Bianchijevi kozmološki modeli

Antonija Bošnjak
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet,
Fizički odsjek

15. rujna 2016.

Sažetak. U ovom radu proučavamo Bianchijevu klasifikaciju kozmoloških modela u odgovarajuće trodimenzionalne prostore, ili drugim riječima, klasifikaciju trodimenzionalnih Liejevih algebri u 9 razreda i pokušavamo shvatiti njihovu intepretaciju u kozmologiji, s nužnim uvjetom da prostor-vrijeme mora biti neprazno ($T_{\alpha\beta} \neq 0$). Za početak ćemo promotriti jednostavne kozmološke modele svemira koji slijede iz pretpostavki da je svemir savršeno homogen i izotropan, a nakon toga modele koji slijede iz prostorne homogenosti. Dobit ćemo dvije klase modela, odnosno Bianchijeve i Kantowski - Sachs kozmološke modele. Promotrit ćemo tri različita načina na koja se mogu konstruirati Bianchijevi modeli, od kojih nam je najzanimljivija metoda ortonormiranih tetrada, te ćemo pogledati kako izgledaju Einsteinove jednadžbe. Istražit ćemo i vezu između Bianchijevih modela i topologije prostora, odnosno Thurstonovih geometrija, kao i opažanja i primjene Bianchijevih modela.

Ključne riječi:Liejeva algebra, homogeni anizotropni modeli, tranzitivnost, FLRW metrika, Friedmannove jednadžbe,metoda ortonormiranih tetrada, Thurstonove geometrije.

1 Uvod

Bianchijevi modeli čine klasu kozmoloških modela koji su homogeni, ali ne nužno i izotropni. Oni su poopćenje standardnih izotropnih Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW) modela koji se osnivaju na Robertson - Walker metrici. FLRW modeli su prostorno homogeni, ali su ograničeni zbog njihove izotropnosti. Prostorno homogeni anizotropni modeli su nam zanimljivi zbog toga što je moguće pronaći rješenja nelinearnih jednadžbi, jer postoji samo jedna varijabla, vrijeme, tako da jednadžbe postaju obične diferencijalne jednadžbe. Možemo tada istraživati ponašanje koje je oćenitije od FLRW modela. Općenito, prostorno homogeni anizotropni modeli imaju za grupu izometrije $G_r, r \geq 4$ i mogu biti Bianchijevi modeli ili Kantowski - Sachs. Prvu takvu klasifikaciju napravio je Bianchi 1918.godine.

Kasner je 1921. promatrao Bianchijeve prostorno homogene anizotropne modele u slučaju vakuuma i 1933. Lemaître u slučaju materije, ali nijedan od njih to nije radio sa stajališta teorije grupa. To su bila anizotropna poopćenja Robertson - Walker modela s metrikom:

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(t)dx^2 + Y^2(t)dy^2 + Z^2(t)dz^2,\ u^a = \delta^a_0, \tag{1.1}$$

za čiji izvod nije potrebna teorija grupa. Kasnije su se istom problematikom bavili E. Schücking, B.B. Robinson, A.K. Raychaudhuri, K.S. Thorne, i drugi, ali bez formalizma teorije grupa.

Robertsonov rad o kozmologiji referira se na Bianchijev rad u kojemu se raspravlja o homogenim trodimenzionalnim Riemannovim mnogostrukostima u smislu teorije grupa i postavio je osnove za proučavanje Bianchijevih modela. Osnovna ideja je da strukturne konstante moraju zadovoljavati uvjete integrabilnosti:

$$C^{\alpha}_{[\beta\gamma}C^{\delta}_{\epsilon]\alpha} = 0 \tag{1.2}$$

koje je postavio Lie. Tenzorska transformacija može promijeniti oblik ovih strukturnih konstanti, tako da se jedna Liejeva algebra može reprezentirati na više načina. Bianchi je to i učinio za slučaj trodimenzionalnih Liejevih algebri. Zatim su Robertson i Walker 1935. - 1936. godine došli do rješenja pomoću formalizma Liejevih grupa, ali nisu objasnili kako su jednostavno i višestruko tranzitivne podgrupe povezane jedna s drugom.

Prvo sustavno korištenje teorije Liejevih grupa u proučavanju Bianchijevih modela napravio je Kurt Gödel 1952. godine, koji je predstavio anizotropne modele u smislu njihovih grupnih simetrija. Kasnije je Taub izveo dinamičke jednadžbe za općenite Bianchijeve geometrije u vakuumu, te je objasnio tehnike potrebne za postavljanje ovih jednadžbi u neholonomnim i neortogonalnim bazama. Trodimenzionalne Liejeve algebre su klasificirane prema strukturnim konstantama koje je odredio Bianchi. Kasnije je Schüking razvio sličnu verziju u kozmologiji i isticao važnost grupe automorfizama svake Liejeve algebre i korištenje neortogonalnih baza u pojednostavljenju jednadžbi. Schüking je 1956. - 1957. godine došao i do veze između strukturnih konstanti Liejeve algebre i Bianchijevih tipova, koji se koriste i danas [1].

1.1 Osnovni pojmovi

Za početak ćemo definirati neke od osnovnih pojmova koji će nam biti potrebni u nastavku. To su u prvom redu Liejeve grupe i algebre.

Definicija 1.1 *Liejeva grupa. Liejeva grupa G je topološki prostor sa slijedećim svojstvima:*

1. *G je mnogostrukost.*
2. *Grupno množenje $m : G \times G \mapsto G$ je glatka funkcija.*
3. *Operacija inverzije $i : G \mapsto G$ je glatka.*

Liejeva grupa je grupa za koju su operacije množenja i inverza glatke. Njeni elementi se mogu opisati sa skupom kontinuiranih parametara i broj tih nezavisnih parametara će odgovarati dimenziji grupe. Dakle, neformalna definicija bi bila da je Liejeva grupa takva grupa koja je istovremeno i glatka mnogostrukost

Definicija 1.2 *Vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad poljem $\mathbf{F}$ s operacijom $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ koja se označava s $(x, y) \mapsto [xy]$ i zove se zagrada ili komutator x i y, zove se Liejeva algebra nad $\mathbf{F}$ ako su zadovoljeni sljedeći aksiomi:*

1. *Operacija komutacije je bilinearna,*
2. *$[xx] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$,*
3. *Jacobijev identitet: $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0,\ x, y, z \in \mathfrak{g}$.*

Tangentni prostor grupe G u jediničnom elementu, T_eG je Liejeva algebra:

$$\mathfrak{g} = T_eG \tag{1.3}$$

Dakle, ova dva pojma su usko povezana. Pronađemo li tangentni prostor Liejeve grupe, dolazimo do odgovarajuće Liejeve algebre. S druge strane, od Liejeve algebre do Liejeve grupe možemo doći preko eksponencijalnog preslikavanja.
Ako odaberemo bazu $\{\mathbf{X}_i\}$ za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, možemo definirati strukturne konstante C^k_{ij} sa:

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = C^k_{ij}\mathbf{X}_k \tag{1.4}$$

