Crne rupe s Yang - Millsovim poljima

Lovre Pavičić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 18. studenoga 2021.)

U seminaru su obrađene dvije teorije - Einstein-Yang-Millsova teorija te jedna generalnija, također ne-Abelova teorija, čija je Einstein-Yang-Millsova teorija samo poseban slučaj. Yang-Millsova teorija, a i općenito sve ne-Abelove teorije su specifične po tome što crne rupe u takvim teorijama imaju "kosu". U prvom dijelu je obrađena Einstein-Yang-Millsova teorija, dana su općenita rješenja za nju i pokazano je eksplicitno da postoje u toj teoriji crne rupe koje imaju "kosu". U drugom dijelu je obrađena generalnija teorija i pokazano je da u toj teoriji postoji statičko rješenje koje nema sfernu ni aksijalnu simetriju i time implicira da crne rupe imaju netrivijalan oblik.

I. UVOD

I.1. Opća teorija relativnosti

Osnova opće teorije relativnosti [1] je Einsteinova jednadžba:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1}$$

gdje su $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, $T_{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ je Einsteinova gravitacijska konstanta, a $\Lambda g_{\mu\nu}$ je tzv. kozmološki član i za njega će se nadalje uzimati da je 0. Rješenje te jednadžbe je u konačnici metrika. Opisuje nam na koji način dana energija (pa tako i masa) zakrivljuje prostor oko sebe.

Metrika $g_{\mu\nu}$ je fizikalno polje te se Einsteinova teorija može formulirati preko klasične teorije polja, tj. preko akcije i lagranžijana. Akcija i lagranžijan koji opisuju prazan prostor dani su s:

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L}\,\sqrt{-g}d^4x \\ \mathcal{L} &= \frac{R}{2\kappa} \end{aligned} \tag{2}$$

Primjenom principa minimalne akcije na danu akciju i lagranžijan

$$\delta S = 0 \tag{3}$$

dobiju se Euler-Lagrangeove jednadžbe koje odgovaraju točno Einsteinovoj jednadžbi u vakuumu. Ova akcija poznatija je i pod imenom *Einstein-Hilbertova* akcija. Ovisno o teoriji, na Hilbertov član u lagranžijanu dodajemo različite članove L_M koji opisuju materiju koja se pojavljuju u teoriji. Dodavanje tog člana rezultira još jednim članom u Euler-Lagrangeovim jednadžbama, kojeg identificiramo s tenzorom energije i impulsa i tako dobivamo punu Einsteinovu jednadžbu 1. Najjednostavnije vakuumsko rješenje Einstein-Hilbertove akcije je tzv. *Schwarzschildovo prostorvrijeme*;

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4}$$

Iduća najjednostavnija teorija je Einsteinova teorija s klasičnim elektromagnetizmom, tj. *Einstein-Maxwellova* teorija. Einstein-Maxwellova akcija za prostor bez izvora glasi:

$$S = \int \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}d^4x \tag{5}$$

gdje je $F^{\alpha\beta}$ elektromagnetski tenzor. Minimizacija te akcije reproducira Einsteinovu jednadžbu s elektromagnetskim tenzorom energije i impulsa te Maxwellove jednadžbe u kovarijantnom zapisu. Elektrovakuumsko rješenje tih jednadžbi je tzv. *Reissner - Nordström (RN) prostorvrijeme*:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2}\right)dt^2 + \\ &+\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2+P^2)}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \tag{6}$$

gdje su M, Q i P zasad neke konstante za koje će se ispostaviti da se mogu identificirati s masom, električnim nabojem i magnetskim nabojem (dozvoljena je mogućnost postojanja magnetskih naboja iako nisu nikad detektirani). Na primjeru tih prostorvremena razmotrit ćemo definiciju crnih rupa kao i nekih osnovnih pojmova što se vežu uz crne rupe. Također, ova dva rješenja su bitna jer često predstavljaju polazište u raznim perturbativnim metodama za neka kompleksnija rješenja (kao ono koje će se obraditi u odjeljku 3).

I.2. Crne rupe

Crnom rupom zovemo prostor unutar tzv. *horizonta događanja.*

Definicija 1: Horizont događanja je hiperploha koja razdvaja dio prostora kauzalno povezanog s beskonačnosti od dijela koji nije.

* lovre.pavicic@gmail.com

Treba napomenuti da "beskonačnost" u općoj teoriji relativnosti nema jednoznačno značenje. Najčešće se promatraju crne rupe u tzv. *asimptotski ravnim* prostorima. Ugrubo govoreći, asimptotska ravnost znači da prostor vrijeme udaljavanjem od promatranog dijela prostora metrika izgleda sve više kao metrika Minkowskog. U takvim prostorima se beskonačnost može ugrubo definirati kao prostor dovoljno daleko od promatranog područja, gdje metrika se može aproksimirati metrikom Minkowskog.

Iduća dva bitna pojma za crne rupe vezani su za njenu vremensku evoluciju. To su *stacionarnost* i *statičnost*.

Definicija 2: Kažemo da je metrika *stacionarna* ako postoji vremenoliko Killingovo vektorsko polje.

Definicija 3: Metrika je statička ako postoji vremenoliko Killingovo vektorsko polje koje je ortogonalno na familiju hiperploha.

Vidimo iz definicije da su zapravo sve statične metrike ujedno i stacionarne, ali ne i obrnuto. To jest statičnost je restriktivnije svojstvo od stacionarnosti. Treba naglasiti da je navedena definicija stacionarnosti u kojoj je Killingovo vektorsko polje vremenoliko baš svugdje veoma ograničavajuća. Po toj definiciji ni najjednostavnije metrike poput Schwarzschildove i RN metrike nisu stacionarne iako bi intuitivno očekivali da jesu. Zato se često se koristi malo "slabija" definicija stacionarnosti; asimptotski ravno prostorvrijeme je stacionarno ako postoji Killingovo vektorsko polje koje je vremenoliko u beskonačnosti.

Prije nego se krene u teorem da crne rupe nemaju kosu, treba prvo definirati masu i naboj crne rupe. U ravnim prostorima masa i naboj su bili prilično jednoznačno određeni, no u općoj teoriji relativnosti stvari više nisu tako jednostavne i postoji više definicija koje nisu nužno ekvivalentne.

