Rainich - Misner - Wheelerov formalizam

David Prelogović

Sveučilište u Zagrebu, PMF Fizika

14. veljače 2019.

Sažetak

U ovom seminaru predstavljamo Rainich - Misner - Wheelerov formalizam, odnosno teoriju geometrodinamike, kao pokušaj ujedinjenja elektromagnetizma i gravitacije na klasičnoj razini. Izvodimo Rainich - Misner - Wheelerove uvjete na metriku koji moraju biti zadovoljeni da bi ujedinjenje bilo uspješno. Razmatramo na koji je način moguće konzistentno uvesti naboje i mase unutar formalizma te koji su njegovi problemi i prepreke.

Sadržaj

1 Uvod

Svaki pokušaj ujedinjenja gravitacije s ostalim silama u prirodi ukazuje nam na moguće smjerove u kojima će se buduća teorija kojoj težimo razvijati. Pogotovo je tome tako kada netko uspije stvoriti teoriju koja čini samodostatnu zatvorenu cjelinu. Rainich - Misner - Wheelerov (RMW) formalizam, koji je temelj teorije nazvane "Geometrodinamika", pokušaj je ujedinjenja gravitacije i elektromagnetizma uz minimalne pretpostavke, na klasičnoj razini. Stoga joj se često pridjeljuje epitet "already unified theory of RMW". Ova teorija, kao i bilo koja druga klasična teorija, u svojoj formulaciji nailazi na mnoge konceptualne poteškoće tretmana singulariteta, interakcije čestica, stabilnost stanja, pa takvih nije pošteđena ni ova.

Specifično, RMW teorija kreće od Einstein - Maxwellovih (EM) jednadžbi te izvodi nužne uvjete na metriku koja proizlazi iz globalnih svojstava EM jednažbi. Ono što je zanimljivo je da su tako izvedena ograničenja na metriku ujedno su i dovoljna, odnosno ako "negdje u svemiru" izmjerimo metriku koja zadovoljava RMW uvjete, iz nje možemo izračunati elektromagnetsko polje prisutno u tom dijelu prostora. Pretpostavka takvog postupka je da nemamo prisustvo nekih drugih polja u tom dijelu prostorvremena.

Za bolju predodžbu položaja same teorije, kao i kratkog povijesnog presjeka, prigodno je citirati jednog od osnivača formalizma [Whe62]:

> The sources of the curvature of space-time are conceived differently in geometrodynamics and in usual relativity theory. In the older analysis any warping of the Riemannian space-time manifold is due to masses and fields of non-geometric origin. In geometrodynamics - by contrast - only those masses and fields are considered which can be regarded as built out of the geometry itself . . .
>
> The past has seen many attempts to describe electrodynamics as one or another aspect of one or another kind of non-Riemannian geometry. Every such attempt at a unified field theory has foundered. Not a change in Einstein's experimentally tested and solidly founded 1916 theory, but a closer look at it by Misner in 1956, gave a way to think of electromagnetism as a property of curved empty space. Rainich already long before in an almost forgotten paper had shown under what conditions a curvature of space-time can be regarded as due to an electromagnetic field, and how in such cases to find the field from geometry. Misner rediscovered the results of Rainich. He went on to point out that the electromagnetic field curves space in such a characteristic way - or makes such well defined "footprints" on space - that these footprints can *themselves* be considered as the full manifestation of the electromagnetic field. In other words one can say all that has to be said about electromagnetism in charge-free space without mentioning other than geometric quantities. In this sense Einstein's 1916 theory can be regarded as an "already unified" - and entirely geometrodynamical - theory of electromagnetism and gravitation.

Kao što je spomenuto, RMW formalizam tretira elektromagnetsko polje bez struja. Wheeler je dodatno unutar formalizma pokušao opisati naboj i masu na također klasičnoj razini.

Njegova ideja bila je uvesti naboje preko crvotočina kroz koje prolazi određeno elektromagnetsko zračenje. Uz to, pojam mase uveo je entitetom zvanim "geon", konstruiranim kao nakupina gravitacijskog zračenja, elektromagnetskog zračenja, ili bilo koja mješavina navedenog. Takva nakupina posjedovati će masu u obliku energije spremljene u zračenju i moći će interagirati s okolinom.

