Torzija u gravitaciji

Matija Medvidović

8. rujna 2016.

Diferencijalna geometrija u fizici
Seminar

Sažetak

Seminar se sastoji od dva dijela - u prvom matematički diskutiramo torziju i njena svojstva, a u drugom predstavljamo neke od mogućih ekstenzija opće teorije relativnosti koje koriste torziju. Iako je moguće matematički povezati torziju i intrinsični spin, još uvijek nema eksperimentalnih opažanja u suprotnosti s teorijom gravitacije u kojoj torzija iščezava.

1 Uvod

Pri prvoj formulaciji opće teorije relativnosti, poznato je da je Einstein pretpostavio da torzija identički i globalno iščezava u svakoj točki prostorvremena. Tek je Élie Cartan 1922. detaljno proučio matematički formalizam torzije. Uslijedila je razmjena pisama s Einsteinom koja je rezultirala takozvanom *teleparalelnom* teorijom gravitacije u kojoj torzija ne mora nužno iščezavati. Erwin Schrödinger je ubrzo nakon objavio svoj rad na tu temu. Radilo se o ujedinjenju elektromagnetizma s gravitacijom koje je za posljedicu predviđalo masivne fotone.

Nakon rata, lokalne baždarne teorije su postale zajednički jezik fizike čestica ostavljajući gravitaciju sa strane. Svejedno, torzija je našla svoje mjesto u nekim od pokušaja. Utiyama, Sciama, Kibble i Hehl su svojim radovima pokazali da prisustvo torzije može vratiti općoj teoriji relativnosti Poincaréovu simetriju. Naime, od ranije je postojalo pitanje: kako to da specijalna teorija relativnosti ima Poincaréovu simetriju, a opća ne dopušta translacije? No, ubrzo je postalo jasno da su efekti torzije u bilo kojoj od teorija daleko slabiji od onoga što se može detektirati. Do danas torzija ostaje samo jedna od nepotvrđenih ekstenzija Einsteinove originalne teorije gravitacije. Jedan od osnovnih problema ostaje nedostatak informacija o samoj torziji - ne znamo na što i kako se ona fizikalno veže (znamo da bi se nekako trebala vezati na spin) pa je većina pokušaja implementacije u konačnici temeljena na pogađanju lagrangijana. Za detaljniji matematički pregled pogledati [2].

Do danas su eksperimenti isključili efekte torzije u vakuumu pa još uvijek ne postoji potreba za njeno uključivanje u teoriju. S teorijske strane, torzija isljučuje upotrebu takozvanih "supermomentum" i "superenergy" tenzora pa je interes za nju i s te strane smanjen. Do sada je najjednostavnija Levi-Civita koneksija (bez torzije) uspješno reproducirala sve opažene efekte. Većina pokušaja s torzijom je potekla ili iz želje da se gravitacija formulira kao lokalna baždarna teorija ili iz opažanja da se kanonski tenzor spina može tretirati kao izvor torzije. U ovom seminaru navodimo osnovne rezultate "spinskog" slučaja. Detaljniji pregledi ove i ostalih povijesnih situacija se mogu naći u [4].

2 Osnovna svojstva torzije

Sva razmatranja u ovom seminaru smještamo na općenitu glatku mnogostrukost M imajući na umu njenu fizikalnu interpretaciju kao prostor-vremena u kontekstu Einsteinove teorije gravitacije. Da bismo razmotrili fizikalne posljedice neiščezavajuće torzije, prvo ju je potrebno definirati.

Prilikom definicije koneksije, koja se kasnije u općoj teoriji relativnosti koristi u obliku simetrične Levi-Civita koneksije (Christoffelovog simbola), nužno je nametnuti uvjet da je ona simetrična, to jest, da kovarijantna derivacija komutira na skalarima $f \in C^\infty(M)$. Tako je jedan od pet definicijskih zahtjeva bio:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \tag{1}$$

Ovo svojstvo se standardno nazova odsustvom torzije.