Strukturne konstante su antisimetrične u donjim indeksima, odnosno $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$ i promjena baze mijenja i strukturne konstante. Važan pojam bit će pojam homogenog prostora. To je prostor u kojemu se može doći od jedne točke do bilo koje druge koristeći izometriju. Neka imamo prostor M s metrikom g. Tada grupu izometrija $Isom(M)$ definiramo sa:

$$Isom(M) \equiv \{\phi : M \mapsto M | \phi \ \ je \ \ izometrija\}. \tag{1.5}$$

ϕ je izometrija ako je $\phi^{\star} g = g$ i grupa izometrija će općenito biti Liejeva grupa. Generatori izometrija su Killingovi vektori koji čine konačno dimenzionalni vektorski prostor, izomorfan Liejevoj algebri od $Isom(M)$.
Sada možemo definirati i podgrupu izotropije točke $p \in M$ kao:

$$I_p(M) = \{\phi \in Isom(M) | \phi(p) = p\}. \tag{1.6}$$

Definicija 1.3 *Homogeni prostor. Ako za svaki par točaka $p, q \in M$ postoji $\phi \in Isom(M)$ takva da je $\phi(p) = q$, tada kažemo da je M homogeni(ili tranzitivni) prostor.*

Neka $Isom(M)$ dimenzije n i $I_p(M)$ dimenzije m. Da bi prostor bio homogen, mora vrijediti da je $n \geqslant dim(M)$. Kažemo da je M jednostavno tranzitivan ako je M homogen i $n = dim(M)$ i da je višestruko tranzitivan ako je M homogen i $n > dim(M)$. Iz ovog možemo zaključiti da je za jednostavno tranzitivan prostor vrijedi $m = 0$, dok je za višestruko tranzitivan prostor $m > 0$.
Potprostor od M dan sa:

$$H_p = \{q \in M | q = \phi(p), za \ \phi \in Isom(M)\} \tag{1.7}$$

zovemo orbitom od p u grupi izometrija. Orbitu onda čini skup točaka koje možemo dosegnuti djelovanjem izometrije na neku početnu točku. Postojanje samo jedne orbite implicira tranzitivnost, odnosno homogenost. Cijeli skup sastoji se od samo jedne orbite.

Uz pojam izometrije vezani su Killingovi vektori ξ koje definiramo relacijom:

$$\mathcal{L}_{\xi} g = 0 \tag{1.8}$$

ili drugim riječima, to je vektor duž kojeg Liejeva derivacija metrike tenzora metrike iščezava. U $n-$dimenzionalnom prostoru postoji maksimalno $\frac{n}{2}(n+1)$ linearno nezavisnih Killingovih vektora. Za metriku i prostor koji imaju maksimalan broj odgovarajućih Killingovih vektora kažemo da je maksimalno simetričan.

Pojmovi homogenosti i izotropnosti su nam korisni jer upravo iz njih slijedi postojanje maksimalno simetričnog prostora. Ako izotropnost protumačimo kao invarijantnost na rotacije, a homogenost kao invarijantnost na translacije, tada one skupa impliciraju da prostor ima maksimalan mogući broj Killingovih vektora. Znamo da je prostor homogen i izotropan, što ne vrijedi za prostor - vrijeme, ali bi bilo zanimljivo razmotriti kako izgleda prostor - vrijeme koje je maksimalno simetrično. Riemannov tenzor za maksimalno simetričnu n - dimenzionalnu mnogostrukost s metrikom $g_{\mu\nu}$ može se zapisati kao:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \kappa(g_{\rho\mu}g_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \tag{1.9}$$

gdje je κ normalizirana mjera Riccijevog tenzora:

$$\kappa = \frac{R}{n(n-1)}, \tag{1.10}$$

a Riccijev skalar je konstanta na mnogostrukosti. U svakoj pojedinoj točki metriku uvijek možemo staviti u kanonski oblik tako da je $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tako da su vrste maksimalno simetričnih mnogostrukosti lokalno opisane predznakom metrike i konstante κ. Zanima nas metrika $(- + ++)$. Ako je $\kappa = 0$, radi se o prostoru Minkowskog koji ima metriku $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Maksimalno simetrično prostor-vrijeme s pozitivnom zakrivljenošću, $\kappa > 0$, zovemo de Sitterov prostor. Ako u $5-$dimenzionalni prostor Minkowskog smjestimo hiperboloid, metrika na njemu je:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha)[d\xi^2 + \sin^2\xi(d\theta^2 + \sin^\theta d\phi^2)]. \tag{1.11}$$

Izraz u okruglim zagradama je metrika na 2 - sferi, a izraz u kvadratnim zagradama je metrika na 3 - sferi. Dakle, de Sitterov prostor opisuje prostornu 3 - sferu koja se u početku sužava, te doseže svoj minimum za $t = 0$ i onda se ponovno širi. Topologija de Sitterovog prostora je $\mathbb{R} \times S^3$ i nije teško napraviti njegov konformni dijagram.
Slično možemo doći do zaključka da $\kappa < 0$ daje maksimalno simetrično prostor - vrijeme koje zovemo anti - de Sitterov prostor s metrikom:

$$ds^2 = \alpha(-\cosh^2(\rho)dt'^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega_2^2). \tag{1.12}$$

Ovdje t' ide od $-\infty$ do $+\infty$ i nema zatvorenih putanja vremenskog tipa. Topologija ovog prostora je $\mathbb{R}^4$. Za sva tri od ovih maksimalno simetričnih prostora vrijedi da su Riccijev tenzor i tenzor energije i impulsa proporcionalni metrici. Gustoća energije i tlak su dani sa:

$$\rho = -p = \frac{3\kappa}{8\pi G}. \tag{1.13}$$

Ako je ρ pozitivan, dobivamo de Sitterovo rješenje, odnosno ako je negativan, anti-de Sitterovo rješenje. Zbog širenja svemira, gustoća materije bila je veća u prošlosti nego danas, tako da, čak i kad bi doprinos materije ukupnoj energiji danas bio zanemariv, u ranom svemiru to nije bilo tako. Dakle, maksimalno simetrično prostor-vrijeme nije dobar model svemira, ali ih je i dalje dobro razmatrati zbog toga što su općeniti slučaj situacije u kojoj je samo prostor maksimalno simetričan, kao i zbog toga što mogu predstavljati lokalno rješenja Einsteinovih jednadžbi bez prisustva obične materije ili gravitacijskog zračenja (osnovna stanja opće relativnosti).

