

Prostornovremenske crvotočine

Petar Perković

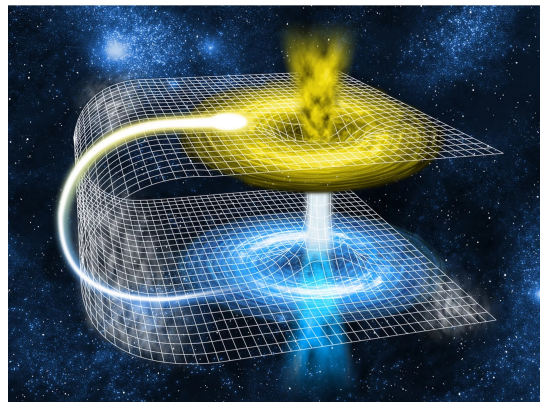
20. rujna 2017.

Sažetak

Opisan je koncept prostornovremenske crvotočine i prikazane razne metrike crvotočina. Predstavljen je proces generiranja slike crvotočine i prikazan je utjecaj parametara crvotočine na samu sliku. Na kraju je napravljena simulacija prolaska kroz jednu crvotočinu.

1 Teorijski uvod

Crvotočina je koncept koji predstavlja rješenje Einsteinovih jednadžbi polja, netrivialna struktura koja povezuje dva odvojena mjesta u prostoru. Može se vizualizirati kao tunel između dvije točke u prostoru kao na slici 1. Crvotočine mogu spajati točke udaljenosti od nekoliko metara do više milijuna svjetlosnih godina, točke između različitih svemira i različitih točaka u vremenu. Kroz znanstvenu fantastiku često se koriste kao sredstvo brzog putovanja kroz prostor i vrijeme.



Slika 1: Prikaz crvotočine (preuzeto sa Shutterstocka).

Topološka definicija za crvotočinu preuzeta iz [2] glasi:

Definicija 1.1. Ako prostorvrijeme Minkowskog sadrži kompaktno područje Ω , i ako je topologija od Ω oblika $\mathbb{R} \times \Sigma$ gdje je Σ 3-mnogostrukost s netrivialnom topologijom, čiji rub $\partial\Sigma$ ima topologiju oblika S^2 , i nadalje ako su hiperplohe Σ sve prostorne, onda područje Ω sadrži **kvazipermanentne intrauniverzne crvotočine**.

Crvotočine se konceptualno slažu s generalnom teorijom relativnosti, ali još nije dokazano njihovo postojanje. Ne postoji poznati mehanizam s kojim bi crvotočine mogle nastati prirodno u našem svemiru, kao i umjetno od napredne civilizacije. Bilo koje stvaranje crvotočine gdje je prije nije bilo zahtjeva promjenu topologije svemira i vrlo je vjerojatno da se to protivi zakonima fizika^[4] (vjerojatno, ali nije dokazano).

Crvotočine će se tako brzo zatvoriti da ništa kroz njih ne može proći, osim ako u grlu imaju "egzotičnu materiju" koja će imati negativnu gustoću energije u nekim referentnim sustavima. Iako je negativna gustoća energije moguća (npr. Casimirov efekt), postoje limiti^[5] koji ograničavaju količinu negativne energije u malom prostoru i koliko ona može biti tamo, što vjerojatno ograničava veličinu crvotočine. Ova ograničenja vjerojatno ne dopuštaju crvotočine slične onima iz filmovima znanstvene fantastike.

Istraživanja koja su dovela do ovih zaključaka uglavnom nisu uzimala u obzir moguće postojanje više dimenzija. Postojanje više od 4 dimenzije bi u teoriji moglo eliminirati neka od gore navedenih ograničenja. S trenutnim shvaćanjem crvotočina je jako malo vjerojatno da postoje prirodno u svemiru i da ćemo ih u dogledno vrijeme uspjeti proizvesti. Svakako su još uvijek zanimljiv koncept, jer s današnjom tehnologijom raketa jako teško ćemo otputovat do obližnjih solarnih sustava u narednih stotinjak godina. Zato nije čudno što su crvotočine zanimljive u znanstvenoj fantastici, ali njihovo korištenje je zanimljivo kao alat u razumijevanju opće teorije relativnosti. Kroz ovaj seminar će se promotriti nekoliko metrika traversabilnih crvotočina i vizualizacija onoga što kamera vidi kad je u njihovoj blizini.

