Twistori

Marija Jakelić
Broj indeksa: F-4195
Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb

31.8.2018.

Sažetak

U ovom seminaru predstavit ćemo teoriju twistora, koju je predstavio Roger Penrose 1967. godine. Prvo ćemo predstaviti prostor spinora i njegove projektivne prostore. Zatim ćemo pomoću njih uvesti twistore. Također, proučavati ćemo relaciju incidentnosti, koja će nam dati vezu između (projektivnog) prostora twistora i kompaktifirciranog prostorvremena Minkowskog. Nakon toga ćemo promotriti fizikalne interpretacije twistora, u klasičnoj i kvantnoj mehanici.

1 Notacija spinora

U ovom seminaru koristiti ćemo notaciju spinora. Njena osnovna karakteristika je da svaki indeks tenzora ili vektora možemo zamijeniti parom indekasa spinora. Npr., indekse poput:

$$a, b, c, d, ..., z, a_0, b_0, ..., z_0, a_1, ..., a_2, ...$$

mijenjamo sa parom indekasa:

$$AA^{'}, BB^{'}, CC^{'}, DD^{'}, ..., ZZ^{'}, A_0A_0^{'}, B_0B_0^{'}, ..., Z_0Z_0^{'}, A_1A_1^{'}, ..., A_2A_2^{'}...$$

gdje prvo slovo označava prostor spinora, a drugo (sa ') kompleksno konjugirani prostor spinora. Indekse tenzora dižemo i spuštamo korsteći metrički tenzor g_{ab} i njegov inverz g^{ab} (oba imaju na dijagonali (1,-1,-1,-1), nedijagonalni elementi su 0). Indekse spinora dižemo i spušamo koristeći antisimetrični Levi-Civita, ϵ_{AB}, $\epsilon_{A'B'}$, ϵ^{AB} i $\epsilon^{A'B'}$ (svaki ima komponente (0,1;-1,0)), prema shemi:

$$\xi_B = \xi^B \epsilon_{AB}, \xi^A = \epsilon^{AB}\xi_B, \eta_{B'} = \eta^{A'}\epsilon_{A'B'}, \eta^{A'} = \epsilon^{A'B'}\eta_{B'}$$

Metrički tenzor g_{ab} je, prema [1], zadan sa:

$$g_{ab} = g_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}$$

Kompleksni nul vektor, l^a, je prema [1], u ovoj notaciji oblika:

$$l^a = l^{AA'} = \lambda^A \mu^{A'}$$

Specijalno, ako je l^a realan:

$$l^a = \pm\lambda^A\overline{\lambda}^{A'},$$

gdje se plus odnosi na budući, a minus na prošli svjetlosni stožac.

2 Spinori

Neka je V vektorski prostor i $v^a \in$ V sa komponentama (v^0,v^1,v^2,v^3) u nekoj ortonormiranoj bazi. Možemo definirati hermitsku matricu $\psi(v^a)$:

$$\psi(v^a) = V^{AA'} = \begin{pmatrix} V^{00'} & V^{01'} \\ V^{10'} & V^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Prema [1], preslikavanje definirano (1) je bijekcija između 2x2 Hermitskih matrica i vektora v^a. Nadalje, determinanta matrice:

$$det\psi(v^a) = \frac{1}{2}\eta_{ab}v^a v^b,$$

gdje η_{ab} označava Lorentzovu metriku, iznosi pola norme vektora.
Ako matricu $\psi(v^a)$ s lijeva pomnožimo sa $t^A{}_B \in$ SL(2,$\mathbb{C}$):

$$V^{AA'} \quad \to \quad W^{AA'} = t^A{}_B V^{BB'}\overline{t}^{A'}{}_{B'},$$

gdje je $\overline{t}^{A'}{}_{B'}$ kompleksno konjugirana matrica:

$$\overline{t}^{A'}{}_{B'} = \overline{t^A{}_B},$$

rezultat množenja je hermitska matrica $W^{AA'}$ koja ima jednaku determinantu kao i $\psi(v^a)$.
Nadalje, ako je vektor v^a nul vektor, onda je rang $\psi(v^a)$ jednak 1. Stoga $\psi(v)$ možemo pisati kao vanjski produkt kompleksnog dvodimenzionalnog vektora i njegovog kompleksnog konjugata.

$$V^{AA'} = \begin{pmatrix} V^{00'} & V^{01'} \\ V^{10'} & V^{11'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0\overline{\alpha}^{0'} & \alpha^0\overline{\alpha}^{1'} \\ \alpha^1\overline{\alpha}^{0'} & \alpha^1\overline{\alpha}^{1'} \end{pmatrix} = \alpha^A\overline{\alpha}^{A'} \tag{2}$$

Vektore α^A, na koje djeluju elementi grupe SL(2,$\mathbb{C}$), nazivamo, prema [1], spinorima. Oni su elementi kompleksnog dvodimenzionalnog prostora S, tj. prostora spina. Kompleksno konjugirani vektorski prostor $\overline{S}$=S' ima elemente $\beta^{A'}$.
Pripadni dualni prostori su S^* i $S^{*'}$ sa elementima γ_Ai $\delta_{A'}$.
Spinori višeg reda su elementi tenzorskog produkta:

$$\phi^{A...BA'...C'}{}_{C...DE'...F} \epsilon S \times ... \times S \times S' \times ... \times S' \times S^* \times ... \times S^* \times S'^* \times ... S'^*$$

Operacija konjugacije između S i S' je definirana, prema [1]: $\alpha^A \in$ S definira $\overline{\alpha}^{A'} \in S'$ pravilom $\overline{\alpha}^{A'}$=$\overline{\alpha^A}$. Za spinore višeg reda, kao npr. $\alpha^{ABC'} \in$ S×S×S' operacija kompleksne konjugacije definira $\overline{\alpha}^{A'B'C} \in S'$×$S'$×S pravilom: $\overline{\alpha}^{A'B'C} = \overline{\alpha^{ABC'}}$.
Spinor, sa jednakim brojem obiju vrsta indekasa (sa i bez ') kao npr.$\alpha_{A'B'CD}$, je hermitski ako vrijedi:

$$\alpha_{A'B'CD} = \overline{\alpha}_{A'B'CD}$$

Postoji, prema [1], bijekcija između realnih tenzora tipa n i Hermitskih spinora s n indekasa sa i n indekasa bez '. Za n=1, to je relacija (3).
Operacije simetrizacije i antisimetrizacije spinora su definirane, prema [1], jednako kao i kod tenzora.
Polja spinora π^A na mnogostrukosti M, prema [1], definiramo kao lokalne prereze svežnja S.