Generičku koneksiju Γ možemo razdvojiti na simetrični i antisimetrični dio u donja dva indeksa:

$$\Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{(ab)} + \Gamma^c{}_{[ab]} \tag{2}$$

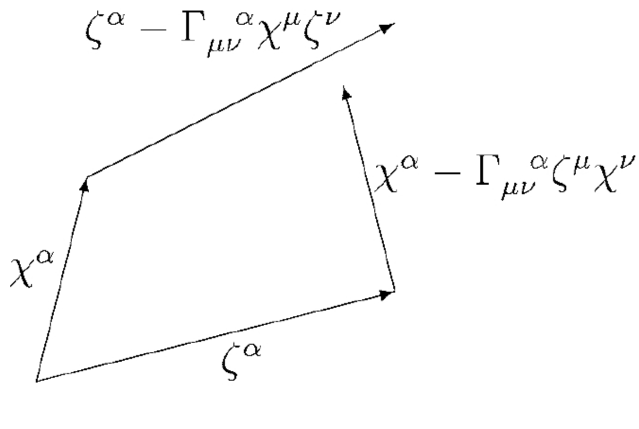
gdje simetrični dio ima netenzorsko ponašanje poput Christoffelovih simbola, a antisimetrični se zaista ponaša kao tenzor. Tada taj antisimetrični dio definiramo kao tenzor torzije s obzirom na zadanu koneksiju. Intuitivno gledano, kod njega se netenzorski "višak" koji dobivamo prelaskom u nove koordinate poništi upravo kao posljedica njegove antisimetrije. Dakle:

$$T^c{}_{ab} \equiv \Gamma^c{}_{[ab]} \tag{3}$$

2.1 Geometrijska intuicija

Pozicionirajmo se u točku $A \in M$ s koordinatama x^a u proizvoljnom koordinatnom sustavu te promotrimo dvije različite geodetske krivulje (oznake "1" i "2") koje prolaze tom točkom. Zatim, provedimo sljedeće korake:

- Označimo sa B točku udaljenu δ_1 od točke A duž prvog geodezika.
- Paralelnim transportom tangentnog vektora na geodezik "2" $t_2 \in T_A M$ duž tangentnog vektora na geodezik "1" $t_1 \in T_A M$ za duljinu δ_1, dolazimo do B.
- Označimo sa C točku udaljenu δ_2 od točke B paralelno transportiranog t_2.



Slika 1. Vizualizacija utjecaja torzije na infinitezimalne paralelograme na mnogostrukosti. Preuzeto iz [2].

Ponavljanjem postupka sa zamjenjenim ulogama geodezika, iscrtavamo paralelogram $ABCD$. Pretpostavkom da je paralelogram infinitezimalan, dobivamo:

$$x^a(A \to B \to C) - x^a(A \to D \to C) = -2\delta_1\delta_2 T^a{}_{bc} t^b_{(1)} t^c_{(2)} + \mathcal{O}(\delta^3) \tag{4}$$

Detaljan račun se može pronaći u [1].

Iz ovoga vidimo da mnogostrukost s torzijom ne možemo prekriti s infinitezimalnim paralelogramima jer se oni ne zatvaraju! Na mnogostrukosti s $T = 0$ bismo prirodno očekivali da će desna strana u (4) biti barem reda $\mathcal{O}(\delta^3)$.

Napišemo li geodetsku jednadžbu za proizvoljnu koneksiju u nekom koordinatnom sustavu:

$$\frac{dt^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = 0 \tag{5}$$

trivijalno vidimo da u drugom članu preživljava samo simetrični dio koneksije. Dakle, općenita koneksija Γ ima iste geodetske krivulje kao i pripadna simetrična koneksija. To nas vodi na pitanje - kakav utjecaj onda uopće ima torzija?

Ispada da je problem mnogo fundamentalniji - u tom slučaju dobivena rješenja geodetske jednadžbe uopće ne uspjevaju biti paralelna. Mjera tog nedostatka paralelnosti je ponovo upravo torzija T. Dakle:

Torzija proizlazi iz dijela paralelnog transporta koji ne ovisi o geodezicima već o samoj mnogostrukosti.