Definicija 4: Očuvani električni i magnetski naboj se definiraju kao:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2_\infty} *F \\ P &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2_\infty} F \end{aligned} \tag{7}$$

gdje je $*F$ Hodgeov dual od F, a S^2_∞ sfera u beskonačnosti u asimptotski ravnom prostoru.

U Einstein-Maxwellovoj teoriji F je elektromagnetski tenzor, no ova definicija se može koristiti i u drugim teorijama u kojima je moguće definirati tenzor F za koji vrijedi $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ kao što je i Yang-Mills teorija. Na primjeru RN prostorvremena može se vidjeti, uz malo raspisivanja, da uz ovakvu definiciju naboja konstante Q i P u metrici stvarno odgovaraju električnom i magnetskom naboju.

Nadalje, ovdje ćemo spomenuti dvije definicije mase; Komarovu i ADM masu [2].

Definicija 5: U asimptotski ravnom, stacionarnom prostorvremenu definiramo *Komarovu masu (energiju)* kao:

$$M_{Komar} = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{S^2_\infty} *dk \tag{8}$$

gdje je k^a Killingovo vektorsko polje.

Definicija 6: ADM (Arnowitt-Deser-Misner) energija definirana je kao:

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2_\infty} dA\, n_i(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) \tag{9}$$

gdje je dA element površine, n_i vektor normale na površinu, a h_{ij} faktor u tzv. 1+3 dekompoziciji metrike $ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$. Treba također naglasiti da je izraz za ADM energiju, za razliku od Komarove energije, ovisan o koordinatnom sustavu u kojem ga izvrjednjujemo.

Primjenom tih formula na npr. Schwarzschildovo prostorvrijeme dobiti ćemo da je masa točno parametar M iz metrike.

Konačno, kad su definirani osnovni pojmovi crnih rupa kao što su stacionarnost, statičnost, masa i naboj, može se izreći "no-hair" hipoteza:

-Sve stacionarne crne rupe su potpuno okarakterizirane masom, angularnim momentom i električnim i magnetskim nabojem gledanim izdaleka u formi Gaussijanskih tokova. Kao takve, crne rupe nemaju *kosu* - bilo koji drugi nezavisni parametar kojeg se ne može promatrati u beskonačnosti.

Prvi teorem jedinstvenosti dao je Werner Israel za statično, asimptotski ravno vakuumsko prostorvrijeme. Usljedio je niz teorema o jedinstvenosti koji su u konačnici utvrdili da Kerr-Newmanova rješenja (nabijene crne rupe koje mogu rotirati, Schwarzschildove i RN crne rupe su njihov podskup) opisuju sve moguće stacionarne elektrovakuumske crne rupe. Time je "no-hair" hipoteza dokazana unutar Einstein-Maxwellove teorije.

Naravno, ne može se sve u prirodi opisati Einstein-Maxwellovom teorijom. "No-hair" teorem je dokazan još, osim za elektromagnetsko polje, za slobodno skalarno polje, spinorsko, masivno vektorsko polje i još u nekim nelinearnim teorijama. Vjerovalo se da "no-hair" hipoteza vrijedi uvijek, no pokazalo se ipak da nije tako.

Jedan od prvih općepriznatoh primjera teorije u kojoj "no-hair" teorem ne vrijedi je Einstein-Yang-Millsova teorija. Yang-Millsova teorija je baždarena teorija bazirana na specijalnoj unitarnoj grupi SU(N). Može se pokazati također da sve ne-Abelove teorije manifestno krše "no-hair" hipotezu. U nastavku će biti dano rješenje za statičko, sfernosimetrično, nenabijeno rješenje u EYM teoriji i pokazat će se da za danu masu rješenje nije jedinstveno. Na kraju, razmotrit ćemo također jednu općenitiju nelinearnu teoriju i u njoj perturbativnom metodom konstruirati statičko rješenje koje nije sfernosimetrično te će se pokazati da to rješenje ima magnetske momente višeg reda.

II. EINSTEIN - YANG - MILLS

Dakle, u ovom odjeljku će se promatrati četverodimenzionalni EYM sistem za kompaktnu, poluprostu baždarenu grupu G. Lijeva algebra te grupe zadana je s komutacijskim relacijama $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ gdje je f_{abc} strukturni faktor. Glavni elementi EYM teorije su $(M, g_{\mu\nu}, A)$, gdje je M mnogostrukost sa metrikom $g_{\mu\nu}$, a A je 1-forma $A \equiv A_\mu dx^\mu \equiv T_a A^a_\mu dx^\mu$. EYM akcija glasi [3]:

$$S_{EYM} = \int \left(-\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4Kg^2} \operatorname{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, d^4x \quad (10)$$

gdje je $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - i[A^\mu, A^\nu] \equiv T^a F^{\mu\nu}_a$, g je konstanta vezanja, a K je normalizacijski faktor $\operatorname{Tr} T^a T^b = K\delta_{ab}$. Nadalje, u seminaru ćemo se ograničiti na G=SU(2) i stoga su matrice T^a jednake Paulijevim matricama $T^a = \frac{1}{2}\tau^a$, $K = 1/2$, $f_{abc} = \epsilon_{abc}$. Također, od sada će se koristiti drugačija konvencija oko metrike Minkowskog; $g_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$. Lagranžijan je invarijantan na baždarane transformacije tipa:

$$A_\mu \to U(A_\mu + i\partial_\mu)U^{-1} \quad (11)$$

Primjenjivanjem principa najmanje akcije na dani lagranžijan dobivaju se dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \\ D_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

gdje je $T_{\mu\nu}$ baždareno invarijantni Yang-Millsov tenzor energije i impulsa