Cilj ovog seminara je izvesti EM jednadžbe i RMW uvjete na metriku te predstavljeni formalizam uklopiti u širu sliku geometrodinamike.

2 Einstein - Maxwellove jednadžbe

Prije samog izvoda EM jednadžbi, podsjetit ćemo se kako dolazimo do Maxwellovih jednadžbi u zakrivljenom te Einsteinove jednadžbe u praznom prostoru.

2.1 Maxwellove jednadžbe

Maxwellove jednadžbe koje u standardnoj formi znamo kao:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \tag{1}$$

možemo pomoću elektromagnetskog tenzora i pripadnog Hodgeovog duala zapisati u kompaktnijem obliku:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu, \quad \partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0\,, \tag{2}$$

gdje su pripadni tenzori za $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ jednaki

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\,, \tag{3}$$

$$*F^{\mu\nu} = 1/2\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\,, \tag{4}$$

odnosno zapisano preko električnog ($\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$) i magnetskog ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) polja:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Prikladno je odmah napomenuti da je iz definicije (3), Bianchijev identitet za elektromagnetski tenzor jednak

$$F_{ab,c} + F_{ca,b} + F_{bc,a} = 0\,, \tag{6}$$

što je izraz ekvivalentan homogenom dijelu Maxwellovih jednadžbi (2).

Od sada nadalje, jednadžbe gibanja izvodit ćemo u lagrangianskoj formulaciji minimizacijom akcije $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$. U "ravnom" prostorvremenu Minkowskog, Maxwellove jednadžbe (2) možemo dobiti iz Lagrangijana elektromagnetizma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu\,. \tag{7}$$

Euler-Lagrangeove jednadžbe za $\mathcal{L}$ daju nam nehomogene jednadžbe (2), dok su homogene posljedica Bianchijevog identiteta (6).

2.1.1 Zakrivljeni prostor

Da bismo došli do ekvivalentnih jednadžbi u zakrivljenom prostoru, provodimo postupak kovarijantizacije. Ono što zapravo želimo je da nam se jednadžbe koje plauzibilnim argumentima "pogodimo" za zakrivljen prostor svedu prilikom prelaska u ravni prostor u one dobro poznate (2). Praktično, prilikom navedenog prelaska očekujemo: $g_{ab} \to \eta_{ab}$, $\nabla_a \to \partial_a$, gdje je g_{ab} metrika zakrivljenog prostora, a ∇_a kovarijantna derivacija.

Dakle, ako sada elektromagnetski tenzor zapišemo kao

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \,, \tag{8}$$

što je u ravnom prostoru jednako definiciji (3), a akciju iz prostorvremena Minkowskog

$$S = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + J^\mu A_\mu \right) \,, \tag{9}$$

gdje je $\eta = \det(\eta_{\mu\nu}) = -1$, poopćimo na zakrivljen prostor:

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}_{EM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + J^\mu A_\mu \right) \,, \tag{10}$$

minimizacijom iz Euler-Lagrangeovih jednadžbi dobivamo očekivano,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \,. \tag{11}$$

2.2 Einsteinova jednadžba

Krenemo li od Einstein - Hilbertove akcije

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \, R \,, \tag{12}$$

gdje je $\kappa = 8\pi G c^{-4}$ i R Riccijev skalar, minimizacijom akcije s obzirom na varijacije metrike $\delta g_{\mu\nu}$, dobivamo Einsteinovu jednadžbu u vakuumu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad \to \quad R_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{13}$$

gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor.

Nakon ovih uvodnih razmatranja, do Einstein - Maxwellovih jednadžbi dijeli nas samo pitanje kako izgleda ukupan Lagrangijan gravitacijskog i elektromagnetskog djelovanja. Od sada nadalje pretpostavit ćemo da se nalazimo u prostoru bez izvora i struja, odnosno $J_\mu = 0$. Ukupni Langrangijan ne možemo jedinstveno odrediti, već postuliramo *princip minimalnog vezanja* koji kaže da u ukupnom Lagrangijanu nemamo miješanje između "materije i gravitacije", odnosno u našem slučaju, kada je jedina materija elektromagnetsko polje, $S = \int d^4x \, (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{EM})$. Odgovara li dani Lagrangijan stvarnosti možemo doznati jedino iz eksperimenta.