2 Metrika crvotočina

Zakrivljenost prostora i vremena u općoj relativnosti se može izraziti matematički, pomoću prostornovremenske metrike. Metrika u potpunosti objašnjava prostornovremensku geometriju sustava i pomoću nje se mogu deducirati sve informacije o sustavu. U ovom djelu seminara će se navesti nekoliko primjera traversibilnih crvotočina i njihovih metrika. Kao najjednostavniji primjer je navedena Ellisova crvotočina, a nakon nje su navedene i neke crvotočine koje su se koristile u filmu *Interstellar*.^[8]

2.1 Ellisova crvotočina

Ova crvotočina je smišljena od strane Homera Ellisa 1973.^[6] godine i metrika joj glasi:

$$ds^2 = -dt^2 + d\ell^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

gdje je r funkcija ℓ dana s

$$r(\ell) = \sqrt{\rho^2 + \ell^2}, \quad (2)$$

a ρ je konstanta.

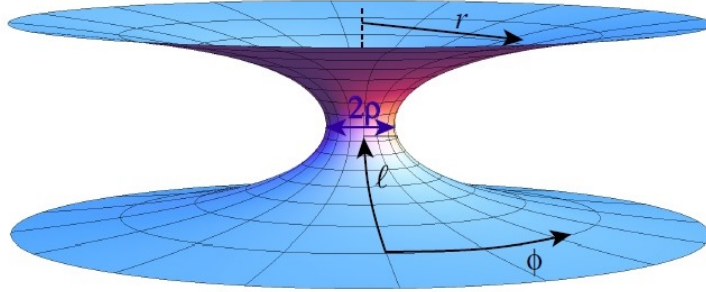
Negativni predznak uz dt^2 govori da je vrijeme vremenskog tipa, a nepostojanje faktora uz $d\ell^2$ govori da teče istom brzinom kao za nekog tko miruje u prostoru.

Izraz $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ je metrika za sferu površine $4\pi r^2$ u sfernim koordinatama. Iz toga se može zaključiti da je crvotočina sfernosimetrična.

Kako nema unakrsnih faktora (npr. $d\ell d\phi$ i $d\ell d\theta$) može se zaključiti da su linije konstantnog ϕ i θ , s povećavajućim ℓ radijalne linije. Uz $d\ell$ nema faktora, pa se može zaključiti da je ℓ udaljenost proputovana u radijalnom smjeru.

Za jako velike pozitivne i negativne vrijednosti ℓ radijus sfere r je približno jednak $|\ell|$, dok za $\ell = 0$ radijus poprima svoju minimalnu vrijednost ρ . Ova metrika zapravo predstavlja crvotočinu s grlom radijusa ρ koje spaja dva asimptotski ravna područja prostora.

Na slici 2 je prikazan dijagram ugrađivanja Ellis crvotočine dobiven prikazom dvodimenzionalne ekvatorijalne površine ugrađene u ravni trodimenzionalni prostor.



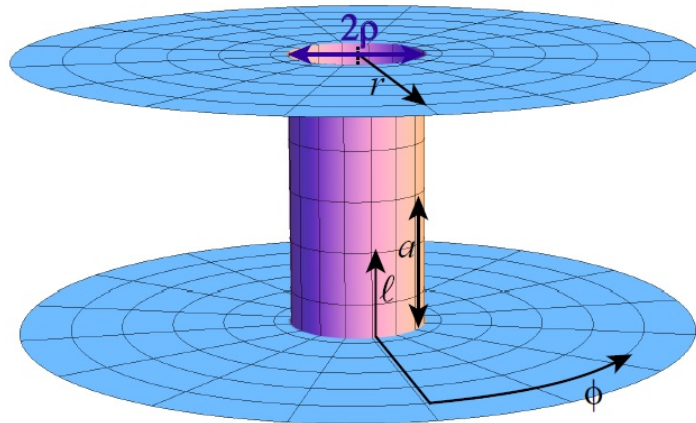
Slika 2: Dijagram ugrađivanja Ellis crvotočine.^[1]