1.1.1 RW metrika i Friedmannove jednadžbe

Homogen i izotropan svemir se može opisati prostor - vremenom koja ima topologiju oblika $\mathbb{R} \times \Sigma$. Ovdje $\mathbb{R}$ predstavlja vremenski smjer, a Σ je maksimalno simetrična 3 - mnogostrukost. Ovaj prostor može se opisati metrikom:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) \tag{1.14}$$

koju zovemo Robertson - Walkerova [1] metrika i koja se može definirati za svaku vrijednost faktora $a(t)$. Ovisno kakav je tip hiperplohe Σ, imamo zatvoreni ($k = 1$), ravni ($k = 0$) ili otvoreni ($k = -1$) slučaj. Slijedeći korak je da iz Einsteinove jednadžbe izvedemo Friedmannove jednadžbe koje povezuju skalarni faktor s tenzorom energije i impulsa i pri tome koristimo model idealnog fluida. Za četverobrzinu $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ tenzor energije i impulsa ima slijedeći oblik:

$$T^\mu{}_\nu = diag(-\rho, p, p, p) \tag{1.15}$$

i njegov trag je onda jednak $T = -\rho + 3p$. Može se pokazati da je veza između p i ρ, odnosno jednadžba stanja za idealni fluid kojeg ćemo promatrati oblika:

$$p = w\rho \tag{1.16}$$

gdje je w vremenski neovisna konstanta. U tom slučaju zakon sačuvanja energije postaje:

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot a}{a}. \tag{1.17}$$

Integracijom se dobije da je $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Uzet ćemo da vrijedi $|w| \leq 1$. Kao kozmološke fluide razmatrat ćemo materiju i zračenje. Materija je skup nerelativističkih čestica kod kojih nema

[1] Može se naći i pod Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ili Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW) metrika.

sudara i za koju je tlak jednak nuli. To su primjerice zvijezde i galaksije za koje je tlak zanemariv u odnosu na gustoću energije. Gustoća energije opada kao $\rho_M \propto a^{-3}$ i dominantna energija je energija mirovanja. S druge strane, zračenje se može koristiti u opisu elektromagnetskog zračenja ili masivnih čestica koje se gibaju brzinama koje su bliske brzini svjetlosti, tako da ih je teško razlikovati od fotona. Jednadžba stanja za zračenje je:

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R, \tag{1.18}$$

a gustoća energije opada kao $\rho_R \propto a^{-4}$. Trenutačno je gustoća energije zračenja puno manja nego gustoća energije materije, za oko 10^3 puta. To nije uvijek bilo tako, u jako ranom svemiru gustoća energije zračenja je bila dominantna. Energija vakuuma također ima oblik idealnog fluida s jednadžbom stanja $p_\Lambda = \rho_\Lambda$ i gustoća energije je konstantna:

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \tag{1.19}$$

Gustoća energije materije i zračenja se smanjuje kako se svemir širi, pa ako postoji energija vakuuma, ona nastoji prevladati, i u tom slučaju dolazi se do de Sitterovih i anti-de Sitterovih rješenja. Sada nas zanimaju Einsteinove jednadžbe:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Lambda\right). \tag{1.20}$$

Iz nulte komponente Einsteinove jednadžbe, te komponente $\mu\nu = ij$ od koje ostaje samo jedna jednadžba zbog izotropnosti, dobivamo Friedmannove jednadžbe:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{1.21}$$

i:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{1.22}$$

Dakle, to je skup jednadžbi koje opisuju širenje homogenog i izotropnog modela svemira. Skupa s metrikom (1.14) definiraju Friedmann - Robertson - Walker (FRW) model svemira. Brzina širenja je opisana s Hubbleovim parametrom:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.23}$$

Parametar gustoće definiramo kao:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \tag{1.24}$$

Friedmannova jednažba (1.21) se može zapisati pomoću kritične gustoće ρ_{crit} kao:

$$\Omega - 1 = \frac{\kappa}{H^2 a^2} \tag{1.25}$$

i ρ_{crit} je vremenski ovisna veličina. Dakle, parametar gustoće Ω određuje predznak od κ. Pa tako za $\rho < \rho_{crit}$ je $\Omega < 1$ i $\kappa < 0$, svemir je otvoren i nastavlja se zauvijek širiti. Ako je $\rho = \rho_{crit}$, tada parametar gustoće doseže kritičnu vrijednost $\Omega = 1$, $\kappa = 0$ i radi se o ravnom svemiru koji sadrži dovoljno materije da bi se širenje zaustavilo, ali ne i dovoljno da bi došlo do kolapsa. Ako je $\Omega > 1$, svemir je zatvoren, u nekom trenutku širenje će se zaustaviti i doći će do kolapsa. Parametar gustoće nam govori koja od RW geometrija opisuje naš svemir i posljednja mjerenja CMB - a su pokazala da se on približio jedinici.

2 Bianchijevi modeli

Dva osnovna matematička svojstva koja mnogostrukost može imati su izotropnost i homogenost. Izotropnost znači da prostor izgleda jednako u svim smjerovima, a homogenost, kao što smo već rekli, znači da je metrika ista na cijeloj mnogostrukosti, odnosno, za bilo koje dvije točke p i q u M, postoji izometrija koja dovodi p u q.

Mnogostrukost može biti homogena i istovremeno svugdje anizotropna ili može biti izotropna oko jedne točke bez da je homogena. No, ako je prostor izotropan svuda, onda je on i homogen. Slično, ako je izotropan oko jedne točke i homogen, onda je izotropan oko svake točke. Kao što smo vidjetli prije, homogenost i izotropnost impliciraju da je prostor maksimalno simetričan, odnosno da ima maksimalan broj Killingovih vektora.

Najjednostavniji kozmološki model je FLRW model. Postoji grupa izotropije G_3 koja djeluje na svaku točku u prostor - vremenu i ostavlja fundamentalnu brzinu invarijantnom. Ovo se događa samo ako su sva opažanja svakog promatrača izotropna u svakom trenutku. Osim što je u ovom modelu svemir izotropan oko svake točke, on je i prostorno homogen. Sva fizikalna svojstva su jednaka na svim površinama prostornog tipa ortogonalnim na tok fluida, odnosno postoji grupa izometrija G_3 koja djeluje jednostavno tranzitivno na ove površine. Zbog ovih egzaktnih simetrija, ovo ne mogu biti realni modeli svemira.

Da bismo došli do Bianchijevih modela iskoristit ćemo slabiji uvjet, da je prostor-vrijeme homogeno, ali ne i izotropno. Dakle, prostor je homogen i izotropan, te evoluira u vremenu, odnosno svemir se može podijeliti prostorne dijelove takve da je svaki trodimenzionalni dio maksimalno simetričan. Bianchijevi modeli imaju prostorno homogene dijelove koji su invarijantni na djelovanje trodimenzionalne Liejeve grupe. Onda je prostor-vrijeme $\mathbb{R} \times \Sigma_t$, gdje je $\mathbb{R}$ vremenski smjer, a Σ_t maksimalno simetrična trodimenzionalna mnogostrukost. Za homogeni Σ_t imamo tri različite mogućnosti:

1. $dim\ Isom(M) = 6$. Σ_t je višestruko tranzitivan prostor s maksimalnom simetrijom (FRW modeli).
2. $dim\ Isom(M) = 4$. Σ_t je višestruko tranzitivan prostor s podgrupom izotropije $I_p(M) = SO(2)$.
3. $dim\ Isom(M) = 3$. Σ_t je jednostavno tranzitivan prostor.