3 Projektivni potprostori

Jednodimenzionalan kompleksni projektivan prostor P^1 ($\mathbb{C}$P) je skup svih jednodimenzionalnih potprostora prostora S'. Njegovi elementi su klase ekvivalencije para kompleksnih brojeva $[(\pi_{0'}, \pi_{1'})]$ sa relacijom ekvivalencije:

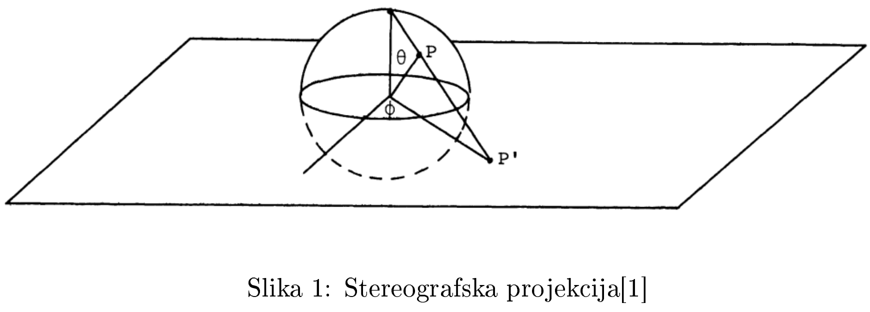
$$(\pi_{0'}, \pi_{1'}) \sim (\lambda\pi_{0'}, \lambda\pi_{1'}); \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

gdje $(\pi_{0'}, \pi_{1'}) \neq$ (0,0).
Možemo razlikovati dva otvorena skupa, koji zajedno pokrivaju P^1.

$$U_1 = \{[\pi_{0'}, \pi_{1'}] | \pi_{0'} \neq 0\}$$

$$U_2 = \{[\pi_{0'}, \pi_{1'}] | \pi_{1'} \neq 0\}$$

Na skupu U_1 imamo definiranu koordinatu ξ=$\frac{\pi_{1'}}{\pi_{0'}}$, tj. imamo bijekciju između U_1 i kompleksne ravnine. Na U_2 imamo koordinatu ξ=$\frac{\pi_{0'}}{\pi_{1'}}$. Na presjeku skupova U_1 i U_2 vrijedi η=ξ^{-1}. Stoga, možemo definirati P^1 kao kompleksnu mnogostrukost. Po definiciji, parakompaktni Hausdorffov topološki prostor X je kompleksna mnogostrukost ako vrijedi:
a) X ima otvoreni pokrivač U_i sa koordinatnim funkcijama $f_i : U_i \to \mathbb{C}^n$
b)na nepraznom presjeku $U_i \cap U_j$ funkcije f_j o f_j su holomorfne sa $\mathbb{C}^n$ na $\mathbb{C}^n$.
Koordinatama ξ i η dajemo geometrijsku interpretaciju pomoću stereografske projekcije. P^1 je, prema [1], prostor projektivnih svjetlosnih stožaca [8] u točki prostora Minkowskog. Topološki gledano, to je prema [1] nebeska sfera . Ako ju predstavimo kao jediničnu sferu u $\mathbb{R}^3$, stereografska projekcija je preslikavanje sa sjevernog pola na kompleksnu ravninu kao na slici 1.



Slika 1: Stereografska projekcija[1]

Točki P s sfernim koordinatama (θ,ϕ) pridružujemo točku P' pravilom:

$$\xi \equiv x + iy = cot(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}$$

Specijalno, točku na sjevernom polu moramo projicirati sa južnog pola, gdje točki sa koordinatama (θ,ϕ) pridružujemo:

$$\eta = x - iy = tan(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi}$$

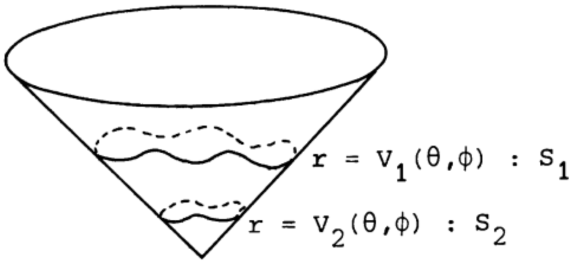
Kompleksna ravnina gledana odozdo ima suprotu orjentaciju. Stoga U_1, predstavlja sferu bez sjevernog pola, a U_2 je sfera bez južnog pola i u presjeku vrijedi η=ξ^{-1}. Nadalje, metrika prostora Minkowskog u sfernim koordinatama je zadana sa:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2)$$

Budući svjetlosni stožac N^+ u ishodištu je ploha t=r. Inducirana metrika na N^+, koja je ujedno i nedegerirana, je zadana sa:

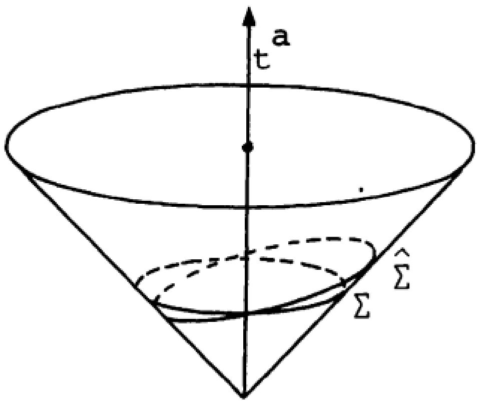
$$ds^2 = -r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2), \tag{3}$$

gdje θ i ϕ označavaju nul geodezike,koji generiraju N^+, a r je afin parametar duž njih. Prerez na N^+ dobivamo specificirajući r kao funkciju θ i ϕ (slika 2).



Slika 2: Prerezi na N^+: S_1 i S_2 [1]

Konformalna preslikavanja, su prema [7], holomorfne funkcije koje čuvaju kuteve u svakoj točki područja na kojem su definirane.
Prema [1], preslikavnje sa prereza S_1 na prerez S_2 duž genratora, je konformalno.
Prerez Σ: r=1 (slika 3) ima prema [1], metriku jedinične sfere.