2.2 Crvotočina s oštrim prijelazom

Ova crvotočina koristi metriku istu onoj za Ellisovu crvotočinu (1), a jedina je razlika ponašanje radijusa:

$$r = \begin{cases} \rho & \text{za } |\ell| \leq a \\ \rho + |\ell| - a & \text{za } |\ell| > a \end{cases} \quad (3)$$

Ova crvotočina se sastoji od valjka duljine 2ℓ koji spaja dva ravna trodimenzionalna prostora kojima nedostaje kugla radijusa ρ . Prikaz dijagrama ugradnje ove crvotočine je prikazan na slici 3.



Slika 3: Dijagram ugrađivanja crvotočine s oštrim prijelazom.^[1]

2.3 Dneg crvotočina bez gravitacije

Ovo je jedna od crvotočina dizajniranih za film *Interstellar*. Kod nje se pokušalo zaobliti prijelaz prisutan u prethodno obrađenoj crvotočini s oštrim prijelazom. Izgladivanjem prijelaza dolazi do gravitacijske distorzije zvjezdanog polja iza svakih usta crvotočine.

Želja je bila da prijelaz bude sličnog oblika grlu između ne-rotirajuće crne rupe i svemira u kojem se crna rupa nalazi. Takva crna rupa ima Schwarzschildovu metriku koja kao vanjsku koordinatu koristi r umjesto ℓ . Metrika je prikazana u izrazu (3).

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4)$$

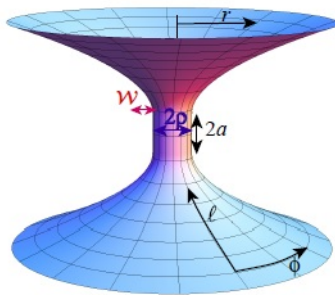
gdje je M masa crne rupe.

Uspoređujući prostorni dio metrike s izrazom (1) može se dobiti da je $dl = \pm dr / \sqrt{(1 - 2M/r)}$, što se može lako integrirati da se dobije ovisnost r o l . Za ovu crvotočinu je ipak izabrana analitička funkcija koja je laka za rad i ima sličan oblik kao Schwarzschild $r(l)$. Izraz za radijus r glasi:

$$r = \begin{cases} \rho & \text{za } |\ell| \leq a \\ \rho + M [x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)] & \text{za } |\ell| > a \end{cases} \quad (5)$$

gdje je $x = \frac{2(|\ell| - a)}{\pi M}$.

Ovaj izraz (5) uz izraz (1) čini metriku za ovu crvotočinu. U Schwarzschildovoj metrici $\rho = 2M$, dok je su u ovoj metrici ti parametri neovisni i predstavljaju radijus i glatkoću prijelaza u crvotočini. Na slici (4) je prikazana jedna Dneg crvotočina.



Slika 4: Dijagram ugrađivanja Dneg crvotočine s parametrima $a = \rho$ i $M = 0.5\rho$.^[1]

2.4 Dneg crvotočina s gravitacijom

U filmu Interstellar je bilo potrebno konstruirat crvotočinu unutar koje će letjelica putovati dovoljno sporo da je publika može izbliza pogledati. Za takvu putanju crvotočina treba imati gravitacijsko ubrzanje približno onom na površini Zemlje ($\sim 10m/s^2$). Ovo polje je jako slabo i može se dobro opisati Newtonovskim gravitacijskim potencijalom Φ magnitude $|\Phi| \ll c^2 = 1$. Nova metrika sada glasi

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + d\ell^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6)$$

Potencijal Φ ima negativan predznak jer je privlačno i mora ovisiti samo o ℓ jer je sferno simetrično.

Izabrano gravitacijsko ubrzanje $g = |d\Phi/d\ell|$ je obrnuto proporcionalno kvadratu udaljenosti, ili bar obrnuto proporcionalno udaljenosti. Integrirajući g se dobije gravitacijski potencijal. Može se dobiti da je magnituda potencijala reda veličine $|\phi| \sim g\rho$. Uzimajući $g \leq 10m/s^2$ i $\rho = 1km$ dobije se da je $|\phi|$ reda veličine 10^{-12} .