Prva dva slučaja su specijalni simetrični slučajevi od trećeg, s iznimkom kada Σ_t ima pokrivač $\mathbb{R} \times S^2$. Dakle, zanima nas samo treća mogućnost i želimo vidjeti kakva su svojstva od Σ_t. U tu svrhu ćemo klasificirati trodimenzionalne Liejeve algebre i pomoću njih ćemo konstruirati prostorno homogene kozmološke modele. Odgovarajući model zovemo Bianchijev model i označavamo s I-IX.

Dakle, prostorna homogenost implicira da se prostor - vrijeme sastoji od familije hiperploha prostornog tipa i te hiperplohe definiraju kozmičko vrijeme. Svi promatrači unutar dane hiperplohe vide istu okolinu i prema tome ove hiperplohe moraju imati iste tranzitivne grupe. Iz ove simetrije slijedi da moramo promotriti jedino tro- i četverodimenzionalne grupe izometrija, koje daju dvije različite klase modela. Bianchijevi modeli imaju za grupu izometrije G_3 i postoji 9 različitih tipova ovih modela čije je djelovanje jednostavno tranzitivno na hiperplohe prostornog tipa. Drugi slučaj je Kantowski - Sachs model za koji je grupa izometrije G_4 i ne sadrži jednostavno tranzitivne G_3. Killingovi vektori ξ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ generiraju jednostavno tranzitivnu grupu izometrija G_3 sa strukturnim konstantama $C^\gamma_{\alpha\beta}$:

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\xi_\gamma,\ C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{[\alpha\beta]} \tag{2.1}$$

Postojanje jednostavno tranzitivne grupe je važno, jer to znači da imamo jednostavne reprezentacije modela svemira koji se osnivaju na postojanju vektorskih polja baze $\mathbf{e}_a$, $(a = 0, 1, 2, 3)$ invarijantnih na sve transformacije ove grupe, odnosno vrijedi da je $[\mathbf{e}_a, \xi_k] = 0$. Takva vektorska polja ne postoje u slučaju višestruko tranzitivnih grupa.

U tablici 1 nalaze se svi Bianchijevi modeli prema njihovim strukturnim konstantama. U drugom i trećem stupcu su Bianchijevi tipovi napisani prema Behrovoj dekompoziciji gdje su strukturne konstante rastavljene na dio bez traga i s tragom:

$$C^k_{ij} = \epsilon_{ijl}n^{lk} + a_l(\delta^k{}_i\delta^l{}_j - \delta^k{}_j\delta^l{}_i) \tag{2.2}$$

gdje je a_i "vektorski" dio Liejeve algebre, a trag od c^i_{jk} je $c^j_{ij} = -2a_i$. A je definirana s:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Parametar h za tipove VI_h i VII_h definiran sa:

$$h = \frac{a^2}{n_1 n_2}$$

Možemo odmah primijetiti da Bianchijev tip I odgovara ravnim prostornim dijelovima i poopćenje je ravnog FRW modela. Bianchijev tip IX odgovara Liejevoj algebri $\mathfrak{so}(3)$. Modeli A klase su: I, II, IV_0, VII_0 i IX.

Bianchijev tip	a_i	n	strukturna konstanta
I	0	0	$C^i_{jk} = 0$
II	0	$\mathrm{diag}(1,0,0)$	$C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$, ostali $C^i_{jk} = 0$
III	$\frac{1}{2}\delta^3_i$	$\frac{-1}{2}A$	$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$, ostali $C^i_{jk} = 0$
IV	δ^3_i	$\mathrm{diag}(1,0,0)$	$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$, $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$, $C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$, ostali $C^i_{jk} = 0$
V	δ^3_i	0	$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$, $C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$, ostali $C^i_{jk} = 0$
VI_h	$\frac{\tilde{h}}{2}\delta^3_i$	$\frac{1}{2}(\tilde{h}-2)A$	$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$, $C^2_{23} = -C^2_{32} = (\tilde{h}-1)$, ostali $C^i_{jk} = 0$
VII_h	$\frac{\tilde{h}}{2}\delta^3_i$	$\mathrm{diag}(-1,-1,0) + \frac{\tilde{h}}{2}A$	$C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$, $C^1_{23} = -C^1_{32} = -1$, $C^2_{32} = -C^2_{32} = \tilde{h}$, ostali $C^i_{jk} = 0$
VIII	0	$\mathrm{diag}(-1,1,1)$	$C^1_{23} = -C^1_{32} = -1$, $C^2_{31} = -C^2_{13} = 1$, $C^3_{12} = -C^3_{21} = 1$, ostali $C^i_{jk} = 0$
IX	0	1	$C^i_{jk} = \epsilon_{ijk}$

Tablica 1: Klasifikacija $3D$ Liejevih algebri

U nekim slučajevima jednostavno tranzitivna grupa može biti podgrupa višestruko tranzitivne grupe. Bianchijevi modeli mogu odgovarati FLRW ili LRS rješenjima, odnosno radi se o jednostavno tranzitivnim trodimenzionalnim podgrupama koje ima G_6 grupa izometrija (u FLRW slučaju) ili G_4 grupa izometrija (u LRS slučaju) [2]. U slijedećoj tablici nalazi se veza između ovih modela.

[2] Jedini LRS modeli koji nemaju jednostavno tranzitivnu podgrupu G_3 su Kantowski Sachs modeli.

Izotropni Bianchijevi modeli		
FLRW $k=+1$	IX (2 kom.grupe)	
FLRW $k=0$	I, VII_0	
FLRW $k=-1$	V,VII_h	
LRS Bianchijevi modeli		
Ortogonalni	$c=0$	$c\neq 0$
Taub-NUT 1		IX
Taub-NUT 3	I,VII_0	II
Taub-NUT 2	III $(KS-1)$	VII,III
Nakošeni		
	V,VII_h	

Tablica 2: Bianchijevi modeli koji dozvoljavaju više simetrije.

Parametar c kod LRS modela je jednak nuli ako i samo ako je preferirani prostorni smjer ortogonalan na hiperplohu, a o osobinama ortogonalnih i *nakošenih* modela bit će riječi u nastavku.

2.1 Konstrukcija Bianchijevih modela

Da bi proučavali dinamiku Bianchijevih modela, moramo odabrati odgovarajuću jednadžbu stanja za materiju. Obično se u tu svrhu uzima idealni fluid s odgovarajućim jednadžbama stanja, ili skalarno polje s određenim potencijalom. Brzina toka fluida ili vektor okomit na plohe konstantnog skalarnog polja određuje jedinstveno polje četverobrzine u prostor - vremenu određujući jedinstveno 1+3 razdvajanje varijabli i jednadžbi. U slučaju fluida, razlikujemo ortogonalne i nakošene modele.