Provedemo li ponovo varijacijski račun, dobivamo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \, T_{\mu\nu} \,, \tag{14}$$

gdje je $T_{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - g_{\mu\nu} \, \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \,. \tag{15}$$

2.3 Ništa osim duljina

U kontekstu opće teorije relativnosti, mogli bismo reći da je vrijeme zapravo duljina, a ne neki novi koncept te ga možemo mjeriti u metrima. Isto vrijedi i za masu, koju izraženu u metrima možemo shvatiti kao mjeru koliko na nekoj udaljenosti ona sama zakreće svjetlost. Jednako možemo promatrati elektromagnetsko polje i naboj. Promatrajući elektromagnetski tenzor kao mjeru zakrivljenosti koju stvara u prostorvremenu, prikladno je uvesti geometrizirane izraze $f_{\mu\nu}$ u jedinicama m^{-1} kao

$$f_{\mu\nu} = (\sqrt{G}/c^2)F_{\mu\nu} \,. \tag{16}$$

Napokon, zapisujući EM jednadžbe preko $f_{\mu\nu}$ (u CGS jedinicama, kako bismo se uskladili s literaturom) dobivamo:

$$R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = 2f_{\mu\sigma}f^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma} \,, \tag{17}$$

$$\nabla_\mu f^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{18}$$

Prva jednadžba govori nam o međusobnom odnosu zakrivljenosti prostorvremena i elektromagnetskog polja koje se u njemu javlja. Polazeći od jednadžbe geodezika i Lorentzove sile

$$\frac{\mathrm{d}p^\nu}{\mathrm{d}\tau} = qF^\nu_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \,,$$

za infinitezimalnu testnu česticu mase $m^*[\mathrm{m}]$ i naboja $q^*[\mathrm{m}]$ dobivamo jednadžbu gibanja:

$$m^* \left[\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \right] = q^* f^\mu_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \,. \tag{19}$$

Promatrajući svojstva elektromagnetskog tenzora, možemo izvesti uvjete na oblik metrike te ujediniti elektromagnetizam i gravitaciju u jedan koncept. Izvod, pretpostavke i problemi koji se pri tome javljaju tema su idućeg poglavlja.

3 Rainich - Misner - Wheelerovi uvjeti

Kao što smo spomenuli i prije, elektromagnetsko polje ostavlja otisak na zakrivljenosti prostora toliko specifičan da je iz nje same moguće znati sve o elektromagnetskom polju u njemu prisutno. Uvjete koje metrika mora zadovoljavati, koji vrijede općenito, najlakše je izvesti u slučaju kada zakrivljenost dolazi od "normalnog" polja: onog za koje je omjer Poyntingovog vektora naspram gustoće energije manji od brzine svjetlosti. To nije tako jedino u slučaju ravnog elektromagnetskog vala (često "null" polje, odnosno polje svjetlosnog tipa), no njega je moguće izolirano promatrati. U navedenom slučaju, možemo definirati normalu $\hat{\mathbf{n}}$ i kut θ kao

$$\hat{\mathbf{n}} \tanh 2\theta = \frac{2\,\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\mathbf{e}^2 + \mathbf{b}^2} \,, \tag{20}$$

gdje smo uveli geometrizirano električno i magnetsko polje $\mathbf{e}$ i $\mathbf{b}$. Iznos vektora s desne strane jednakosti očito je uvijek manji ili jednak jedinici. Promatramo li sada isto polje iz sustava promatrača čiji je Lorentzov sustav giba brzinom

$$\mathbf{v}/c = \hat{\mathbf{n}} \tanh \theta \tag{21}$$

u odnosu na prijašnji sustav, Poyntingov vektor biti će jednak nuli. Drugim riječima, električno i magnetsko polje u tom sustavu su paralelni. Zarotiramo li uz to osi tako da polja gledaju u smjeru x', lako je vidjeti da nam se Maxwellov tenzor energije i impulsa svodi na dijagonalan oblik $(-\xi^2, -\xi^2, +\xi^2, +\xi^2)$, gdje je $\xi^2 = e_{x'}^2 + b_{x'}^2$.