Očigledno tako slab gravitacijski potencijal doprinosi jako malom usporavanju vremena u blizini crvotočine. Ovo je toliko slabo da prilikom računanja propagacije zraka svjetlosti nije potrebno uzimati u obzir i dovoljno je koristiti crvotočinu bez gravitacije.

2.5 Dijagram ugradnje

Dijagram ugradnje je konstruiran uspoređujući dvodimenzionalnu ekvatorijalnu podlogu $ds^2 = d\ell^2 + r^2 d\phi^2$ s prostorom ugradnje. Za prostor ugradnje su odabrane cilindrične koordinate s osi simetrije kroz centar crvotočine. Metrika prostora ugradnje je $ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$. Izjednačavanje te dvije metrike dobije se da je $d\ell^2 = dz^2 + dr^2$, što nam daje izraz za z u ovisnosti o ℓ .

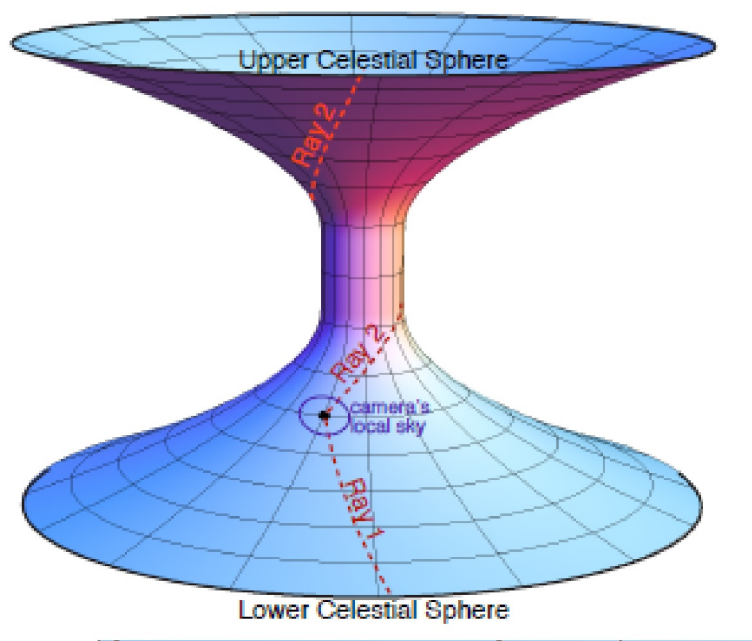
$$z(\ell) = \int_0^\ell \sqrt{1 - (dr/d\ell')^2} d\ell' \quad (7)$$

Uvrštavanjem radijus funkcija dobije se izraz. Oblik crvotočine ovisi o 2 parametra: omjeru dužine i dijametra $2a/2\rho = a/\rho$ i omjeru M/ρ . Umjesto korištenja M je korištena je širine leće crvotočine W koja je povezana s M sljedećim izrazom.^[7]

$$W = 1.42953...M \quad (8)$$

3 Mapiranje nebeskih sfera crvotočine

Kamera u blizini crvotočine prima svjetlost od izvora i koristi je da stvori sliku. Pri kreiranju slika uzeto je da su svi izvori jako daleko od crvotočine. Dio izvora je na donjoj nebeskoj sferi ($\ell \rightarrow -\infty$), a dio na gornjoj nebeskoj sferi ($\ell \rightarrow \infty$). Na slici 5 je prikazan put zraka svjetlosti s obje sfere.



Slika 5: Dijagram ugrađivanja koji prikazuje zrake svjetlosti koje dolaze iz gornje i donje nebeske sfere u kameru. ^[1]

Na svakoj nebeskoj sferi postavljene su sferne polarne koordinate (θ', ϕ') , koje su limiti sfernih polarnih koordinata (θ, ϕ) kako $\ell \rightarrow \pm\infty$. Kamera se kreće puno sporije od brzine svjetlosti, pa se prilikom dobivanja slike na kameri može uzeti da ona miruje. Može se uzeti da kamera ima lokalno nebo na kojem su sferne polarne koordinate (θ_{cs}, ϕ_{cs}) . Zraka koja ide natrag u vrijeme od kamere i putuje u smjeru (θ_{cs}, ϕ_{cs}) završi u koordinatama nebeskih sfera (θ', ϕ') . Ključ stvaranja slike je mapa zraka iz lokalnog neba kamere do nebeskih sfera gdje parametar s govori da li se radi o gornjoj ($s = +$) ili donjoj ($s = -$) sferi.