2.2 Torzija i zakrivljenost

Pri uobičajenoj definiciji kovarijantne derivacije smo zahtjevali (1), što se da zapisati kao $[\nabla_a, \nabla_b]\phi = 0$, gdje je ϕ proizvoljni skalar na M. U općenitom slučaju kojega sada razmatramo, nemamo simetričnu koneksiju pa moramo pisati:

$$\nabla_a \nabla_b \phi = \nabla_a(\partial_b \phi) = \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c{}_{ba} \partial_c \phi \tag{6}$$

Antisimetrizirajući gornju jednakost (uz zamjenu $\partial \to \nabla$ na skalaru), dobivamo:

$$[\nabla_a, \nabla_b]\,\phi = 2T^c{}_{ab}\,\nabla_c \phi \tag{7}$$

Dakle, kao što na mnogostrukosti s $T = 0$ Riemannov tenzor odražava nekomutativnost kovarijantnih derivacija na vektoru (imali smo $[\nabla_a, \nabla_b]\,X^c = -R^c{}_{dba} X^d$), tako i u slučaju $T \neq 0$, sama torzija dodatno odražava nekomutativnost kovarijantnih derivacija na skalaru. Čak smo i koristili intuiciju infinitezimalnog paralelograma kao i u opisanom geometrijskom primjeru.

Definicija Riemannovog tenzora u prisustvu torzije izgleda identično kao i bez nje. Raspisivanjem i detaljnim vođenjem računa o rasporedu indeksa, dobivamo:

$$[\nabla_a, \nabla_b]\, X^c = (\partial_a \Gamma^c{}_{db} - \partial_b \Gamma^c{}_{da} + \Gamma^c{}_{ma}\Gamma^m{}_{db} - \Gamma^c{}_{mb}\Gamma^m{}_{da})\, X^d + 2T^m{}_{ab}\, \nabla_m X^c \tag{8}$$

Izraz u zagradama na desnoj strani jednakosti definiramo kao $R^c{}_{dab} = -R^c{}_{dba}$ tako da konačno imamo:

$$[\nabla_a, \nabla_b]\, X^c = R^c{}_{dab} X^d + 2T^m{}_{ab}\, \nabla_m X^c \tag{9}$$

Primjetimo da iz definicije Riemannovog tenzora direktno slijedi da je njegova jedina simetrija u slučaju s neiščezavajućom torzijom antisimetrija u zadnja dva indeksa: imamo $R^a{}_{b(cd)} = 0$ i ništa više!

Unutar okvira opće relativnosti, u ovom trenutku se obično spomene da iz Riemannovog tenzora možemo konstruirati samo jedan neiščezavajući $(0, 2)$ tenzor koji onda zovemo Riccijevim tenzorom. Ta standardna definicija i dalje stoji: $R_{ab} = R^m{}_{amb}$. No, sada on više nije simetričan: $R_{(ab)} \neq 0$.

Nadalje, dodatno postoji i drugi netrivijalni tenzor povezan s R:

$$S_{ab} = R^m{}_{mab} = \partial_a \Gamma^m{}_{mb} - \partial_b \Gamma^m{}_{ma} \tag{10}$$

kojeg smo ispisali u cijelosti jer njegova definicija nije uobičajena u literaturi.

U svim ovim izrazima i definicijama se javlja općenita linearna koneksija, a ne metrički tenzor - on je dodatna struktura na mnogostrukosti. Koneksiju Γ možemo napisati u ovisnosti o metrici tek kada pretpostavimo da nema torzije i "kovarijantnu konstantnost skalarnog produkta", $\nabla_c\, g_{ab} = 0$.

2.3 Korisni identiteti

Uobičajene Bianchijeve (i slične) identitete iz opće relativnosti sada moramo dopuniti torzijom. Kompletni izvodi, s velikom dozom "gimnasticiranja indeksima", se mogu naći u [1], a mi ćemo u kratkim crtama diskutirati konačne rezultate i njihovu usporedbu s poznatim rezultatima iz opće teorije relativnosti.

Prvi dio se tiče simetrija Riemannovog tenzora. Već imamo $R^a{}_{b(cd)} = 0$. Antisimetriziramo li definiciju Riemannovog tenzora, lako dobivamo:

$$R^a{}_{[bcd]} = 4T^a{}_{m[d}T^m{}_{bc]} - 2\nabla_{[d}T^a{}_{bc]} \tag{11}$$

Vidimo da "limesom" $T \to 0$ dobivamo poznatu simetriju koja se javlja u slučajevima simetrične koneksije. Ova relacija se često naziva prvim Bianchijevim identitetom.