Slika 3: Prerezi: Σ i $\widehat{\Sigma}$ [1]

Primjenom Lorentzovih transformacija na jedinični vektor t^a, koji definira vremensku os:

$$t^a \quad \rightarrow \quad t^c = \Lambda^a{}_b t^a,$$

preslikamo Σ u $\widehat{\Sigma}$. Prema [1], $\widehat{\Sigma}$ će imati metriku jedinične sfere. Iz ovoga vidimo da Lorentzove transformacije definiraju elemente grupe C(2), grupe konformalnih preslikavanja jedinične sfere.
Metrika jedinične sfere, zapisana pomoću koordinate ξ je:

$$ds^2 = -\frac{4}{1+\xi\bar{\xi}^2}d\xi d\bar{\xi}$$

Iz teorije kompleksnih funkcija jedne varijable znamo da konformalno preslikavanje u dvije realne dimenzije mora biti holomorfno (ili antiholomorfno, ako mijenja orijentaciju). Stoga, konformalna transformacija sfere mora biti globalno definirana holomorfno transformacijom:

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi} = f(\xi)$$

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = f(\eta)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\xi}^{-1}$$

Intutivno, to možemo interpretirati: funkcija f(ξ) mora imati jednostavan singularitet na transformiranom južnom polu i pol na transformiranom sjevernom polu, tj.:

$$f(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} h(\xi),$$

gdje h(ξ) nema jednostavne singularitete ni polove, tj. mora biti konstantna. Stoga, možemo odabrati h(x)=1:

$$f(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

Bez gubitka općenitosti, možemo izabrati ad-bc=1. Tada je konformalna grupa C(2) grupa Mobiusovih transformacija [8].

4 Prostor twistora

Twistor je polje spinora $\Omega^A(x)$ u prostoru Minkowskog M koje zadovoljava tzv, jednadžbu twistora, koja, prema [1], glasi:

$$\nabla_{A'}{}^{(A}\Omega^{B)} = 0 \tag{4}$$

ili ekvivalentno:

$$\nabla_{AA'}\Omega^B = -i\delta_A{}^B\pi_{A'} \tag{5}$$

za neko drugo polje spinora $\pi_{A'}$. Rješenje jednadžbe (4) je prema [1]:

$$\Omega^A = \omega^A - ix^{AA'} \tag{6}$$

gdje je spinor ω^A konstanta integracije.
Prostor twistora T je četevrodimenzionalni kompleksni vektorski prostor rješenja jednadžbe (4). Možemo ga koordinatizirati sa parom spinora:

$$(\omega^A, \pi_{A'}) = Z^\alpha \tag{7}$$

gdje su: ω^0=Z^0, ω^0=Z^1, $\pi_{0'}$=Z^2 i $\pi_{1'}$=Z^3.

Grupa konformalnih transformacija C(2) djeluje, prema [1], linearno na rješenja jednadžbe (4) i pritom vrijedi:

$$L_x(\Omega^A\overline{\pi}_A + \overline{\Omega}^{A'}\pi_{A'}) = 0,$$

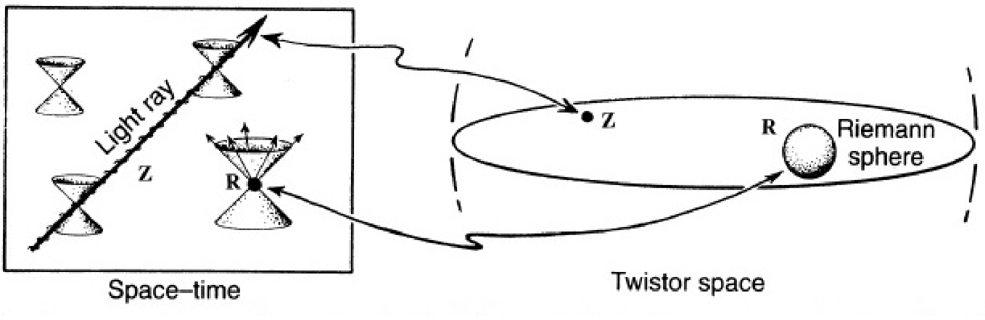
gdje je L_x Liejeva derivacija duž vektorskog polja X^a.
Očuvana veličina je hermitski skalarni produkt Σ, definiran:

$$\Sigma = \Omega^A\overline{\pi}_A + \overline{\Omega}^{A'}\pi_{A'} = Z^0\overline{Z}^2 + Z^1\overline{Z}^3 + \overline{Z}^0 Z^2 + \overline{Z}^1 Z^3$$

Σ je nedegeriran i definira dualni prostor twistora T^*=$\overline{T}$.
Prostor twistora T, možemo podijeliti na tri djela T^+,T^- i N, obzirom na to je li Σ veća, manja ili jednaka 0.
Projektivan prostor twistora (PT) je, prema [1], kompleksno projektivan trodimenzionalan prostor (CP^3). Njegove elemente, projektivne twistore definiramo,prema [1], kao $[Z^\alpha]$. Njegov dualni prostor označavao s PT^*.
Projektivan prostor, na isti način kao i T, možemo podijeliti na tri djela:PT^+, PT^- i PN. Specijalno, peterodimenzionalne mnogostrukost PN je invarijantna na djelovanje konformalnih transformacija [3].

5 Incidentnost

Prema teoriji twistora, prostor twistora (ili projektivan prostor twistora) je primitivniji od prostorvremena Minkowskog. Twistori su komplesni objekti i kao prvu aproksimaciju, možemo uzeti cijelu svjetlosnu zraku. Točka R u prostor-vremenu, sekundardna konstrukcija samih twistora, tada je identificirana s familijom svjetlosnih zraka, koja ima topologiju dvodimenzionalne sfere S_2 [1], koje prolaze kroz nju (slika 4).