3.1 Jednadžba zrake

U općoj relativnosti, svjetlosne zrake su svjetlosni geodezici i rješenje su geodetske jednadžbe:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\zeta^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\zeta} \frac{dx^\nu}{d\zeta} = 0, \quad (9)$$

gdje su $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ Christoffelovi simboli, a ζ je afini parametar.

Ova forma jednadžbe je dobra za analitički rad, ali za numerički bolje ju je napisati preko hamiltonijana. Generalna za ovaj Hamiltonijan glasi:

$$H(x^\alpha, p_\beta) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x^\alpha) p_\mu p_\nu \quad (10)$$

gdje je $g^{\mu\nu}$ kovarijantna komponenta metrike, x^α je koordinata fotona u zruci i p_β je generalizirani impuls. Za crvotočinu s metrikom (1) hamiltonijan ima formu:

$$H = \frac{1}{2} \left[-p_t^2 + p_\ell^2 + \frac{p_\theta^2}{r(\ell)^2} + \frac{p_\phi^2}{r(\ell)^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (11)$$

Kako hamiltonijan ne ovisi o t i ϕ , p_t i $p_\phi = b$ su očuvani. Vrijedi da je $p^t = dt/d\zeta = -p_t$, a mijenjanje parametra p_t samo renormalizira parametar ζ , pa se može uzeti da je $p_t = -1$, što govori da je ζ jednak t . Kako proton putuje brzinom svjetlosti ζ je također i put koji foton pređe. Kako je crvotočina sferno simetrična očuvan je ukupni angularni moment koji je jednak impakt parametru B relativno prema centru crvotočine.

$$B^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \quad (12)$$

Postoji 5 jednadžbi za 5 veličina kao funkcija t po geodeziku.

$$\frac{d\ell}{dt} = p_\ell, \quad (13a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{r^2} \quad (13b)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{b}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (13c)$$

$$\frac{dp_\ell}{dt} = B^2 \frac{dr/d\ell}{r^3} \quad (13d)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{b^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \quad (13e)$$

3.2 Proces generiranja mape

Proces generiranja mape se sastoji od 6 koraka.

1. Odabrati lokaciju kamere. Najbolje je da bude na ekvatorijalnoj ravnini $\theta_c = \pi/2$, da su koordinatni singulariteti $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ što više udaljeni od kamere.
2. Postaviti Kartezijev koordinatni sustav centriran na kameri s x u smjeru rastućeg ℓ , y u smjeru rastućeg ϕ i z u smjeru pada θ .
3. Postaviti sferni polarni koordinatni sistem za lokalno nebo kamere basirano na Kartezijevom koordinatnom sustavu kamere.
4. Odabrati smjer (θ_{cs}, ϕ_{cs}) na lokalnom nebu kamere. Vektor \mathbf{N} u tom smjeru ima sljedeće koordinate:

$$N_x = \sin \theta_{cs} \cos \phi_{cs}, N_y = \sin \theta_{cs} \sin \phi_{cs}, N_z = \cos \theta_{cs} \quad (14)$$

Smjer \mathbf{n} dolazeće zrake koja dolazi iz smjera $-\mathbf{N}$ ima koordinate u globalnoj bazi:

$$n_\ell = -N_x, n_\phi = -N_y, n_\theta = N_z \quad (15)$$

5. Izračunati impulse od dolazeće zrake svijetlosti.

$$p_\ell = n_\ell, p_\theta = rn_\theta, p_\phi = r \sin \theta n_\phi \quad (16)$$

Nakon toga odrediti konstante gibanja:

$$b = p_\phi = r \sin \theta n_\phi, B^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = r^2(n_\theta^2 n_p^2 h i) \quad (17)$$

