Odsustvo kozmološke kose

Ivan Nikolić
(Dated: 19. rujna 2019.)

Teoremi vezani za takozvano odsustvo kozmološke kose pojavili su se u 70-im godinama prošlog stoljeća kada su se javili problemi vezani uz izotropizaciju Svemira. Ti problemi su rješeni modelom inflacijskog Svemira u kojem u kratkom vremenskom razdoblju Svemir teži ka de Sitterovom te se tako anizotropije izglade. U ovom seminaru predstavljen je Waldov[1] teorem koji opisuje ponašanje početno širećih kozmološih modela koji zadovoljavaju Einsteinove jednadžbe s pozitivnom kozmološkom konstantom. Također promatrani su i drugi teoremi koji promatraju šireće kozmološke modele. Na kraju su analizirani inflacijski modeli nove, kaotične i 'power-law' inflacije.

1. UVOD

Današnja kozmologija se temelji na Friedmann-Robertson-Walker (FRW) modelu koji je danas potvrđen eksperimentalno i opisuje mnoge pojave u Svemiru kao što je širenje Svemira, starost Svemira, količinu lakših elemenata u Svemiru. Metrika tog modela je egzaktno rješenje Einsteinovih jednadžbi koje opisuje homogeni, izotropni Svemir koji se širi te koji je putevima povezan, ali nije nužno jednostavno povezan. Problem tog izotropnog kozmološkog modela je što zahtijeva specifične izotropne početne uvjete. Taj problem je riješen uvođenjem kozmološke inflacije, procesa u kojem se općeniti kaotični početni uvjeti izglađuju te dobivamo izotropni Svemir. Inflacija uvodi eksponencijalno povećanje skale Svemira što je svojstveno za de Sitterov model Svemira s pozitivnom kozmološkom konstantom Λ. No, ako gledamo ne-FRW početne uvjete onda nije očito da će do inflacije uopće doći ni da će inflacija izotropizirati Svemir. Zbog toga se postavlja hipoteza o odsustvu kozmološke kose odnosno hipoteza da svi šireći kozmološki modeli s pozitivnom kozmološkom konstantom asimptotski prilaze de Sitterovom rješenju.

Na početku ovog seminara, u **2.** uvode se pojmovi koji će kasnije biti potrebni. Nakon toga se u **3.** predstavlja Waldov teorem o odsustvu kozmološke kose te dokaz tog teorema. Nakon toga se promatraju i drugi teoremi koji opisuju odsustvo kozmološke kose. U **4.** se promatraju inflacijski modeli, posebice nova inflacija, kaotična inflacija te 'power-law' inflacija. Odjeljak **5.** je posvećen zaključku.

2. POJMOVI I DEFINICIJE

Uvodimo pojmove iz opće teorije relativnosti i diferencijalne geometrije koji će nam biti potrebni u teoremima povezanim za odsutstvo kozmološke kose. Također se uvodi model inflacije.

2.1. Standardni model

Kao što je napomenuto u uvodu, FRW model, na kojem se temelji moderna kozmologija, je izotropan i homogen model Svemira koji se širi. Metrika FRW modela je:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{2.1}$$

k može biti $-1, 1, 0$ za zatvoreni, otvoreni odnosno ravni Svemir, a $a(t)$ je faktor skale Svemira. Ponašanje skale svemira određeno je Friedmannovim jednadžbama:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)a \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho \tag{2.3}$$

gdje je ρ gustoća, a p tlak. Jednadžba (2.3) se dobije iz 00 komponente Einsteinove jednadžbe koja glasi:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Jednadžba (2.2) se dobije iz (2.3) te iz traga Einsteinovih jednadžbi. Omjer $\frac{\dot{a}}{a}$ označavamo Hubbleovom parametrom:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Iz jednadžbe (2.3) se vidi da k ovisi o omjeru:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$

gdje je $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}$. Ako je Ω veći od 1 tada je Svemir zatvoren, a ako je manji od 1 Svemir je otvoren. Mjerenje Hubbleovog parametra je danas iznimno popularno te se u literaturi nalazi mnogo vrijednosti Hubbleovog parametra. Različiti načini mjerenja daju različite vrijednosti koje se ne slažu za više od 4σ[2] tako da se točna vrijednost Hubbleovog parametra još čeka no sve vrijednosti se nalaze unutar $66 \leq H \leq 77(\frac{km}{secMpc})$. Ta vrijednost Hubbleovog parametra povlači da je vrijednost Ω oko 1 što znači da je Svemir otprilike ravan. Osim toga, za dobar opis materije u Svemiru imamo jednadžbu stanja koju pišemo u obliku:

$$p = (\gamma - 1)\rho.$$

Otvoreni i ravni Svemir će se širiti vječno dok u slučaju zatvorenog Svemira s $p > -\frac{\rho}{3}$ postoji trenutak u kojem u jednadžbi (2.3) član $\frac{k}{a^2}$ nadvlada član $\frac{8\pi}{3}\rho$. Nakon tog trenutka konstanta skale a se počne smanjivati te dođe do nule kada se ponovno javlja singularitet tzv. 'Big Crunch'. Vrijeme života takvog Svemira je dano u [3]: $t \sim \frac{M}{M_p}10^{-43}sec$ gdje je M ukupna masa Svemira, a $M_p = 1.2 \cdot 10^{19}GeV$ je Planckova masa.

Vratimo se ponovo na probleme FRW modela. Današnji Svemir se temelji na homogenoj kozmologiji FRW modela koja je danas eksperimentalno provjerena. Vjerojatnost da su početni uvjeti Svemira bili takvi da danas imamo homogeni, izotropni Svemir je zanemariva. Vjerojatnije je da je postojao mehanizam koji je manje simetrični Svemir izotropizirao. Jedan od problema FRW modela je problem horizonta. Kozmičko pozadinsko zračenje, relikt koji je nastao na kraju epohe Svemira dominirane radijacijom, pokazuje iznimnu izotropnost. No, problem se javlja u tome što na kraju epohe Svemira u kojoj je nastalo pozadinsko zračenje nije moglo doći do kauzalnog kontakta dijelova Svemira koji su na suprotnim stranama vidljivog Svemira zbog toga što su ti dijelovi previše udaljeni. Ti dijelovi nisu mogli interagirati. Osim toga imamo i problem ravnosti. Iz (2.3) i definicije Ω i ρ_c imamo:

$$|\Omega - 1| = \frac{|\rho(t) - \rho_c|}{\rho_c} = [\dot{a}(t)]^{-2} \tag{2.5}$$

Iz jednadžbi (2.2) i (2.3) se dobije jednadžba očuvanja

$$\dot{\rho}a^3 + 3(\rho + p)a^2\dot{a} = 0 \tag{2.6}$$

Dalje uz jednadžbu stanja imamo ovisnost $\rho \sim a^{-3\gamma}$ što za $\gamma = 1$ (slučaj prašine, dominacija materije) povlači $\rho \sim a^{-3}$ dok za $\gamma = \frac{4}{3}$ (slučaj radijacije) imamo $\rho \sim a^{-4}$. Za male a iz (2.3) (drugi član s lijeve strane zanemariv) se dobije $a \sim t^{\frac{2}{3\gamma}}$ što za slučaj radijacije znači $a \sim t^{\frac{1}{2}}$. To dalje znači da je $(\dot{a}(t))^{-2} \sim t$ pa je iz (2.5) $|\Omega - 1|$ jako malo u početnoj evoluciji vrućeg Svemira. U [3] je navedeno da je nakon Planckovog vremena od početka svemira moralo biti $|\Omega - 1| \lesssim 10^{-59}$. Kada bi na početku svemira $\Omega - 1$ bilo veće od 10^{-55} tada bi se Svemir sigurno urušio u jako kratkom vremenu. S druge strane kada bi vrijednost $|\Omega - 1|$ bila manja od 10^{-55} tada bi se Svemir toliko proširio i gustoća materije bi bila tako niska da život nebi postojao. Stoga se javlja problem početne ravnosti Svemira.

Osim toga, problem su još i nehomogenosti na malim skalama koje FRW također ne objašnjava te problem neželjenih relikta kao što su monopoli koji se javljaju u početku Svemira u nekim modelima.

2.2. Inflacija

Za skalarno polje dano s gustoćom lagranžijana:

$$L = -\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi) \tag{2.7}$$

tenzor energije i impulsa izgleda ovako:

$$T_{ab} = \partial_a\phi\partial_b\phi + g_{ab}L = \\ \partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}[\partial_c\phi\partial^c\phi + 2V(\phi)]. \tag{2.8}$$