Postoje tri načina kako konstruirati ortogonalne modele i svi se temelje na korištenju tetrada vektora $\mathbf{e}_a$ koji komutiraju s bazom Killingovih vektora ξ_α. Uzmemo li Killingove vektore baze $\{\xi_i\}$, možemo odabrati t tako da je $\mathbf{n}=d_t$ i $n_a=-\nabla_a t$. Tada možemo odabrati tetrad vektora $\mathbf{e}_a$ s $\mathbf{n}=\mathbf{e}_0$ u točki p. Ona se može povući u bilo koju drugu točku q jedinstvenim elementom grupe koji transportira p u q. Prostorni vektori $\mathbf{e}_i$ komutiraju s $\{\xi_i\}$ i s $\mathbf{n}$, te generiraju drugu grupu transformacija na prostornoj površini koju zovemo recipročna grupa. Metriku možemo zapisati kao:

$$ds^2=-dt^2+\gamma_{ij}(e^i_\alpha dx^\alpha)(e^j_\beta dx^\beta), \tag{2.4}$$

gdje su $e^i{}_\alpha dx^\alpha$ 1−forme inverzne na trojku prostornih vektora $\mathbf{e}_i$.

Vremenska ovisnost može se nalaziti ili potpuno u prostornoj metrici γ_{ij} (metrički pristup), samo u $\mathbf{e}_i$ (ortonormirani pristup) ili može biti podijeljena između ovo dvoje (automorfni pristup). Metrički pristup su razvili Heckmann i Schücking. Vremenska ovisnost smještena je u metriku:

$$ds^2=-dt^2+\gamma_{ij}(t)(e^i{}_\alpha(x^\gamma)dx^\alpha)(e^j{}_\beta(x^\gamma)dx^\beta), \tag{2.5}$$

gdje $e^i{}_\alpha(x^\gamma)$ imaju iste komutatore kao generatori grupe izometrija, odnosno:

$$[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]=C^k{}_{ij}\mathbf{e}_k,\ [\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_i]=0, \tag{2.6}$$

a $C^k{}_{ij}$ su strukturne konstante Liejeve algebre. Ovaj pristup je koristan kada želimo uvesti Lagrangiane i Hamiltonijane za Bianchijeve modele, ali je kanonska formulacija dobra samo za modele A klase, što je povezano s činjenicom da je kod njih trag jednak nuli.

U drugom slučaju pomoću grupe automorfizma metriku faktoriziramo u matrice grupe automorfizama grupe izometrija, odnosno skup preslikavanja grupe izometrija u samu sebe, i preostale članove metrike. Ovu metodu prvi je spominjao Schücking, a koristili su ju Collins i Hawking u njihovim klasičnim proučavanjima gdje su pokazali da je izotropnost u kasnim vremenima poseban slučaj u Bianchijevim modelima. Metodu je razvio Jantzen za sve Bianchijeve kozmološke modele. Ovdje su i $\mathbf{e}_i$ i metrika vremenski ovisni. Promotrimo transformaciju oblika:

$$\hat{\mathbf{e}}^i=M^i{}_j\mathbf{e}^j. \tag{2.7}$$

Ona je automorfizam grupe izometrija ako $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao i $\{\mathbf{e}_i\}$. Matrice M su vremenski ovisne i odabrane su tako da novi koeficijenti $\hat{g}_{ij}$ poprime novi oblik, primjerice da postane dijagonalna. Sustav jednadžbi se onda pojednostavi i dinamika se prebacuje u preostale komponente od $\hat{g}$, dok komponente matrice M postaju sekundarne vremenski ovisne varijable. Dinamički sustavi slobode su odvojeni od stupnjeva slobode sustava. Loša strana ove metode je to što je njena primjena specifična za svaku vrstu grupe.

Metoda ortonormiranih tetrada uzima ortonormirani tetrad invarijatan na grupu izometrija, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{n}$. Komponente metrike u tetradu su vremensko - prostorne konstante, $g_{ab} = \eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$ i sve vremenske varijacije nalaze se u komutatorima vektora baze. $\gamma^a{}_{bc}$ tada postaju osnovne geometrijske varijable. Ova metoda nam je najzanimljivija i najkorisnija, pa ćemo ju detaljnije promotriti.

2.2 Metoda ortonormiranih tetrada

Kod metode ortonormiranih tetrada komponente metrike su fiksirane, dok se sva dinamika nalazi u komutacijskim funkcijama. Proučavanje Bianchijevih modela prema ovoj metodi prvi su radili Ellis i MacCallum. Za ortonormirani tetrad se uzima $e_0 = \mathbf{n}$ ili četverobrzina, $e_0 = \mathbf{u}$. Dakle, komponente metrike u tetradu su konstante, $g_{ab} = \eta_{ab}$, a vremenska ovisnost je u komutacijskim funkcijama za vektore baze, koje onda određuju vremensku i prostornu ovisnost u samim vektorima baze. Einsteinove jednadžbe su onda jednadžbe prvog reda za komutacijske funkcije, nadopunjene s Jacobijevim identitetom. Ako je vektor četvero-brzine ortogonalan na hiperplohe Σ_t, kažemo da je fluid ortogonalan, a ako vektor četvero-brzine fluida nije ortogonalan na Σ_t, radi se o *nakošenom* fluidu (eng. *tilted*). Pretpostavljamo da tenzor energije i momenta ima oblik:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

gdje je u_μ četvero-brzina toka fluida. Dalje ćemo pretpostaviti i da je četverobrzina ortogonalna na hiperplohe Σ_t koje su razapete djelovanjem grupe izometrija, odnosno da se radi o ortogonalnom modelu. Slijedi da su tenzor rotacije i četvero-akceleracija fluida nula:

$$\omega_{\mu\nu} = 0, \ u_{\mu;\nu} u^\nu = 0. \tag{2.9}$$

Tenzor ekspanzije možemo rastaviti na dio s tragom i bez traga:

$$\theta_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} = \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

Komutatorske funkcije $C^\alpha_{\mu\nu}$ su dane s:

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = C^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha. \tag{2.11}$$

U ortonormiranom sustavu rotacijske forme su antisimetrične, $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$, pa se komponente Christoffelovog simbola mogu zapisati preko strukturnih koeficijenata:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} C^\beta_{\nu\mu} + g_{\mu\beta} C^\beta_{\alpha\nu} - g^\beta_{\mu\alpha}). \tag{2.12}$$

Vektor u_μ je ortogonalan na hiperplohe Σ_t, dakle vrijedi da je $\theta_{\mu\nu} = \Gamma^t_{\mu\nu}$. Tada su koeficijenti $C^t_{ta} = C^t_{ab} = 0$, dok je:

$$C^a_{tb} = -(\Gamma^a_{tb} - \Gamma^a_{bt}) = -\Gamma^t_{ab} + \Gamma^a_{bt}. \tag{2.13}$$

Iz antisimetričnosti rotacijskih formi, možemo zaključiti da je $\Gamma_{abt} = -\Gamma_{bat} = \epsilon_{abc}\Omega^c$. Sada strukturne koeficijente oblika C^a_{tb} možemo zapisati kao:

$$C^a_{tb} = -\theta^a_b + \epsilon^a_{bc}\Omega^c. \tag{2.14}$$

Ω^c možemo protumačiti kao lokalnu kutnu brzinu u sustavu mirovanja promatrača s četvero-brzinom u^μ skupa Fermi - propagiranih osi u odnosu na prostorni sustav $\{\mathbf{e}_a\}$. Preostali strukturni koeficijenti su svi prostorni i možemo ih zapisati kao:

$$C^k_{ij} = \epsilon_{ijl} n^{lk} + a_l(\delta^k_i \delta^l_j - \delta^k_j \delta^l_i) \tag{2.15}$$

gdje je n^{lk} simetrična matrica. Strukturni koeficijenti tada odgovaraju Liejevoj algebri odgovarajućeg Bianchijevog modela i oni su konstantni duž svake orbite tranzitivnosti. Prema tome su n^{lk} i a_i vremenske funkcije. Prostorni sustav $\{\mathbf{e}_a\}$ će biti skup lijevo invarijantnih vektora na hiperplohe Σ_t.