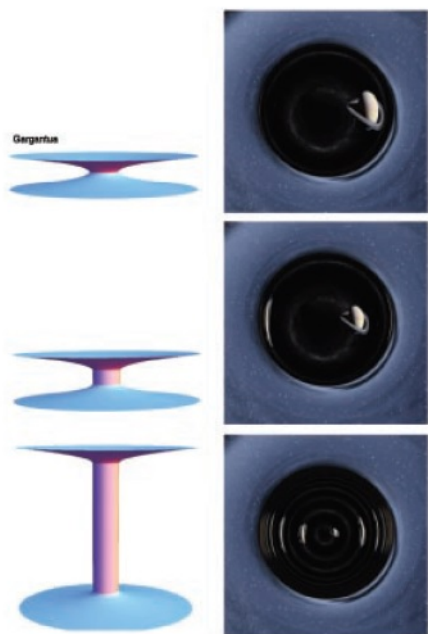
6. Za početne koordinate zrake uzeti lokaciju kamere s određenim početnim impulsom (16) i konstantama gibanja (17). Treba promatrati kretanje zrake od $t = 0$ do $t = -\infty$ ili dovoljno daleko u prošlost. Ako je $\ell(t_i)$ pozitivan zraka dolazi iz gornje nebeske plohe ($s = +$), a ako je negativan iz donje nebeske plohe ($s = -$).

Pomoću ovih uputa se može numerički relativno lako rekreirati nebeska mapa nebeskih sfera. U idućem poglavlju ćemo promatrati utjecaj parametara na sliku crvotočine.

4 Utjecaj parametara na sliku koju kamera vidi

4.1 Utjecaj dužine crvotočine

U ovom poglavlju promatramo utjecaj dužine crvotočine na sliku. Širina leće je postavljena na relativno malu vrijednost $W = 0.005\rho$. Dužina crvotočine je varirana između $2a = 0.01\rho$, $2a = \rho$ i $2a = 10\rho$. Slike su prikazane na slici 6.



Slika 6: Prikaz slika crvotočina s dužinama $2a = 0.01\rho$ (gornja), $2a = \rho$ (srednja) i $2a = 10\rho$ (donja). Širina leće je postavljena na $W = 0.005\rho$.^[1]

Kako su Saturn i njegov prsten svijetli, a nebo oko njega je crna, dok je nebo Gargantue s druge strane crvotočine plavo, može se lako identificirati rub usta crvotočine.

Kroz kratku crvotočinu kamera vidi veliku distorziranu sliku Saturna koja popunjava većinu desne polovice crvotočine. Krajnje lijevo se može jedva razabrati tanka sekundarna slika Saturna koja je posljedica zraka koje putuju lijevom stranom crvotočine.

Kako se dužina crvotočine mijenja tako se veličina Saturna smanjuje i obje slike Saturna se pomiču prema centru. Dolazi i do naznaka treće slike Saturna s desne strane.

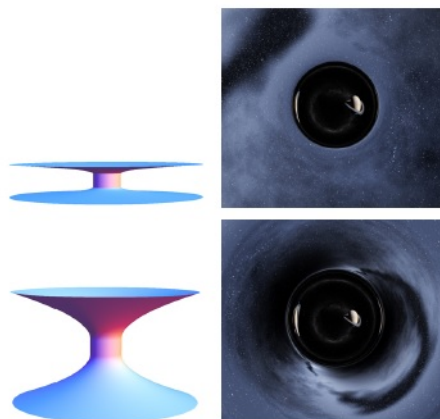
Što se dužina više povećava to dolazi do javljanja više slika Saturna i daljnjeg smanjenja veličina Saturnovih slika. Primjer toga se može vidjeti na donjoj slici na slici 6.

4.2 Utjecaj širine leće crvotočine

Sada je promatran utjecaj širine leće na sliku crvotočine. Dužina crvotočine je postavljena na $2a = \rho$. Korištene su širine leće od $W = 0.0014\rho$ (gornja) i $W = 0.43\rho$ (donja).

Za malu širinu leće prijelaz iz unutrašnjosti crvotočine u vanjski dio je dosta oštar i kamera vidi vanjštinu bez puno distorzije do samog ruba crvotočine.