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4Kg^2} \operatorname{Tr} \left(-F^{\mu\sigma} F^\nu_{\ \sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \quad (13)$$

a D_μ je baždareno kovarijantna derivacija;

$$D_\mu = \nabla_\mu - i[A_\mu, \ \ ] \quad (14)$$

Pogledajmo prvo što se može zaključiti o polju A_μ iz simetrija. EYM polja će poštovati izometriju generiranu Killingovim vektorima ξ_m ($\pounds_{\xi_m} g_{\mu\nu} = 0$) ako pripadnu promjenu u baždarenom polju

$$A_\mu \to A_\mu - \epsilon^m \pounds_{\xi_m} A_\mu \quad (15)$$

možemo kompenzirati određenom baždarenom transformacijom

$$A_\mu \to A_\mu + \epsilon^m D_\mu W_m \quad (16)$$

tako da vrijedi:

$$\pounds_{\xi_m} A_\mu = D_\mu W_m \quad (17)$$

Parametri W_m se mogu odrediti iz uvjeta integrabilnosti i onda iz jednadžbe 17 se može odrediti polje A_μ. Pri određivanju baždarenog polja za sfernosimetrični sustav koristi se idući ansatz:

$$\begin{aligned} A =& aT_3 + Im(wT_+)d\theta - Re(wT_+)\sin\theta d\varphi + \\ &+ T_3 \cos\theta d\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

gdje je $T_+ = T_1 + iT_2$, a je realna 1-forma $a = a_0 dt + a_r dr$, a w je kompleksan skalar. Može se pokazati da se za statičko prostorvrijeme sustav ne može baždareno transformirati tako da bude $a_0 = 0$ bez da pri tome cijeli sustav ne postane vremenski ovisan. Međutim to je moguće napraviti za $a_r = 0$. Također, w se može izabrati da je realan. Stoga općenito statičko i sfernosimetrično rješenje za SU(2) YM polje možemo pisati kao:

$$A = a_0 T_3 dt + wT_2 d\theta - wT_1 \sin\theta d\varphi + T_3 \cos\theta d\varphi \quad (19)$$

i parametrizirano je samo sa dvije realne funkcije a_0 i w (koje ne ovise o t, s obzirom da se radi o statičkom slučaju).

Sada promatramo drugi dio ukupnog rješenja sustava - samu metriku. Prvo što se pretpostavlja jest da se metrika može napisati u 2+2 dekompoziciji;

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + h_{MN} dx^N dx^M \quad (20)$$

gdje je α, β=1,2, a M,N=3,4. U općenitom slučaju za sferno simetrično prostorvrijeme može se pisati:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (21)$$

gdje je R parametar koji ovisi o $x^\alpha = (r, t)$. Sada se metrika parametrizira na malo drugačiji način:

$$ds^2 = \sigma^2 N(dt + \alpha dr)^2 - \frac{1}{N} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (22)$$

Kada se ovako parametrizirana metrika i polje ubace u akciju i provede princip minimalne akcije dobiju se konačne jednadžbe gibanja:

$$\left(\frac{r^2}{\sigma} a_0'\right)' = \frac{2}{\sigma N} w^2 a_0 \quad (23)$$

$$(\sigma N w')' = \frac{\sigma}{r^2} w(w^2 - 1) - \frac{a_0^2}{\sigma N} w \quad (24)$$

$$m' = \frac{r^2}{2\sigma^2} a_0'^2 + \frac{w^2 a_0^2}{N\sigma^2} + N w'^2 + \frac{1}{2r^2}(w^2 - 1)^2 \quad (25)$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r a_0'^2}{N\sigma^2} + \frac{2}{r} w'^2 \quad (26)$$

gdje je m zadan s $(\partial_\mu R)(\partial^\mu R) = \frac{2\kappa m}{R} - 1$ te svi parametri $(a_0, N \equiv 1 - 2m/r, \sigma, w, m, R)$ ovise samo o r. Dakle, jednadžbe 23-26 predstavljaju Einstein-Yang-Millsove jednadžbe za statičko sfernosimetrično prostorvrijeme.

II.1. Rješenja

Promotrimo dva najjednostavnija rješenja jednadžbi 23-26. Prvo rješenje je Yang-Millsov ekvivalent Schwarzschildovom rješenju:

$$a_0 = 0, \quad w = \pm 1, \quad m = M, \quad \sigma = 1$$
$$\Rightarrow ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$
$$\Rightarrow A = T_2 d\theta - T_1 \sin\theta d\varphi \pm T_3 \cos\theta d\varphi \tag{27}$$

Dakle gornje rješenje predstavlja statičko sfernosimetrično neutralno rješenje. Drugo najjednostavnije rješenje je Yang-Millsov ekvivalent RN rješenju i to rješenje opisuje tzv. *obojene* crne rupe (”električni” naboj Q u EYM teoriji se zove ”boja”):

$$\begin{gathered} a_0 = a_0(\infty) + \frac{Q}{r}, \quad w = 0, \\ N = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2+1}{r^2}, \quad \sigma = 1 \\ \Rightarrow A = a_0 T_3 dt + T_3 \cos\theta d\varphi \end{gathered} \tag{28}$$

a metrika je jednaka RN metrici 6 samo sa suprotnim predznakom (jer smo promijenili konvenciju oko metrike). Treba primjetiti da je ”obojeno” rješenje zapravo uloženo U(1) Abelovo rješenje u smislu da je u tom slučaju polje A jednako produktu $A^3 = a_0 dt + \cos\theta d\varphi \in$ U(1) i konstantne matrice T_3. To jest, iako rješenje ”živi” u SU(2) prostoru ono efektivno zatvara U(1) podgrupu. Ovaj rezultat nije začuđujuć s obzirom na to da je iz teorije grupa poznato da postoji U(1) podgrupa unutar SU(2) grupe. Iz ovoga slijedi da za svako (ne samo RN) Einstein-Maxwellovo rješenje $(g_{\mu\nu}, A_\mu)$ postoji rješenje u EYM teoriji $(g_{\mu\nu}, A_\mu)$ u U(1) podgrupi gdje je $A_\mu = A_\mu T$ gdje T pripada Lijevoj algebri baždarene grupe.

Crne rupe u takvim rješenjima još uvijek poštuju ”no-hair” teorem s obzirom da je to rješenje analogno elektrovakuumskim rješenjima u Einsteim-Maxwellovoj teoriji. Kako se u počecima EYM teorije vjerovalo da ”no-hair” teorem vrijedi uvijek neko vrijeme se pretpostavljalo da uložena rješenja iscrpljuju sve stacionarne slučajeve. Štoviše, pokazalo se da vrijedi teorem: Sva statičke EYM crne rupe s konačnim ”bojnim” nabojem su nužno ”embedded” U(1) rješenja. Međutim, kako se pokazalo, *neutralne* EYM crne rupe ipak krše ”no-hair” teorem jer za zadanu masu postoji više rješenja, što će biti pokazano u nastavku ovog odjeljka.