Ako je polje ϕ homogeno tada prostorna derivacija iščezava i tenzor energije i impulsa se može napisati u formi idealnog plina $T_{\mu\nu} = diag(\rho, p, p, p)$ uz $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ i $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$. Potencijal V djeluje kao restrukturiranje vakuumske energije no zbog vezanja na gravitaciju imamo direktne posljedice tog potencijala:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} = 8\pi(T^m_{ab} - g_{ab}V) \tag{2.9}$$

gdje je T^m_{ab} tenzor energije i impulsa obične mase. Vidi se da je jednadžba (2.9) samo Einsteinova jednadžba (2.4) s kozmološkom konstantom gdje je $\Lambda = 8\pi V(\phi)$. Ono što se dobije uzimajući vakuum je idealni fluid s negativnim tlakom. Uzimajući to u obzir u jednadžbi (2.3) se dobije eksponencijalni rast skale $a(t) = H^{-1}cosh(Ht)$ za $k = +1$, $a(t) = H^{-1}e^{Ht}$ za $k = 0$ i $a(t) = H^{-1}sinh(Ht)$ za $k = -1$ uz $H \equiv \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\rho}$. Iz jednadžbe očuvanja (2.6) se uvrštavanjem negativnog tlaka dobije da je energija vakuuma konstantna. Takvo rješenje, gdje imamo eksponencijalni rast skale zovemo de Sitterovo prema nizozemskom fizičaru Willem de Sitteru.

Pomoću ovoga možemo izgraditi inflacijski model. Vrlo rani Svemir je bio u vrućem, širećem stanju. Simetrija fundamentalnih interakcija je bila prisutna tako da je vrijednost inflacijskog polja bila 0. Tijekom ekspanzije, Svemir se hladio te su neki dijelovi prošli faznu promjenu u kojoj je inflacijsko polje dobilo vrijednost različitu od nule slamajući simetriju. No, stopa hlađenja je u modelima brža od stope faznih promjena zbog čega inflacijsko polje ostaje na 0 stvarajući lažni vakuum konstantne gustoće. Ta gustoća pokreće eksponencijalno širenje Svemira uz jednadžbu stanja od prije $\rho = -p$. Prilikom tog širenja kvantne fluktuacije ipak pomiču inflacijsko polje. Jednadžba gibanja skalarnog polja se dobije iz Lagranžijana (2.7) $\Box\phi - V'(\phi) = 0$ koja u de Siterrovoj metrici postaje:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \tag{2.10}$$

To je jednadžba loptice na nagibu s trenjem. Polje se prvo slabo pomiče od nule. Tijekom tog procesa gustoća energije ostaje približno jednaka početnoj te se nastavlja eksponencijalno širenje, odnosno možemo reći da se H polako mijenja te se skala mijenja kao $a(t) = a_0 exp \int_0^t H(t')dt' \sim a_0 exp(Ht)$. Inflacija završava kada se H počne znatno mijenjati što se dogodi zbog toga što se polje priliži vrijednosti pravog vakuuma. Nakon toga polje oscilira oko minimuma stvarajući pritom čestice. Te se oscilacije guše što korespondira raspadu težih čestica u slabije. Ti se produkti raspada sudaraju te zagrijavaju Svemir, do trećine temperature faznog prijelaza. Nakon toga Svemir postaje ravan te se vraćamo FRW kozmologiji.

Problem horizonta je riješen. Prostor u kojem se nalazi vidljivi Svemir koji je kauzalno povezan je proširen na veličinu od $10^{20} cm$ što je mnogo veće od vidljivog Svemira koji je tada trebao biti radijusa oko $10cm$. Također je riješen i problem ravnosti zbog toga što je gustoća energije ostala skoro konstanta dok je faktor skale narastao za oko e^{100}. Iz (2.5) i uz definiciju ρ_c se vidi da bi $|\Omega - 1|$ trebalo biti oko 0. Problem monopola i drugih neželjenih relikta je riješen tako da im se gustoća smanjila za faktor 10^{130}. Problem još uvijek ostaje nehomogenost na malim skalama.

Skalarno polje koji vrši inflaciju ne može biti Higgsovo kao što se prvo mislilo već je potrebno naći neko inflacijsko polje koje zadovoljava gornje uvjete.

2.3. Pojmovi iz diferencijalne geometrije

Promatramo glatku kongruenciju vremenskih geodezika, odnosno skup integralnih krivulja vektorskog polja u (M,g) prostorvremenu. Vektorsko polje je normalizirano tako da je $\langle n, n \rangle = -1$. Geodezici su parametrizirani vremenom t, i $n = \partial_t$. Definiramo prostornu metriku $\mathbf{h}$:

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{2.11}$$

Vrijedi $h_a^{\ b} n_b = h_a^{\ b} n^a = 0$ pa se $h^a_{\ b} = g^{ac} h_{cb}$ može smatrati operatorom projekcije na potprostor tangentnog prostora okomit na n. Definiramo dalje veličine ekspanzija θ (eng. expansion), smicanje σ (eng. shear) te rotacija ω (eng. rotation):

$$\theta = h^{ab} \nabla_b n_a = \nabla_a n^a \tag{2.12}$$

$$\sigma_{ab} = \nabla_{(b} n_{a)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \tag{2.13}$$

$$\omega_{ab} = \nabla_{[b} n_{a]} \tag{2.14}$$

Može se pokazati da je $\sigma_{ab} n^b = \omega_{ab} n^b = 0$ što znači da su σ i ω prostorni tenzori te da je trag tenzora σ_{ab} nula. Zbrajanjem jednadžbi (2.13) i (2.14) dobije se:

$$\nabla_b n_a = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{2.15}$$

Jednadžba geodezika je za naš vektor n, $n^a \nabla_a n^b = 0$ pa imamo sljedeću jednakost

$$\begin{aligned} n^c \nabla_c \nabla_b n_a &= n^c \nabla_b \nabla_c n_a + R_{adcb} n^d n^c = \\ &= \nabla_b (n^c \nabla_c n_a) - (\nabla_b n^c)(\nabla_c n_a) + R_{adcb} n^d n^c = \\ &= -(\nabla_b n^c)(\nabla_c n_a) + R_{adcb} n^d n^c \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdje prva jednakost slijedi iz definicije Riemannovog tenzora, druga jednakost slijedi zbog Leibnizovog pravila a u trećoj koristimo jednadžbu geodezika. Uzimajući trag jednadžbe (2.16) dobijamo jednadžbu:

$$\frac{d\theta}{dt} = n^c \nabla_c (\nabla_d n^d) = -(\nabla_d n^c)(\nabla_c n^d) - R_{cd} n^c n^d \tag{2.17}$$

Koristeći izraze (2.12) - (2.14) i jednadžbu (2.17) dobijemo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab} n^a n^b \tag{2.18}$$

Ta jednadžba se zove Raychaudhurijeva jednadžba i bit će korisna kasnije.

Oblik tenzora energije i impulsa je vrlo kompliciran pa za njegov opis koristimo razne nejednakosti koje su razumne. Prva od tih je slabi energetski uvjet (engleski 'weak energy condition', dalje WEC):

$$T_{ab} u^a u^b \geq 0 \tag{2.19}$$

gdje je u vremenski vektor. Osim toga imamo i jaki energetski uvjet (engleski 'strong energy condition', dalje SEC):

$$T_{ab} n^a n^b \geq -\frac{1}{2} T \tag{2.20}$$

gdje je n jedinični vremenski vektor. Osim toga imamo i dominantni energetski uvjet (engleski 'dominant energy condition', dalje DEC):

$$T_{ab} u^a u^b \geq 0 \tag{2.21}$$

i $T^a_{\ b} u^b$ je neprostorni vektor za sve vremenske vektore u. DEC implicira da je:

$$|T_{\mu\nu}| \leq T_{00} \tag{2.22}$$

gdje su $T_{\mu\nu}$ komponente tenzora energije i impulsa u nekoj ortonormiranoj bazi s n^a kao vremenskim elementom baze.

Promatramo sada globalno hiperboličko prostorvrijeme (M,g) s kongruencijom vremenskih geodezika koji su normalni na prostornu hiperpovršinu

Σ. U tom slučaju kovarijantna derivacija vektora n na Σ odgovara ekstrinzičnoj zakrivljenosti Σ, odnosno:

$$K_{ab} = \nabla_a n_b \tag{2.23}$$

Tenzor K je prostornig tipa što se vidi iz jednadžbe (2.15). Također, pošto vrijedi $\omega_{ab} = 0$ za kongruenciju koja je okomita na hiperpovršinu tada je $K_{ab} = K_{ba}$, to jest, tenzor ekstrinzične zakrivljenosti je simetričan. Stoga je $K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n g_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab}$ pa je u koordinatama svojstvenim vektoru n :

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \tag{2.24}$$

Trag tenzora ekstrinzične zakrivljenosti pišemo kao $K \equiv K^a_{\ a} = h^{ab}K_{ab} = \theta$ što će biti korisno kasnije.

