Kompleksne mnogostrukosti

Mateo Paulišíć
Sveučilište u Rijeci - Odjel za Fiziku, Radmile Matejčić 2, 51 000, Rijeka

7. rujna 2017.

Sažetak

Prvi i veći dio seminara je geometrijski - konstrukcija kompleksifikacije vektorskih prostora pa kompleksnih mnogostrukosti, te analiziranje njihovih svojstava. Drugi dio je primjena dijela uvedenih alata na promatranje Newman-Janisovog trika - generiranja Kerrove metrike kompleksnom transformacijom Schwarzschildove metrike

Sadržaj

1 Kompleksne strukture na vektorskom prostoru

1.1 Kompleksifikacija vektorskog prostora

Za dani vektorski prostor $(V, \mathbb{R})$ nad poljem realnih brojeva (realni vektorski prostor), definiramo kompleksni vektorski prostor $(V^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ koji je kompleksifikacija realnog vektorskog prostora na način:

- Neka su $X, Y \in V$ vektori realnog vektorskog prostora. Tada je kompleksifikacija vektorskog prostora V dana vektorima $Z = X + iY$, odnosno

$$V^{\mathbb{C}} = \{Z \mid Z = X + iY; X, Y \in V\}$$

Kompleksifikacija $V^{\mathbb{C}}$ je vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Zbrajanje vektora i množenje skalarom definira se prirodno:

- $Z_1 + Z_2 = (X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) \equiv (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)$
  $\forall X_i, Y_i \in V$
- $(\alpha + i\beta)(X + iY) \equiv (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$

Za vektore iz $V^{\mathbb{C}}$ definira se kompleksna konjugacija na način

- $\overline{Z} = \overline{X + iY} \equiv X - iY$

Ako je (realna) dimenzija realnog vektorskog prostora $\dim_{\mathbb{R}} V = m$, tada je kompleksna dimenzija kompleksifikacije $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = m$

1.2 Kompleksna struktura

Definicija 1. *Kompleksna struktura na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru je endomorizam $J : V \to V$ takav da je $J(J(X)) = -X$, odnosno $J^2 = -id$*

Realni vektorski prostor sa zadanom kompleksnom strukturom označavamo $(V, \mathbb{R}; J)$

Teorem 1. *Dimenzija $(V, \mathbb{R}; J)$ je parna*

Dokaz: $J^2 = -id$ promotrimo kao matričnu jednadžbu pa uzmemo determinantu.

$$\det(J^2) = \det(J)^2 = \det(-\mathbb{I}_n) = (-1)^n$$

Pa kako je sa lijeve strane kvadrat (pozitivan broj), n mora biti paran. □

Prethodni teorem nam daje osnovu za kreiranje zapisa. Ako je dimenzija $(V, \mathbb{R}; J)$ jednaka $2m = n$:

- malim latinskim slovima $(a, b, c, ...)$ označavamo vrijednosti indeksa i njihovu sumaciju u rasponu $1, 2, ..., n = 2m$

Za kasniju uporabu već uvodimo

- malim grčkim slovima $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ označavamo vrijednosti indeksa i njihovu sumaciju u rasponu $1, 2, ..., m$
- malim grčkim slovima sa potezom $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, ...)$ označavamo vrijednosti indeksa i njihovu sumaciju u rasponu $m + 1, m + 2, ..., 2m$

1.3 Veza između kompleksne strukture i kompleksifikacije

Kako bismo vidjeli na koji su način kompleksna struktura J i kompleksifikacija $V^{\mathbb{C}}$ vektorskog prostora povezani, za dani realni vektorski prostor sa kompleksnom strukturom $(V, \mathbb{R}; J)$ kompleksifikaciju $V^{\mathbb{C}}$ dijelimo u dva podskupa:

- $W(J) \equiv \{Z \mid Z = X - iJ(X); X \in V\}$
- $\overline{W}(J) \equiv \{Z \mid Z = X + iJ(X); X \in V\}$

Kompleksna struktura J je endomorfizam na vektorskom prostoru V, pa je $J(X)$ također vektor u V. Dva definirana skupa tada sigurno su podskupovi kompleksifikacije $V^{\mathbb{C}}$, a pokazat ćemo i da je njihova unija upravo cijeli $V^{\mathbb{C}}$. Također, vektori $\overline{Z} \in \overline{W}(J)$ upravo su kompleksno konjugirani parovi vektorima $Z \in W(J)$

Teorem 2. *Za $(V, \mathbb{R}; J)$ realni vektorski prostor sa kompleksnom strukturom vrijedi da je njegova kompleksifikacija $V^{\mathbb{C}} = W(J) \oplus \overline{W}(J)$*

Dokaz Trebamo pokazati da je $W(J) \cap \overline{W}(J) = \{0\}$ i da je bilo koji vektor element kompleksifikacije sačinjen od vektora elemenata navedenih skupova.

Promotrimo dva vektora; $X_1 - iJ(X_1) \in W(J)$ i $X_2 + iJ(X_2) \in \overline{W}(J)$. Pretpostavimo suprotno: ako presjek gore navedenih skupova nije prazan skup, tada bi bilo moguće da

$$X_1 - iJ(X_1) = X_2 + iJ(X_2)$$

no kako je J linearno preslikavanje, izjednačavanje realne i imaginarne komponente povlači da je $X_1 - X_2 = J(X_1 + X_2) = 0$, odnosno $X_1 = X_2 = 0$

Uzmemo li neki vektor $Z \in V^{\mathbb{C}}$, $Z = X_1 + iX_2$ gdje su $X_1, X_2 \in V$, postoje takvi vektori

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + J(X_2) - iJ(X_1 + J(X_2))) \in W(J)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - J(X_2) - iJ(X_1 - J(X_2))) \in \overline{W}(J)$$

koji zbrojeni daju upravo Z. Budući da je konstrukcija općenita, tvrdnja je zadovoljena. □

Korolar 1. *Vrijedi i obrat, za dani $(V, \mathbb{R})$ i kompleksifikaciju $V^{\mathbb{C}}$ podijeljenu na kompleksno konjigirane podskupove $V^{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$ postoji kompleksna struktura J ua V takva da je $W(J) = U$ i $\overline{W}(J) = \overline{U}$.*

Prethodni podskupovi kompleksifikacije omogućuju nam prirodno klasificiranje vektora $Z \in V^{\mathbb{C}} = W(J) \oplus \overline{W}(J)$; vektori $Z \in W(J)$ su tipa $(1,0)$, vektori $\tilde{Z} \in \overline{W}(J)$ su tipa $(0,1)$.

Jedan koristan način provjere kojem tipu odgovara pojedini vektor dobijemo proširimo li djelovanje endomorfizma J na kompleksifikaciju, $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$, na način da

$$J(X + iY) \equiv J(X) + iJ(Y)$$

Tada se $W(J)$ sastoji od onih vektora za koje vrijedi $J(Z) = iZ$, a kompleksno konjugirani skup $\overline{W}(J)$ od onih vektora za koje vrijedi $J(\overline{Z}) = -i\overline{Z}$ gdje crta samo naglašava razliku pripadnosti skupu.

1.4 Kompleksifikacija dualnog vektorskog prostora

Dualni (vektorski) prostor V^* prostoru $(V, \mathbb{R}; J)$ sastoji se od svih linearnih preslikavanja $\omega : V \to \mathbb{R}$. Kompleksifikacija dualnog vektorskog prostora $V^{*\mathbb{C}}$ je kompleksni vektorski prostor svih linearnih funkcija $\omega + i\theta : V \to \mathbb{C}$ zadanih da vrijedi $(\omega + i\theta)(X) = \omega(X) + i\theta(X)$. Postoji jednostavan izomorfizam između kompleksifikacije dualnog vektorskog prostora i dualnog prostora kompleksifikaciji.

Kompleksna stuktura J na V prirodno inducira kompleksnu strukturu J^* na V^*. Za svaki $\omega \in V^*$ definiramo $J^*(\omega) \in V^*$ na način

$$J^*(\omega)(X) = \omega(J(X))$$

za svaki $X \in V$. Možemo jednostavno provjeriti da J^* zadovoljava svojstva kompleksne strukture

$$(J^*)(J^*)(\omega)(X) = J^*(\omega)(J(X)) = (\omega)J^2(X) = \omega(-X) = -\omega(X)$$

Analogno podjeli kompleksifikacije vektorskog prostora V, kompleksifikaciju dualnog vektorskog prostora V^* možemo podijeliti na kompleksno konjugirane podskupove $V^{*\mathbb{C}} = W(J^*) \oplus \overline{W}(J^*)$, odnosno korištenjem konjugirane kompleksne strukture, djelovanja proširenog na $V^{*\mathbb{C}}$ možemo klasificirati dualne vektore u tipove:

$$J^*(\omega) = i\omega \Rightarrow (1,0)$$

$$J^*(\eta) = -i\eta \Rightarrow (0,1)$$

1.5 Baze vektorskih prostora

Neka je $\{e_1, ..., e_n\}$ baza vektorskog prostora V i neka je $\{e^{*1}, ..., e^{*n}\}$ baza dualnog vektorskog prostora V^*

Kompleksnu strukturu tada možemo zapisati kao realnu matricu:

$$J(e_a) = J_a{}^b e_b$$

pa i definiciju kompleksne strukture $J_a{}^b J_b{}^c = -\delta^c_a$ koristiti da bi našli svojstvene vrijednosti njene matrice

$$\begin{aligned} J_a{}^b z^a &= \lambda z^b \\ J_a{}^b J_b{}^c z^a &= -z^c = \lambda J_b{}^c z^b \\ -z^c &= \lambda^2 z^c \Rightarrow \lambda = \pm i \end{aligned}$$

Budući da je $J_a{}^b$ realna (inače ne bi bila endomorfizam) $2m$ x $2m$ matrica, sastoji se od m svojstvenih vrijednosti i, te m svojstvenih vrijednosti $-i$.