Pogledajmo pobliže rješenje u statičkom sfernosimetričnom slučaju. Tada je $a_0 = 0$ te želimo da rješenje izgleda Schwarzchildovo u asimptotskoj beskonačnosti. Dakle od jednadžbi 23-26 ostaju:

$$\begin{aligned} &N w'' + \left(\frac{2m}{r} - \frac{(w^2-1)^2}{r^2}\right)\frac{w'}{r} = \frac{w(w^2-1)}{r^2}, \\ &m' = N w'^2 + \frac{(w^2-1)^2}{2r^2} \end{aligned} \tag{29}$$

s rubnim uvjetima u beskonačnosti zadanim s:

$$w = \pm\left(1 - \frac{a}{r} + O(r^{-2})\right), \quad m = M + O(r^{-3}) \tag{30}$$

Također se zahtjeva regularni horizont događanja:

$$N(r_h) = 0, \quad N(r) > 0 \;\; za \;\; r > r_h \tag{31}$$

Regularnost horizonta događanja podrazumjeva da su invarijante zakrivljenosti (npr. R, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$,$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, itd.) konačne u $r = r_h$.

Razvojem w i N u red oko horizonta događanja i uvrštavanjem u jednadđbe 28 dobije se:

$$w = w_h + \frac{w_h(w_h^2-1)}{N_h'}(r - r_h) + O((r-r_h)^2), \tag{32}$$

$$N = \frac{1}{r_h}\left(1 - \frac{(w_h^2-1)^2}{r_h^2}\right)(r - r_h) + O((r-r_h)^2 \tag{33}$$

Ako se za početak gleda slučaj $r_h \gg 1$ i napravi zamjena koordinate $x = (r - r_h)/r_h$ te se odbace članovi koji uz sebe imaju $1/r_h^2$ jednadžbe 28 se razvežu. Iz druge jednadžbe se uz rubni uvjet dobije $m = r_h/2$, a prva jednadžba postaje:

$$\left(\frac{xw'}{x+1}\right)' = \frac{w(w^2-1)}{(x+1)^2}. \tag{34}$$

Postoji analitičko rješenje te jednadžbe i ono glasi:

$$w = \pm\frac{2x - 1 - \sqrt{3}}{2x + 5 + 3\sqrt{3}}. \tag{35}$$

Ovo se zove *regularna YM kosa* na Schwarzchildovoj pozadini. Vidimo da već za granični slučaj gdje je horizont događaja $r_h \gg 1$ za jednu određenu masu imamo dva različita rješenja. Time je pokazano da ”no-hair” ne vrijedi.

Dakle, opisano je dosad rješenje jako daleko od horizonta događanja (29) i jako blizu horizonta događanja (31,32). Puno rješenje jednadžbi 28 se može dobiti jedino numerički, tj. numeričkim proširivanjem dva asimptotska rješenja u područje između njih. Ono što se dobije numeričkim računom jest da za svaki zadani r_h postoji puno rješenja za w i ta rješenja za w se karakteriziraju prirodnim brojem n. Za dani par (r_h, n) ponašanje parametara je iduće - w je u r_h jednak nekoj konačnoj vrijednosti, te kako se r povećava on nakon što n puta prođe kroz 0 teži u $(-1)^n$. Parametri metrike m i σ također imaju neku konačnu vrijednost u r_h ($m(r_h) = r_h/2$, $\sigma(r_h) = \sigma_n(r_h)$) te s r rastu monotono do neke vrijednosti $m(\infty) = M_n(r_h)$ te $\sigma(\infty) = 1$. U asimptotskom području geometrija je Schwarzchildova s masom $M = M_n(r_h)$. Može se pokazati da u obrađenom slučaju snaga YM polja F asimptotski opada kao $1/r^3$ i stoga se parametar n ne može povezati s nikakvim YM nabojem.

III. STATIČKE CRNE RUPE BEZ SFERNE SIMETRIJE

U ovom odjeljku promotriti ćemo jednu generalniju teoriju opisanu lagranžijanom:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}H^*_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + \frac{eg}{4}\,d_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \\ &- \frac{\lambda e^2}{4}\,d_{\mu\nu}d^{\mu\nu} + m^2 W^*_\mu W^\mu\end{aligned} \tag{36}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ H_{\mu\nu} &= D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu \\ d_{\mu\nu} &= i(W^*_\mu W_\nu - W^*_\nu W_\mu) \\ D_\mu W_\nu &= (\partial_\mu - ieA_\mu)W_\nu,\end{aligned} \tag{37}$$

a gravitacijski dio lagranžijana je isti kao i uvijek. Konstante g i λ su parametri u teoriji (g nije više konstanta vezanja kao u 10. Teorija opisuje elektromagnetizam s dodatnim masenim i nabijenim vektorskim (spina 1) česticama. Navedena teorija je zapravo samo malo općenitija verzija EYM teorije, što se može vidjeti ako se 10 malo raspiše;

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2g^2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\,b}\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_a\tau_b) \\ &= -\frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\,a}\end{aligned} \tag{38}$$

gdje se koristio identitet za Paulijeve matrice $\mathrm{Tr}\,(\tau_a\tau_b) = 2\delta_{a,b}$. Kad se gornji izraz još dalje raspiše i zamjene se oznake $g \to e$, $A^3_\mu \to e\,A_\mu$, $(A^1_\mu + iA^2_\mu)/\sqrt{2} \to e\,W_\mu$, dobije se lagranžijan 36 sa parametrima $g = 2$, $\lambda = 1$ i $m = 0$.

Dakle, ono što je cilj ovog odjeljka jest naći crne rupe u ovoj teoriji koje su statičke i nemaju rotacijsku simetriju. Takva rješenja za polja se dobiju rješavanjem vezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s tri varijable, što nije moguće analitički riješiti. Stoga se upotrbljava perturbacijski pristup s ishodištem u RN crnoj rupi koja ima radijalno magnetsko polje

$$F_{\theta\phi} = \frac{q}{e}\sin\theta \tag{39}$$

a W polje iščezava. Parametar q/e odgovara magnetskom naboju, a q je ograničen na cijele i polucijele brojeve radi Diracovog uvjeta kvantizacije. U RN metriku 6 dakle uvrštavamo da je $Q = 0$, a P=q/e te biramo da je $r_H \lesssim r_{cr}$ tako da je RN crna rupa skoro stabilna. Na ovaj zadnji uvjet ćemo se vratiti kasnije.

Prvo će se ilustrirati perturbativna metoda na jednostavnom "toy-model" sastavljenog od skalarnog polja vezanog na fiksni vanjski izvor. Taj postupak će se potom primjeniti na nama interesantan slučaj, tj. na crne rupe u modelu zadanim s 36. Pokazat ćemo da u najnižem redu računa smetnje za nabijeno vektorsko polje postoji interval parametra na kojem statičko rješenje nema niti aksijalnu simetriju.