Trag Maxwellovog tenzora ${T_\mu}^\mu$, kao i njegov kvadrat ${T_\mu}^\alpha {T_\alpha}^\nu$ kovarijantne su veličine s obzirom na Lorentzove transformacije. Stoga iz prijašnjeg razmatranja možemo zaključiti da je trag Maxellovog tenzora jednak nuli, a njegov kvadrat proporcionalan jediničnoj matrici, odnosno:

$$ {T_\mu}^\mu = 0\,, \tag{22} $$

$$ {T_\mu}^\alpha {T_\alpha}^\nu = \delta_\mu^\nu ({T_\sigma}^\tau {T_\tau}^\sigma / 4)\,. \tag{23} $$

Uz izračunata svojstva, primijetimo još da nam očuvana struja $\int {T_0}^0 \mathrm{d}^3 x$ definira energiju sustava, koja je nužno pozitivno definitna, odnosno, ${T_0}^0 \leq 0$.

Napokon naša zapažanja možemo primijeniti na Einsteinovu jednadžbu (17). Računajući njezin trag imajući na umu svojstvo (22), lako je vidjeti ${R_\mu}^\mu = 0$, što vodi na jednakost Riccijevog i Maxwellovog tenzora. Odnosno, svojstva Maxwellovog tenzora možemo samo preslikati na svojstva metrike:

$$ {R_\mu}^\mu = 0\,, \tag{24} $$

$$ {R_\mu}^\alpha {R_\alpha}^\nu = \delta_\mu^\nu ({R_\sigma}^\tau {R_\tau}^\sigma / 4)\,, \tag{25} $$

$$ {R_0}^0 \leq 0\,. \tag{26} $$

Gornji izrazi predstavljaju RMW uvjete. Do sada smo promatrali slučaj kada u prostoru imamo elektromagnetsko polje i izveli nužne uvjete koje naša metrika mora zadovoljavati. U slijedećem potpoglavlju uvest ćemo pojam kompleksije polja (eng. complexion) i odgovoriti na pitanje iz suprotnog smjera: jesu li dobiveni uvjeti ujedno i dovoljni?

3.1 Kompleksija polja

Zamislimo neki dio prostorvremena kroz koji sada puštamo naše testne čestice (19) i zrake svjetlosti te izmjerimo Riccijev tenzor u njemu. Mjerenja nam pokazuju da su zadovoljeni RMW uvjeti te se pitamo možemo li išta reći o elektromagnetskom polju u tom dijelu prostora.

Promotrimo "neiščezavajući" slučaj, kada je

$$ \xi^4 = {R_\sigma}^\tau {R_\tau}^\sigma / 4 \neq 0\,. $$

U svakoj točci prostorvremena postoji Lorentzov sustav u kojem je Riccijev (pa onda i Einsteinov) tenzor dijagonalan, oblika $(-\xi^2, -\xi^2, +\xi^2, +\xi^2)$. To dalje znači da se opažena zakrivljenost može u toj točci prostora objasniti paralelnim električnim i magnetskim poljem za koja vrijedi $e^2 + b^2 = \xi^2$. Ono što je ostalo nepoznato je kompleksija elektromagnetskog polja, gdje možemo pisati

$$ e = (\xi, 0, 0)\cos\alpha\,, \tag{27} $$

$$ b = (\xi, 0, 0)\sin\alpha\,. \tag{28} $$

Zapravo se radi o generalnoj dualnoj rotaciji električnog i magnetskog polja na koju je $F_{\mu\nu}$ invarijantan, ovdje konkretno za slučaj paralelnih polja. Uzmemo li sada $\alpha = 0$ i vratimo se u početni Lorentzov sustav (u kojem smo vršili mjerenja), doći ćemo do elektromagnetskog tenzora $\xi_{\mu\nu}$ za kojeg, iako sadrži električno i magnetsko polje, kažemo da je samo električne kompleksije. Ako isto napravimo za $\alpha = \pi/2$, dobit ćemo dualni tenzor $*\xi_{\mu\nu}$, za kojeg kažemo da je samo magnetske kompleksije.

