Geometrijska kvantizacija

Mate Picukarić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 19. rujna 2019.)

Koristći se metodama diferencijalne geometrije u ovom radu razjasnit ćemo sličnosti u matematičkim modelima kvantne i klasične fizike te prezentirati postupak dobivanja Hilbertovog prostora i operatora opsevrabli počevši od klasičnih opservabli i faznog prostora.

I. UVOD

Prelazak iz klasične fizike u kvantnu fiziku povijesno bio je jedan od najvećih skokova intuicije u znanosti. Osim što su s njim došle neke potpuno nove ideje o funkcioniranju svijeta u kojem živimo, vrlo je *ad hoc* uveden i matematički okvir koji koristitmo u kvantnoj fizici. Postupak kojim iz klasičnog prelazimo u kvantni sistem zove se *kvantizacija*. Neke od metoda kvantizacije su kanonska kvantizacjia, Feynmanovi integrali po putevima, Weyl-Wignerova kvantizacija i konačno geometrijska kvantizacija kojom ćemo se baviti. Za to je ključno smještanje klasične fizike u kontekst simplektičke geometrije, ali prije toga ćemo pojasniti matematičke strukture koje ćemo koristiti kroz rad.

II. MATEMATIČKI TEMELJI[1]

Veliku ulogu u geometrijskoj kvantizaciji odigrat će vektorska polja zbog čega ćemo prvo objasniti što ona predstavljaju na mnogostrukostima. Zbog toga što vektori u različitim točkama pripadaju različitim tangentnim prostorima potrebno je uvesti konstrukciju koja je sposobna objediniti sve vektore na mnogostrukosti u jedno tj. vlaknasti svežanj.

Definicija II.1. Vlaknasti svežanj je uređena četvorka (E, π, B, F) koju čine tri glatke mnogostrukosti: totalni prostor E, bazni prostor B i vlakno F, te neprekidna surjekcija $\pi : E \to B$ takva da svaka točka $b \in B$ ima okolinu O_b i homeomorfizam $\psi_\beta : \pi^{-1}(O_b) \to O_b \times F$.

Tangentni svežanj TM neke mnogostrukosti M ukratko možemo gledati kao totalni prostor vlaknastog svežnja kojemu je bazni prostor mnogostrukost, a vlakno izomorfno s tangentnim prostorom T_pM u nekoj točki $p \in M$ (analogno za kotangentni svežanj T^*M). Vektorska polja na mnogostrukosti tada će biti tzv. prerezi

Definicija II.2. Neka je $F \hookrightarrow E \to B$ vlaknasti svežanj. Lokalni prerez svežnja na nekom otvorenom skupu $O \subseteq B$ je neprekidno reslikavanje $s : O \to E$ koje zadovoljava $\pi \circ s = \mathrm{id}_b$. Ako je $O = B$ govorimo o globalnom prerezu svežnja.

* mate.picukaric@gmail.com

Također je bitno definirati simplektičku mnogostrukost koja će odigrati glavnu ulogu u nadolazećim poglavljima.

Definicija II.3. Simplektička mnogostrukost (M, ω_{ab}) je uređen par glatke 2n-mnogostrukosti M i nedegenerirane zatvorene 2-forme (simplektičke forme) ω_{ab}.

Pogledajmo sada s ovim alatima klasičnu mehaniku.

III. KLASIČNA MEHANIKA

U Hamiltonovoj formulaciji, klasična mehanika za sastojke ima $\mathbb{R}^{6N} = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ prostor s koordinatama $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, funkciju $H : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ te jednadžbe:

$$\frac{d\mathbf{r}}{t}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \tag{1}$$