III.1. Toy model

Promotrimo za početak jednostavnu teoriju zadanu s idućim lagranžijanom:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}F(x)\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{40}$$

gdje je F vanjska smetnja ovisna o prostornoj koordinati, ali ne i o vremenu. Iz tog lagranžijana dobije se jednadžba gibanja:

$$\begin{aligned}0 &= (-\nabla^2 + F(x))\phi + \lambda\phi^3 \\ &\equiv \mathcal{M}\phi + \lambda\phi^3.\end{aligned} \tag{41}$$

Rješenje $\phi(x) = 0$ je uvijek rješenje sustava. Može se lako vidjeti da ako $\mathcal{M}$ ima samo pozitivne svojstvene vrijednosti onda je $\phi(x) = 0$ jedino stabilno rješenje, no ako $\mathcal{M}$ ima i negativne svojstvene vrijednosti onda je $\phi(x) = 0$ nestabilno te implicira postojanje novog, stabilnog rješenja. Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} = -b^2\psi \\ &\int \psi^2(x)\,d^3x = 1 \\ &\phi(x) = k\psi(x) + \tilde{\phi}(x) \\ &\int \psi(x)\tilde{\phi}(x)\,d^3x = 0\end{aligned} \tag{42}$$

ψ je normirana svojstvena funkcija od $\mathcal{M}$ sa svojstvenom vrijednosti b^2 te se ukupno rješenje ϕ može zapisati kao zbroj člana koje proporcionalan ψ i ostatka koji je ortogonalan na ψ. Kada se to uvrsti u jednadžbu gibanja dobije se

$$\mathcal{M}\tilde{\phi} + \lambda(k\psi + \tilde{\phi})^3 + \Gamma\psi = 0 \tag{43}$$

gdje je Γ Legendreov multiplikator koji osigurava ortogonalnost ψ i $\tilde{\phi}$. On se lako dobije integracijom:

$$\Gamma = -\lambda \int d^3x\psi(k\psi + \tilde{\phi})^3 \tag{44}$$

Varijacija akcije po k dodaje još jedan uvjet:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0 \tag{45}$$

gdje je

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x\left(\frac{1}{2}k^2\psi\mathcal{M}\psi + \frac{\lambda}{4}(k\psi + \tilde{\phi})^4\right) \\ &= -\frac{1}{2}k^2b^2 + \frac{\lambda}{4}\int d^3x(k\psi + \tilde{\phi})^4\end{aligned} \tag{46}$$

Zasad nisu primjenjene nikakve aproksimacije. Ako je b malen rješenje se može razviti oko njega. Iz jednadžbi 45 i 46 se za k se dobiva:

$$k^2 = \frac{b^2}{\lambda}\left(\int d^3x\psi^4(x)\right)^{-1} + O(b^3) \tag{47}$$

Iz jednadžbe 44 se za Γ dobije

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\lambda k^3 \int d^3x \psi^4(x) + O(b^4) \\ &= \frac{b^3}{\sqrt{\lambda}} \left(\int d^3x \psi^4(x) \right)^{-1/2} + O(b^4).\end{aligned} \tag{48}$$

Kad se sve to uvrsti u jednadžbu 43 dobije se:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\tilde{\phi} &= -\lambda k^3 \left(\psi^3(x) - \psi(x) \int d^3y \psi^4(y) \right) + O(b^4) \\ &= \frac{b^3}{\sqrt{\lambda}} \left(\int d^3x \psi^4(x) \right)^{-3/2} (\psi^3(x) - \\ &- \psi(x) \int d^3y \psi^4(y)) + O(b^4).\end{aligned} \tag{49}$$

Dakle, u vodećem redu statičko rješenje je aproksimirano fluktuacijom negativne svojstvene energije oko vakuumskog rješenja, pomnoženog faktorom koji je određen nelinearnom članom u Lagrangianu.

III.2. Perturbacija u teoriji elektromagnetizma s nabijenom masenom vektorskom česticom

U ovom odjeljku se primjenjuje perturbativna metoda opisana u prethodnom odjeljku. Prvi korak je identificirati nestabilne modove oko neperturbiranog RN rješenja (tj. njihov analogon u navedenoj teoriji) jer kao što smo vidjeli, ovom metodom nalazimo stabilno rješenje u blizini nestabilnog. Kada se jednadžbe gibanja lineariziraju, perturbacije metrike i elektromagnetskog polja se odvežu od perturbacija masivnog vektorskog polja. Perturbacije metrike i elektromagnetskog polja su stabilne, što je poznato iz analogije s Einstein-Maxwellovom teorijom gdje je pokazano da je RN rješenje stabilno. Stoga se analiza stabilnosti svodi na analizu perturbacija masivnog vektorskog polja. Definiramo $\mathcal{M}$ kao

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} W_\nu = -\frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} \overline{D}_\alpha (\sqrt{\overline{g}} H^{\alpha\mu}) + m^2 W^\mu - \frac{ieg}{2} \overline{F}^{\alpha\mu} W_\alpha \tag{50}$$

gdje se sa crticom iznad slova označavaju neperturbirane veličine. Nestabilni modovi zadovoljavaju

$$\mathcal{M}_\mu^{\ \nu} W_\nu = 0 \tag{51}$$

i oblika je

$$W_\nu = f_\nu(x) e^{\omega t} \tag{52}$$

Sferna simetrija neperturbiranih rješenja omogućava da se rješenja jednadžbe 51 odaberu tako da budu svojstvene funkcije ukupnog angularnog momenta $\mathbf{J}^2$ i njegove z komponente J_z. Zbog dodatnog angularnog momenta električnog naboja u polju magnetskog monopola svojstvene vrijednosti od $\mathbf{J}^2$ nisu one uobičajne već J ide u cjelobrojnim koracima od minimalne vrijednosti J_{min}=q-1 (osim ako je q=1/2, onda je J_{min}=1/2). Za svaki J, nestabilni modovi postoje ako je horizont događaja r_H manji od neke kritične vrijednosti $r_{cr}(J)$, uz uvjet da je g u pravom rasponu vrijednosti ($g > 0$ za $J = q - 1$, $g > 2$ za $J = q$ te $g < 0$ ili $g > 2$ za $J > q$). Nadalje ćemo se ograničavati samo na slučaj $J = q - 1$, g >0 radi jednostavnosti.