Odmah uočavamo da su po prethodnoj klasifikaciji kompleksni vektori z^c za koje je svojstvena vrijednost $+i$ tipa $(1,0)$, dok su oni čija je svojstvena vrijednost $-i$ tipa $(0,1)$

Za zadanu bazu $\{e^{*1}, ..., e^{*n}\}$ definiramo elemente $\lambda \in V^{*\mathbb{C}}$. Ovakva nova konstrukcija poslužit će za definiranje dobre baze kasnije. Pamtimo da je $\lambda : V \to \mathbb{C}$

$$\lambda^a(X) \equiv e^{*a}(J(X)) + ie^{*a}(X)$$

Takav je element tipa $(1,0)$, a definiramo i njegov kompleksno konjugirani par

$$\overline{\lambda^a(X)} \equiv e^{*a}(J(X)) - ie^{*a}(X)$$

koji je tipa $(0,1)$. Kada ove izraze u potpunosti raspišemo po bazama vidjet ćemo zašto je ovakav λ dobar odabir.

$$\begin{aligned} \lambda^a(X) &= e^{*a}(J(x^b e_b)) + ie^{*a}(x^b e_b) \\ &= x^b e^{*a} J_b{}^c e_c + ix^b e^{*a} e_b \\ &= x^b (J_b{}^c \delta^a_c + i\delta^a_b) \\ &= x^b (J_b{}^a + i\delta^a_b) \end{aligned}$$

Budući da je m svojstvenih vrijednosti matrice ${J_b}^a$ upravo jednako i, posljdeica toga je da je rang $2m$ x $2m$ matrice $({J_b}^a + i\delta_b^a)$ jednak m, odnosno točno m od ukupno $n = 2m$ definiranih λ je $\mathbb{C}$ linearno nezavisno. Kako su ti dualni vektori tipa $(1, 0)$, $\lambda^1, ..., \lambda^m$ čine dobru bazu za potprostor $W(J^*)$. Analogno tome, $\overline{\lambda}^1, ..., \overline{\lambda}^m$ čine bazu za $\overline{W}(J^*)$

Objedinjeno, objekt koji pripada kompleksifikaciji dualnog vektorskog prostora pišemo

$$\lambda^\alpha = \mu^\alpha + i\mu^{\overline{\alpha}}$$

Gdje koristimo prethodno uvedenu notaciju indeksa. Objekti $\mu^\alpha, \mu^{\overline{\alpha}}$ također su linearno nezavisni. Možemo odabrati dualni prostor dualnom prostoru (što u konačnici vodi na originalni prostor), takav da je njegova baza $E_\alpha, E_{\overline{\alpha}}$ ortogonalna na elemente baze dane sa $\mu^\alpha, \mu^{\overline{\alpha}}$. Može se pokazati da takva baza ima svojstva

$$J(E_\alpha) = E_{\overline{\alpha}}; \quad J(E_{\overline{\alpha}}) = -E_\beta \tag{1}$$

2 Kompleksne mnogostrukosti

Mnogostrukost je Hausdorffov topološki prostor u kojem svaka točka ima otvorenu okolinu homeomorfnu sa $\mathbb{R}^n$. Za kompleksne mnogostrukosti koristit ćemo homeomorfizam na $\mathbb{C}^n$. Kako bismo mogli iskoristiti čim više alata znanih za realne mnogostrukosti, za konstrukciju kompleksnih mnogostrukosti tražit ćemo realne mnogostrukosti parne realne dimenzije $n = 2m$. Taj korak možemo dodatno motivirati činjenicom da je $\mathbb{R}^2$ homeomorfan sa $\mathbb{C}$.

Neka je M mnogostrukost realne dimenzije $n = 2m$. U danoj karti, točka $p \in M$ preslikava se u (ima koordinate):

$$x(p) = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$$

Budući da je n paran broj, realne koordinate možemo podijeliti u $(x^1, ..., x^m)$ i $(x^{m+1}, ..., x^{2m})$. Definiramo kompleksne koordinate $z^1, ..., z^m$ točke p na način

$$z^\alpha \equiv x^\alpha + ix^{m+\alpha} \equiv x^\alpha + ix^{\overline{\alpha}}$$

Gdje u prvi plan dolazi konvencija o notaciji navedena ranije: α su indeksi u rangu $(1, ..., m)$; $\overline{\alpha}$ su indeksi u rangu $(m + 1, ..., n = 2m)$. Ovim korakom na mnogostrukost nije uvedena nikakva dodatna struktura niti restrikcija. Samo je promijenjena notacija. Informacija koja je do sada bila upisana u $2m$ realnih brojeva, sada je upisana u m kompleksnih brojeva.

Pogledajmo što se događa pri prelasku sa jedne koordinatne karte na drugu. Neka je $p \in U \cap U'$, tako da je karta $x : U \to \mathbb{R}^n$, a $x' : U' \to \mathbb{R}^n$, a zbog jednostavnosti, ograničimo domene karti x i x' na područje presjeka $U \cap U'$. Neka je $W = x(U \cap U'), W' = x'(U \cap U')$. Tada je

$$x' \circ x^{-1} : W \to W'$$

homeomorfizam.

Prema tome, postoji bijekcija između koordinata točke p.

$$x^{a'} \equiv x^{a'}(x^b)$$

$$x^a \equiv x^a(x^{b'})$$

Kako smo ranije uveli kompleksne koordinate samo kao alternativno zapisane realne koordinate, vrijedit će i bijekcije između njih.

$$z^{\alpha'} \equiv z^{\alpha'}(z^\beta, \overline{z^\beta})$$

$$z^\alpha \equiv z^\alpha(z^{\beta'}, \overline{z^{\beta'}})$$

Gornja je bijekcija sasvim općenito zapisana, a u notaciji treba pripaziti da je drugi član u zagradi sa crtom preko kompleksno konjugiran prvome, odnosno da se crta ne odnosi na brojanje indeksa.

2.1 Kompleksna struktura

U prethodnom poglavlju na mnogostrukost nismo postavili nikakve zahtjeve ili ograničenja. Struktura na mnogostrukosti je zahtjev na funkcije prijelaza između karata. Diferencijalna struktura je zahtjev u kojem su prijelazne funkcije C^∞. Ime strukture prelazi na mnogostrukost u pitanju, pa se mnopgostrukosti sa takvim ograničenjem zovu diferencijalne mnogostrukosti.

Kompleksna sturktura je zahtjev u kojem mnogostrukost koju možemo prekriti skupovima $U, U', ...$, na svakom presjeku $U \cap U'$ ima holomorfne prijelazne funkcije

$$z^{\alpha'} \equiv z^{\alpha'}(z^\beta)$$

Definicija 2. *Kompleksna mnogostrukost (mnogostrukost sa kompleksnom strukturom) je takva mnogostrukost koju možemo prekriti otvorenim skupovima $U, U', \ldots$ homeomorfnim sa $\mathbb{R}^n, n = 2m$, takva da za svaki par kompleksnih koordinata $z^\alpha, z^{\beta'}$ povezane sa otvorenim okolinama $U, U', U \cap U' \neq \emptyset$ vrijedi*

$$z^{\alpha'} \equiv z^{\alpha'}(z^\beta) \text{ je holomorfna funkcija}$$

$$\det\left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\alpha}\right) \neq 0, \text{ odnosno, lokalno postoje inverzne funkcije}$$

Budući da smo ranije definirali kompleksne koordinate kao $z^\alpha \equiv x^\alpha + i x^{\overline{\alpha}}$, možemo iskoristiti Cauchy-Riemannove uvjete za holomorfne funkcije iskazane na realnim koordinatama, odnosno funckijama prijelaza

$$x^{\beta'} = x^{\beta'}(x^\alpha, x^{\overline{\alpha}}) \; ; \; x^{\overline{\beta'}} = x^{\overline{\beta'}}(x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$$

pa za njih vrijedi

$$\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{\overline{\beta'}}}{\partial x^{\overline{\alpha}}} \; , \; \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\overline{\alpha}}} = -\frac{\partial x^{\overline{\beta'}}}{\partial x^\alpha}$$

Konsktrukciju kompleksnih mnogostrukosti mogli smo započeti i tako da smo odmah tražili da su lokalne okoline homeomorfne sa $\mathbb{C}^m$, pa nametanjem uvjeta holomorfnosti na prijelazne funkcije. Budući da je $\mathbb{C}^m$ homeomorfno sa $\mathbb{R}^{2m}$, dvije su konstrukcije ekvivalentne. Prednost gornjeg postupka je oslanjanje na poznata svojstva realnih mnogostrukosti.