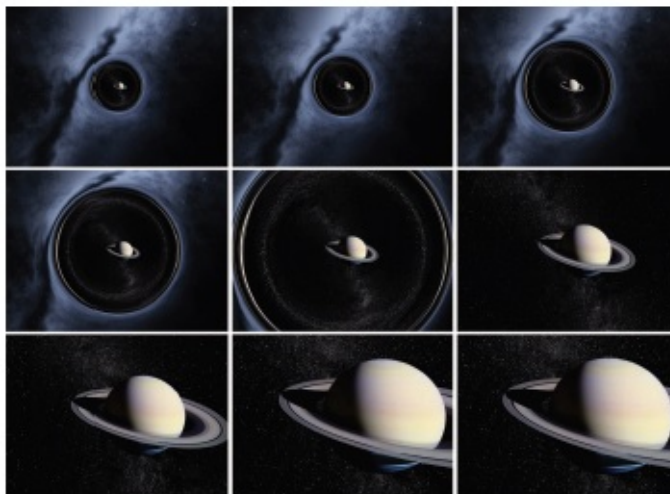
Suprotno tome crvotočina s većom širinom leće jako distorzira sliku vanjštinu. Crni oblak u gornjem desnom kutu je povećan i gurnut izvan slike i vidi se veliku sekundarnu sliku tog oblaka na suprotnoj strani. Također su povećana usta crvotočine. Slika Saturna je smanjena i pomaknuta u lijevo da napravi mjesta za treću sliku, dok je sekundarna slika podebljana. Slike se nalaze na slici 7.



Slika 7: Prikaz slika crvotočina s širinom leće od $W = 0.0014\rho$ (gornja) i $W = 0.43\rho$ (donja). Dužina crvotočine je postavljena na $2a = \rho$.^[1]

5 Putovanje kroz crvotočinu

Sljedeći korak je prikaz putovanja kroz jednu takvu crvotočinu. Korištenjem prijašnjih metoda dobivanja slika može se simulirati prolazak kroz crvotočinu. Za prolaz je korištena crvotočina parametara $2a = \rho$ i $W = 0.05\rho$. Na slici 8 je prikazan put kroz takvu crvotočinu. Put je relativno brz i ne pretjerano zanimljiv. Dolazi do polaganog povećavanja crvotočine od centra kako joj se približava. Nakon nekog vremena se samo vidi galaksiju u koju se ulazi i zapravo je došlo do prijelaza iz jedne strane crvotočine u drugu.



Slika 8: Prikaz putovanja kroz crvotočinu parametara $2a = \rho$ i $W = 0.05\rho$.^[1]

6 Zaključak

Kroz ovaj seminar je obrađena tema crvotočina. Predstavljene su razne crvotočine od Ellisove crvotočine do crvotočina korištenih u filmu Interstellar. Dane su metrike tih crvotočina i prikazani njihovi dijagrami ugradnje. Pokazan je proces mapiranja nebeskih sfera crvotočine iz kojeg je dobiveno kako bi crvotočine u stvarnosti izgledale. Dobivene su slike za razne parametre crvotočine i određen je utjecaj parametara na samu crvotočinu. Za kraj je napravljen prikaz putovanja kroz crvotočinu.

Literatura

- [1] O. James, E. von Tunzelmann, P. Franklin, K.S. orne: Visualizing Interstellar's Wormhole, Am. J. Phys. 83 (2015) 486 [arXiv:1502.03809]
- [2] M. Visser: Lorentzian Wormholes
- [3] I. Smolić: Diferencijalna geometrija u fizici
- [4] John L. Friedman and Atsushi Higuchi: Topological censorship and chronology protection, Annalen Phys. 15, 109-128 (2006).
- [5] Allen Everett and Thomas Roman: Time Travel and Warp Drives (University of Chicago Press, Chicago, 2012).
- [6] Homer G. Ellis: Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity, J. Math. Phys. 14, 104-118 (1973).
- [7] James B. Hartle, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity (Addison Wesley, San Francisco, 2003).
- [8] Interstellar, directed by Christopher Nolan, screenplay by Jonathan Nolan and Christopher Nolan (Warner Bros, 2014).