Sljedeći korak je izračun antisimetričnog dijela Riccijevog tenzora. Kontrahiranjem indeksa a i b u (11) i antisimetrizacijom, slijedi:

$$R_{[cd]} = \frac{1}{2}S_{cd} + \nabla_a T^a{}_{cd} + 2\nabla_{[d}T^a{}_{|a|c]} + 2T^a{}_{am}T^m{}_{cd} \tag{12}$$

Ponovo, dozvolimo li torziji T i tenzoru S da iščeznu kao u općoj teoriji relativnosti, dobivamo da je Riccijev tenzor simetričan, kakvim ga i poznajemo od ranije.

Sljedeći identitet usmjeren je na određivanje uloge metričkog tenzora. Uvedimo (matrično nesingularne) tenzore g_{ab} i njegov matrični inverz g^{ab} kao pomoćne tenzore za dizanje i spuštenje indeksa. Kao konačni, šesti, zahtjev na kovarijantnu derivaciju smo imali $\nabla_c g_{ab} = 0$ u slučaju gdje je g zaista metrika. Sada promatramo općeniti (0,3) tenzor:

$$q_{abc} \equiv \nabla_c g_{ab} \tag{13}$$

te proučavamo kako ovakvo, generalizirano, dizanje i spuštanje indeksa utječe na Riemannov tenzor. Tenzor q nazivamo tenzorom nemetričnosti. Granica $q \to 0$ reproducira diskutirani zahtjev na kovarijantnu derivaciju. Izbor tenzora g je zapravo samo izbor izomorfizma $T_pM \mapsto T_p^*M$.

Iz raspisanog izraza za $[\nabla_a, \nabla_b]g_{cd}$ dobivamo:

$$R_{(ab)cd} = \nabla_{[d}q_{|ab|c]} + \frac{1}{2}q_{abm}T^m{}_{cd} \tag{14}$$

Trivijalno se vidi da kada g stvarno postane metrika, Riemannov tenzor dobiva dodatnu simetriju na prva dva indeksa: $R_{(ab)cd} = 0$.

Posljednji identitet se naziva Witzenbockovim teoremom:

$$\nabla_{[e}R^{a}{}_{|b|cd]} = 2R^{a}{}_{bm[e}T^{m}{}_{cd]} \tag{15}$$

Različitim kontrakcijama iz ovog teorema možemo dobiti dvije korisne relacije:

$$\nabla_{[c}R_{ab]} = 2S_{m[c}T^{m}{}_{ab]} \tag{16}$$

$$\nabla_e R_{bd} - \nabla_d R_{be} + \nabla_a R^{a}{}_{bde} = R^{n}{}_{bme}T^{m}{}_{nd} - R^{n}{}_{bmd}T^{m}{}_{ne} - 2R_{bm}T^{m}{}_{de} \tag{17}$$

Isti komentar uz "OTR" limes vrijedi i ovdje.

3 Učinci torzije u općoj teoriji relativnosti

U drugom dijelu seminara raspravljamo utjecaj izvedenih geometrijskih svojstava torzije na fizikalnu sliku opće teorije relativnosti. Predstavit ćemo dva povijesno najvažnija pokušaja implementacije torzije u teoriju te diskutirati njenu vezu s Diracovim fermionima i spinom. Putem koristimo matematičku ideju *n-bein* vektorskih polja na mnogostrukosti čiji pregled se može naći u dodatku.

3.1 Primjeri dva različita modela

Jedna od početnih teorija razmatrala je vrstu "minimalnog" vezanja torzije na gravitacijsko polje pomoću akcije [1]:

$$S[g, \partial g, T] = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi}R + \frac{1}{2}t^{ab}g_{ab} + \frac{1}{2}\mu_{a}{}^{bc}T^{a}{}_{bc}\right] \tag{18}$$

gdje smo sa t označili tenzor energije i impulsa te sa μ neki nepoznati tenzor koji ovisi o torziji i na nju se linearno veže. Možemo ga zvati "torzijskim potencijalom". Tretiramo ga ga kao funkciju g i T pa akciju variramo nezavisno po torziji i metrici. Provodeći uobičajeni varijacijski postupak, dobivamo dvije jednadžbe[2]

$$R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab} = \left(\nabla_c - 2T^{m}{}_{mc}\right)\left(T^{cab} + T^{bca} + T^{acb}\right) + 8\pi t^{ab} \tag{19}$$

[1] U jedinicama u kojima $G = c = \hbar = 1$.