Teorem 3. *Kompleksne mnogostrukosti su orjentabilne*

Dokaz: Za orjentabilnu mnogostrukost, realne koordinate mnogostrukosti zadovoljavaju uvjet $\det \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} > 0$. Ako primjenimo notaciju indeksa definiranu gore kako bismo proširili matricu Jacobiana, i potom iskoristimo Cauchy-Riemann uvjete:

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b}\right) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\overline{\beta}}} \\ \frac{\partial x^{\overline{\alpha}'}}{\partial x^{\beta}} & \frac{\partial x^{\overline{\alpha}'}}{\partial x^{\overline{\beta}}} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\overline{\beta}}} \\ -\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\overline{\beta}}} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \end{pmatrix} \\
&> 0
\end{aligned}$$

□

2.2 Primjeri kompleksnih mnogostrukosti

Najjednostavniji primjer kompleksne mnogostrukosti je naravno $\mathbb{R}^{2m}$. Budući da je $\mathbb{R}^{2m}$ moguće prekriti već samo jednim otvorenim skupom homeomorfnim sa $\mathbb{R}^{2m}$, možemo uzeti standardne koordinate $x^1, ..., x^m, x^{m+1}, ..., x^{2m}$ preko cijele mnogostrukosti. Kompleksne koordinate tada su $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\overline{\alpha}}$. Takav koordinatni sustav (i prijelazne funkcije koje su trivijalne) definira kanonsku kompleksnu strukturu nad $\mathbb{R}^{2m}$, pa se ta mnogostrukost sa tom kompleksnom strukturom označava kao $\mathbb{C}^m$.

Sljedeći primjer su kompleksni projektivni prostori $\mathbb{CP}^m$. Njih definiramo na način da uzmemo $\mathbb{C}^{m+1}$, odstranimo točku $(0, ..., 0)$, i identificiramo točke koje su proporcionalne $(z^1, ..., z^{m+1}) \sim (\kappa z^1, ..., \kappa z^{m+1})$, $\kappa \neq 0$. Dobiveni prostor na sljedeći način možemo prekriti lokalnim koordinatnim kartama:

Za one točke za koje vrijedi da je $z^\mu \neq 0$ (μ-ta koordinata različita od nule), formiramo lokalne koordinate

$$w^\alpha_\mu = \frac{z^\alpha}{z^\mu}, \alpha = 1, ..., \mu - 1, \mu + 1, ..., m + 1$$

Točke za koje su te koordinate dobro definirane čine otvoreni skup homeomorfan sa $\mathbb{R}^{2m}$. Familija svih $m + 1$ takvih otvorenih skupova prekriva $\mathbb{CP}^m$. Na presjeku dva takva skupa vrijedi

$$w^\alpha_\nu = \frac{z^\alpha}{z^\nu} = \frac{\frac{z^\alpha}{z^\mu}}{\frac{z^\nu}{z^\mu}} = \frac{w^\alpha_\mu}{w^\nu_\mu}$$

w^ν_μ je po konstrukciji na presjeku različit od nule, pa su prijelazne funkcije holomorfne, odnosno čine kompleksnu strukturu za $\mathbb{CP}^m$.

2.3 Konjugirane mnogostrukosti

Definicija 3. *Za danu mnogostrukost sa kompleksnom strukturom* $\{(U, z^{\alpha}), (U', z^{\beta'}), ...\}$*, konjugirana kompleksna struktura je* $\{(U, \overline{z^{\alpha}}), (U', \overline{z^{\beta'}}), ...\}$

Teorem 4. *Konjugirana kompleksna struktura je kompleksna struktura*

Dokaz: Moramo pokazati kako su prijelazne funkcije $\overline{z^{\beta'}} = \overline{z^{\beta'}}(\overline{z^{\alpha}})$ holomorfne funkcije svojih argumenata.

Kako znamo da su prijelazne funkcije $z^{\beta'} = z^{\beta'}(z^{\alpha})$ kompleksne strukture holomorfne, krećemo odatle, i razvijamo u red:

$$z^{\beta'} = \sum \kappa_{n_1,...n_m}(z^1 - z^1|_0)^{n_1} \cdots (z^m - z^m|_0)^{n_m}$$

Prethodni izraz možemo kompleksno konjugirati, pa dobiti

$$\overline{z^{\beta'}} = \sum \overline{\kappa}_{n_1,...n_m}(\overline{z^1} - \overline{z^1|_0})^{n_1} \cdots (\overline{z^m} - \overline{z^m|_0})^{n_m}$$

pa je vidljivo da su $z^{\beta'}$ holomorfne funkcije svojih argumenata. □

Mnogostrukost sa konjugiranom kompleksnom strukturom možemo promatrati i kao različitu mnogostrukost od početne, i nazvati ju konjugirana mnogostrukost. Korisnost konjugirane mnogostrukosti otkrit će se kasnije pri promatranju funkcija i njihovih derivacija.

Definicija 4. *Za danu kompleksnu mnogostrukost* M*, konjugirana mnogostrukost* $\overline{M}$ *je takva mnogostrukost tako da*

- *postoji homeomorfizam* $* : M \to \overline{M}$
- *Ako je* (U, z^{α}) *karta na* M*;* $*(U) = V$ *tada je* (V, w^{α}) *karta na* $\overline{M}$
- *Vrijedi da je* $w^{\alpha}(*(p)) = \overline{z^{\alpha}(p)}$ *za svaki* $p \in U$

Budući da ćemo kompleksnu mnogostrukost i konjugiranu mnogostrukost promatrati u paru, sukladno sa prijašnjom notacijom indeksa označavat ćemo kooridate konjugirane mnogostrukosti $w^{\alpha}(*(p))$ kao produžetak koordinata početne kompleksne mnogostrukosti.

$$w^{\alpha}(*(p)) \equiv z^{\overline{\alpha}}(*(p))$$

Po definiciji znamo da je $z^{\overline{\alpha}}(*(p)) = \overline{z^{\alpha}(p)}$. Indeksi α su u rasponu od $1, ..., m$, dok su indeksi $\overline{\alpha}$ u rasponu od $m + 1, ..., 2m$.

2.4 Produktna mnogostrukost

Kompleksnu mnogostrukost M i njen konjugirani par $\overline{M}$ promatrat ćemo zajedno u objektu koji zovemo produktna mnogostrukost $M \times \overline{M}$. Kompleksnu strukturu za produktnu mnogostrukost definiramo na prirodan način: Ako M ima kompleksnu strukturu (karte i holomorfne prijelazne funkcije) $\{(U, z^{\alpha}), (U', z^{\alpha'}), ...\}$, a $\overline{M}$ kompleksnu strukturu $\{(V, z^{\overline{\alpha}}), (V', z^{\overline{\alpha}'}), ...\}$, produktna mnogostrukost je prekrivena otvorenim skupovima $\{U \times V, U' \times V', ...\}$, a točkama poput $p \in U \times V$ pripada $n = 2m$ kompleksnih koordinata $z^{\alpha}, z^{\overline{\alpha}}$, zajedno označenih kao z^{a}. Ključna informacija za strukturu nalazi se u prijelaznim funkcijama.

Na presjeku $(U \times V) \cap (U' \times V')$ definiramo holomorfne koordinatne transformacije za z^{a}.

$$z^{\alpha'} = f^{\alpha'}(z^{\beta}) \leftarrow \text{ Postoji jer je } M \text{ kompleksna mnogostrukost}$$

$$z^{\overline{\alpha}'} = \overline{f^{\alpha'}}(z^{\overline{\beta}}) \leftarrow \text{Nova funkcija}$$

$\overline{f^{\alpha'}}$ se definira preko $\overline{f^{\alpha'}}(w^{\beta}) \equiv \overline{f^{\alpha'}(\overline{w^{\beta}})} = \overline{f^{\alpha'}(z^{\beta})}$. To jest, budući da je promjena koordinata originalne kompleksne mnogostrukosti holomorfna funkcija po definiciji:

$$z^{\alpha'} = \sum \kappa_{n_1 \ldots n_m} (z^1 - z^1|_0)^{n_1} \cdots (z^m - z^m|_0)^{n_m}$$

a koordinate koje pripadaju konjugiranoj mnogostrukosti su po konstrukciji kompleksno konjugirane koordinatama originalne mnogostrukosti:

$$z^{\overline{\alpha'}} = \sum \overline{\kappa}_{n_1 \ldots n_m} (z^{\overline{1}} - z^{\overline{1}}|_0)^{n_1} \cdots (z^{\overline{m}} - z^{\overline{m}}|_0)^{n_m}$$

Sigurni smo da je novokonstruirana funkcija $\overline{f^{\alpha'}}$ holomorfna funkcija svojih argumenata. Ovakve koordinatne transformacije ne miješaju koordinate sa i bez crte. Općenito, moguće je definirati holomorfne prijelazne funkcije i bez tog zahtjeva, no kasnije će nam trebati potprostori za koje će ovo svojstvo biti važno.