Potpuno je legitimno pitanje "Zašto bismo uopće klasičnu mehaniku gurali u kontekst diferencijalne geometrije?". Jednostavnu motivaciju za to dobivamo ako pogledamo invarijanciju Hamiltonovih jednadžbi na promjenu koordinata. Naime, ako napravimo promjenu $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{r'}, \mathbf{p'})$ takvu da vrijedi:

$$\mathbf{r'} = \mathbf{r'}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{p'} = [(\frac{\partial \mathbf{r'}}{\partial \mathbf{r}})^{-1}]^T \mathbf{p} \tag{2}$$

Hamiltonove jednadžbe ostaju nepromijenjene. S druge strane, dotična promjena koordinata odgovara promjeni koordinata kotangentnog svežnja T^*Q zadanog koordinatama $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r'}$ na Q (ovdje je Q konfiguracijski prostor) te $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p'}$ na vlaknima. Ovo navodi na zaključak da klasična mehanika ima koordinatno neovisnu formulaciju u kontekstu faznog prostora T^*Q, funkcije $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ te Hamiltonovih jednadžbi (1). Vidljivo je da su rješenja Hamiltonovih jednadžbi neke krivulje na mnogostukosti.

Koordinatno neovisnu formulaciju klasične mehanike postižemo simplektičkom mnogostrukosti. Uzmimo kao primjer $\mathbb{R}^{2N}$ te 2-formu $\omega = \sum_{i=1}^{N} dp_i \wedge dq_i$. Definiramo Hamiltonsko vektorsko polje X_H na mnogostrukosti na sljedeći način:

$$\omega \lrcorner X_H = -dH \tag{3}$$

S obzirom da je ω po definiciji nedegenerirana, jednadžba ima rješenje. Kako bismo opravdali ovu definiciju pogledajmo komponente dH:

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) \tag{4}$$

Što uz jednadžbu (3) daje:

$$X_H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \tag{5}$$

Prisjetimo se jednadžbi integralnih krivulja nekog vektorskog polja A koje glase:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(\mathbf{x}(t)) \tag{6}$$

Gdje su x_i koordinate, a X_i odgovarajuće komponente vektora te t neki parametar. Vidljivo je iz (5) da ako umjesto A uvrstimo X_H točno smo reproducirali Hamiltonove jednadžbe gibanja. Vidimo da su rješenja naših jednadžbi gibanja zapravo integralne krivulje vektorskog polja X_H. Darbouxov teorem simplektičke geometrije govori da je svaka simplektička mnogostrukost lokalno simplektomorfna $(\mathbb{R}^{2N}, \omega_0)$ uz odgovarajući N (simplektomorfizmi su difeomorfizmi $T : M \to M$ takvi da $T^*\omega = \omega$, tj. čuvaju simplektičku formu). Iz toga slijedi da dotični zaključak lokalno vrijedi za bilo koju simplektičku mnogostrukost.

Na poslijetku, bitno je naglasiti kako je Poissonova zagrada dvije glatke funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ dana s:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{7}$$

IV. KVANTNA MEHANIKA

Kvantna mehanika obično je smještena u formalizam Hilbertovog prostora. Problem kod takve formulacije je u činjenici da ne postoji 1-1 korespondencija između vektora u Hilbertovom prostoru i stanja fizikalnog sistema. Naime, svi vektori skupa $\mathbb{C}\psi = \{\lambda\psi | \lambda \in \mathbb{C}\}$ predstavljaju isto fizikalno stanje. Fizikalna stanja su s druge strane jedinstveno prikazana u projektivnom Hilbertovom prostoru $\mathbb{P}\mathcal{H}$ u kojemu svi elementi skupa $\mathbb{C}\psi$ predstavljaju istu točku.