[2] U [2] se razmatra slučaj u kojem torzija nije antisimetrična uz drugačiju notaciju. Ovdje smo u jednadžbe iz [2] samo uvrstili antisimetričnu torziju u skladu s našom definicijom.

$$T_{abc} = 16\pi \left(\mu_{c[ab]} + \mu^{m}{}_{[a|m|}\, g_{b]c} \right) \tag{20}$$

Prva jednadžba je napisana samo radi potpunosti dok nas zanima druga, jednadžba gibanja torzije. Očito je da, zbog nedostatka člana u lagrangijanu koji bi sadržavao derivacije torzije, torzija zadovoljava algebarsku, a ne diferencijalnu jednadžbu.

Nadalje, kakav god da je μ potencijal, mora iščezavati u vakuumu. Iz ovog modela bismo mogli zaključiti da se polje torzije ne propagira kroz vakuum već postoji samo u materijalima! No, ako uzmemo u obzir da su predviđeni efekti torzije i ovako mali, gotovo ju je nemoguće eksperimentalno opaziti.

Drugi model koji možemo promotriti uključuje torziju koja se propagira. Definiramo li skalarni torzijski potencijal kroz:

$$T^{a}{}_{bc} = 2\delta^{a}{}_{[b}\partial_{c]}\phi \tag{21}$$

možemo razmatrati sljedeću akciju:

$$S[g, \partial g, \phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R + \alpha R^2 + \beta R_{ab}\, R^{ab} + \gamma R_{ab}\, R^{ba} + \frac{1}{2}t^{ab}\, g_{ab} + \frac{1}{2}\rho\phi\right] \tag{22}$$

gdje je ρ ponovo neka gustoća u promatratranom sustavu na koju se veže polje torzije, a α, β i γ nepoznati paramatri u kinetičkom dijelu gravitacijskog polja.

Kao jednadžbu za torziju dobivamo:

$$\partial^2\phi = -48\rho \tag{23}$$

uz notaciju $\partial^2 \equiv \partial_a\partial^a$. Dakle, torzija se propagira brzinom svjetlosti u vakuumu.

Prikazana dva modela, kao primjeri povijesnih pokušaja implementacije torzije, ilustriraju da se predviđena svojstva torzije radikalno razlikuju ovisno o odabranom lagrangijanu te imamo vrlo malo fizikalnih ograničenja na izbor tih lagrangijana.

3.2 Klasična veza spina i torzije

Jednim od najplodnijih modela torzije se pokazao onaj koji ju promatra klasično pomoću tenzorskog potencijala. Uzmimo antisimetrični potencijal i njegovu baždarnu slobodu:

$$T_{cab} \equiv \partial_{[c}\psi_{ab]} \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{ab} \leftrightarrow \psi_{ab} + \partial_{[a}\xi_{b]} \tag{24}$$

Promotrimo li interakciju gravitacije s "idealnim plinom" neinteragirajućih čestica, imamo:

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{8\pi}\int d^4x\sqrt{-g}R+ \\ &+\sum_n \int d\tau_{(n)}\left[m_{(n)}\sqrt{g_{ab}u^a_{(n)}u^b_{(n)}} + \frac{1}{2}\xi^a_{(n)}u^b_{(n)}\Big(\overbrace{\psi_{ab}+g_{ab}}^{\equiv\phi_{ab}}\Big)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

gdje smo putanje čestica parametrizirali afinim parametrom svojstvenog vremena. Također smo uveli vektorske izvore ξ^a pa nam je sada cilj identificirati ih s nečim fizikalnim. Sa ϕ smo označili "ukupan" gravitacijski potencijal koji se sastoji od uobičajenog Einsteinovog dijela, metrike, i uvedenog torzijskog potencijala. Ovakvo vezanje se zove "minimalnim" jer se može pokazati da se slaže s Diracovim koje diskutiramo kasnije.