2.5 Realni podprostor

U primjeni na kompleksne koordinatne transformacije na prostor-vremenu, trebat će nam realni podprostor produktne mnogostrukosti. Kao podmnogostrukost odabiremo one točke za koje vrijedi svojstvo

$$M \equiv \{(p, q) \in M \times \overline{M} | z^{\overline{\alpha}}(q) = \overline{z^{\alpha}(p)}\} \subset M \times \overline{M}$$

Primjer $\mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}}$ se sastoji od točaka (z, w), gdje su $z = x + iy, w = u + iv$. Podprostor odabiremo kao one točke za koje je $w = \overline{z}$, odnosno točke $(z, \overline{z}) = (x, y, x, -y)$, što čini $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

2.6 Funkcije i analitičko produljenje

Želimo promotriti funkcije na kompleksnoj mnogostrukosti $f : M \to \mathbb{C}$, s tim da ćemo funkcije koje poprimaju realne vrijednosti $f : M \to \mathbb{R}$ gledati samo kao poseban slučaj funkcija koje poprimaju kompleksne vrijednosti.

Za zadanu realnu analitičku funkciju $f(x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$, funkcija $f(z^\alpha, \overline{z^\alpha})$ neće općenito biti analitička, a upravo takve funkcije ćemo dobiti nakon kompleksne koordinatne transformacije. Ipak, jednostavno možemo konstruirati kompleksnu analitičku funkciju $F(z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})$ koju zovemo analitčko produljenje: $f(x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$ je analitička pa je razvijemo u red, potom napravimo supstituciju

$$x^\alpha = \frac{1}{2}(z^\alpha + \overline{z^\alpha}) \qquad x^{\overline{\alpha}} = \frac{1}{2i}(z^\alpha - \overline{z^\alpha})$$

Konačno, zamijenimo $\overline{z^\alpha}$ sa $z^{\overline{\alpha}}$ čime smo dobili kompleksnu analitičku funkciju $F(z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})$ nad $M \times \overline{M}$. Dobitak nakon ovog postupka je mogućnost definiranja derivacija.

Definicija 5. *Za danu realnu analitičku funkciju $f(x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$, i dobivenu funkciju $f(z^\alpha, \overline{z^\alpha})$ definiramo*

$$\frac{\partial f(z^\alpha, \overline{z^\alpha})}{\partial z^\beta} \equiv \left.\frac{\partial F(z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})}{\partial z^\beta}\right|_{z^{\overline{\alpha}} = \overline{z^\alpha}}$$

$$\frac{\partial f(z^\alpha, \overline{z^\alpha})}{\partial \overline{z^\beta}} \equiv \left.\frac{\partial F(z^\alpha, z^{\overline{\alpha}})}{\partial z^{\overline{\beta}}}\right|_{z^{\overline{\alpha}} = \overline{z^\alpha}}$$

Kolokvijalno rečeno, pravimo se da su z^α i $\overline{z^\alpha}$ nezavisni, preselimo se u produktnu mnogostrukost, promjenimo notaciju, odnosno napravimo analitičko produljenje ($\overline{z^\alpha} = z^{\overline{\alpha}}$), deriviramo po argumentu koji nam treba, pa se konačno vratimo u realni podprostor identifikacijom $z^{\overline{\alpha}} = \overline{z^\alpha}$.

3 Tenzori na kompleksnoj mnogostrukosti

Bez referiranja na kompleksnu strukturu mnogostrukosti, vektor koji pripada tangentnom prostoru nad točkom $p \in M$ možemo zapisati u bazi n vektora $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$, gdje je $a = 1, ..., n = 2m$, ili u bazi $m + m$ vektora $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}\}$ kao

$$X = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \xi^{\overline{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}} \to \xi^\alpha, \xi^{\overline{\alpha}} \in \mathbb{R}, \text{ baza nad realnim koordinatama}$$

Za kotangentni prostor također možemo odabrati bazu podijeljenu u dva dijela $\{dx^\alpha, dx^{\overline{\alpha}}\}$ pa dualne vektore zapisati sa realnim komponentama kao

$$\omega = \omega_\alpha dx^\alpha + \omega_{\overline{\alpha}} dx^{\overline{\alpha}}$$

3.1 Kompleksifikacija tangentnog prostora

Kao u prvom poglavlju, tangentni vektorski prostor možemo kompleksificirati: ako su $X, Y \in T_pM$, kompleksifikacija $T_pM^{\mathbb{C}}$ su svi vektori oblika $X + iY$. Zapisano u bazi $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}\}$

$$X + iY = (\xi^\alpha + i\eta^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + (\xi^{\overline{\alpha}} + i\eta^{\overline{\alpha}})\frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$$

Vektori baze i dalje su definirani nad realnom koordinatnom bazom, samo su komponentne vektora sada kompleksni brojevi.

3.2 Kompleksna struktura na tangetnom vektorskom prostoru

Definicija 6. *Kanonska kompleksna struktura za T_pM kompleksne mnogostrukosti M je kompleksna struktura za koju vrijedi*

$$J(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$$

$$J(\frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Iz definicije je vidljivo da je $J^2 = -id$, pa je konstrukcija dobra kompleksna struktura za vektorski prostor.

Vektore iz kompleksifikacije tangentnog prostora dijelimo u dvije vrste:

tip (1,0) za koje vrijedi $J(V) = iV \quad \rightarrow V = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$

tip (0,1) za koje vrijedi $J(V) = -iV \quad \rightarrow V = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$

Prema teoremu 2 znamo da ova podjela prekriva cijeli tangentni prostor.

3.3 Kompleksna struktura na kotangentnom prostoru

Kompleksna struktura na tangentnom prostoru J prirodno generira kompleksnu strukturu na kotangentnom prostoru J^* na način da $J^*(\omega)(X) = \omega(J(X))$, pa vrijedi (u svakoj koordinatnoj bazi)

$$J^* dx^\alpha = -dx^{\overline{\alpha}}$$

$$J^* dx^{\overline{\alpha}} = dx^\alpha$$

Bazu kotangentog prostora možemo podijeliti prema tipovima 1-formi:

tip (1,0) za koje vrijedi $J^*(\omega) = i\omega$ baza su dualni vektori oblika $\lambda^\alpha = i(dx^\alpha + idx^{\overline{\alpha}})$

tip (0,1) za koje vrijedi $J^*(\omega) = -i\omega$ baza su dualni vektori oblika $\overline{\lambda}^\alpha = -i(dx^\alpha - idx^{\overline{\alpha}})$

3.4 Veza kanonske kompleksne sturukture i kompleksne strukture mnogostrukosti

U ovom trenutku se počinju povezivati svi uvedeni koncepti. Umjesto realnih koordinata $x^\alpha, x^{\overline{\alpha}}$ sada iskoristimo kompleksne koordinate $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\overline{\alpha}}, \overline{z^\alpha} = x^\alpha - ix^{\overline{\alpha}}$, pa bazu kotangentnog prostora možemo pisati na način

$$\lambda^\alpha = i \cdot d(x^\alpha + i \cdot x^{\overline{\alpha}}) \equiv idz^\alpha$$

$$\overline{\lambda}^\alpha = -i \cdot d(x^\alpha - i \cdot x^{\overline{\alpha}}) \equiv -id\overline{z^\alpha} = \overline{idz^\alpha}$$

To znači da umjesto $\lambda^\alpha, \overline{\lambda^\alpha}$ kao bazu za kompleksificirani kotangentni prostor možemo uzeti $dz^\alpha, \overline{dz^\alpha}$. Dakle, kompleksna struktura mnogostrukosti (odabir kompleksnih koordinata i holomorfnih prijelaznih funkcija) omogućila nam je identifikaciju baze kompleksifikacije kontangentnog prostora sa bazom kotangentnog prostora kompleksne mnogostrukosti. Isti mehanizam možemo iskoristiti na tangentnom prostoru.