Dinamikom kvantnog sustava upravlja Schrödingerova jednadžba uz pripadni Hamiltonijan:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{H}\psi \tag{8}$$

S obzirom da je Hamiltonijan (kao i svaka druga opservabla) Hermitski operator, po Stoneovom teoremu postoji jednoparametarska grupa unitarnih transformacija $\mathcal{H}$ kojoj je $i\mathbb{H}/\hbar$ infinitezimalni generator tj.:

$$U(\tau) = exp(i\tau\mathbb{H}/\hbar) \tag{9}$$

Rješenja Schrödingerove jednadžbe tada su vektori $\psi(\tau) = U(\tau)\psi$ gdje je ψ početni uvjet. Vidljivo je da je to kompatibilno s nejedinstvenosti definicije fizikalnog sistema u Hilbertovom prostoru s obzirom da množenje kompleksnim brojem i djelovanje operatora (9) komutiraju.

Može se pokazati[2] da je projektivni prostor $\mathbb{P}\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalna kompleksna mnogostrukost sa kanonski definiranom simplektičkm formom ω. Također postoji jednoparametarska grupa difeomorfizama ϕ_τ takva da vrijedi:

$$\pi \circ U(\tau) = \phi_\tau \circ \pi \tag{10}$$

Gdje je U dan jednadžbom (9), a π je projekcija $\pi : \mathcal{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}\mathcal{H}$ koja identificira vektor $\psi \in \mathcal{H}$ s pripadnim skupom $\mathbb{C}\psi$ koji odgovara točki u $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Funkcija očekivane vrijednosti Hamiltonijana $E(\mathbb{H}) : \mathbb{P}\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definirana kao:

$$E(\mathbb{H})(\pi\psi) = \frac{\langle\psi|\mathbb{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{11}$$

igra, kao i u klasičnoj mehanici, ulogu induciranja Hamiltonovog vektorskog polja $X_{E(\mathbb{H})}$ pomoću simplektičke forme (na $\mathbb{P}\mathcal{H}$!) i jednadžbe (3). Tada su difeomorfizmi ϕ_τ koji su sadržavali bitne informacije o dinamici sustava ništa drugo nego tok ovako definiranog Hamiltonovog vektorskog polja.

V. KRATAK OSVRT

Bitno je zastati i prokomentirati fizikalne karatkeristike određenih komponenti simplektičke formulacije. Fazni prostor T^*Q te projektivni Hilbertov prostor služe za strukturiranje svih mogućih stanja u kojijma se sustav nalazi, Hamiltonijan našeg fizikalnog sustava daje nam informaciju o "okolini" u kojoj se sustav nalazi, a simplektička forma ω informaciju o okolini prevodi u reakciju sistema. Moglo bi se reći da je u simplektičkoj formi na mnogostrukosti sadržana fizika dinamičkog sustava, a pravilno biranje Hamiltonijana svodi se na znanje o kodiranju okoline u kojoj se sustav nalazi.

U prethodna dva poglavlja postigli smo analogiju u formulaciji kvantne i klasične mehanike pomoću simplektičke geometrije. Sljedeći korak je pristupiti kvantizaciji klasičnog sistema, a prvi korak u tome je predkvantizacija.

VI. PREDKVANTIZACIJA

Prije nego što uđemo u postupak predkvantizacije bitno je smjestiti kvantnu mehaniku u nešto pogodniji prostor. Zbog toga što projektivni prostori znaju biti nezgodni za rad, koristit ćemo se strukturom jedinične sfere u Hilbertovom prostoru $S\mathcal{H} = \{\psi \in \mathcal{H} | \langle\psi, \psi\rangle = 1)\}$. U ovom prostoru stanja sustava prikazana su krugom zbog toga što $\psi, \psi e^{i\theta} \in S\mathcal{H}$ predstavljaju isto stanje za svaki $\theta \in \mathbb{R}$. S druge strane Hamiltonovo polje je puno jednostavnije za prikazati jer ga možemo definirati kao:

$$X_H = \frac{i}{\hbar}\mathbb{H}\psi \tag{12}$$

iz čega je jasno vidljivo da su rješenja Schrödingerove jednadžbe integralne krivulje vektorskog polja X_H. Bitno je primjetiti da je X_H tangentan na $S\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ jer je propagator za Schrödingerovu jednadžbu unitaran operator pa čuva duljinu vektora (koja za vektore iz $S\mathcal{H}$ ostaje 1). Formalna definicija predkvantizacije[3] glasi:

Definicija VI.1. Neka je $\mathcal{P}$ podalgebra Poissonove algebre $(C^\infty(M), \{.,.\})$ koja sadrži konstantnu funkciju 1. Predkvantizacija $\mathcal{P}$-a je linearno preslikavanje Ω iz $\mathcal{P}$ u linearni prostor simetričnih operatora koji ostavljaju fiksnu neku gustu domenu unutar nekog separabilnog Hilbertovog prostora. Sljedeća svojstva moraju biti zadovoljena:

1. $\Omega(\{f,g\}) = \frac{i}{\hbar}[\Omega(f), \Omega(g)]$; $f, g \in C^\infty(M)$
2. $\Omega(1) = \mathbb{I}$
3. Kada je X_H potpun Ω je Hermitski

Nećemo ulaziti u sve potankosti definicije jer izlaze iz opsega ovog referata, ali možemo objasniti pozadinu nekih od dijelova definicije. Za početak govorimo o podalgebri Poissonove zagrade jer pretpostavljamo da neće sve glatke funkcije predstavljati neku fizikalnu observablu. Zahtjev 1. implicira da je dotično linearno preslikavanje homomorfizam takav da čuva povezanost Poissonovih zagradi i komutatora operatora što je i sam Dirac naglašavao. Zahtjev 2. predstavlja ideju da ako u klasičnom smislu mjerenje uvijek daje 1 mora davati i u kvantnom.

Primjetimo da je ova definicija izrečena bez poziva na bilo koja specifična svojstva mnogostrukosti M i Hilbertovog prostora. Pokušat ćemo, opremljeni samo (M, ω), doći do zadovoljavajućeg Hilbertovog prostora.

Komentar VI.1. Dalje kroz tekst Hilbertov prostor graditćemo u koracima, u svakom koraku uvodeći modifikacije na postojeću strukturu. Dešavat će se tako da se na isti način kroz tekst referiramo na različite stvari. Neka to ne zbuni čitatelja, "Hilbertov prostor $\mathcal{H}$" uvijek se odnosi na zadnje napravljenu strukturu, osim ako nije rečeno suprotno.

Način kojim ćemo to napraviti je uvođenjem kompleksnog linijskog svežnja (vlaknasti svežanj kojemu je vlakno jednodimenzionalni vektorski prostor nad nekim poljem) L nad M. Tada uzimamo skup svih prereza L, označen s $\Gamma(L)$, kao Hilbertov prostor. Ono što želimo sada napraviti je pridružiti svakoj klasičnoj observabli $f \in C^\infty(M)$ operator $\hat{f} : \Gamma(L) \to \Gamma(L)$. Neka je $s \in \Gamma(L)$. Tada definiramo[3]

$$\alpha(f)(s) = \hat{f}(s) = -i\hbar\nabla_{X_f} s + fs \tag{13}$$

Ovdje je X_f Hamiltonovo vektorsko polje dobiveno iz (3) definirano funkcijom f, dok je ∇ kovarijantna derivacija. Hoće li ova konstrukcija zadovoljavati svojstvo 1. iz definicije VI.1. ovisi o izboru koneksije tj. kovarijantne derivacije na L. Svojstvo 1. će biti ispunjeno ako na L postoji kovarijantna derivacija ∇ čija je zakrivljenost ω. Uvjeti za postojanje ovakve kovarijatne derivacije na nekoj simplektičkoj mnogostrukosti[4] izlaze iz okvira ovog rada iako nosi vrlo bitne intrinzične uvjete kvantizacije kvantnih observabli (npr. iz dotičnog uvjeta za česticu angularnog momenta - fazni prostor S^2 - prirodno izlazi kvantizacija spina u kvantnoj mehanici). Nasreću, za sve fazne prostore M koji su konstruirani kao kotangentni svežanj nekog konfiguracijskog prostora T^*M možemo pronaći prikladnu kovarijantnu derivaciju stoga ćemo okrenuti pažnju na njih.