Sada, kada smo dali neko značenje polju ϕ, ista akcija se može napisati kao:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{8\pi}R + t^{ab}\phi_{ab}\right] \tag{26}$$

gdje je t^{ab} uobičajeni tenzor energije i impulsa promatranog plina čestica koji sada nije nužno simetričan:

$$t^{ab} = \rho u^a u^b + \sigma^{(a}u^{b)} + 2\sigma^{[a}u^{b]} \tag{27}$$

uz

$$\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_n \int d\tau_{(n)} m_{(n)}\delta^4(x - x_{(n)}) \tag{28}$$

$$\sigma^a \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_n \int d\tau_{(n)} \xi^a_{(n)}\delta^4(x - x_{(n)}) \tag{29}$$

Gornji rezultat se lako dobije iz usporedbe akcije zapisane pomoću tenzora t, (26) i pomoću sumacije po svim česticama, (25). Interpretacije su jednostavne: ρ je masena gustoća, a σ gustoća nepoznatog vektorskog izvora ξ.

Noetherine sačuvane struje za zadani lagrangijan su:

$$\nabla_b t^{[ab]} = 0 \tag{30}$$

koja odgovara baždarnoj simetriji torzijskog polja iz (24) te

$$\nabla_b t^{ab} = \frac{3}{2} g^{am} t^{cd} T_{dcm} \tag{31}$$

iz pretpostavljene translacijske simetrije koodrdinata. Ove jednadžbe (zajedno sa nametnutom translacijskom simetrijom) su nužne za izvod jednadžbi gibanja za generatore simetrija lagrangijana. Uobičajeno, oni su:

- $M^{abc} \equiv -u^0 \int d^3x \sqrt{-g}\, t^{(bc)} \delta x^a$
- $J^{ab} \equiv \int d^3x \sqrt{-g} \left(\delta x^a t^{(b0)} - \delta x^b t^{(a0)} \right)$ (ukupni angularni moment)

gdje je u sada 4-brzina promatrača. Sada možemo metodom Papapetroua [5] (u koju nećemo ulaziti u ovom seminaru) dobiti sljedeću jednadžbu u slučaju u kojem nikakve sile ne djeluju u sustavu:

$$\frac{d}{d\tau} J^{ab} + \frac{u^a}{u^0} M^{b0} - \frac{u^b}{u^0} M^{a0} = 0 \tag{32}$$

Integriranjem gornje jednadžbe, dobivamo poznati izraz[3]

$$J^{ab} = L^{ab} + S^{ab} \tag{33}$$

te možemo izvrijedniti S^{ab} (kanonski tenzor gustoće spina) kao funkciju σ^a. Dakle, postojanje torzije u vakuumu povlači postojanje spina i vektorska veličina na koju se torzija veže je upravo spin!

3.3 Interakcija torzije i Diracovih fermiona

Budući da sa Diracovim fermionima znamo raditi samo u ravnom prostor-vremenu, odmah na početku koristimo *vier-bein* (dodatak A) bazu nadopunjenu formalizmom diferencijalnih formi. Diracova jednadžba u ravnom prostoru glasi:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0 \tag{34}$$

[3]Za mnogo detaljniji izvod pogledati [2],

gdje ćemo pretpostaviti da ona u istom obliku vrijedi u "ravnim" *vier-bein* koordinatama: $\gamma^i \equiv e_\mu{}^i \gamma^\mu$.[4]

Prateći standardni razvojni put lokalnih baždarnih teorija, umjesto parcijalne uvodimo kovarijantnu derivaciju sa pripadnim baždarnim poljem: $D_i = \partial_i + \Gamma_i$.

Formu Γ_i određujemo iz simetrijskih zahtjeva, kao i obično. Promotrimo li proizvoljnu Lorentzovu transformaciju, moramo imati:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S\psi(x) \approx \left[\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{ij}(x)\sigma^{ij}\right]\psi(x) \tag{35}$$

Gdje su ω_{ij} parametri Lorentzove grupe, a $\sigma^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j]$ uobičajeni generatori u reprezentaciji Diracovih spinora. Ali, također moramo i transformirati *vier-bein* koji po definiciji živi u "četverovektorskoj" reprezentaciji Lorentzove grupe:

$$e^\mu{}_i \longrightarrow \left(\delta^j{}_i + \omega^j{}_i\right) e^\mu{}_j \tag{36}$$