Dvostruko dualni prostor je opet originalni prostor. Baza dualna bazi $dz^\alpha, \overline{dz^\alpha}$ je $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}$. Koristeći vezu sa realnim koordinatama i bazom kompleksifikacije dualnog prostora iskazanom preko realnih koordinata, možemo zaključiti vezu između "realne" i "kompleksne" baze (pojmovi su pod navodnicima jer pridjevi realna ili kompleksna ne odgovaraju bazama, već koordinatama nad kojima je baza sagrađena).

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}) \tag{3}$$

3.5 Tenzori

Tenzore definiramo uobičajeno, kao multilinearna preslikavanja sa tangentnog i kotangentnog prostora u kompleksne brojeve. Zapisano u navedenim bazama, primjer tenzora ranga $(1, 1)$ je

$$T = t_\alpha{}^\beta dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} + t_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} dx^{\overline{\alpha}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\beta}}} + t_\alpha{}^{\overline{\beta}} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\beta}}} + t_{\overline{\alpha}}{}^\beta dx^{\overline{\alpha}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{4}$$

$$= T_\alpha{}^\beta dz^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta} + T_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} d\overline{z^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z^\beta}} + T_{\overline{\alpha}}{}^\beta d\overline{z^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta} + T_\alpha{}^{\overline{\beta}} dz^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z^\beta}} \tag{5}$$

Gdje malim slovima označavamo komponentne tenzora vezane uz realnu bazu, a velikim uz kompleksnu bazu. Notaciju indeksa možemo objediniti, pa tako latinskim indeksima označavati sve indekse od $1, ..., 2m$, a kompleksnim koordinatama pridjeliti: $z^a \equiv z^\alpha$ za $a = 1, ..., m$, $z^a \equiv \overline{z^\alpha}$ za $a = m + 1, ..., 2m$.

Kao u prvom poglavlju, kanonsku kompleksnu strukturu iz definicije 6 proširimo na domenu kompleksifikacije tangentnog prostora, pa se po 2 i 3 zaključuje da je njeno djelovanje opisano sa

$$J(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}) = i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}; \qquad J(\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}} \tag{6}$$

Teorem 5. *Ako kanonska kompleksna struktura ima oblik dan izrazima 6 u dvije presjecajuće karte, tada je kompleksna koordinatna transformacija analitička.*

Dokaz: Jednostavnim korištenjem promjene koordinata i djelovanja kompleksne strukture dobije se rezultat kako su sve transformacije analitičke.

3.6 Realni tenzori

Definicija 7. *Realni tenzor je takav tenzor čije kompleksne komponentne zadovoljavaju uvjet*

$$\overline{T^{ab...}{}_{cd...}} = T^{\overline{ab..}}{}_{\overline{cd..}}$$

Primjer Neka je V vektor zapisan u realnoj bazi $V = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \xi^{\overline{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$. Uvjet realnosti komponenti vektora je $V = \overline{V}$, što povlači $\xi^\alpha = \overline{\xi^\alpha}$, $\xi^{\overline{\alpha}} = \overline{\xi^{\overline{\alpha}}}$ (Komponentne su realni brojevi). U kompleksnoj bazi taj uvjet glasi $V^\alpha = \overline{V^{\overline{\alpha}}}$, $V^{\overline{\alpha}} = \overline{V^\alpha}$ upravo kao u prethodnoj definiciji.

3.7 Podjela na tipove vektora i dualnih vektora

Po definiciji, vektori tipa $(1,0)$ su oni za koje vrijedi $J(V) = iV$. To daje uvjet na realne komponente vektora $\xi^{\overline{\alpha}} = -i\xi^\alpha$, pa se iz pravila za transformaciju komponentni tenzora može dobiti da su svi vektori tipa $(1,0)$ oblika

$$V = V^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

i analogno:

Vektori (0,1) $\rightarrow V = V^{\overline{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}}$

1-forme (1,0) $\rightarrow \omega = \Omega_\alpha dz^\alpha$

1-forme (0,1) $\rightarrow \omega = \Omega_{\overline{\alpha}} d\overline{z^\alpha}$

3.8 Kompleksni tenzori na kompleksnoj mnogostrukosti

Može se pokazata da, ako su prijelazne funkcije holomorfne, odnosno ako za njih vrijede Cauchy-Riemann uvjeti, zakon transformacije tenzora ne miješa indekse sa i bez crte (svojstvo koje je sepicifična za kompleksifikaciju tangentnog i kontangentnog prostora samo na kompleksnoj mnogostrukosti):

$$T^{\alpha' \ldots \overline{\beta}' \ldots}{}_{\gamma' \ldots \overline{\delta}' \ldots} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial z^\kappa} \cdots \overline{\left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\lambda}\right)} \cdots \frac{\partial z^\mu}{\partial z^{\gamma'}} \cdots \overline{\left(\frac{\partial z^\nu}{\partial z^{\delta'}}\right)} \cdots T^{\kappa \ldots \overline{\lambda}}{}_{\mu \ldots \overline{\nu}} \tag{7}$$

4 Zamalo kompleksne mnogostrukosti

Definicija 8. *Zamalo kompleksna struktura na diferencijalnoj mnogostrukosti M je realno vektorsko polje ranga $(1,1)$ za koje vrijedi*

$$J(J(\xi)) = -\xi$$

za svako glatko vektorsko polje ξ. Mnogostrukost na kojoj postoji takva struktura zove se zamalo kompleksna mnogostrukost.

Zapisano u komponentama, zamalo kompleksna struktura je realno tenzorsko polje ${j_a}^b$ čije realne komponente zadovoljavaju

$$ {j_a}^s {j_s}^b = -{\delta_a}^b \tag{8}$$

Nad svakom točkom $p \in M$ skoro kompleksna struktura inducira kompleksnu strukturu za tangentni vektorski prostor T_pM.

Teorem 6. *Kompleksna mnogostrukost dopušta zamalo kompleksnu strukturu.*

Dokaz: Budući da je kanonska kompleksna struktura za T_pM na kompleksnoj mnogostrukosti dobro definirana nad svakom točkom $p \in M$, ona generira zamalo kompleksnu strukturu kao realno vektorsko polje nad M. □

Takva zamalo kompleksna struktura, inducirana kanonskom kompleksnom strukturom, zove se integrabilna.

Pitanje je možemo li za danu zamalo kompleksnu strukturu otkriti je li integrabilna.

4.1 Nijenhuisov tenzor

U svrhu nalaska algoritma kojim bismo provjerili dopušta li mnogostrukost kompleksnu strukturu, ili zamalo kompleksna struktura nije integrabilna (već definirana sama za sebe) definira se Nijenhuisov tenzor.

Definicija 9. *Nijenhuisov tenzor N mnogostrukosti sa zamalo kompleksnom strukturom J je tenzor čije su realne komponentne (komponente vezane uz bazu definiranu nad realnim koordinatama) dane sa:*

$$ {n_{ab}}^c \equiv {j_a}^s({j_b}^c{}_{,s} - {j_s}^c{}_{,b}) - {j_b}^s({j_a}^c{}_{,s} - {j_s}^c{}_{,a}) \tag{9}$$

Pri čemu su ${j_a}^b$ realne komponente tenzorskog polja J.

Teorem 7. *Isčezavanje Nijenuhisovog tenzora nužan je i dovoljan uvjet da bi zamalo kompleksna struktura bila integrabilna*

Dokaz je izravan, no poprilično dug. Veoma dobar postupak nalazi se u [1].

5 Hermitske i Kählerove mnogostrukosti

Kada je uz kompleksnu strukturu na mnogostrukost postavljena i Riemannova struktura, postavjla se pitanje njihove komplatibilnosti. Uvjeti Hermitske strukture daju odgovor, a Kählerove mnogostrukosti najograničenije su od objekata sa Hermitskom strukturom.

5.1 Hermitska struktura na vektorskom prostoru

Definicija 10. *Hermitska struktura na realnom vektorskom prostoru V sa kompleksnonom strukturom J je preslikavanje $H : V \times V \to \mathbb{C}$ takvo da:*

(i) $H(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha H(X_1, Y) + \beta H(X_2, Y)$

(ii) $\overline{H(X,Y)} = H(Y,X)$

(iii) $H(J(X), Y) = iH(X,Y)$

Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X_1, X_2, X, Y \in V$.