Modovi koji će praviti bazu za nova rješenja će biti statičke svojstvene vrijednosti operatora $\mathcal{M}$ s negativnim svojstvenim vrijednostima;

$$\mathcal{M}_\mu^{\ \nu} \psi_\nu = -\beta^2 m^2 \psi_\mu \tag{53}$$

Prvi rubni uvjet na ψ_μ jest da ne divergira u prostornoj beskonačnosti (može se pokazati da to implicira da ψ_μ zapravo ide u 0 za $r \to \infty$ za svojstvene vrijednosti manje od m^2). Drugi rubni uvjet je da je ψ_μ regularan na horizontu događanja. Još na kraju zahtjevamo da je ψ_μ normiran na prostoru van horizonta događanja;

$$\int d^3x \sqrt{g} \psi_\mu^* \psi^\mu = 1 \tag{54}$$

Može se pokazati da statički problem ima negativne svojstvene vrijednosti ako i samo ako je RN rješenje nestabilno. Stoga su već navedeni uvjeti nestabilnosti također uvjeti koji su potrebni za naša nova rješenja. Statički svojstveni modovi za realni β mogu se dobiti iz rješenja za $\omega = 0$ jednadžbe 52 ako se u tu jednadžbu stave drugačiji parametri. Naime, ako se u jednadžbi 53 desna strana jednadžbe prebaci na lijevu vidi se da je rezultantna jednadžba zadovoljena s $f_\mu(x)$ za $\omega = 0$, ali s parametrom m^2 zamjenjenim s $m^2(1 + \beta^2)$. Slijedi da je r_h koji vodi na dani β za W-masu m jednak kritičnoj vrijednosti r_{cr} za W-masu $m\sqrt{1 + \beta^2}$. Iz dimenzionalnih argumenata se može zaključiti da je r_{cr} inverzno proporcionalan m i stoga slijedi:

$$\beta = \frac{\sqrt{r_{cr}^2 - r_H^2}}{r_h} \tag{55}$$

i iz toga se vidi da β može predstavljati malu veličinu po kojoj ćemo raditi perturbaciju. Sada po uzoru na jednadžbu 42 pišemo ukupno W polje kao

$$W_\mu = V_\mu + \tilde{W}_\mu = m^{-1/2} \sum_{M=-j}^{j} k_M \psi_\mu^M + \tilde{W}_\mu \tag{56}$$

Za razliku od jednadžbe 42 sada imamo još i sumu jer za svaku svojstvenu vrijednost od J postoji još $2M + 1$ degeneriranih svojstvenih funkcija od J_z. Također nam je korisno definirati veličinu a:

$$\sum_{M=-j}^{j} |k_M|^2 = a^2 \tag{57}$$

tako da

$$V_\mu = O(a) \tag{58}$$

Mogu se dobiti jednadžbe gibanja za polja A i W iz originalnog lagranžijana te se uvrštavanjem izraza 56 može dobiti, po analogiji s izrazom 43, izraz za $\tilde{W}_\mu$;

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\nu\alpha}\tilde{W}_\alpha = -\lambda e^2(V^{*\mu}V^\nu - V^\mu V^{*\nu})V_\mu + \frac{ieg}{2}V_\mu \delta F^{\mu\nu} - \\ - ie\delta A_\mu(\overline{D}^\mu V^\nu - \overline{D}^\nu V^\mu) + \\ + \frac{ie}{\sqrt{g}}\overline{D}_\mu(\sqrt{g}(V^\mu \delta A^\nu - V^\nu \delta A^\mu)) - \sum \Gamma_M \psi^\nu_M + ...\end{aligned} \tag{59}$$

Tri točkice predstavljaju članove koji su reda $O(e^4a^5)$ ili $O(Gm^2a^3)$ ili manji, a Γ_M su Legendreovi multiplikatori koji osiguravaju ortogonalnost $\tilde{W}_\mu$ i ψ^M_μ. Veličina Γ_M se lako dobije množenjem obe strane jednakosti s ψ^M_μ i integriranjem po prostoru van horizonta. Iz svih navedenih jednadžbi se vidi iduće (tj. za A_μ se ne vidi iz navedenog, ali se može pokazati):

$$\begin{aligned}V_\mu &= O(a) \\ \delta A_\mu &= O(ea^2) \\ \tilde{W}_\mu &= O(e^2a^3)\end{aligned} \tag{60}$$

Vidi se da je $\tilde{W}_\mu$ dosta manji od A_μ i V_μ i stoga će se pokazati da vodeći red računa smetnje za metriku neće ovisiti o W_μ. Potrebni su samo V_μ i A_μ te će se u ostatku ovog odjeljka tražiti ta rješenja.

Dakle, dosad smo naveli jednadžbu za W_μ. Sada navodimo linearizirane jednadžbe za elektromagnetski dio oko RN rješenja:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\delta F^{\mu\nu}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}p^{\mu\nu}) + j^\nu \tag{61}$$

gdje je

$$p_{\mu\nu} = -\frac{ieg}{2}(V^*_\mu V_\nu - V^*_\nu V_\mu) + ... \tag{62}$$

te

$$\begin{aligned}j^\nu = ie(V^*_\mu(\overline{D}^\mu V^\nu - \overline{D}^\nu V^\mu) - \\ V_\mu(\overline{D}^\mu V^{*\nu} - \overline{D}^\nu V^{*\mu})) + ...\end{aligned} \tag{63}$$

gdje su s tri točkice označeni viši redovi perturbacije. Također, Bianchijev identitet daje:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \delta F_{\alpha\beta} = 0 \tag{64}$$

Dakle to su sad navedene i jednadžbe gibanja za elektromagnetski dio. No međutim, kako je pokazano u prethodnom odjeljku, ovim jednadžbama treba dodati još jednadžbu koja se dobije variranjem akcije po parametru k_M što smo uveli. Pri izvođenju tih jednadžbi se u akciji možemo ograničiti na članove do reda e^2a^4. Kad se to ograničenje uzme u obzir dobije se aproksimirana akcija:

$$\begin{aligned}S_{approx} = \int d^4x\sqrt{g}(-V^*_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu}V_\nu - \\ -\frac{\lambda e^2}{4}|V^*_\mu V_\nu - V^*_\nu V_\mu|^2 - \\ -\frac{1}{4}(\overline{F}_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu})(\overline{F}^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu}) + \\ \frac{1}{2}\delta F_{\mu\nu}p^{\mu\nu} - \delta A_\nu j^\nu)\end{aligned} \tag{65}$$