Slika 4: Minkowski prosor-vrijeme i prostor twistora [2]

Neka je M četverodimenzionalni Minkowski prostorvrijeme (+,-,-,-). Svaka svjetlosna zraka, tj. twistor Z^α koji ima koordinate (Z^0,Z^1,Z^2,Z^3), je incidentna sa točkom R∈M (ili evivalentno, R je incidentna sa Z^α) ako vrijedi relacija:

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

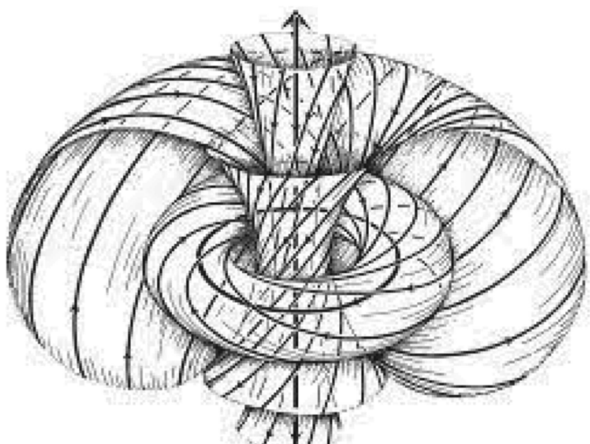
gdje su (t,x,y,z) koordinate točke R .
Relacija (7), zapisana pomoću spinorske notacije, glasi:

$$\omega^A = iR^{AA'}\pi_{A'}$$

Ako su koordinate točke R realne, vrijedi:

$$Z^\alpha \overline{Z}_\alpha = 0$$

i pripadni twistor nazivamo null twistorom, tj. twistorom svjetlosnog tipa. On se nalazi u prostoru N, a u prostoru PN ga prikazujemo projektivnom linijom. Skup točaka koje su incidentne sa twistorom svjetlosnog tipa, a da pritom Z^2 i Z^3 nisu istovremeno jednaki nuli, tvori svjetlosnu zraku.
Twistore, koji nisu svjetlosnog tipa, možemo, iako nisu incidentni s realnim točkama, interpretirati u realnom Minowskom prostoru M. Razmotrimo twistor Z $\in PT/PN$. Njegov dual, $\overline{Z} \in PT^*$, je [3] dvodimenzionalna projektivna ravnina CP^2 u PT. Ta holomorfna ravnina siječe prostor svjetlosnih zraka PN u realnom trodimenzionalnom području koje odgovara familiji svjetlosnih zraka parametriziranoj s tri parametra. Familija svjetlosnih zraka, koje pretstavljaju twistore, koji nisu svjetlosnog tipa, naziva se Robinsonova kongruencija i prikazana je na slici 5.



Slika 5: Robinsonova kongruencija [3]

6 Kompacifirani Minkowski prostor i Kleinova korespodencija

U prethodnom poglavlju, razmotrili smo vezu, danu relacijom incidentnosti (8), realnog Minkowskog prostora i (projektivnog) prostora twistora. Općenitu vezu dobivamo ako umjesto realnog, uzmemo kompacifirani Minkowski prostor.
Početkom 20.stoljeća Bateman i Cunningham ustanovili su invarijantnost valne i Maxwellovih jednadžbi na

djelovanje konformalnih transformacija. Glavnu ulogu je igrala konformalna inverzija, definirana prema [4], kao:

$$R : (x,t) \quad \rightarrow \frac{(x,t)}{x^2 - c^2t^2}$$

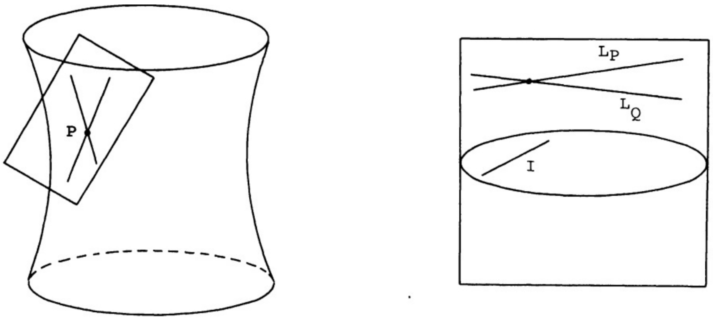
Ovo preslikavanje je singularno na svjetlosnom stošcu y^2=x^2-c^2t^2=0. Općenito, specijalne konformalne transformacije oblika RT(a)R, gdje je T(a) translacija za vektor a u $\mathbb{R}^4$, imaju singularite u Minkowski prostorvremenu M. Da bi ih izbjegli uvodimo kompacifirano Minkowski prostor vrijeme M^c, koje je, prema [4], homogeni prostor konformalne grupe $SO_+(4,2)$. Jedan od načina na koji ga se može opisati je [4] kao projektivana ploha drugog reda definirana jednadžbom Q(x)=0, gdje je Q(x) definiran kao:

$$Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 + (x^5)^2 - (x^6)^2$$

u nekoj ortonormiranoj bazi E [4].
Twistori, koji nisu svjetlosnog tipa,i za koje vrijedi Z^2=Z^3=0, pretstavljaju 'svjetlosne zrake u beskonačnosti'. One su generatori svjetlosnog stošca koji se nalazi u beskonačnosti. U PN predstavljamo ih linijama I. (slika 6)
Sada možemo dati potpunu geometrijsku vezu, danu relacijom incidencije (8), prostor vremena i (projektivnog) prostora twistora.
Neka je M_c kompleksni kompacifirani Minkowski prostor.
Twistor Z^α je incidentan s točkom $R^a \in M_c$ akko vrijedi (8).
Dualni twistor W_α =(μ_A,$\eta^{A'}$) je incidentan s R^a akko:

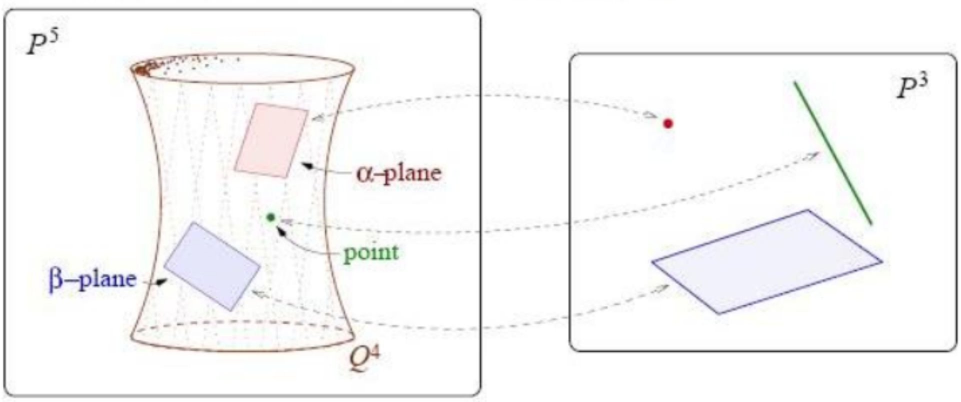
$$\eta^{A'} = -iR^{AA'}\mu_A.$$

U projektivnom prostoru twistora PT, twistor Z^α definira točku Z $\in$ PT kao relaciju ekvivalencije svih twistora u T proporcionalnih sa Z^α. Skup svih točaka u M_c, koje su incidentne s točkom Z $\in$ PT je [1] kompleksna dvodimenzionalna ravnina u M_c, koju nazivamo α ravninom. Svi vektori u α ravnini su, prema [1], međusobno okomiti. Prethodno smo ustanovili da je točka P $\in$ M_c pretstavljena projektivnom linijom L_P $\in$ PT. Uvjet da se dvije projektivne linije, L_Q i L_Q, sijeku (slika 6), prema [1] je da su odgovarajuće točke iz kompleksnog prostorvremena nul separirane (tj. udaljene za 0 u terminima kompleksne prostorno vremenske metrike). Skup na kojem to vrijedi je α ravnina.



Slika 6: Projektivna linija I i α ravnina [1]

Budući da, Z^α i λZ^α, prema (7), imaju ista svojstva prirodno je proučavati relaciju incidencije na prostoru PT.
Dualni twistori su, prema [1], su prikazani ravninama u PT i incidentni su β ravninama u M_c. Kao i α ravnine, β ravnine su kompleksne dvodimenzionalne ravnine na kojima iščezava inducirana metrika.
Geometrijska korespodencija dana relacijom incidencije naziva se Kleinova korespodencija. (slika7)



Slika 7: Kleinova korespodencija [5]

7 Fizikalna interpretacija twistora

7.1 Klasični impuls i angularni moment

U svrhu fizikalne interpretacije twistora, koji nisu svjetlosnog tipa, promatramo klasičan sistem, karakteriziran sa četveroimpulsom p^a i angularnim momentom M^{ab} obzirom na točku O (M^{ba}=-M^{ab}). Pomaknimo sada ishodište iz točke O u točku Q. Tada imamo:

$$p^a(Q) = p^a(O)$$

$$M^{ab}(Q) = M^{ab} - q^a p^a + q^b p^a \tag{9}$$

Definiramo Pauli-Lubanski vektor spina [2] S_a:

$$S_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}p^b M^{cd}$$

gdje je ϵ_{abcd} Levi-Civita tenzor (ϵ_{0123}=1), Specijalno, ako se razmatrani sistem sastoji od jedne bezmasene čestice, za četveroimpuls prema [2], vrijedi:

$$p_a p^a = 0, \quad p^0 > 0$$

Pauli-Lubanski vektor je tada, prema [2], proporcionalan sa četveroimpulsom:

$$S_a = s p_a \tag{10}$$

Konstanta proporcionalnosti s je helicitet. U slici spinora, p^a i antisimetričan M^{ab} postaju:

$$p_a = \overline{\pi}_A \pi_{A'}$$

$$M_{ab} = \overline{\mu}_{AB} e_{A'B'} + \mu_{A'B'} e_{AB}$$

Pauli-Lubanski vektor je:

$$S_a = i\overline{\mu}_{AB}\overline{\pi}^B \pi_{A'} - i\mu_{A'B'}\pi^{B'}\overline{\pi}_A$$

Da bi vrijedila relacija (8):

$$u_{A'B'}\pi^{B'}\overline{\pi}_A = 0$$

Iz čega slijedi:

$$\mu_{A'B'} = \alpha_{(A'}\beta_{B')}$$

gdje su ili $\alpha_{A'}$ ili $\beta_{A'}$ proporcionalni sa $\pi_{A'}$. Isti argumenti se primjenjuju za $\overline{\mu}_{AB}$:

$$\overline{\mu}_{AB} = i\omega_{(A}\overline{\pi}_{B)}$$

Da bi vrijedilo (9), moramo definirati:

$$\omega^a(Q) = \omega^a - iq^{AA'}\pi_{A'} \quad \pi_A(q) = \pi_{A'},$$

gdje je $q^{AA'}$ spinorska notacija za vektor položaja Q obzirom na točku O.
Iz formule za S_a možemo, koristeći definiciju twistora (7), očitati:

$$s = \frac{1}{2}(\omega^A\overline{\pi}^A + \overline{\omega}^{A'}\pi_{A'}) = \frac{1}{2}Z^\alpha \overline{Z}_\alpha$$

Bezmasenim česticama s pozitivnim helicitet pridružujemo točke u PT^+, onima s negativnim helicitetom pridružujemo točke u PT^-. Regiji PN odgovarajaju bezmasene čestice sa s=0.

7.2 Twistor kvantizacije

U kvantoj teoriji, impuls i angularni moment su operatori koji zadovoljavaju komutacijske relacije:

$$[p_a, p_b] = 0; \quad [p_a, M^{bc}] = i\hbar(g^b{}_a p^c - g^c{}_a p^b)$$

$$[M^{ab}, M^{cd}] = i\hbar(g^{bc}M^{ad} - g^{bd}M^{ac} + g^{ad}M^{bc} - g^{ac}M^{bd})$$

Za bezmasene čestice, koristeći definicije impulsa i angularnog momenta iz prethodnog potpoglavlja, dobivamo komutacijske relacije twistora:

$$[Z^\alpha, Z^\beta] = 0, \quad [\overline{Z}_\alpha, \overline{Z}_\beta] = 0, \quad [Z^\alpha, \overline{Z}_\beta] = \hbar\delta^\alpha{}_\beta \tag{11}$$