Kako bismo pobliže objasnili kako proces predkvantizacije izgleda izvest ćemo korak po korak proceduru na primjeru faznog prostora $\mathbb{R}^{2N}$ i kanonske forme ω_0. Prije toga valjalo bi izreći jedan teorem koji će biti od važnosti kasnije.

Teorem VI.1. *Preslikavanje $f \to X_f$ je homomorfizam Liejevim algebri iz $C^\infty(M)$, $\{.,.\}$) u $(V(M), [.,.])$ gdje $V(M)$ označava skup svih vektorskih polja na M.*

Dokaz: *Potrebno je dokazati da je ovakvo preslikavanje linearno nad $\mathbb{C}$ te da čuva Poissonove zagrade. Iz jednadžbe (7) poznato nam je da se Poissonova zagrada dvije funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ može pisati kao $\omega(X_f, X_g)$ iz čega direktno slijedi bilinearnost nad $\mathbb{C}$ te antisimetričnost. Nadalje, ako su X_f i X_g Hamiltonova vekorska polja (dana jednadžbom (3)) funkcije f i g tada je:*

$$[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = -d\omega(X_f, X_g)$$

S obzirom da

$$-d\omega(X_f, X_g) = X_{\omega(X_f,X_g)} \lrcorner\, \omega = X_{f,g} \lrcorner\, \omega$$

ili

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}} \quad \square$$

Pogledajmo sada postepeno postupak predkvantizacije.

Predkvantizacija $(\mathbb{R}^{2N}, \omega_0)$

Simplektička mnogostrukost kojom smo opremljeni je fazni prostor jedne čestice u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, tj. $M = \mathbb{R}^{2N}$. U ovom slučaju opremljeni smo i Liouvilleovom formom $\epsilon_L = dp_1 \wedge ... \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge ... \wedge dq_n$ na $\mathbb{R}^{2N}$ pa imamo kanonsku definiciju Hilbertovog prostora: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2N}, \epsilon_L)$. Prisjetimo se također i kanonske forme $\omega_0 = \sum_{i=1}^{N} dp_i \wedge dq_i$ gdje su nam koordinate faznog prostora r_i i p_i. Uvest ćemo sada na našoj mnogostrukosti glavni svežanj $Y = M \times U(1)$ i projekciju $\pi : Y \to M$, $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, e^{i\theta}) \to (\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Neka su nadalje $X : M \to \mathbb{R}^{2N}$ vektorska polja na M te $V : Y \to \mathbb{R}^{2N+1}$ vektorska polja na Y. Hamiltonovo vektorsko polje X_f definirano jednadžbom (3) za neku funkciju f glasi:

$$X_f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\right) \tag{14}$$

Preslikavanje $\Omega : f \to -i\hbar X_f$ očito je linearno i zadovoljava po Teoremu VI.1. svojstvo 1. iz definicije VI.1. Problematična je jezgra ovakvog preslikavanja koja se sastoji od svih konstantnih funkcija zbog čega ovakvo preslikavanje nije injektivno. Ako, s druge strane, pogledamo vektorska polja V_f definirana na sljedeći način:

$$V_f(\mathbf{r},\mathbf{p},\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r},\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{p}), f(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r},\mathbf{p})\right) \tag{15}$$