Podijelimo li Hermitsku strukturu na realni i imaginarni dio

$$H(X,Y) = F(X,Y) + iG(X,Y) \tag{10}$$

i primjenimo svojstvo (ii), možemo očitati simetrijska svojstva

$$\begin{aligned} F(X,Y) - iG(X,Y) &= F(Y,X) + iG(X,Y) \\ &\Rightarrow F(X,Y) \text{je simetričan} \\ &\Rightarrow G(X,Y) \text{je antisimetričan} \end{aligned}$$

$H(X,Y)$ je pozitivno definitna ako je $F(X,Y)$ pozitivno definitno preslikavanje

Definicija 11. $\hat{H} = -\frac{1}{2}G(X,Y)$ *je jedinstvena 2-forma, koju zovemo Kählerova forma Hermitske strukture H.*

5.2 Hermitske mnogostrukosti

Definicija 12. *Neka je M mnogostrukost sa Riemmanovom metrikom g i zamalo kompleksnom strukturom J. M je zamalo Hermitska mnogostrukost (dopušta zamalo Hermitsku strukturu) ako i samo ako*

$$g(JX, JY) = g(X,Y)$$

Zapisano po komponentama

$$J_a{}^m J_b{}^n g_{mn} = g_{ab}$$

Tenzor zamalo Hermitske strukture je definiran kao

$$H_{ab} = g_{ab} - iJ_{ab}$$

gdje je $J_{ab} = J_a{}^m g_{mb}$.

Teorem 8. *Tangentni prostor nad točkom zamalo Hermitske mnogostrukosti dopušta Hermitsku strukturu.*

Dokaz: Tražena Hermitska struktura za tangentni prostor je (zapisano u komponentama) upravo zamalo Hermitska struktura mnogostrukosti.

$$H_{ab} = g_{ab} - iJ_{ab} \tag{11}$$

Zadovoljava sve uvjete iz definicije 10, pa čini Hermitsku strukturu na tangentnom prostoru. □

Ranije definirana Kählerova forma tada može biti izražena kao

$$J = \frac{i}{2} J_{ab} dx^a \wedge dx^b \tag{12}$$

Definicija 13. *Hermitska mnogostrukost je zamalo Hermitska mnogostrukost za koju je kompleksna struktura integrabilna.*

Teorem 9. *Neka su $z^\alpha, \overline{z^\alpha}$ kompleksne koordinate na Hermitskoj mnogostrukosti. Tada je metrika "hibridna":*

$$g_{\alpha\beta} = g_{\overline{\alpha\beta}} = g^{\alpha\beta} = g^{\overline{\alpha\beta}} = 0 \tag{13}$$

Dokaz: Iz 6 je vidljivo da u kompleksnom koordinatnom sustavu ${J_a}^b$ ima komponente

$${J_{\overline{\alpha}}}^{\beta} = {J_\alpha}^{\overline{\beta}} = 0; \quad {J_\alpha}^\beta = i{\delta_\alpha}^\beta; \;\; {J_{\overline{\alpha}}}^{\overline{\beta}} = -i{\delta_{\overline{\alpha}}}^{\overline{\beta}} \tag{14}$$

Tada iz definicije 12 slijedi:

$$g_{\alpha\beta} = {J_\alpha}^m {J_\beta}^n g_{mn} = {J_\alpha}^\mu {J_\beta}^\nu g_{\mu\nu} = (i{\delta_\alpha}^\mu)(i{\delta_\beta}^\nu) g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\beta} = 0 \tag{15}$$

Analogno za ostale komponente. □Da smo počeli sa ravnom realnom Riemannovom metrikom $ds^2 = dx^2 + dy^2 + ...$ i napravili zamjenu koordinata u $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$, metrika bi izgledala poput $ds^2 = dzd\overline{z} + ...$ Hermitska mnogostrukost imat će metriku koja će biti generalizacija ovog oblika (nema članova zajedno sa crtom ili bez crte preko).

5.3 Kählerove mnogostrukosti

Definicija 14. *Zamalo Kählerova mnogostrukost je zamalo Hermitska mnogostrukost za koju tenzorsko polje zamalo kompleksne strukture zadovoljava*

$$d(J_{ab} dx^a \wedge dx^b) = 0 \tag{16}$$

Kao i u prethodnim situacijama, gubitak pridjeva opisne riječi zamalo dolazi sa integrabilnosti kompleksne strukture.

Definicija 15. *Kählerova mnogostrukost je zamalo Kählerova mnogostrukost sa integrabilnom zamalo kompleksnom strukturom*

6 Diferencijalna geometrija na Kählerovim i Hermitskim mnogostrukostima

U traženju afine koneksije, Hermitska struktura vodi na odabir koji nije nužno kompatibilan sa Riemmanovom koneksijom. Zanimljiv je rezultat da u slučaju ograničavanja na Kählerovu strukturu, koneksija postaje kompatibilna sa Riemannovom koneksijom (u smislu da bi isti izrazi bili dobiveni direktnim uvršavanjem u uobičajene izraze za Riemannove Christoffelove simbole).

6.1 Kovarijantna derivacija

Pogledajmo što se sa parcijalnom derivacijom nekog vektora događa pri promjeni kompleksnih koordinata $z^\alpha, \overline{z^\beta}$ u $z^{\alpha'}, \overline{z^{\beta'}}$

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha'} V^{\beta'} &= \frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}} \left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^m} V^m \right) = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}} \left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\mu} V^\mu \right) \quad ; (\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial \overline{z^\mu}} = 0) \\
&= \frac{\partial z^\nu}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\mu} V^\mu \right) \\
&= \frac{\partial z^\nu}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z^\nu} V^\mu \right) + \frac{\partial z^\nu}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial^2 z^{\beta'}}{\partial z^\nu \partial z^\mu} V^\mu
\end{aligned}$$

Analogni nekovarijantni član pojavljuje se u slučaju $\partial_{\overline{\alpha'}} V^{\overline{\beta'}}$. Zanimljivo je kako je parcijalna derivacija sa miješanim indeksima automatski kovarijantna.

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{\alpha'}} V^{\beta} &= \left(\frac{\partial \overline{z^\mu}}{\partial \overline{z^{\alpha'}}} \frac{\partial}{\partial \overline{z^\mu}} \right) \left(\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\nu} V^\nu \right) \\
&= \frac{\partial \overline{z^\mu}}{\partial \overline{z^{\alpha'}}} \frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\nu} V^\nu
\end{aligned}$$

I analogno u slučaju $\partial_{\alpha'} V^{\overline{\beta'}}$. Budući da metrika ima samo miješane članove, njome možemo članove sa crtom preseliti u članove bez crte i obrnuto. Uz tu motivaciju definiramo novu kovarijantnu derivaciju.

Definicija 16. *Na Hermitskoj mnogostrukosti Hermitska kovarijantna derivacija $\mathcal{D}$ definirana je na način:*

$$\mathcal{D}_\lambda T^{\alpha \ldots \overline{\beta} \ldots}{}_{\gamma \ldots \overline{\delta} \ldots} = \left(g^{\overline{\mu} \alpha} \cdots g_{\overline{\nu} \gamma} \cdots \right) \partial_\lambda \left(T^{\rho \ldots \overline{\beta} \ldots}{}_{\sigma \ldots \overline{\delta} \ldots} g_{\rho \overline{\mu}} \cdots g^{\alpha \overline{\nu}} \cdots \right) \tag{17}$$

$$\mathcal{D}_{\overline{\lambda}} T^{\alpha \ldots \overline{\beta} \ldots}{}_{\gamma \ldots \overline{\delta} \ldots} = \left(g^{\overline{\beta} \mu} \cdots g_{\nu \overline{\delta}} \cdots \right) \partial_{\overline{\lambda}} \left(T^{\alpha \ldots \overline{\rho} \ldots}{}_{\gamma \ldots \overline{\sigma} \ldots} g_{\overline{\rho} \mu} \cdots g^{\overline{\sigma} \nu} \cdots \right) \tag{18}$$

Kolokvijalno rečeno, najprije promijnimo vrstu indeksa, deriviramo a potom vratimo na staru vrstu indeksa. Kao i kod Riemmanove geometrije, kovarijantnu derivaciju možemo zapisati kao parcijalnu derivaciju sa "poprvakama" za kovarijantnost.