Za razliku od metričkog pristupa, ovdje vrijedi da je $[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i] \neq 0$. Dinamičke varijable su komutacijske funkcije i Einsteinove jednadžbe su jednadžbe prvog reda za ove kvantitete kao i za varijable materije. S njima dolaze i Jakobijevi identiteti za komutacijske funkcije, koji su u ovom slučaju jednaždbe prvog reda.

Dakle, može se napraviti dekompozicija prostornih komutacijskih funkcija u vremenski ovisnu simetričnu matricu $n^{lk}(t)$ i vektor $a_l(t)$ i one su ekvivalentne strukturnim koeficijentima C^i_{jk} grupe simetrija u svakoj točki. Međutim, da bi strukturni koeficijenti odgovarali Liejevoj algebri, vektor a_i mora prema relaciji $n^{lk}a_l = 0$, biti u jezgri matrice n^{lk}. Baza tetrada se može odabrati tako da dijagonalizira n^{lk}, odnosno da se dobije n^{lk} =diag(n_1, n_2, n_3) i $a_i = (0, 0, a)$, tako da se Jacobijevi identiteti za skup vektora $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$ svedu na $n_3 a = 0$.

Posljedica je da razlikujemo dvije klase strukturnih konstanti, te ujedno i Liejevih algebri. Za $a_i = 0$ imamo A klasu koju zovemo još i unimodularna, a za $a \neq 0$ imamo B klasu (neunimodularna). n^{lk} se u oba slučaja može dijagonalizirati, i imat ćemo ortogonalne ili *nakošene*(eng. *tilted*) modele, ovisno o tome da li se materija giba ortogonalno na prostorno homogene površine ili ne. Rotirajući modeli moraju biti nakošeni i puno su složeniji od nerotirajućih. Sada se Bianchijevi modeli mogu opisati pomoću relativnih predznaka svojstvenih vrijednosti n_1, n_2, n_3 i a. što se može vidjeti u slijedećoj tablici [2].

Klasa	Tip	a	n_1	n_2	n_3
A	I	0	0	0	0
	II	0	+	0	0
	VI_0	0	+	−	0
	VII_0	0	+	+	0
	VIII	0	+	+	−
	IX	0	+	+	+
B	V	+	0	0	0
	IV	+	+	0	0
	VI_h	+	+	−	0
	VII_h	+	+	+	0

Tablica 3: Strukturne konstante za Bianchijeve modele

Za tipove VI_h i VII_h, parametar grupe je definiran sa:

$$hn_1n_2 = a^2. \tag{2.16}$$

Za neke od Bianchijevih modela, dvije ili tri svojstvene vrijednosti jednake su nuli, dakle zbog slobodnih stupnjeva slobode može se odabrati orijentacija prostornog sustava, kao što je to kod tipa I. Treba nadodati još i da se nakošeni modeli mogu opisati u bazi koja nije ortogonalna. Prije korištenja jednadžbi polja, oni se razlikuju od običnih modela samo u tenzoru energije i momenta. Kod ortogonalnih modela idealnog fluida linije četverobrzine u^a su paralelne na površine homogenosti i kao varijable uzimamo gustoću fluida i tlak. Kod nakošenih modela linije toka idealnog fluida nisu paralelne na površine homogenosti i kao posljedica toga, komponente vlastite brzine dolaze kao nove varijable. Međutim, kao posljedica korištenja novog sustava, idealni fluid će izgledati neidealno.

2.2.1 Einsteinove jednadžbe polja za Bianchijeve kozmološke modele

Zanima nas kako izgledaju Einsteinove jednadžbe za Bianchijeve modele. Znamo da se Riccijev tenzor može pronaći kontrakcijom Riemannovog tenzora. Nadalje, koristeći četverodimenzionalni

Riccijev tenzor, može se pokazati da tt dio jednadžbe daje Raychaudhurijevu jednadžbu:

$$\dot{\theta}+\frac{1}{3}\theta^2-\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}-\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{2}(\rho+3p)-\Lambda=0. \tag{2.17}$$

Ova jednadžba opisuje kako se skalar ekspanzije mijenja duž krivulje geodezika definiranog vektorskim poljem u^μ. Prostorne komponenta Einsteinove jednadžbe daje jednadžbe za σ i generaliziranu Raychaudhurijevu jednadžbu. Koristeći ove relacije, dobivamo Einsteinove jednadžbe polja za Bianchijeve kozmološke modele u metodi ortonormiranih tetrada, a to su jednadžba za propagaciju tenzora smicanja:

$$\mathbf{u}(\sigma_{ab})+\theta\sigma_{ab}-2\sigma^d{}_{(a}\epsilon_{b)cd}\Omega^c+{}^{(3)}R_{ab}-\frac{1}{3}h^{(3)}_{ab}R=\kappa\pi_{ab}, \tag{2.18}$$

Raychaudhurijeva jednadžba:

$$\dot{\theta}+\frac{1}{3}\theta^2+\sigma_{ab}\sigma^{ab}+\frac{\kappa}{2}(\rho+3p)-\Lambda=0 \tag{2.19}$$

i Friedmannova jednadžba:

$$\frac{1}{3}\theta^2=\frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab}-\frac{1}{2}{}^{(3)}R+\kappa\rho+\Lambda \tag{2.20}$$

gdje je:

$${}^{(3)}R={}^{(3)}R^a{}_a=-\left(6a^2+n_{cd}n^{cd}-\frac{1}{2}n^2\right). \tag{2.21}$$

Može se pokazati da za sve tipove Bianchijevih modela u metodi ortonormiranih tetrada vrijedi da je ${}^{(3)}R\leqslant 0$, osim za tip IX. Dijeljenjem Friedmannove jednadžbe s $\theta^2/3$ dobivamo:

$$1=\Sigma+\Omega_k+\Omega_\rho+\Omega_\Lambda, \tag{2.22}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}\Sigma&=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{ab}\sigma^{ab}}{\theta^2}, \quad &\Omega_k&=-\frac{3}{2}\frac{{}^{(3)}R}{\theta^2}\\ \Omega_\rho&=\frac{3\kappa\rho}{\theta^2}, &\Omega_\Lambda&=\frac{3\Lambda}{\theta^2}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Dakle, iz Friedmannove jednadžbe (s $\Lambda\geqslant 0$) možemo zaključiti da je za sve Bianchijeve tipove osim za IX, normalizirani tenzor smicanja ograničen sa:

$$0\leqslant\Sigma\leqslant 1. \tag{2.24}$$

Ova relacija postaje jednakost samo u slučaju Kasnerovih vakuumskih rješenja koja imaju maksimalan tenzor smicanja, dok je za sve ostale to stroga nejednakost.