Pristup u variranju te akcije po k_M je takav da se prvo riješe jednadžbe 61 i 64 i dobije se δA_μ u ovisnosti o V_μ. Akcija 65 se može malo srediti korištenjem jednadžbi gibanja te se konačno može zapisati kao:

$$\begin{aligned}S = -\beta^2 ma^2 + \int d^3x\sqrt{g}(\frac{\lambda e^2}{4}|V^*_\mu V_\nu - V^*_\nu V_\mu|^2 - \\ -\frac{1}{4}\delta F_{\mu\nu}p^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta A_\nu j^\nu)\end{aligned} \tag{66}$$

Deriviranjem te akcije po k_M se dobije i zadnja potrebna jednadžba;

$$\frac{\partial S}{\partial k_M} = 0 \tag{67}$$

Treba primjetiti da je dio pod integralom u jednadžbi 66 reda e^2a^4, pa se iz jednadžbe 62 vidi da β treba biti proporcionalan ea. Time je zapravo opravdana činjenica da je a cijelo vrijeme bio korišten kao mali parametar po kojem se radi perturbacija.

III.3. Rješenje za V_μ i δA_μ

U ovom odjeljku ćemo izračunati δA_μ (a tako i EM tenzor $\delta F_{\mu\nu}$) i V_μ u ovisnosti o k_M. Puni izvod dan je u radu [4], a ovdje ćemo spomenuti samo glavne korake i konačno rješenje.

Spomenuli smo da se ograničavamo na slučaj $J = q-1$ i $g > 0$. Za J definiramo vektorske sferne harmonike kao svojstvenu funkciju angularnog momenta J^2 i njegove z komponente (slično kao što su sferni harmonici rješenja "običnog" angularnog momenta, samo je u ovoj teoriji ukupni angularni moment ima malo drugačiji oblik). Te harmonike označavamo sa $C^M_\mu(\theta,\phi)$, te kako smo rekli da su nestabilni modovi ψ^M_μ svojstvene funkcije angularnog momenta možemo pisati

$$\psi^M_\mu = f(r)C^M_\mu(\theta,\phi) \tag{68}$$

Korištenjem svojstava harmonika za $J = q-1$ zaključi se njihov općeniti oblik:

$$\begin{aligned}C^M_r = C^M_t = 0, \\ C^M_\phi = i\sin\theta C^M_\theta \\ C^M_\theta = a_{qM}e^{i\phi}(1+\cos\theta)^{q-1}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}e^{i\phi}\right)^{q+M-1}\end{aligned} \tag{69}$$

gdje je

$$a_{qM} = \frac{1}{2^q\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(2q-1)!}{(q+M-1)!(q-M-1)!}\right)^{1/2} \tag{70}$$

Uvrštavanjem 68 u jednadžbu 53 dobije se diferencijalna jednadžba za $f(r)$:

$$-\frac{d}{dr}\left(B\frac{df}{dr}\right) + \left(m^2 - \frac{qg}{2r^2}\right) f = -\beta^2 m^2 f \tag{71}$$

te se ta jednadžba može numerički integrirati. Nadalje, ukupni V_μ se može zapisati kao

$$V_\mu = m^{-1/2} f(r)\Phi_\mu(\theta,\phi) \tag{72}$$

gdje je Φ_μ definiran kao

$$\Phi_\mu(\theta,\phi) = \sum_{M=-(q-1)}^{q-1} k_M C_\mu^M(\theta,\phi) \tag{73}$$

Također će se koristiti idući razvoj:

$$r^2\Phi_\mu^*(\theta,\phi)\Phi^\mu(\theta,\phi) = a^2\sum_{jm}\sigma_{jm}Y_{jm}(\theta,\phi) \tag{74}$$

gdje je

$$\sigma_{jm} = \frac{r^2}{a^2}\int d\phi\, d\theta \sin\theta Y_{jm}^*(\theta,\phi)\Phi_\mu^*(\theta,\phi)\Phi^\mu(\theta,\phi) \tag{75}$$

Nadalje, može se izvesti da zbog svojstava harmonika za $J = q-1$ j^ν iščezava u prvom redu, a $p_{\mu\nu}$ izgleda kao

$$p_{\mu\nu} = \frac{eg}{2m}\epsilon_{\mu\nu}r^2 f^2\Phi_\alpha^*\Phi^\alpha \tag{76}$$

Ovo smo naveli u svrhu pojednostavljenja jednadžbi polja 61-64. Za daljnje pojednostavljenje koristimo iduće činjenice. Prva je da se traži statičko rješenje, tj. ono koje ne ovisi o vremenu te se zbog toga jednadžbe za električni dio potencijala razvežu od onih za magnetski. Također, pri početku odjeljka smo rekli da radimo perturbaciju oko RN rješenja koje opisuje magnetski monopol, tj. neperturbirano rješenje nema električnog dijela u potencijalu. Pri perturbaciji bi mogao iskočiti i električni dio u potencijalu, no mi zahtjevamo da nam i perturbirano rješenje opisuje magnetski monopol bez električnog naboja i stoga vrijedi $\delta F^{t\mu} = 0$. Dakle jednadžbe za polja su se svele na

$$\begin{aligned} &\partial_\mu(\sqrt{g}\delta F^{ar}) = 0 \\ &\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}) = -\frac{eg}{2m}\epsilon^{ab}r^2 f^2\partial_b(\Phi_\alpha^*\Phi^\alpha) \end{aligned} \tag{77}$$

gdje a i b označavaju koordinate θ i ϕ. Separacijom varijabli se dobije konačno prvi red u perturbaciji potencijala magnetskog polja:

$$\begin{aligned} \delta F_{\theta\phi} &= \sum_{jm} F_1^{jm}(r)\sin\theta Y_{jm}(\theta,\phi) \\ \delta F_{ra} &= \sum_{jm}(F_2^{jm}(r)\epsilon_a{}^b\partial_b Y_{jm}(\theta,\phi) + \\ &\quad + F_3^{jm}(r)\partial_a Y_{jm}(\theta,\phi)) \end{aligned} \tag{78}$$

Vraćanjem ovog razvoja natrag u jednadžbe 77 i Bianchijev identitet dobije se konačno:

$$\begin{aligned} F_3^{jm}(r) &= 0 \\ \frac{dF_1^{jm}}{dr} &= \frac{j(j+1)}{r^2}F_2^{jm} \\ F_1^{jm}(r) &= \frac{ega^2}{2}\sigma_{jm}\mathcal{F}_j(r), \quad j>0 \end{aligned} \tag{79}$$

gdje je $\mathcal{F}_j$ funkcija koja zadovoljava

$$\frac{d}{dr}\left(B\frac{d\mathcal{F}_j}{dr}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2}\mathcal{F}_j = -\frac{j(j+1)}{mr^2}f^2 \tag{80}$$

Ona se može naći pomoću Greenove funkcije i puno rješenje je dano u radu [4].