Operator s, u skladu s prethodnim potpoglavljem i komutacijskim relacijama, definiramo kao:

$$s = \frac{1}{4}(Z^\alpha \overline{Z}_\alpha + \overline{Z}_\alpha Z^\alpha)$$

Možemo definirati i valne funkcije u slici twistora. Iz (11) vidimo da su Z^α i $\overline{Z}_\alpha$, poput položaja i impulsa, kanonski konjugirare varijable. Stoga valna funkcija f može ovisiti ili o Z^α ili o $\overline{Z}_\alpha$, ali ne o obje. Analogno kvantnoj mehanici, ako je funkcija holomorfna u Z^α, f=f(Z^α), onda vrijedi [2] $\frac{\partial f}{\partial \overline{Z}_\alpha}$=0. U slici operatora Z^α, vrijedi:

$$\overline{Z}_\alpha = -\hbar\frac{\partial}{\partial Z^\alpha}$$

Operator heliciteta je:

$$s = \frac{1}{4}(Z^\alpha \overline{Z}_\alpha + \overline{Z}_\alpha Z^\alpha) = \frac{\hbar}{2}(-2 - Z^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\alpha})$$

Primjetimo da je$Z^\alpha \frac{\partial f}{\partial \overline{Z}_\alpha}$ homogeni Eulerov operator. Njegove svojstvene funkcije su homogene funkcije u Z^α, a odgovarajuće svojstvene vrijednosti su stupnjevi homogenosti (npr. twistorova valna funkcija stupnja homogenosti -n-2, po formuli za s, opisuje bezmasenu česticu heliciteta $\hbar$n/2). Ostali primjeri su dani na slici 8.

Particle	Helicity	Homogeneity
Graviton	+2	-6
Photon	+1	-4
Anti-neutrino	+1/2	-3
Unknown	0	-2
Neutrino	-1/2	-1
Photon	-1	0
Graviton	-2	+2

Slika 8: Helicitet i stupanj homogenosti bezmansenih čestica [6]

8 Veza između twistorovih funkcija i polja u prostor vremenu

'Positive-frequency wave function' ψ je kompleksna funkcija definirana na tzv.prednjoj cijevi $M^+ \subset PT^+$. Razmotrimo bezmasenu česticu spina n/2 ($\hbar$=1). Njenu valnu funkciju, [2] u zapisu prostorvremena, zadajemo [1] simetričnim spinorom s n indekasa:

$$\phi_{AB...D} \quad ili \quad \phi_{A'B'...D'}$$

koji zadovoljavaju:

$$\nabla^{AA'}\phi_{AB...D} = 0 \quad ili \quad \nabla^{AA'}\phi_{A'B'...D'} = 0$$

Specijalno, ako je s=0, onda ϕ zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu:

$$\Box^2\phi = 0$$

'Positive-frequency wave functions' ϕ desno orjentiranih čestica, koje imaju helicitet s=n$\hbar$/2, opisujemo ,prema [2], spinorima $\phi_{A'B'...D'}$. Pritom lijevo orjentirane, s=-n$\hbar$/2, opisujemo $\phi_{AB...D}$. Iz prethohnog poglavlja, znamo twistorova valna funkcija f, stupnja homogenosti -n-2, također opisuje bezmasenu česticu. Kada je n>0 onda je čestica desno, a za n<0 lijevo orjentirana. Veza između twistorovih valnih funkcija f i polja spinora u točki R $\in$ CM je dana,[1] integralima po zatvorenim krivuljama:

$$\phi_{A'B'...D'}(R) = k_n \oint \pi_{A'}\pi_{B'}...\pi_{D'} f(Z^\alpha) d^2\pi \tag{12}$$

$$\phi_{AB...D}(R) = k_n \oint \frac{\partial}{\partial\omega^A}\frac{\partial}{\partial\omega^B}...\frac{\partial}{\partial\omega^D} f(Z^\alpha) d^2\pi \tag{13}$$

gdje je k_n konstanta, a:

$$d^2\pi = \frac{1}{2} d\pi_{A'} \wedge d\pi^{A'}$$

Zatvorena krivulja, po kojoj se integrira, ima topologiju [1] $S^1 \times S^1$ u prostoru twistora gdje je Z incidentan sa R. Izraze (12) i (13) možemo, prema [1], zapisati kao:

$$\phi_{A'B'...D'}(R) = k_n \oint \pi_{A'}\pi_{B'}...\pi_{D'} f(iR^{EE}) d^2\pi \tag{14}$$

$$\phi_{AB...D}(R) = k_n \oint \pi_{A'}\pi_{B'}...\pi_{D'} \frac{\partial}{\partial R^{AA'}}\frac{\partial}{\partial R^{BB'}}...\frac{\partial}{\partial R^{DD'}} f(iR^{EE}) d^2\pi \tag{15}$$

8.1 Kohomologija twistora

Integrali, definirani u prethodnom poglavlju, daju vrijednosti različite od nula ako funkcija f ima singularitete u području po kojem integriramo.
Uzmimo za primjer funkciju:

$$f = \frac{1}{A_\alpha Z^\alpha B_\beta Z^\beta}$$

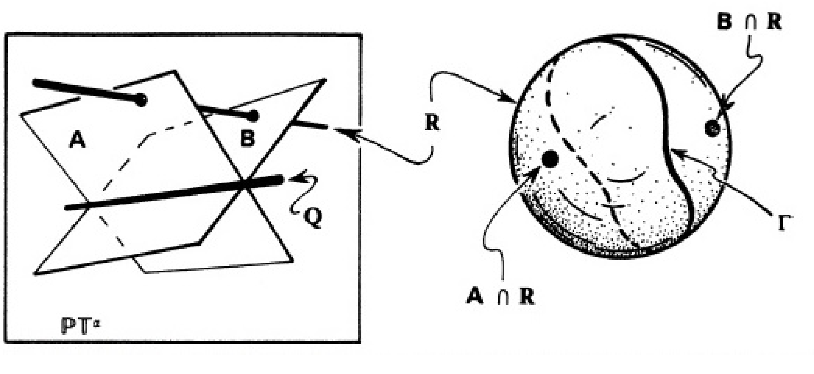
stupnja homogenosti -2 koja prema [2] opisuje skalarno polje:

$$\phi = \frac{k}{(R_a - Q_a)(R^a - Q^a)}$$

gdje je k konstanta. Singularitete imamo kada vrijedi:

$$A_\alpha Z^\alpha = 0 \quad ili \quad B_\alpha Z^\alpha = 0$$

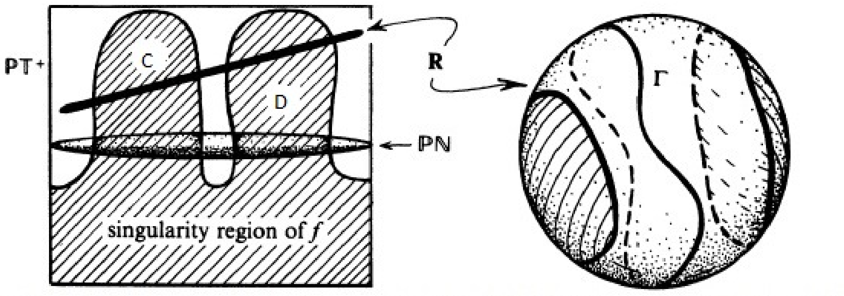
Ove jednadžbe opisuju dvije ravnine A i B u PT. Njihovom presjeku, liniji Q $\subset$ PT, je pridružena točka Q $\in M_c$ čiji vektor položaja, Q^a, se pojavljuje u ϕ. Polje ϕ je singularno, ako je R nul separirano od Q, ili ekvivalentno dok R $\in$ PT siječe Q.
Ako R ne siječe Q (ili liniju I), integracijom po zatvorenoj krivulji po dvije varijable, $\pi_{0'}$ i $\pi_{1'}$, dobivamo vrijednost polja ϕ u točki R. Pritom, prema [2] krivulja Γ razdvaja singularne točke na S^2, tj. na topologiji R $\in$ PT.



Slika 9: Polovi funkcije f i krivulja Γ [2]

Singulariteti funkcije f koji se nalaze na sferi su dvije točke u kojima R siječe ravnine A i B. Ako R ne siječe Q , dobivamo konačnu vrijednost integrala, tj. ϕ(R). U protivnom ϕ postaje singularan.
Pretpostavimo da se Q nalazi u 'backward-tube' $M^- \subset PT^-$. Onda je ϕ ne singularno kompleksno polje pozitivne frekvencije. Ovo implicira, da nijedna linija R$\in PT^+$ ne siječe Q $\subset PT^-$. Tada je ϕ holomorfna u 'forward-tube'

M^+. Ovo svojstvo slijedi iz činjenice da su singulariteti funkcije f 'odvojeni' u PT^+, a ne zato jer je funkcija f nekog posebnog oblika.
Općenita situacija je prikazana na slici (10).



Slika 10: singulariteti funkcije f[2]

Neka je twistorova funkcija holomorfna u nekom području PT^+-C-D, gdje su C i D dva disjunktna zatvorana podskupa od PT^+, koja sadrže singularitete funkcije f u PT^+. Za liniju R, u PT^+, imamo dva odvojena područja singulariteta na Riemannovoj sferi. Krivulja Γ odvaja jedno područje od drugog, daje ne sinularno polje u $M^+ \subset PT^+$.
Kao što je prethodno ustanovljeno, izvjavom 'positive-frequency' f mislimo na funkciju definiranu na $M^+ \subset PT^+$. Funkcija f,prema [2], nije holomorfna na cijelom PT^+, ali je holomorfna na dva otvorena skupa koji zajedno pokrivaju PT^+:

$$U_0 = PT^+ - C \quad i \quad U_1 = PT^+ - D$$

Sada definiramo twistorove funkcije [1] kao Čehove reprezentacije 'sheaf' kohomologije. Ovdje će biti dovoljno definirati r-ti element kohomologije ili r-funkiciju, koja je definirana na prostoru H,s obzirom na (konačan) otvoreni pokrivač (U_0, U_1,...,U_m) otvorenih skpova, je dana familijom funkcija:

$$f_{i_0 i_1 \ldots i_m} \quad definiranih \quad na \quad U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots U_{i_r}$$

za svaki neprazni presjek r+1 otvorenih skupova iz pokrivača i antisimetrično je na zamjenu indeksa i_0, i_1,...,i_r. Ova familija mora,prema [1], zadovoljavati određene uvjete konistentnosti i, r-tu funkciju f dobivamo kada familiju f...s faktoriziramo određenom relacijom ekvivalencije.
Promotrimo pravila za slučaj r=1, u odnosu na (dovoljno profinjen) pokrivač (U_0, U_1,...,U_m kompleksne mnogostrukosti H. Holomorfna 1-funkcija f (element prve kohomologije) je definirana, u odnosu na pokrivač, familijom holomorfnih funkcija:

$$f_{ij} = -f_{ji} \quad definiranih \quad na \quad U_i \cap U_j , \tag{16}$$

gdje je $U_i \cap U_j$ neprazan. Kao uvjet konzistencije, moramo imati, prema [1]:

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0 \quad na \quad U_i \cap U_j \cap U_k$$

i 1-funkcija f proizlazi kada faktoriziramo ekvivalencijom:

$$f_{ij} \equiv f_{ij} + h_i - h_j$$

gdje je h_k definirana, za svaki k, na U_k.
Iz ovih pravila možemo vidjeti kakvu ulogu igra twistorova funkcija f u integraciji po zatvorenoj krivulji. Neka je prostor H, npr. gornja polovica prostora PT^+ , pokrivena gore definiranim skupovima U_0 i U_1. Prema [1] dodavanje i oduzimanje funkcija poput h_0 ili h_1, holomorfnih na U_1 i respektivno na U_2, ne mijenja rezultat integracije.

8.2 Elektromagnetska polja i Einsteinova jednadžba

Klasično elektromagnetsko polje opisujemo [8] antisimetričnim tenzorom F_{ab}. U području bez naboja, on mora zadovoljavati Maxwellove jednadžbe [8]:

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad \nabla^{a\,*} F_{ab} = 0 \tag{17}$$

gdje je ${}^*F_{ab}$ dualni tenzor tenzora F_{ab}.
U spinorskoj notaciji, prema [1], antisimetrični tenzor F_{ab} možemo zapisati kao:

$$F_{ab} = F_{AA'BB'} = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \psi_{A'B'}\epsilon_{AB}$$

gdje je ϕ_{AB} simetričan tenzor koji zadovoljava:

$$\nabla^{AA'}\phi_{AB} = 0$$

Primjetimo da je ova jednadžba istog oblika kao i jednadžba koja opisuje bezmasenu česticu spina 1 (poglavlje 6). Stoga, da bi dobili rješenja (17) možemo koristiti (12) i (13).
Ako je F_{ab} realan tenzor, [1] vrijedi $\psi_{A'B'}=\overline{\phi_{AB}}=\overline{\phi}_{A'B'}$.
Pripadni dualni tenzor je:

$$^*F_{AA'BB'} = -i\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + i\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}$$

