1007/978-94-015-8194-3)

[12] D. Commenges: *Information Theory and Statistics: an overview,*
(arXiv:1511.00860v1 [math.ST] 3. studenog 2015.)