2.2.2 Kantowski-Sachs model

Kantowski-Sachs (KS) model je jedini homogeni model koji nema trodimenzionalnu tranzitivnu podgrupu. Grupa izometrije je $\mathbb{R}\times SO(3)$ koja ne djeluje jednostavno tranzitivno na prostorvrijeme, niti posjeduje podgrupu s jednostavno tranzitivnim djelovanjem. Ovaj model ima dvije simetrije, sfernu simetriju i invarijantnost na prostorne translacije. Dakle, ima prostorne dijelove $\mathbb{R}\times S^2$ s četverodimenzionalnom grupom simetrije. Njegovu metriku možemo pisati kao:

$$ds^2=-dt^2+a(t)^2dz^2+b(t)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.25}$$

Želimo riješiti Einsteinove jednadžbe za slučaj ovog posebnog modela. Riccijev tenzor poprima jednostavan dijagonalni oblik i koristeći spomenutu metriku, jednadžbe možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{1}{b^2}&=\Lambda\\ 2\frac{\ddot{b}}{ab}+\frac{\dot{b}^2}{b^2}+\frac{1}{b^2}&=\Lambda\\ \frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}&=\Lambda.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Primijetimo da postoji specijalno rješenje $b(t) = b_0$ =const i

$$\frac{1}{b_0^2} = \Lambda, \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda. \tag{2.27}$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo:

$$a(t) = e^{\sqrt{\Lambda}t}. \tag{2.28}$$

Dakle, metrika za ovo rješenje glasi:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\Lambda}t}dz^2 + \frac{1}{\Lambda}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.29}$$

2.3 Dinamika Bianchijevih modela

Diferencijalne jedndadžbe koje dobivamo su obične, pa se mogu koristiti metode iz teorije dinamičkih sustava kako bi se dobila analitička rješenja. Na taj način se jednadžbe mogu pojednostaviti, te pronaći egzaktna rješenja, kao i razumijevanje istih.

Bogoyavlensky i Collins su koristili ovakve metode, gdje su predstavili korištenje "faznih ravnina" s kompaktificiranim granicama, kako bi opisali evoluciju određenih Bianchijevih modela. Ortonormirani formalizam Ellisa i MacCalluma postao je dobar alat nakon što je John Wainwright uveo normalizirane varijable i prvi započeo sistematsko korištenje metoda dinamičkih sustava kod ortogonalnih modela.

Korištenjem normaliziranih varijabli EFE se mogu zapisati kao dinamički sustav, tako da se može proučavati evolucija raznih fizikalnih i geometrijskih kvantiteta u odnosu na brzinu širenja svemira, koja je opisana Hubbleovim parametrom H. Osnovne varijable koje se ovdje koriste su komutacijske funkcije, koje se reskaliraju određenim vremenskim faktorom.
Većina ovih istraživanja vezana uz ortogonalne Bianchijeve modele, dakle ne uključuju rotirajuće modele.

3 Modeli geometrije

Postoji veza između Bianchijevih tipova i geometrije prostora na način da je topologija prostora ograničena Bianchijevim tipom. Postoji 8 takvih modela geometrija koje se zovu još i Thurstonove geometrije. Prema teoremu o uniformizaciji svaka neograničena kompaktna površina ili 2-mnogostrukost posjeduje jednu od tri moguće geometrijske strukture. William Thurston je 1982. godine došao do ideje da se na sličan način mogu klasificirati i sve Riemannove 3-mnogostrukosti. Ovaj slučaj je kompliciraniji u tome što se kod 3-mnogostrukosti može napraviti dekompozicija na dvije razine tako da svaki dio posjeduje jednu od 8 mogućih geometrijskih struktura. O tome nam govori slijedeća definicija.

Definicija 3.1 *Par (M, G) gdje je M povezana i jednostavno povezana mnogostrukost, a G grupa koja djeluje tranzitivno na M, zove se model geometrije ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1. *M može posjedovati $G-$invarijantnu Riemannovu metriku.*
2. *G je maksimalna, odnosno ne postoji veća grupa $H \supset G$ koja bi djelovala tranzitivno na M i prvi uvjet je zadovoljen.*
3. *Postoji diskretna podgrupa $\Gamma \subset G$ takva da je M/Γ kompaktna, odnosno da M zadovoljava kompaktni kvocijent.*

U dvije dimenzije jedini modeli geometrije su maksimalno simetrični prostori, dok u tri dimenzije postoji 8 različitih modela geometrije koji su nabrojani u nastavku.

$$S^3,\ \mathbb{E}^3,\ \mathbb{H}^3,\ \mathbb{E}^1 \times S^2,\ \mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^2, \widetilde{SL(2,\mathbb{R})},\ Nil,\ Sol. \tag{3.1}$$

S^3. 3−sfera čija je grupa izometrije $O(3)$, odnosno grupa ortogonalnih 3×3 matrica. $\mathbb{E}^3$ Euklidov prostor u 3 dimenzije. $\mathbb{E}^1 \times S^2$. Produkt između sfere i linije. U ovom slučaju grupa je četverodimenzionalna, ali ne posjeduje jednostavno tranzitivnu podgrupu, dakle ne pripada Bianchijevim modelima. Njena metrika glasi:

$$ds^2 = dz^2 + (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{3.2}$$

$\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^2$. Produkt između hiperbolne ravnine i linije. I ova grupa je četverodimenzionalna, ali sadrži jednostavno tranzitivnu podgrupu Bianchijevog tipa III. Invarijantna metrika je:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2. \tag{3.3}$$

$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$. Natkrivajući prostor matrične Liejeve grupe $SL(2,\mathbb{R})$. Grupa izometrija je četverodimenzionalna, ali sadrži trodimenzionalne jednostavno tranzitivne podgrupe Bianchijevog tipa VIII ili III. Invarijantna metrika je:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \left(2dz + \frac{dx}{y}\right)^2. \tag{3.4}$$

Nil. Nilgeometrija ili Heisenbergova grupa koja je četverodimenzionalna s invarijatnom metrikom:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy)\right)^2. \tag{3.5}$$

Sol. Rješiva geometrija. Grupa je trodimenzionalna i jednostavno tranzitivna s invarijantnom metrikom:

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2. \tag{3.6}$$

Dakle, svaka trodimenzionalna maksimalna geometrija je izomorfna jednom od 8 navedenih tipova, ako dozvoljava kompaktni kvocijent. U slijedećoj tablici nalaze se Thurstonove geometrije i njihovi odgovarajući Bianchijevi tipovi.

Prostor	Bianchijev tip
S^3	IX
E^3	I, VII_0
H^3	V, VII_h
$\mathbb{E}^1 \times S^2$	KS
$\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^2$	III
$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$	III, VIII
Nil	II
Sol	VI_0

Tablica 1: Thurstonovi tipovi i odgovarajući Bianchijevi modeli

Svaki Bianchijev model definira tranzitivnu grupu G_B na nekom trodimenzionalnom jednostavno povezanom prostoru Σ. Tada će par (Σ, G), gdje je G maksimalna grupa koja djeluje na Σ tako da je $G_B \supset G$, zadovoljavati prva dva uvjeta iz definicije. Može se dogoditi jedino da ne zadovoljava treći uvjet, odnosno da ne dozvoljava nužno kompaktni kvocijent.