Sada je potrebno posebno promotriti homogena prostorvremena zbog toga što se takva najlakše karakteriziraju te se pojavljuju u Waldovom teoremu koji će kasnije biti predstavljen. Za prostorvrijeme (M,g) kažemo da je prostorno homogeno ako postoji jedan-parametarska familija prostornih hiperpovršina Σ_t koje obuhvaćaju prostorvrijeme takvih da za svaki t i za svaki $p, q \in \Sigma_t$ postoji izometrija koja p šalje u q. Skup svih izometrija Riemannovske mnogostrukosti tvori Liejevu grupu G, a skup svih Killingovih vektorskih polja tvori Liejevu algebru s komutatorom kao produktom. Ako su v, w Killingovi vektori, tada oni zadovoljavaju $[v,w]^a = C^a_{\ bc}v^b w^c$ gdje cu $C^a_{\ bc}$ strukturne konstante Liejeve grupe. Iz definicije se vidi da je:

$$C^a_{\ bc} = -C^a_{\ cb}. \tag{2.25}$$

Iz Jacobi uvjeta možemo vidjeti da je

$$C^e_{\ d[a}C^d_{\ bc]} = 0. \tag{2.26}$$

Prostor naše Liejeve grupe je 3. Postoji samo određen broj Liejevih algebri koje zadovoljavaju (2.25) i (2.26) za dim=3, Bianchi ih je klasificirao u 10 skupina, koje se onda i zovu po njemu. Tenzorsko polje $C^a_{\ bc}$ se može raspisati kao $C^a_{\ bc} = M^{cd}\epsilon_{dab} + \delta^c_{\ [a}A_{b]}$ gdje je ϵ_{dab} 3-forma Liejeve algebre. Rješavajući za $A_b = C^a_{\ ba}$ i $M^{ab} = \frac{1}{2}C^{(a}_{\ \ cd}\epsilon^{b)cd}$. Uvrštavajući u (2.26) dobije se jednadžba $M^{ab}A_b = 0$. Ako je $A_b = 0$ tada postoji 6 Liejevih algebri određenih s M^{ab}. Ako je $A_b \neq 0$ tada imamo 4 Liejeve algebre takve da je $rankM$ manji od 3.

Još je potrebno definirati skalarnu zakrivljenost $^{(3)}R$ prostorne hiperpovršine. Pišemo ju u obliku strukturnih konstanti:

$$^{(3)}R = -C^a_{\ ab}C^{c\ b}_{\ c} + \frac{1}{2}C^a_{\ bc}C^{c\ b}_{\ a} - \frac{1}{4}C_{abc}C^{abc}$$

Može se pokazati da se dobije [4]:

$$^{(3)}R = -\frac{3}{2}A_bA^b - h^{-1}(M^{ab}M_{ab} - \frac{1}{2}M^2) \tag{2.27}$$

gdje je h determinanta prostorne metrike. Ako je $^{(3)}R$ pozitivan tada mora biti $M^{ab}M_{ab} < \frac{1}{2}M^2$. U sustavu u kojem je tenzor M^{ab} dijagonalan mora biti M^{ab} definitan, a to povlači da je $A_b = 0$. Promatrajući Bianchi modele vidimo da kombinaciju $A_b = 0$ i $rankM = 3$ zadovoljava tip IX. Za sve ostale modele imamo $^{(3)}R \leq 0$.

3. ODSUSTVO KOZMOLOŠKE KOSE

Uvodimo hipotezu o odsustvu kozmološke kose koja je spomenuta u uvodu te dokazujemo Waldov teorem iz 1983. Predstavljamo i druge teoreme koji su nastali nakon.

3.1. Hipoteza

U prošlom odjeljku smo vidjeli kako inflacijski model riješava problem horiznota, ravnosti i druge probleme. No ostaje pitanje da li s generalnim početnim uvjetima inflacija uopće počinje, a i ako počinje da li izglađuje početne nehomogenosti. Zbog toga se postavlja hipoteza o odsustvu kozmološke kose:

Hipoteza 1.

Svi šireći modeli Svemira s pozitivnom kozmološkom konstantom asimptotski prilaze de Sitterovom rješenju.

Sama hipoteza nije dobro definirana (asimptotsko prilaženje nije dobro definirano kao ni šireći model.) Hipoteza, naravno, nije dokazana te postoje mnogi primjeri modela u kojima početno šireći Svemiri završe singularitetom bez de Sitter faze. No, prvi potez prema dokazivanju hipoteze imamo u Waldovom teoremu [1]

3.2. Waldov teorem

Teorem 1. (Wald 1983.)

Sva Bianchi prostorvremena (osim nekih tipa IX) koja se početno šire te imaju pozitivnu kozmološku konstantu Λ i čiji sadržaj materije, osim Λ poštuje jaki i dominantni energetski uvjet teže k de Sitterovom stanju u budućnosti.