Teorem 10.

$$\mathcal{D}_\lambda T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} = \partial_\lambda T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} + \gamma^\alpha{}_{\lambda\rho} T^{\rho\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} + \cdots$$
$$- \gamma^\sigma{}_{\lambda\gamma} T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\sigma\ldots\overline{\delta}\ldots} - \cdots \tag{19}$$

$$\mathcal{D}_{\overline{\lambda}} T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} = \partial_{\overline{\lambda}} T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} + \gamma^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\lambda_\rho}} T^{\alpha\ldots\overline{\rho}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\delta}\ldots} + \cdots$$
$$- \gamma^{\overline{\sigma}}{}_{\overline{\lambda\delta}} T^{\alpha\ldots\overline{\beta}\ldots}{}_{\gamma\ldots\overline{\sigma}\ldots} - \cdots \tag{20}$$

Gdje su $\gamma^\alpha{}_{\lambda\rho} \equiv g^{\alpha\overline{\mu}} \partial_\lambda g_{\rho\overline{\mu}}$ *i* $\gamma^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\lambda_\rho}} \equiv g^{\overline{\beta}\mu} \partial_{\overline{\lambda}} g_{\overline{\rho}\mu}$

Izrazi u prethodnom teoremu formalno su jednaki izrazima za Riemmanovu kovarijantnu derivaciju (ako zanemarimo komplikaciju precrtanih indeksa). $\gamma^a{}_{bc}$ nisu općenito simetrični u donjim indeksima, što ih čini različitima od Christofellovih simbola, no može se pokazati da su kompatibilni sa Hermitskom metrikom, što ih čini dobrim odabirom za Hermitske mnogostrukosti:

$$\mathcal{D}_\alpha g_{\beta\overline{\gamma}} = \mathcal{D}_{\overline{\alpha}} g_{\beta\overline{\gamma}} = 0 \tag{21}$$

No, upravo ta (ne)simetrija u indeksima pokazuje važno svojstvo:

Teorem 11. *Hermitska mnogostrukost je Kählerova ako i samo ako* $\gamma^a{}_{bc} = \gamma^a{}_{cb}$

Dokaz: Po definiciji, znamo da je Hermitska struktura $H_{ab} = g_{ab} - iJ_{ab}$ Kählerova ako i samo ako vrijedi $d(J_{ab} dz^a \wedge dz^b) = 0$. Taj uvjet iskazan preko kompleksnih koordinata glasi:

$$d(J_{ab} dz^a \wedge dz^b) = d(J_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{x^\beta} + J_{\overline{\alpha}\beta} d\overline{z^\alpha} \wedge dz^\beta) \tag{22}$$

Iz teorema 9 znamo da je $J_{\alpha\overline{\beta}} = ig_{\alpha\overline{\beta}}$, $J_{\overline{\alpha}\beta} = -ig_{\overline{\alpha}\beta}$. Djelovanjem vanjske derivacije:

$$g_{\alpha\overline{\beta},\gamma} dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\overline{z^\beta} + g_{\overline{\alpha}\beta,\overline{\gamma}} d\overline{z^\gamma} dz^\alpha d\overline{z^\beta} = 0 \tag{23}$$

Iz teorema 10 znamo da su $\gamma^\alpha{}_{\lambda\rho} = g^{\alpha\overline{\mu}} \partial_\lambda g_{\rho\overline{\mu}}$ i $\gamma^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\lambda_\rho}} = g^{\overline{\beta}\mu} \partial_{\overline{\lambda}} g_{\overline{\rho}\mu}$, pa je

$$g_{\alpha\overline{\nu}} \gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \delta_{\overline{\nu}}{}^{\overline{\mu}} \partial_\beta g_{\overline{\mu}\gamma} = g_{\overline{\nu}\gamma,\beta} = g_{\gamma\overline{\nu},\beta} \tag{24}$$

$$g_{\overline{\beta}\nu} \gamma^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\lambda_\rho}} = \delta_\nu{}^\mu \partial_{\overline{\lambda}} g_{\overline{\rho}\mu} = g_{\overline{\rho}\nu,\overline{\lambda}} = g_{\nu\overline{\rho},\overline{\lambda}} \tag{25}$$

Uvršteno u prvi uvjet, glasi:

$$g_{\mu\overline{\beta}} \gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge d\overline{z^\beta} + g_{\alpha\overline{\mu}} \gamma^{\overline{\mu}}{}_{\overline{\beta\gamma}} d\overline{z^\gamma} \wedge dz^\alpha \wedge d\overline{z^\beta} \tag{26}$$

Uzmimo samo prvi član, preselimo članove iz $\wedge$ produkta i primjenimo trik preimenovanja nekih ponavljajućih indeksa

$$g_{\mu\overline{\beta}}\gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}dz^{\gamma}\wedge dz^{\alpha}\wedge d\overline{z^{\beta}}/\times 2 \tag{27}$$

$$g_{\mu\overline{\beta}}\gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}dz^{\gamma}\wedge dz^{\alpha}\wedge d\overline{z^{\beta}} - g_{\overline{\beta}\mu}\gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}dz^{\alpha}\wedge dz^{\gamma}\wedge d\overline{z^{\beta}} \tag{28}$$

$$g_{\mu\overline{\beta}}(\gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha})dz^{\gamma}\wedge dz^{\alpha}\wedge d\overline{z^{\beta}} \tag{29}$$

Pa je rezultat

$$\gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} = \gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha} \tag{30}$$

Analogno za drugi član

$$\gamma^{\overline{\mu}}{}_{\overline{\beta\gamma}} = \gamma^{\overline{\mu}}{}_{\overline{\gamma\beta}} \tag{31}$$

Odnosno, sa latinskim indeksima $\gamma^{m}{}_{ab} = \gamma^{m}{}_{ba}$ □

Ako je metrika Kählerova, tada izrazi za koneksiju odgovaraju izrazima za Christofellove simbole (jer je koneksija bez torzije koja je kompatibilna sa metrikom jedinstvena). Moguće je provjeriti direktnim uvrštavanjem u izraz za Christofellove simbole.

Teorem 12. *Za Hermitsku mnogostrukost, Hermitska struktura $g_{ab} - iJ_{ab}$ je Kählerova ako i samo ako $\nabla_c J_{ab} = 0$.*

Dokaz: Ako je struktura Kählerova, Riemannova i Hermitska koneksija su iste, a budući da je $J_{\alpha\overline{\beta}} = ig_{\alpha\overline{\beta}}, J_{\overline{\alpha}\beta} = -ig_{\overline{\alpha}\beta}$, a metrika kompatibilna sa kovarijantnom derivacijom, rezultat vrijedi. Obrat vrijedi, što je vidljivo raspisivanjem Riemannove kovarijantne derivacije sa Christofellovim simbolima. □

6.2 Svojstva tenzora zakrivljenosti na Kählerovim mnogostrukostima

Kählerove mnogostrukosti imaju lijepa svojstva, od kojih neka navodimo u nastavku bez dokaza:

- $g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_{\alpha}\partial_{\overline{\beta}}K$, gdje je K realna skalarna funkcija
- Jedine komponente Riemannovog tenzora različite od nule (do na simetriju u indeksima) su: $R^{\alpha}{}_{\beta\overline{\gamma}\delta} = \partial_{\overline{\gamma}}\gamma^{\alpha}{}_{\delta\beta}$, $R^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta\gamma}\delta} = \partial_{\delta}\gamma^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\delta\beta}}$, $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\overline{\delta}} = -\partial_{\overline{\delta}}\gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$, $R^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = \partial_{\gamma}\gamma^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\delta\beta}}$
- $R_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} = \partial_{\overline{\alpha}}\partial_{\beta}\partial_{\overline{\gamma}}\partial_{\overline{\delta}}K - g^{\overline{\mu}\tau}(\partial_{\overline{\mu}}\partial_{\beta}\partial_{\delta}K)(\partial_{\tau}\partial_{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\gamma}}K)$
- $R_{\alpha\beta} = R_{\overline{\alpha\beta}} = 0$
- $R_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_{\alpha}\partial_{\overline{\beta}}(\ln g)$
- $C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\delta} = C_{\overline{\alpha\beta}\gamma\delta} = C_{\overline{\alpha}\beta\gamma\delta} = C_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma\delta}} = C_{\overline{\alpha\beta\gamma\delta}} = 0$; $C_{\alpha\beta\overline{\gamma\delta}}, C_{\overline{\alpha\beta}\gamma\delta}$ ne iščezavaju nužno.

7 Newman-Janisov trik

Sljedeći je algoritam veoma brz za dobivanje rotirajućih rješenja Einsteinovih jednadžbi iz statičkih rješenja.

7.1 Originalni algoritam

Počinjemo sa Schwarzschildovom metrikom u Eddington-Finklestein koordinatama:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{32}$$

Metriku možemo izraziti i koristeći metodu null-tetrada (tetrada kompleksnih vektora svjetlosnog tipa)

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b - m_a \overline{m}_b - \overline{m}_a m_b \tag{33}$$

$$g^{ab} = l^a n^b + n^a l^b - m^a \overline{m}^b - \overline{m}^a m^b \tag{34}$$

Za Schwarzschildovo rješenje u Eddington-Finklestein koordinatama kovarijantni vektori tetrade su:

$$l^a = \partial_r \tag{35}$$

$$n^a = \partial_u - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\partial_r \tag{36}$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \tag{37}$$

$$\overline{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \tag{38}$$

Algoritam počinje puštanjem varijable r da poprimi kompleksne vrijednosti. Ključan i neobičan korak sastoji se u tome što se neki članovi sa r kompleksno konjugiraju, dok neki ostaju isti.

$$l^a = \partial_r \tag{39}$$

$$n^a = \partial_u - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\overline{r}}\right)\partial_r \tag{40}$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}\overline{r}}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \tag{41}$$

$$\overline{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi\right) \tag{42}$$

Sada dopustimo i varijabli u da poprimi kompleksne vrijednosti i napravimo kompleksnu koordinatnu transformaciju:

$$u \mapsto u' = u - ia\cos\theta$$
$$r \mapsto r' = r + ia\cos\theta$$
$$\theta \mapsto \theta' = \theta \qquad \phi \mapsto \phi' = \phi$$