Invarijantna grupa G lokalno homogenog sustava po definiciji sadrži neki Bianchijev tip i istovremeno je podgrupa jednog od 8 Thurstonovih tipova maksimalne grupe simetrija. G ne određuje jedinstveno Thurstonov tip, odnosno veza između Thurstonovog i Bianchijevog tipa nije jedan na jedan, zbog toga što mogu postojati dvije različite tranzitivne grupe G_1 i G_2 takve da je $G_1 \supset G$ i $G_2 \supset G$. Primjerice, Thurstonov tip E^3 sadrži Bianchijeve I i VII_0 kao podgeometrije i Thurstonov tip H^3 sadrži Bianchijeve tipove V i VII_h ($h \neq 0$). Također, Bianchijev tip III pripada Thurstonovima $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ i $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^2$. To nam govori da se lokalno homogeni sustavi s različitim Bianchijevim simetrijama mogu primijeniti na prostor-vremena s istom prostornom topologijom.

S druge strane, slučaj Bianchijevog tipa III ukazuje na mogućnost da dva prostor-vremena s različitim topologijama mogu imati istu lokalnu simetriju, ali se to ne događa zbog toga što takvi sustavi uvijek imaju veće simetrije nego Bianchijev tip III. [6]

Tipovi IV i VI_h, $h \neq 0, -1$ ne pripadaju nijednom od Thurstonovih tipova prikazanih u tablici, što implicira da se ovi tipovi ne mogu kompaktificirati.

4 Opažanja i primjene Bianchijevih modela

Jedno od najvažnijih pitanja je da li Bianchijevi modeli vode na izotropiju već u ranom svemiru ili kasnije. Inflacija se događa samo ako na početku nema puno anizotropije. Nadalje, modeli tipa I mogu se izotropizirati neovisno o inflaciji, što vodi na velike promjene u CMB-u. Izotropizacija se može proučavati i u prisutnosti fluida i pokazalo se da za običnu materiju mnogi Bianchijevi modeli postaju anizotropni u jako kasnim vremenima, čak i ako su približno izotropni danas. Dakle u ovom slučaju izotropnost je nestabilna. Wald je pokazao da će se Bianchijevi modeli izotropizirati u kasnim vremenima ako je kozmološka konstanta pozitivna, što znači da razdoblje inflacije može izazvati iščezavanje anizotropije.

Anizotropija se pojavljuje u kozmološkim relacijama za galaksije i druge diskretne izvore. U slučaju Bianchijevog tipa I, može se odrediti crveni pomak i udaljenosti za proizvoljni smjer. Za modele A tipa se mogu pronaći relacije (M, z),(N, z) i pokazati da će sva opažanja u svemiru biti invarijantna na diskretne simetrije diskretne grupe izotropija, ovisno o tipu grupe. Kod nakošenih modela događa se to da svemir ne izgleda homogeno, mada je prostorno homogen.

Bianchijevi modeli su važni u proučavanju nukleosinteze, odnosno nastanka elemenata. Anizotropija u ranom svemiru će utjecati na brzinu širenja svemira, tako da je nukleosinteza drugačija u Bianchijevim nego u FLRW modelima. Thorne je iskoristio ovu činjenicu u istraživanju Bianchijevih modela tipa I, nakon čega je izračunata zastupljenost helija u mnogim ortogonalnim Bianchijevim modelima. Usporedba zastupljenosti elemenata dala je ograničenja na anizotropiju modela u vrijeme nukleosinteze, pa i do danas. Prema tome su vrijednosti σ_0/H_0 reda od 10^{-9} do 10^{-13}. Ovdje je korisna pretpostavka da će utjecaj anizotropije biti u tome što ona ubrzava vrijeme širenja u Bianchijevim modelima. Matravers, Vogel i Madsen su proučavali nukleosintezu u Bianchijevim modelima tipa V i pokazali su da bi se ona mogla slagati s opažanjima.

Anizotropije u CBR-u će biti vidljive iz anizotropije Bianchijevih modela, ovisno o kojem tipu modela se radi. Uzorci ove anizotropije su za neke modele jednostavni, kao što je to kod modela A klase, a kod nekih se pojavljuju u obliku "hot-spotova" u temperaturi CBR-a. Spektar CBR-a može postaviti granice na anizotropiju u ranom svemiru u nekim slučajevima, pa samim time i granice na homogene modove iz spektra.

Proučavanje anizotropnih modela važno je zbog toga što se pomoću njih može bolje razumjeti dinamika Einsteinovih jednadžbi u prostorno homogenoj sredini. Preko općenitog ponašanja možemo lakše doći do objasniti modele više simetrije, posebno FLRW modela koji su često sedlene točke u faznom prostoru za rješenja niže simetrije.

U nedavnoj prošlosti svemir se približio izotropnom i prostorno homogenom ponašanju, ali u ranim ili veoma kasnim fazama to nije moralo biti tako. Ako bi kozmološka konstanta bila jednaka nuli, postojali bi anizotropni modovi koji bi prevladavali kasnije, i ovi modovi će biti prisutni za slučaj općenitosti početnih uvjeta. Modovi bi se pojavljivali s anizotropijom u kasnim i ranim vremenima. Ako kozmološka konstanta nije jednaka nuli u svim kasnijim vremenima, ovo neće biti primjenjivo na daleku budućnost. Da bi se pokazalo da ovi modovi nisu važni u kasnijim vremenima zbog kozmološke konstante, potrebno je proučavati ove modele. Ako govorimo o davnoj prošlosti svemira, možda je tada postojala anizotropija, ali bi ona kasnije iščeznula ili čak prije iščezavanja spriječila razdoblje inflacije svemira. Moguća je i prijelazna izotropizacija gdje modeli u početku ne bi bili slični RW geometrijama, pa bi im postali slični na neko određeno vrijeme, i onda opet kasnije bi prestali biti takvi. Opažanje da je svemir trenutačno izotropan ne isključuje ovu mogućnost. Dakle, Bianchijevi modeli su možda bili važni u jako ranim ili jako kasnim modelima svemira.

Literatura

[1] Ellis, G.F.R. The Bianchi models: Then and now. // Gen. Relativ. Gravit.(2006), str. 1003-1015.

[2] Grøn, Ø. Hervik, S. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*, Springer-Verlag New York [2007.]

[3] Carroll, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Pearson [2003.]

[4] Ellis, G.F.R. Maartens, R. MacCallum, M.A.H. *Relativistic Cosmology* , Cambridge University Press [2012.]

[5] Fujiwara,Y. Ishihara,H. Kodama H. Comments on Closed Bianchi Models // Class.Quant.Grav.(1993) str 859-868

[6] Kodama,H. Phase Space of Compact Bianchi Models with Fluid // Prog.Theor.Phys, (2002) str. 305-362