Uvrštavanjem dobivamo da moramo imati $\Gamma_i \rightarrow S\Gamma_i S^{-1} - S^{-1}\partial_i S$ uz napomenu da je operator S prostorno ovisan jer su i njegovi generatori prostorno ovisni - radi se o lokalnoj transformaciji. Oblik Γ_i koji zadovoljava uvjet je:

$$\Gamma_k = -\frac{i}{2}\sigma_{ij}\Gamma_k{}^{ij} \tag{37}$$

tako da Diracovu jednadžbu možemo pisati [5]:

$$\left[i\gamma^k\left(\partial_k - \frac{i}{2}\sigma_{ij}\Gamma_k{}^{ij}\right) - m\right]\psi(x) = 0 \tag{38}$$

Provedemo li postupak pretvorbe *vier-bein* indeksa natrag u one koje žive u T_pM (grčke, u ovom slučaju), otkriti ćemo da simetrični dio koneksije Γ ne ulazi u Diracovu jednadžbu što znači da se Diracovi spinori vežu samo na torziju!

[4]Ovdje smo *vier-bein* (Minkowski) indekse zamjenili malim latinskim slovima (i, j, k, l, ...) u odnosu na dodatak A kako bismo učinili račun preglednijim. Također, napuštamo oznake apstraktnih indeksa i vraćamo se na grčke za tenzore u zakrivljenom prostor-vremenu kako bismo notaciju uskladili s literaturom.

[5]Samo u slučaju antisimetrične torzije. Za općenitiji postupak bismo trebali krenuti od akcije.

4 Zaključak

Nakon matematičke definicije torzije i navođenja njezinih svojstava, iznjeli smo nekoliko modela koji se tiču propagacije i vezanja torzije u fizikalnim situacijama. Unutar granica poznate matematike i fizike, opisali smo vezanje torzije i spina te zaključili da se radi o mogućoj teoriji s lijepim posljedcama, ali , također, da su potrebna eksperimentalna opažanja kako bismo stavili restrikcije na moguću teoriju budući da još uvijek nisu opaženi efekti koji bi bili u suprotnosti s Einsteinovom formulacijom opće teorije relativnosti u kojoj torzija iščezava.

Dodatak A *N-bein* vektorska polja

N-bein je jednostavno definiran kao skup n linearno nezavisnih vektorskih polja za svaki tangentni prostor neke Riemannove n-mnogostrukosti. [6] Označavamo ih sa ${e^a}_A$ gdje apstraktni indeks a živi u T_pM, a veliki latinski indeks A je samo oznaka koja upućuje na koji konkretno od n vektora mislimo. Budući da su linearno nezavisni, matrično mora vrijediti $\det({e^a}_A) \neq 0$ pa imamo i inverz ${e_a}^A$. Dakle:

$$ {e^a}_A {e_a}^B = {\delta^B}_A \ ; \qquad {e^a}_A {e_b}^A = {\delta^a}_b \tag{39} $$

Općenito, takva polja predstavljaju lokalno euklidske koordinate na datoj Riemannovoj mnogostrukosti. Budući da u svakoj točki metriku možemo dovesti u kanonsku formu, gornji zahtjev samo globalno spaja lokalne koordinatne osi na kojima se to događa (lokalne inercijalne kartezijeve sustave). Jedini netrivijalni dio ove konstrukcije je dokaz da su takva polja analitička. To se može jednostavno fizikalno pretpostaviti i to nećemo dokazivati u okvirima ovog seminara.

Tada možemo formalno prijeći u bazu koju definiraju ta polja, u svakom T_pM:

$$ {e^a}_A {e^b}_B \, g_{ab} = \delta_{AB} \tag{40} $$

Međutim, kada imamo Lorentzov tip metrike na 4-mnogostrukosti Lorentzovog tipa kao u općoj teoriji relativnosti, *n-bein* zovemo *vier-bein* te gornju "transformaciju koordinata" pišemo kao:

[6] Naziv je nastao kao mutacija Njemačkog "n-nogu" (*drei-bein*, *vier-bein*...). Često se mogu sresti alternativni nazivi poput *triad*, *tetrad* (ovisno o n) ili *ennuple* i *frame*.

$$e^a{}_A e^b{}_B\, g_{ab} = \eta_{AB} \tag{41}$$

Tada *vier-bein* opisuje globalne Minkowski koordinate. One nisu nužno fizikalne jer mogu uključivati prostornolike udaljenosti. Također, uobičajeno se smatra da ako na jednom tenzoru zamjenimo mali latinski ili grčki indeks velikim latinskim indeksom, da smo zapravo "pretvorili" taj indeks pomoću odgovarajućeg *vier-beina*, kao u donjem primjeru spin-koneksije.