Vektori baze transformiraju se tada kao:

$$\partial_u = \partial_{u'}$$
$$\partial_r = \partial_{r'}$$
$$\partial_\theta = \partial_{\theta'} + ia\sin\theta(\partial_{u'} - \partial_{r'})$$
$$\partial_\phi = \partial_{\phi'}$$

pa tada prije definirana null tetrada postaje:

$$l^a = \partial_{r'} \tag{43}$$

$$n^a = \partial_{u'} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr'}{r'^2 + a^2\cos^2\theta'}\right)\partial_{r'} \tag{44}$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia\cos\theta')}\left(\partial_{\theta'} + ia\sin\theta'(\partial_{u'} - \partial_{r'}) + \frac{i}{\sin\theta'}\partial_{\phi'}\right) \tag{45}$$

$$\overline{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta')}\left(\partial_{\theta'} - ia\sin\theta'(\partial_{u'} - \partial_{r'}) - \frac{i}{\sin\theta'}\partial_{\phi'}\right) \tag{46}$$

Ograničimo li sada koordinate natrag na realne vrijednosti i invertiramo li inverz metrike definiran gornjom null tetradom kovarijantnih vektora, rezultat je

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)du^2 + 2dudr + \frac{4mra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}dud\phi - 2a\sin^2\theta d\phi dr \tag{47}$$

$$- \left(\left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)a^2\sin^2\theta + 2mra^2\sin^2\theta + \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)^2\right)\frac{\sin^2\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)}d\phi^2 \tag{48}$$

$$- (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \tag{49}$$

što je upravo Kerrova metrika!

7.2 Modificirana Hermitska struktura

U definiciji zamalo Hermitske strukture traženo je da metrika bude Riemannovog tipa, što nije korisno za metrike Lorentzovog tipa. Iz tog razloga modificira se definicija zamalo kompleksne strukture.

Metrika Lorentzovog tipa može biti zapisana kao:

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b - m_a\overline{m}_b - \overline{m}_a m_b \tag{50}$$

, pa zamalo kompleksna strukutra glasi

$$J_a{}^b = -l_a n_b + n_a l_b - im_a\overline{m}_b + i\overline{m}_a m_b \tag{51}$$

jer zadovoljava uvjet $J_a{}^s J_s{}^b = -\delta_a{}^b$. Uz takvu definiciju zamalo kompleksne strukutre metrika ne može biti Hermitska:

$$J_a{}^m J_b{}^n g_{mn} = -l_a n_b - n_a l_b - m_a\overline{m}_b - \overline{m}_a m_b \neq g_{ab} \tag{52}$$

Modifikacija definicije zamalo Hermitske strukture dopušta da tenzorsko polje zamalo kompleksne strukutre može biti i kompleksno. Za metrike Lorentzovog tipa, dano je sa:

$$J_a{}^b = il_a n_b - in_a l_b - im_a\overline{m}_b + i\overline{m}_a m_b \tag{53}$$

7.3 Ka objašnjenju Newman-Janisovog trika

Postupak kojim je rotirajuće rješenje dobiveno iz statičkog još je uvijek bez pravog objašnjenja. Postoji naznaka da je ne-analitička koordinatna transformacija upravo ključna, jer bi analitička koordinatna transformacija "čuvala" sve Killingove vektore. Sljedeće je objašnjenje pokušaj otkrivanja fundamentalnije strukture koja daje dva navedena rješenja kao dva realna lista veće kompleksne mnogostrukosti.

Neka je $\mathbb{C}M$ kompleksna ekstenzija mnogostrukosti M tako da ako su $x^a = (u, r, \theta, \phi)$ koordinate na M, sve koordinate mogu poprimiti kompleksne vrijednosti $x^a \to z^a = (u, r, \theta, \phi)$. Kompleksna dimenzija ekstenzije je 4.

Na $\mathbb{C}M$ postavimo Hermitsku metriku (po kriteriju modificirane Hermitske strukture), dakle metriku oblika

$$\begin{pmatrix} g_{ab} & g_{a\overline{b}} \\ g_{\overline{a}b} & g_{\overline{a}\overline{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_{a\overline{b}}(z, \overline{z}) \\ g_{\overline{a}b}(z, \overline{z}) & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Tražena metrika jednostavnije je prikazana preko svog inverza i kontravarijantnih vektora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 =& \partial_r \partial_{\overline{u}} + \partial_u \partial_{\overline{r}} - \left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\overline{r}} \partial_r \partial_{\overline{r}}\right) - \frac{1}{r\overline{r}} \partial_\theta \partial_{\overline{\theta}} \\ & - \frac{1}{r \sin\theta \overline{r} \sin\overline{\theta}} \partial_\phi \partial_{\overline{\phi}} + \frac{2i}{r\overline{r}(\sin\theta + \sin\overline{\theta})} \partial_\theta \partial_{\overline{\phi}} \\ & - \frac{2i}{r\overline{r}(\sin\theta + \sin\overline{\theta})} \partial_\phi \partial_{\overline{\theta}} \end{aligned} \tag{55}$$

gdje je m realna konstanta. Ograničenjem na realni list M zadan sa $u = \overline{u}, r = \overline{r}, \theta = \overline{\theta}, \phi = \overline{\phi}$, metrika postaje Schwarzschildova.

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = 2\partial_u \partial_r - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \partial_r \partial_r - \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi \partial_\phi \tag{56}$$

Primjenom kompleksne analitičke koordinatne transformacije (a je realna konstanta):

$$\begin{aligned} u' &= u - ia\cos\theta & \overline{u}' &= \overline{u} + ia\cos\overline{\theta} \\ r' &= r + ia\cos\theta & & \overline{r} - ia\cos\overline{\theta} \\ \theta' &= \theta & \overline{\theta}' &= \overline{\theta} \\ \phi' &= \phi & \overline{\phi}' &= \overline{\phi} \end{aligned}$$

Hermitska metrika na $\mathbb{C}M$ postaje (sa potisnutom $'$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \partial_u\partial_r + \partial_r\partial_u - \left(1 - \frac{m}{r - ia\cos\theta} - \frac{m}{\overline{r} + ia\cos\overline{\theta}}\right)\partial_r\partial_{\overline{r}}$$
$$-\frac{1}{(r - ia\cos\theta)(\overline{r} + ia\cos\overline{\theta})}\left[(\partial_\theta + ia\sin\theta\partial_u - ia\sin\theta\partial_r)\left(\partial_{\overline{\theta}} - ia\sin\overline{\theta}\partial_{\overline{u}} + ia\sin\overline{\theta}\partial_{\overline{r}}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{(r - ia\cos\theta)\sin\theta(\overline{r} + ia\cos\overline{\theta})\sin\overline{\theta}}\partial_\phi\partial_{\overline{\phi}}$$
$$+\frac{2i}{(r - ia\cos\theta)(\overline{r} + ia\cos\overline{\theta})(\sin\theta + \sin\overline{\theta})}\times$$
$$\left[(\partial_\theta + ia\sin\theta\partial_u - ia\sin\theta\partial_r)\partial_{\overline{\phi}} - \partial_\phi(\partial_{\overline{\theta}} - ia\sin\overline{\theta}\partial_{\overline{u}} + ia\sin\overline{\theta}\partial_{\overline{r}})\right] \tag{57}$$

Ograničenjem na realni list M' zadan sa $u = \overline{u}, r = \overline{r}, \theta = \overline{\theta}, \phi = \overline{\phi}$, metrika postaje Kerrova.

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \frac{-a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\partial_u^2 + \frac{2(r^2 + a^2)}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\partial_u\partial_r - \left(1 - \frac{2mr - a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\partial_r^2$$
$$-\frac{1}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left[\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right] + \frac{2a}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left[\partial_r\partial_\phi - \partial_u\partial_\phi\right] \tag{58}$$

Ovaj je postupak moguće generalizirati na širu klasu Kerr-Schild metrika. Iako ne daje objašnjenje zašto Newman-Janisov trik funkcionira, postavlja algoritam na jasniju matematičku pozadinu i daje naznaku da postoji povezanost između Schwarzschildovog i Kerrovog rješenja iskazana u većoj strukturi - 4-kompleksno dimenzionalnoj Hermitskoj kompleksnoj mnogostrukosti.

Literatura

[1] E.J. Flaherty, *Lecture Notes in Physics - Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity*, 1976: Springer-Verlag, Berlin

[2] D. Nawarajan, *Complex Spacetimes and the Newman-Janis trick - Master Thesis*, 2015: Victoria University of Wellington, arXiv: 1601.03862v1

[3] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, 2nd edition*, 2003: Intitute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia

[4] J. Morrow, K. Kodaira *Complex Manifolds*, 1971: American MAthematical Society