Wald dalje kaže da za dovoljno veliku kozmološku konstantu i tip IX može težiti k de Sitterovom rješenju. Sada ćemo prikazati dokaz tog teorema. Jednadžba koja nam je potrebna je komponenta Einsteinovih jednadžbi, vremenski-vremenski dio, odnosno:

$$0 = G_{ab}n^an^b - \Lambda - 8\pi T_{ab}n^an^b \tag{3.1}$$

te jednadžba:

$$0 = R_{ab}n^an^b + \Lambda - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^an^b \tag{3.2}$$

Nakon toga rastavljamo ekstrinzičnu zakrivljenost K_{ab} na trag puta metrika + dio bez traga:

$$K_{ab} = \frac{1}{3}Kh_{ab} + \sigma_{ab} \tag{3.3}$$

s tim da je $K = K_{ab}h^{ab}$. Sljedeće što koristimo je Gauss- Codacci jednadžba [5]:

$$\frac{1}{2}{}^{(3)}R = \frac{1}{2}R + R_{ab}n^a n^b - \frac{1}{2}(K^a_{\ a})^2 + \frac{1}{2}K_{ab}K^{ab} \tag{3.4}$$

Prva dva člana s desne strane čine Einsteinov tenzor dok se zadnji član može napisati kao $\frac{1}{3}K^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab}$ što se vidi iz jednadžbe (3.3). Uvrštavanjem prepoznatog Einsteinovog tenzora iz (3.4) u (3.1) dobije se jednadžba:

$$K^2 = 3\Lambda + \frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{3}{2}{}^{(3)}R + 24\pi T_{ab}n^a n^b. \tag{3.5}$$

Također, promatrajući Raychaudhurijevu jednadžbu možemo uvrstiti (3.2) u (2.18) te dobijemo sljedeću jednadžbu:

$$\dot{K} = \Lambda - \frac{1}{3}K^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)n^a n^b. \tag{3.6}$$

uz prepoznato $K = \theta$. Prvo promatramo sve Bianchi modele osim tipa IX. Koristeći SEC (2.20) i DEC (2.21) vidimo da su u (3.6) zadnja dva člana negativna te u (3.5) zadnja tri člana pozitivna. To vodi na sljedeći zaključak:

$$\dot{K} \leq \Lambda - \frac{1}{3}K^2 \leq 0 \tag{3.7}$$

Dalje, iz druge nejednakosti vidimo da K nikad ne može proći kroz 0 (Λ je pozitivan). To znači da ako je $K > 0$ u nekom početnom trenutku tada će K ostati pozitivan te vrijedi;

$$K \geq (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$$

Dalje, iz (3.7) možemo napisati:

$$\frac{1}{K^2 - 3\Lambda}\frac{dK}{d\tau} \leq \frac{1}{3}. \tag{3.8}$$

Integrirajući dobijemo:

$$K \leq \frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{tanh(\frac{\tau}{\alpha})}$$

uz $\alpha = (3\Lambda)^{\frac{1}{2}}$. Iz te jednadžbe vidimo da je K omeđen s α i gornjom granicom koja eksponencijalno prilazi α.

Dalje iz jednadžbe (3.5) (zadnja dva člana su pozitivna)te (3.8) možemo dobiti granicu za $\sigma^{ab}\sigma_{ab}$:

$$\sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq \frac{2}{3}(K^2 - 3\Lambda) \leq \frac{2\Lambda}{sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})}$$

tako da i smicanje homogene hiperpovršine prilazi 0. Na analogan način možemo pokazati i da za gustoću energije materije vrijedi:

$$T_{ab}n^a n^b \leq \frac{\Lambda}{8\pi}\frac{1}{sinh^2(\frac{\tau}{\alpha})}.$$

Dalje, prisjećajući se (2.22) možemo reći i da su sve komponente tenzora energije i impulsa omeđene tom gornjom granicom. Sljedeće što se primjećuje je da uz (2.24) te uz razvoj (3.3) te uz činjenicu da asimptotski K teži k α te σ_{ab} teži nuli integrirajući (2.24) se dobije:

$$h_{ab}(\tau) = e^{2(\tau - \tau_0)/\alpha}h_{ab}(\tau_0)$$

Pri takvom povećanju skale će i prostorna zakrivljenost ${}^{(3)}R$ iščezavati. To pokazuje da za sve Bianchi modele osim tipa IX u vremenu $\tau \gg \alpha$ Svemir će izgledati kao da nema materije s gotovo ravnim prostornim dijelovima. Kažemo da je Svemir lokalno de Sitterov. U slučaju tipa IX ${}^{(3)}R$ je veće od nule. U tom slučaju se može pokazati [1] da za dani ϵ_{abc} i M^{ab} te fiksirajući determinantu prostorne metrike h najveći ${}^{(3)}R$ imamo kada je h^{ab} proporcionalan M^{ab}:

$$h^{ab} = \frac{M^{ab}}{(h\ detM)^{\frac{1}{3}}}$$

što je ekvivalentno tome da kažemo da je ${}^{(3)}R$ najveći kada je zakrivljenost izotropna. Tada je iz jednadžbe (2.27) imamo da je ${}^{(3)}R$:

$${}^{(3)}R \leq \frac{3}{2}\frac{(detM)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} \tag{3.9}$$