Prednost ovakvog naizgled nasumičnog izbora vektorskih polja je mogućnost drugačijeg zapisa informacija koje smo ranije "spremali" u koneksiju. Definirajmo "spin-koneksiju":

$$\omega^A{}_{BC} \equiv e^a{}_C\, e_b{}^A \nabla_a e^b{}_B \tag{42}$$

Treba napomenuti da po konvenciji velike latinske *vier-bein* indekse dižemo i spuštamo Minkowski metrikom η.

Komponente koneksije dobivamo direktnim uvrštavanjem kovarijantne derivacije:

$$\Gamma^a{}_{bc} = -e_b{}^A \partial_c e^a{}_A + \omega^A{}_{BC}\, e^a{}_A\, e_b{}^B e_c{}^C \tag{43}$$

Ovime datu koneksiju možemo interpretirati tako da ona definira naše "globalno prirodne" koordinate na mnogostrukosti. Koristan teorem zaključuje našu geometrijsku intuiciju oko *n-beinova*:

Riemannov tenzor iščezava ako i samo ako postoji *n-bein* polje takvo da $\Gamma^a{}_{bc} = -e_b{}^A \partial_c e^a{}_A$.

Dakle, mnogostrukost je ravna ako i samo ako $\gamma = 0$ i $\omega = 0$ u svim svojim komponentama.

Dodatna korisna veličina koju možemo definirati je koneksija u *vier-bein* zapisu koja ima drugačiji način transformacije zbog netenzorskog ponašanja. Iz zahtjeva $\nabla_A X^B = e^a{}_A\, e_b{}^B\, \nabla_a X^b$ slijedi:

$$\Gamma^C{}_{AB} = e^a{}_A\, e^b{}_B\, e_c{}^C\, \Gamma^c{}_{ab} - e^a{}_B\, \partial_A\, e_a{}^C \tag{44}$$

Antisimetriziranjem po indeksima A i B, imamo:

$$\Gamma^C{}_{[AB]} = T^C{}_{AB} - \omega^C{}_{[AB]} \tag{45}$$

Konačno, koristeći formalizam diferencijalnih formi, često se svi kovarijantni antisimetrični indeksi u gore uvedenim tenzorima kontrahiraju sa uobičajenom bazom $dx^{a_1} \wedge \ldots \wedge dx^{a_n}$. Tako da imamo:

$$e^A \equiv e_a{}^A \, dx^a \quad \Rightarrow \quad de^A = \omega^A{}_{[ab]} \, dx^a \wedge dx^b \equiv \Omega^A \tag{46}$$

Novi zapis nas vodi na takozvane Cartanove jednadžbe strukture, upotrebom (45) i (46):

- $\Gamma^C{}_B \equiv \Gamma^C{}_{Ab} \, dx^b \, ; \, T^A \equiv T^A{}_{bc} \, dx^b \wedge dx^c \quad \Rightarrow \quad S^A = de^A + \Gamma^A{}_B \wedge e^B$
- $R^A{}_B \equiv R^A{}_{Bcd} \, dx^c \wedge dx^d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} R^B{}_A = d\Gamma^B{}_A + \Gamma^B{}_M \wedge \Gamma^M{}_A$

Gdje je T torzija, a R Riemannov tenzor.

Literatura

[1] M. Visser, *Notes on differential geometry*

[2] R. Hammond, *Torsion gravity* ; Rep. Prog. Phys. 65 (2002) 599–649

[3] I. Smolić, *Skripta iz kolegija "Diferencijalna geometrija u fizici"*

[4] J. Garecki, *Is torsion needed in a theory of gravity? A reappraisal* [arXiv:1110.4251]

[5] A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A 209 248–58, 1948.