Konačno, u općenitom koordinatnom sustavu, najopćenitiji oblik elektromagnetskog tenzora koji će proizvesti izmjerenu zakrivljenost je:

$$f_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \cos\alpha + *\xi_{\mu\nu} \sin\alpha \,, \tag{29}$$

gdje su $\xi_{\mu\nu}$ i njegov dual egzaktno odredivi iz mjerenja.

Na prvu dobiveni rezultat ukazuje da je ono što možemo dobiti mjerenjem zakrivljenosti neodređeno do na skalarnu funkciju α. No ono što još nismo iskoristili je činjenica da ako se kod izraza (29) radi o elektromagnetskom tenzoru, onda on mora zadovoljavati Maxwellove jednadžbe $\nabla_\mu f^{\mu\nu} = 0$. Kako za skalarno polje vrijedi $\nabla_\mu g = \partial_\mu g$, djelovanjem kovarijantnom derivacijom na gornji izraz (29), dobivamo jendažbu za $\partial_\mu \alpha \equiv \alpha_\mu$ koju manipulacijama Einsteinove jednadžbe možemo riješiti (za izvod vidi literaturu [MW57]) te je rezultat:

$$\alpha_\mu = \frac{\sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta\nu} R^{\alpha\rho;\beta} R_\rho{}^\nu}{R_{\sigma\eta} R^{\sigma\eta}} \,. \tag{30}$$

Vidimo da je izraz u potpunosti ovisan o geometrijskim parametrima i dobro definiran za sva prostorvremena u kojima je Riccijev tenzor derivabilan i za koji je trag njegovog kvadrata različit od nule, što je jedan od problema formalizma diskutiran kasnije. Možemo vidjeti da rotacija polja α_β iščezava, odnosno

$$\alpha_{\beta;\gamma} - \alpha_{\gamma;\beta} = \alpha_{\beta,\gamma} - \alpha_{\gamma,\beta} = 0 \,. \tag{31}$$

Dakle, integral vektora α_μ od proizvoljnog ishodišta 0 do neke točke x definirat će skalarnu kompleksiju polja do na proizvoljnu konstantu

$$\alpha = \int_0^x \alpha_\mu \mathrm{d}x^\mu + \alpha_0 \,, \tag{32}$$

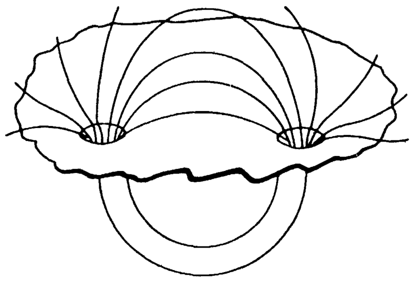
uz uvjet da integracija ne uključuje točke $R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau} = 0$ te da je prostor koji promatramo jednostavno povezan.

Ukoliko tome nije tako, umjesto uvjeta (31) potrebno je nametnuti ekvivalentan uvjet koji vrijedi i za prostore koji nisu jednostavno povezani:

$$\oint \alpha_\mu \mathrm{d}x^\mu = 2\pi n \,, \tag{33}$$

gdje je n cijeli broj.

Jednadžba (31), koja sadrži derivacije četvrtog stupnja metrike $g_{\mu\nu}$, zajedno sa prije izvedenim RMW relacijama (24 - 26) čini nužne i dovoljne uvjete da u Riemannovoj geometriji proizvedemo sve posljedice Eintein - Maxwellove teorije. Efektivno, jedan skup diferencijalnih jednadžbi četvrtog reda zamijenio je dva skupa jednadžbi drugog reda. Ono što se konceptualno desilo je da smo između svih zamislivih Riemannovih prostora odabrali one čija je geometrija konzistentna s klasičnim zakonima gravitacije i elektromagnetizma.



Slika 1: Shematski $2+1$ dimenzionalni prikaz naboja u geometrodinamici. Preuzeto iz [MW57].