Pretpostavimo da imamo:

$$\Lambda > \frac{1}{2}\ {}^{(3)}R^{max} = \frac{3}{4}\frac{(detM)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} \tag{3.10}$$

Prisjećajući se (2.24) te (3.3):

$$\dot{h} = 2hK$$

što znači da će h rasti sve dok K ne prođe kroz nulu. No zbog jednadžbe (3.5) te uvjeta (3.9) i (3.10) znamo da će K ostati pozitivan. Tada imamo daljnje zaključke kao za ne-IX modele. $\square$

3.3. Drugi teoremi

Waldov dokaz, naravno, ne dokazuje izravno hipotezu o odsustvu kozmološke kose te su se zbog toga pojavili i drugi teoremi za opis hipoteze

Teorem 2.(Jensen, Stein-Shabes 1986.) [6]

Neka je (M,g) proizvoljno sinkrono prostorvrijeme bilo koje dimenzije s pozitivnom kozmološkom konstantom takvo da tenzor energije i impulsa poštuje SEC i DEC te da je skalarna prostorna zakrivljenost pozitivna. Tada (M,g) evoluira prema de Sitterovom prostorvremenu

Uvjet sinkronog prostorvremena znači da postoji sinkroni referentni sustav. Da bi to mogli napraviti trebamo globalno hiperboličko prostorvrijeme, odnosno prostorvrijeme koje dopušta Cauchyevu površinu. Dokaz teorema je sličan Waldovom.

Teorem 3.(Morrow-Jones, Witt)

U izostanku crnih rupa, jedina lokalno statička rješenja Einsteinovih jednadžbi u vakuumu s pozitivnom kozmološkom konstantom su de Sitterovo rješenje i Nariai rješenje

Nariai rješenje [7] ima topologiju dvodimenzionalnog de Sitter rješenja pomnoženog s 2-sferom konstantnog radijusa. Nariai rješenje je prilično nestabilno perturbacijom S^2 člana zbog čega se može reći da prijašnji teorem govori o asimptotskom priilaženju de Sitterovom rješenju.

4. INFLACIJSKI MODELI

4.1. Nova inflacija

Inflacijski model koji je opisan u drugom poglavlju se zove nova inflacija (za razliku od stare inflacije koja je danas većinom odbačena). Jednadžba inflacijskog polja (2.10) kaže da se polje ϕ u početku polako mijenja te mu se gostoća energije slabo mijenja. Na početku inflacije vrijednost polja označavamo s ϕ_i. Dok god je ϕ blizu vrijednosti ϕ_i Svemir sadrži gotovo konstantnu gustoće energije vakuuma $V(\phi)$ što tumačimo kao kozmološku konstantu. Upravo zbog toga vidimo vrijednost Waldovog teorema. Jedino što treba provjeriti je da polje ϕ ne dođe do minimuma potencijala dok prostorvrijeme ne postane blizu de Sitterovog. Promatramo jednadžbu (2.10) i zbog ravnosti potencijala zanemarujemo član akceleracije zbog čega imamo:

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V'}{K}$$

Tu jednadžbu integriramo do nekog vremena t_v kada je Svemir dominiran vakuumom:

$$\int_{\phi_i}^{\phi} \frac{d\phi}{V'(\phi)} = -\int_0^{t_v} \frac{dt}{K}$$

Može se pokazati [4] da je promjena skalarnog polja $\delta\phi$ prije nego je Svemir dominiran vakuumom uz ovisnost faktora skale $a \sim t^n$ te $V(\phi) \approx V(\phi_i)$:

$$-\frac{\delta\phi}{V'(\phi_i)} \approx \frac{1}{6n} t_v^2 = \frac{n}{2} \frac{-1}{3H_0} H_0^{-1}$$

Promjena polja ϕ prije inflacije je $\frac{n}{2}$ promjeni tjekom prvog Hubblovog vremena ($= H_0^{-1}$) de Sitter epohe. Polje ϕ se ne promjeni više prije inflacije nego tijekom prvog e-folda inflacije. Vakuumska energija se ne potroši prije nego Svemir uđe u fazu inflacije. Hipoteza odsustva kozmičke kose mora valjati za homogeni kozmološki model u modelu nove inflacije. Gornja analiza nije rigorozna zbog toga što je cijeli račun aproksimativan zbog čega nemamo teorem koji detaljno opisuje rezultat.