Dakle, konačno, na kraju ovog odjeljka imamo rješenje masivnog vektorskog polja W_μ i elektromagnetskog polja A_μ. U prvom redu računa smetnje polje W_μ je jednako polju V_μ (jedn. 56) i ono je dano u jednadžbi 72. Elektromagnetsko polje je zadano s potencijalom. Neperturbirani potencijal je dan u 40, i onda je ukupni potencijal to plus prvi red u perturbaciji koji je dan u jednadžbi 78.

Poanta ovog odjeljka je to što smo dobili rješenje koje nije sferno simetrično, već ovisi o kutevima θ i ϕ i ima neki oblik. Dakle, magnetski naboj više nije jedini parametar kojim se opisuje crna rupa, već sferna asimetrija ukazuje na postojanje netrivijalnog oblika crne rupe (ima više magnetske momente). Vidimo da je informacija o odstupanju od neperturbiranog rješenja (RN metrike) sadržano u parametru a, tj. parametrima k_M. Imamo polja W_μ i A_μ u ovisnosti o parametrima k_M i ostaje još samo odrediti k_M preko jednadžbe 67.

III.4. Određivanje parametra k_M

U ovom odjeljku bit će navedena metoda kojom se nalazi parametar a koji opisuje deformaciju RN rješenja. Također, pokazat će se da je deformacija veća što je magnetski naboj veći. Rezultati za neka konkretna rješenja kao i njihov izvod mogu se naći u radu [4].

Počnimo uvrštavajući dobivene rezultate iz prethodnoh odjeljka u akciju 66;

$$\begin{aligned} S = &- \beta^2 ma^2 + \frac{\lambda e^2 ma^4}{2} p \sum_{jm} |\sigma_{jm}|^2 - \\ &- \frac{e^2 g^2 ma^4}{8} \sum_j \sum_m |\sigma_{jm}|^2 \end{aligned} \tag{81}$$

gdje su

$$\begin{aligned} p &= \int dr \frac{f(r)^4}{m^3 r^2} \\ q_j &= \int dr \frac{f(r)^2}{m^2 r^2} \mathcal{F}_j(r) \end{aligned} \tag{82}$$

Sad se akcija zapiše u malo drugačijem obliku:

$$S = -\beta^2 ma^2 + \frac{e^2 g^2 ma^4}{8} I_1(k_M) \tag{83}$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_1(k_M) &= \frac{4\lambda}{g^2} p \sum_{j=0}^{2(q-1)} \Psi_j - \sum_{j=0}^{2(q-1)} q_j \Psi_j \\ \Psi_j &= \sum_{m=-j}^{j} |\sigma_{jm}|^2 \end{aligned} \tag{84}$$

Iz jednadžbe 83 je jasno da će akcija biti minimalna kada vrijedi

$$a = \frac{2\beta}{eg} (I_1(k_M))^{-1/2} \tag{85}$$

Tom jednadžbom su konačno određeni parametri k_M. Iz jednadžbe 84 se vidi da što je veći magnetski naboj q to više članova u sumi po j pridonosi, tj. postoji više parametara k_M. Što je više parametara k_M to je složenija ovisnost o kutevima (73) a time i manja rotacijska simetrija.

IV. ZAKLJUČAK

U prvom odjeljku seminara dane su neke općenite definicije i pojmovi vezani uz opću teoriju relativnosti i crne rupe potrebni za diskusiju glavne teme. Ukratko je opisan lagranžijanski formalizam u OTR-u, navedeno je što su statičnost i stacionarnost prostora te su navedena dva najjednostavnija rješenja. Definirane su crne rupe te što je točno njihova masa i naboj. Na kraju odjeljka je iskazana "no-hair" hipoteza.

U drugom odjeljku su opisane crne rupe s SU(2) Yang-Millsovim poljima. Uveden je njihov lagranžijan, navedene su općenite jednadžbe gibanja i dano je općenito stacionarno sferno-simetrično rješenje za Yang-Millsova polja. Promotren je primjer statičke sfernosimetrične nenabijene crne rupe. Po "no-hair" hipotezi je očekivano da je jedini parametar potreban da se opiše takva crna rupa njena masa no pokazano je da nije tako. Za danu masu postoji mnogo različitih rješenja za baždarena polja van crne rupe koja se ne mogu opisati pomoću gaussijanskog toka u beskonačnosti poput mase ili naboja. Stoga je zaključeno da za crne rupe u Einstein-Yang-Millsovoj teoriji ne vrijedi "no-hair" hipoteza.

U zadnjem odjeljku je opisana malo općenitija teorija, kojoj je Einstein-Yang-Millsova teorija samo poseban slučaj. Ta se teorija može shvatiti kao elektromagnetizam s još dodatnim masenim vektorskim poljima. Tu je perturbacijskim računom s polazištem u RN prostoru sa samo magnetskim nabojem (bez električnog) pokazano da statičko rješenje ne mora biti i sfernosimetrično. Ovisnost o kutu zapravo implicira da crne rupe u toj teoriji mogu imati nekakav netrivijalni oblik. To je također kršenje "no-hair" hipoteze jer magnetski naboj više nije jedini parametar kojim se opisuje crna rupa, već su potrebni i njeni viši magnetski momenti. Zanimljivo je da je rotacijska simetrija manja što je magnetski naboj veći.

[1] Sean Carrol: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*.

[2] Harvey Reall: lecture notes; Part 3 Black holes.

[3] Mikhail S. Volkov, Dmitri V. Gal'tsov: Gravitating Non-Abelian Solitons and Black Holes with Yang-Mills Fields.

[4] S.A. Ridgway and E.J.Weinberg. Static black hole solutions without rotational symmetry. Phys.Rev., D 52, 3440–3456, 1995.