Postigli smo injektivni homomorfizam Liejevih algebri $\Omega : f \to -i\hbar V_f$. Naravno, promatranjem V_f-a moramo redefinirati naš Hilbertov prostor koji je sada jednak $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2N} \times U(1), \epsilon_Y)$ gdje je $\epsilon_Y = dp_1 \wedge ... \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge ... \wedge dq_n \wedge d\theta$. Treća komponenta ovog vektora nije ništa drugo nego negativni Lagranžijan ovog sustava $-\Lambda$. Pogledajmo sada integralne krivulje vektorskog polja V_f. Prve dvije koordinate integralnih krivulja na Y dobivamo integralne krivulje vektorskog polja X_f na M tj $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{p}(t)$. Kako bismo dobili treću komponentu moramo riješiti jednadžbu $\dot{\theta} = -\Lambda$:

$$\theta(t) = -\int_{t_0}^{t} \Lambda ds + \theta(t_0) \tag{16}$$

što znači da imamo:

$$e^{i\theta(t)} = e^{i\theta(t_0)} exp\left(i\int_{t_0}^{t} H(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r},\mathbf{p})ds\right) \tag{17}$$

Gdje su $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$ funkcije od s. Ovo je fazni faktor u Feymannovom integralu po putevima. Vidimo da smo uspjeli našim jednostavnim modelim reproducirati jedan vrlo kvantnomehanički fenomen.

Vidljivo je da u trenutnoj definiciji preslikavanje $\Omega : f \to -i\hbar V_f$ ne zadovoljava svojstvo 2. definicije VI.1. Za konstantnu funkciju $c = 1$ preslikavanje $\Omega : f \to -i\hbar V_f$ dalo bi:

$$-i\hbar V_c(\mathbf{r},\mathbf{p},\theta) = (0, 0, -i\hbar) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{18}$$

Ovaj problem možemo razriješiti tako da reduciramo naš trenutni prostor (koji se sastoji od svih kvadratno integrabilnih kompleksnih funkcija na Y) na prostor funkcija za koje operator V_c stvarno jest identiteta tj.:

$$\mathcal{H}' = \{f \in \mathcal{H} | f(\mathbf{r},\mathbf{p},\theta) = g(\mathbf{r},\mathbf{p})e^{i\theta/h}\} \tag{19}$$

Ova konstrukcija koja zadovoljava većinu zahtjeva kvantizacije koji se intuitivno nameću daje težinu našoj jednostavnoj strukturi Y zbog čega ona dobiva ime "predkvantizacijski svežanj". Zanimljivo je pogledati što se dobije uvrštavanjem kanonskih funkcija u formulu (15). Ako uvrstimo $\mathbf{p}$ dobit ćemo:

$$\Omega(\mathbf{p}) = -i\hbar\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i\hbar\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{p} - \mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

Što točno odgovara uobičajenoj Schrödingerovoj kvantizaciji. Za $\mathbf{r}$ dobivamo $\Omega(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ što očito ne odgovara Schrödingerovoj kvantizaciji. Takva činjenica se podudara sa zaključkom Van Hovea[6] koji je naglasio nekompatibilnost nekih od zahtjeva prekvantizacijske strukture. Hilbertov prostor $\mathcal{H}'$ još uvijek je prevelik za naše potrebe. Daljnje rezanje i poliranje Hilbertovog prostora opisat ćemo ukratko u sljedećem poglavlju.

VII. GEOMETRIJSKA KVANTIZACIJA

Pažljivi čitatelj primjetit će jedan detalj kojem smo dosad vješto izbjegavali pridati pažnju. Naime, naš Hilbertov prostor (19) sadrži funkcije izvrijednjene u $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$ istovremeno. S druge strane, valne funkcije fizikalnog Hilbertovog prostora izvrijednjene su npr. samo u $\mathbf{r}$, a pripadajuća funkcija izvrijednjena u $\mathbf{p}$ dobiva se promjenom baze. Malo formalnije, fizikalni Hilbertov prostor 2N-dimenzionalnog faznog prostora u potpunosti je određen s N nezavisnih koordinata. Izabir dotičnih N koordinata u geometrijskoj kvantizacijij zove se polarizacija. Nju radimo tako da u svakoj točki faznog prostora M izaberemo lagranžijanski[4] potprostor $P(p)$ tangentnog prostora T_pM dimenzije N koji zadovoljava:

$$[X, Y] \in P(p) \quad , \forall X, Y \in P(p)$$

Potprostori u točkama moraju biti glatko slijepljeni i tada govorimo o distribuciji. To možemo napraviti zadavanjem skupa funkcija $\{f_1, ..., f_N\}$ na M koje u točki p određuju vektore potprostora. Novokonstruirani Hilbertov prostor za polarizaciju tada je skup svih funkcija na Y (iz poglavlja o predkvantizaciji) za koje je $\Omega(1) = \mathbb{I}$ te koje ovise samo o koordinatama $f_1, ..., f_N$, a norma im je zadana integriranjem samo po koordinatama $f_1, ..., f_N$. Primjer polarizacija bili bi $P_r = \{r_1, ...r_N\}$ i $P_p = \{p_1, ...p_N\}$ koje daju analogne Hilbertove prostore $\mathcal{H}_r$ i $\mathcal{H}_p$ kvadratno integrabilnih funkcija s obzirom na Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^N$. Još jedan primjer je polarizacija dana funkcijama $z_j = p_j + ir_j$ tj. $P_z = \{z_1, ...z_n\}$. Hilbertov prostor $\mathcal{H}_z$ odgovara prostoru funkcija neovisnih o koordinatama $z_j^\dagger$, kvadratno integrabilnih s obzirom na Gaussijansku mjeru $exp(-\sum_j |z_j|^2)$ na $\mathbb{C}^N$. Zadovoljavajuća je činjenica da se u polariziranom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_r$ uspješno reproducira Schrödingerova kvantizacija. Između navedenih Hilbertovih prostora postoji unitarna ekvivalentnost, iako to ne mora uvijek biti slučaj. Postoji također tehnički problem u definiranju integrala po koordinatama $\{f_1, ..., f_N\}$. Taj se problem rješavao uvođenjem "polu-gustoća" i "polu-formi", a više informacija o tome može se pronaći u [4].

VIII. ZAKLJUČAK

U ovom radu proučavali smo poveznicu klasičnog i kvantnog sustava, točnije klasičnog faznog prostora M

i Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ kao simplektičkih mnogostrukosti. Uvođenjem glavnog svežnja $Y = M \times U(1)$ s adekvatnom koneksijom uspjeli smo pronaći morfizam algebri Poissonovih zagrada i komutatora vektorskih polja sa zadovoljavajućim svojstima. Zbog toga što smo samo djelomično replicirali kanonsku kvantizaciju s postojećim Hilbertovim prostorom (19) i što smo imali nepodudarnost tog prostora s fizikalnim morali smo prionuti polarizaciji. Ukratko smo objasnili proces polarizacije i dali primjere nekih polarizacija. Geometrijska kvantizacija je još uvijek otvoreno područje s brojnim popravkama koje obuhvaćaju sve veće početne fazne prostore (ne samo kotangente svežnjeve konfiguracijskih prostora). Postoje brojni detalji vezani uz razne dijelove kvantizacijskog postupka koji konstantno rade na poopćavanju i primjenjivosti ove tehnike.

[1] I. Smolić: "Diferencijalna geometrija u fizici: bilješke, skice i škrabotine" - Sveučilište u Zagrebu 2019.

[2] G.M. Tunyman: "Generalised Bergman kernels and geometric quantization" - J.Math.Phys. 28(1987)p573-583

[3] J. Geraci: "An introduction to geometric prequatization"

[4] N.M.J. Woodhouse: "Geometric quantization" - Clarendon press, Oxford 1991.

[5] G.M. Tunyman: "What is prequantization, and what is geomtric quantization" - Proc. Seminar 1989-1990 on Mathematical Structures in Fielt Theory. CWI Syllabi 39, Math. Centrum, Centrum Wisk. Inform., Amstedram 1996.

[6] L.Van Hove: "Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations" - Memoires de l'Académie Royale de Belgique 26 #6 1951.