4.2. Kaotična inflacija

1983. Linde [8] je predložio novi model inflacije koji je nazvao kaotična inflacija. Za ilustraciju modela prvo se služimo nerealističnim modelom konstanog efektivnog potencijala $V(\phi) = const$. U takvoj teoriji za očekivati je da se sve vrijednosti polja ϕ pojave u određenim područjima Svemira. Jedini uvjet na polje je da je $(\partial_\mu\phi)^2 \lesssim M_p^4$ gdje je M_p Planckova masa otprije. Kao rezultat toga Svemir se dijeli na mnogo eksponencijalno velikih domena koje sadrže gotovo konstantno polje ϕ. Iako je ovaj model jako pojednostavljen, slične efekte možemo očekivati od dovoljno ravnog potencijala. U tu svrhu Linde promatra potencijal $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$. U otvorenom Svemiru će tada svejedno postojati mnogo lokalno homogenih i izotrponih domena koje sadrže lokalno homogeno polje ϕ. Zaključak je da domene s poljem $\phi_0 \gtrsim 3M_p$, koje sigurno postoje u Svemiru s kaotičnom početnom distribucijom polja ϕ rastu eksponencijalno te stvaraju mini-Svemire veće od vidljivog Svemira. Razlika ove teorije je da joj nije potrebna teorija visoko temperaturnih faznih prijelaza u ranom Svemiru.

4.3. 'Power-law' inflacija

Ono što je zajedničko svim inflacijskim modelima je $\ddot{a}(t) > 0$. Jedna klasa rješenja je $a(t) \propto t^n, n > 1$. Takva ovisnost se može postići s potencijalom $V(\phi) = V_0 exp(-\lambda\phi)$. Razlog zbog kojeg se taj model promatra je taj što on prirodnije proilazi iz čestične fizike. U tom slučaju se također može izreći dokaz o odsustvu kozmološke kose za homogeni slučaj. Dokaz je sličan Waldovom te se može naći u [9]

5. ZAKLJUČAK

Da zaključimo, inflacija je relativno mlad model kojim se rješavaju mnogi problemi moderne kozmologije kao što su izotropnost Svemira, problem horizonta, problem neželjenih relikta te još mnogi drugi. U ovom seminaru predstavljen je model inflacije koji rješava neke od tih problema. No i taj model ima probleme, na primjer to što ne prolaze svi kozmološki modeli inflaciju. Da bi se rješio taj problem postavlja se hipoteza o odsustvu kozmološke kose. Hipoteza nije dokazana u cijelosti no dokazom teorema koje su povezane sa hipotezom bave se mnogi kozmolozi te danas imamo mnogo teorema koji na jedan ili drugi način dokazuju hipotezu uz neke dodatne pretpostavke . Da bi uspjeli inflacijom opisati Svemir kakav danas imamo potrebno je uskladiti današnja saznanja iz čestične fizike s modelima inflacije koji se trenutno nude.

[1] Wald R.M:, 1983, Asymptotic behavior of homogenous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant, Phys. Rev. D 41, 1047.

[2] https://www.scientificamerican.com/article/best-yet-measurements-deepen-cosmological-crisis/, Anil Ananthaswamy, Best-Yet Measurements Deepen Cosmological Crisis, 2019., Scientific American

[3] Linde A., 1990, Particle Physics and Inflationary Cosmology (Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland).

[4] Miritzis J., 1996, Cosmological Attractors and No-Hair Theorems, (Master Thesis Dissertation, University of Natal)

[5] Hawking S., Ellis G., 1973, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge University Press, Cambridge).

[6] Jensen G., Stein-Shabes J., 1987, Is inflation natural? Phys. Rev. D 35, 1146.

[7] Kramer D., Stephani H., McCallum M. and Herlt E., 1980, Exact solutions of Einstein's field equations, (CUP, Cambridge)

[8] Linde A., 1983, Chaotic Inflation, Phys. Lett., 129B,177.

[9] Kitada Y., Maeda K., 1992, Cosmic no-hair theorem in power-law inflation, Phys. Rev. D 45, 1416.