Iz prethodnih relacija vidimo da, anti-self dualni dio (ASD) $^-F_{ab}$ $(*(^-F_{ab})$=-i$(^-F_{ab}))$, je u notaciji spinora:

$$^-F_{AA'BB'} = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'}$$

dok self-dualni (SD) dio $^+F_{ab}$, $(*(^+F_{ab})$=+i$(^+F_{ab}))$, je oblika:

$$^+F_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}$$

Da bi opisali valnu funkciju slobodnog fotona, koristimo kompleksno (s pozitivnim frekvencijama) rješenje, F_{ab}, jednadžbi (17): Možemo ga zapisati kao[1]:

$$F_{ab} = F_{AA'BB'} = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\tilde{\phi}_{A'B'}$$

gdje su ϕ_{AB} i $\tilde{\phi}_{A'B'}$ dva proizvoljna (nepovezana) simetrična spinora, koji pretstavljaju SD i ASD of F_{ab}, i pritom zadovoljavaju:

$$\nabla^{AA'}\phi_{AB} = 0 \quad i \quad \nabla^{AA'}\tilde{\phi}_{A'B'} = 0$$

Iz ovih jednadžbi i koristeći razmatranja u poglavlju 5, vidimo da ASD opisuje lijevo orjentirani, a SD desno orjentirani foton.
Koristeći twistorove funkcije lijevo orjentrani foton opisujemo 1-funkcijom stupnja homogenosti 0, a desno orjentirani foton opisuje 1-funkcija stupnja homogenosti -4. Proizvoljno stanje heliciteta fotona, možemo opisati twistorowom funkcijom f, koja je linearna kombinacija dva stanja, jednog stupnja homogenosti 0 i drugog -4. Kompleksni Maxwellov tenzor dobivamo,prema [1], iz:

$$F_{AA'BB'}(R) = k\oint(\epsilon_{AB}\pi_{A'}\pi_{B'} + \hbar^2\epsilon_{A'B'}\frac{\partial}{\partial\omega^A}\frac{\partial}{\partial\omega^B})f(Z)d^2\pi$$

gdje integriramo po zatvorenoj krivulji u područj gdje je Z incidentan s R.
Iste argumente možemo primjeniti za Einsteinovu jednadžbu u vakuumu za slabo (linearno) polje. U vakumu, Riemannov tenzor zadovoljava:

$$R_{abcd} = R_{[cd][ab]} \quad R_{[abc]d} = 0 \quad R^b{}_{abc} = 0$$

$$\nabla_{[a}R_{bcd]e} = 0 \quad ili \quad \nabla^a R_{abcd} = 0$$

gdje ∇ označava kovarijantnu derivaciju. Pomoću 2-spinorske notacije:

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\Psi_{A'B'C'D'}$$

gdje je:

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$$

i zadovoljava:

$$\nabla^{AA'}\Psi_{ABCD} = 0$$

$\Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'}$ je ASD dio, dok $\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\Psi_{A'B'C'D'}$ je SD dio.
Dulni tenzor definiramo kao:

$$^*R_{abcd} = \frac{1}{2}e_{abef}R^{ef}{}_{cd}$$

U limesu slaboga polja, prostorvrijeme postaje Minkowski prostor M, gdje polje opisuje devijaciju prvog reda zakrivljenosti. To polje možemo smatrati simetričnim spinorom, ϕ_{ABCD}, koji predstavlja devijaciju prvog reda od Ψ_{ABCD}. ϕ_{ABCD} zadovoljava jednadžbu:

$$\nabla^{AA'}\phi_{ABCD} = 0$$

i pritom opisuje bezmaseno polje spina 2. Valnu funkciju slobodne bezmasene kvantne čestice spina 2 nazivamo gravitonom. Kao u slučaju elektromagnetizma, Ψ_{ABCD} i $\tilde{\Psi}_{A'B'C'D'}$ zamjenjujemo s ϕ_{ABCD} i $\tilde{\phi}_{A'B'C'D'}$koji zadovoljavaju pripadne jednadžbe:

$$\nabla^{AA'}\phi_{ABCD} = 0 \quad \nabla^{AA'}\tilde{\phi}_{A'B'C'D'} = 0$$

i opisuju lijevo i respektvno desno orjentirane gravitone. Možemo ih opisati twistorovim funkcijama, [2] stupnja homogenosti +2 i -6:

$$\phi_{ABCD}(R) = k_{-2}\oint \frac{\partial}{\partial\omega^A}\frac{\partial}{\partial\omega^B}\frac{\partial}{\partial\omega^C}\frac{\partial}{\partial\omega^D} f(Z^\alpha)d^2\pi$$

$$\tilde{\phi}_{A'B'C'D'}(R) = k_{+2}\oint \pi_{A'}\pi_{B'}\pi_{C'}\pi_{D'} f(Z^\alpha)d^2\pi$$

9 Zaključak

U ovom seminaru smo predstavili teoriju twistora. Vidjeli smo da relacijom incidencije dobivamo geomerijsku korespodenciju između projektivnog prostora twistora i kompacifiranog Minkowskog prostora.
Također smo vidjeli da pomoću twistora možemo opisati klasične bezmasene čestice heliciteta s.
Na kraju, proučili smo vezu, danu intgralima po zatvorenim krivuljama, između twistorovih funkcija i polja u prostorvremenu.

References

[1] An introduction to twistor theory- S.A. Hugget i K.P.Tod

[2] The Central Programme to twistor Theory - Penrose, Roger Chaos Solitons Fractals 10 (1999) 581-611

[3] Twistor theory at fifty: from contour integrals to twistor strings- Michael Atiyah, Maciej Dunajski, Lionel J.Manson, Proc Math Phys Eng Sci. (2017); 473(2206): 20170530

[4] Conformally compactified Minkowski space: myths and facts- Arkadiusz Jadczyk; Prespacetime Journa (2012)

[5] http://users.ox.ac.uk/ tweb/00004/index.shtml

[6] https://universe-review.ca/R15-19-twistor.htm

[7] http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html

[8] http://mathworld.wolfram.com/MoebiusTransformation.html