3.2 Problem praznog prostora

Postoji još načina (barem jedan) na koje je moguće definirati kompleksiju polja. No svaki do kojeg se do sada došlo negdje u nazivniku ima kvadrat Riccijevog tenzora te je tako definiranu kompleksiju u praznom prostoru nemoguće odrediti. Stoga, ako bismo imali dva odvojena dijela prostora u kojem imamo elektromagnetsko polje, njihove kompleksije mogli bismo odrediti samo do na relativnu konstantu. Ukoliko ta područja nikada nisu niti neće biti u dodiru jedno sa drugim, to ne predstavlja problem, no u slučaju kada se dotaknu tada će ovisno o toj relativnoj kompleksiji njihovo ponašanje biti različito. Dakle, ovaj formalizam ima slijepu točku koje se za sada nemoguće riješiti, osim ako poznajemo ponašanje geometrije kroz cijelu prošlost i budućnost. Takav problem nije se javljao u formalizmu Einsteina i Maxwella.

4 Masa bez mase i naboj bez naboja

Klasična teorija geometrodinamike odlazi i dalje, prema definiciji mase i naboja bez uvođenja dodatnih objekata (npr. čestica) i pretpostavki u do sada konzistentno zatvoren formalizam.

Pojam mase uvodi se kao nakupina gravitacijske i elektromagnetske energije, zvana geon, gdje na primjer elektromagnetska energija zakrivljuje prostor na takav način da stvara stabilan objekt u prostorvremenu. Takav konstrukt daleko je od bilo kakve poveznice sa na primjer interakcijom dvije čestice opisane standardnim modelom, ali je od zanimljivog značaja za bogatstvo formalizma. Također, kako se radi o gravitacijski "zarobljenoj" energiji, geon će konstantno zračiti svoju energiju u okolinu te se javlja problem njegovog životnog vijeka. S obzirom na način kako je geon konstruiran, prigodno je nazvan masom bez mase.

Naboj je s druge strane uveden preko, u općoj teoriji relativnosti vrlo poznatog i proučavanog teorijskog koncepta, crvotočine. Ako kroz nju pustimo elektromagnetsko zračenje, ono će nam efektivno za promatrača blizu jednog od njezinih krajeva davati pozitivan ili negativan točkasti naboj (Slika 1), naravno unutar ovakve klasične teorije njegov iznos neće biti kvantiziran. Promatrač može vidjeti divergenciju ili konvergenciju elektromagnetskog zračenja u jednoj točci, nepravilno primijeniti Gaussov teorem na sferi i zaključiti da se radi o "naboju", dok zapravo nije svjestan da nije obuhvatio cijelu granicu i da pravi naboj zapravo ne postoji. Ovakav čisto topološki konstrukt stoga nosi ime: naboj bez naboja.

5 Zaključak

U zaključku, geometrodinamika predstavlja vrlo lijepu i samodostatnu teoriju klasičnog ujedinjenja elektromagnetizma i gravitacije. Trenutno stanje RMW formalizma, naglašavajući njegov problem praznog prostora (gdje elektromagnetsko polje iščezava), najbolje je opisao sam autor [Whe62]:

> The existence in the basic structure law of classical space-time of such a quantity as the relative complexion of two widely seperated points compels anyone seeking a purely geometrical description of nature to conclude that the concept of complexion has not yet found its happiest geometrical means of expression.
>
> Relative complexion comes to the fore in another unsolved problem: why do all the charges in nature have the same complexion?
>
> In conclusion, already unified field theory gives a basis for stating that all of classical physics can be put into geometrical terms, but it is not the most convenient way to describe that geometry. For that purpose the dual language of electromagnetic fields and metric is still the more useful.

Bibliografija

[Ger66] Robert P Geroch. Electromagnetism as an aspect of geometry?: Already unified field theory—the null field case. *Annals of Physics*, 36(2):147–187, 1966.

[KT15] DS Krongos and CG Torre. Geometrization conditions for perfect fluids, scalar fields, and electromagnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 56(7):072503, 2015.

[MW57] Charles W Misner and John A Wheeler. Classical physics as geometry. *Annals of physics*, 2(6):525–603, 1957.

[Rai25] George Yuri Rainich. Electrodynamics in the general relativity theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 27(1):106–136, 1925.

[San16] Wytler Cordeiro dos Santos. Introduction to Einstein-Maxwell equations and the Rainich conditions. *arXiv:1606.08527*, 2016.

[SKM$^+$09] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. Exact solutions of einstein's field equations. *Cambridge University Press*, 2009.

[Whe62] John Archibald Wheeler. Geometrodynamics. *Academic Press*, 1962.