Spinorni formalizam u elektrodinamici

Nikola Herceg[a)]

Fizikalne veličine u prostorvremenu standardno zapisujemo u formalizmu tenzora kao multilinearnih produkata četvetovektorskih prostora na pseudo-Riemannovoj mnogostrukosti. Ideja je prvo četverovektore prevesti u jezik kompleksnih dvovektora te uvesti dodatnu algebarsku strukturu koja će imati svojstva analogna metrici u Minkowski prostoru četvetovektora. Time ulogu Lorentzovih transformacija $SO(1,3)$ preuzima njen dvostruki natkrivač $SL(2,\mathbb{C})$. U prvom poglavlju konstruiramo prostor spinora, a u drugom spinorni formalizam primjenjujemo u elektrodinamici.

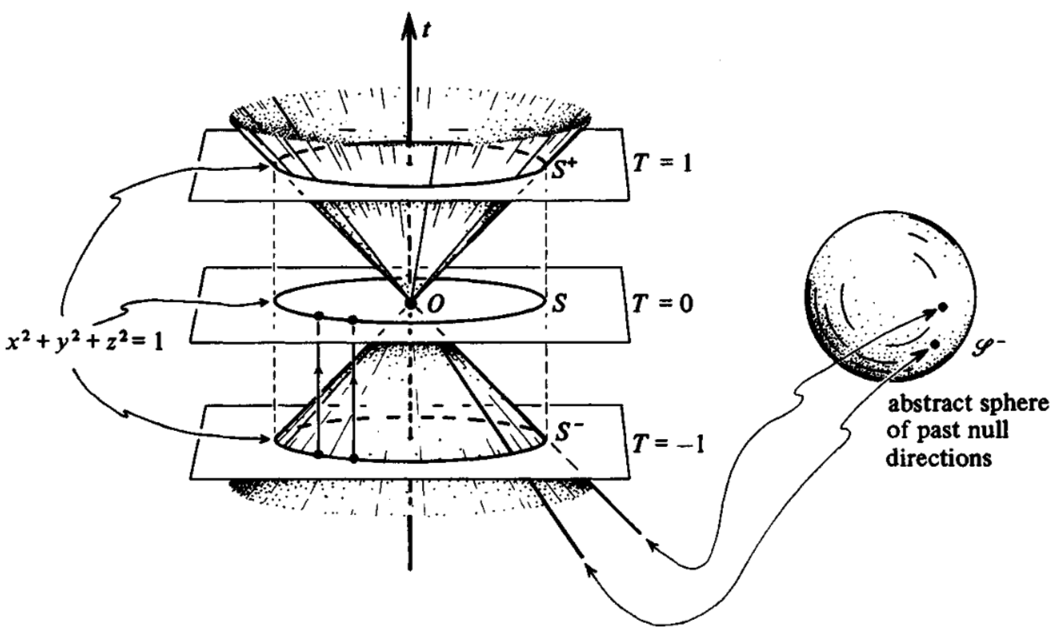
I. SPINORNI FORMALIZAM

U ovom poglavlju prvo dajemo geometrijski uvod, zatim algebarski te na kraju pokazujemo ekvivalentnost dva pristupa.

A. Geometrijska slika

Promotrimo koordinatni četverovektor u sustavu nekog promatrača O. On se nalazi u četverodimenzionalnom Minkowski prostorvremenu. Neka je $U = (t, x, y, z)$ proizvoljni svjetlosni vektor iz ishodišta. Vrijedi

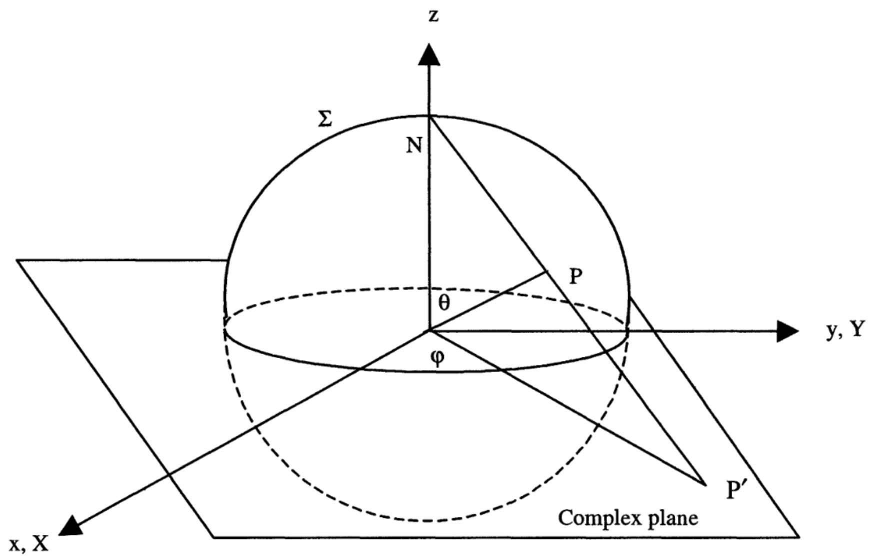
$$U^2 = U^a U_a = U^a U^b \eta_{ab} = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0. \tag{1}$$



Slika 1: Nul-smjerovi u 2 + 1 dimenzije. [1]

---

a)email: nikolaherceghr@gmail.com



Slika 2: Stereografska projekcija. [2]

Za ilustraciju promatramo 2+1 Minkowski prostorvrijeme prikazano na slici 1. Presjek svjetlosnog stošca s hiperravninom $T \neq 0$ je kružnica, a u našem 4D prostovremenu sfera. Kako je $t = T \neq 0$, promatramo trovektor $(x/t, y/t, z/t)$, koji daje prostorni smjer vektora U. Dijeljenjem jednadžbe (1) s t^2 slijedi

$$(x/t)^2 + (y/t)^2 + (z/t)^2 \overset{t=\pm 1}{\equiv} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{2}$$

tj. svi smjerovi u prostoru tvore sferu radijusa 1. Za $t = +(-)1$ dobivamo buduću (prošlu) nebesku sferu, $S^{+(-)}$.

Prošla sfera je ono što će promatrač koji ima četverobrzinu $(1, \mathbf{0})$ vidjeti u svom sustavu za jednu sekundu jer su fotoni koji su prije jednu sekundu putovali prema njemu bili točno na S^-. Smjerove u prostoru prema jednadžbi (2) možemo preslikati na prošlu (ili buduću) nebesku sferu. Stereografsku projekciju sa sjevernog pola (N) sfere $S \equiv S^{\pm}$ na kompleksnu ravninu (slika 2) definiramo kao bijekciju $\{S \setminus N\} \to \mathbb{C}$:

$$\xi = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{3}$$

Inverzno preslikavanje dano je s

$$x = \frac{\xi + \bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + 1}, \quad y = \frac{i(\bar{\xi} - \xi)}{\xi\bar{\xi} + 1}, \quad z = \frac{\xi\bar{\xi} - 1}{\xi\bar{\xi} + 1}. \tag{4}$$

Sferu u kontekstu ovog preslikavanja (stereografske projekcije) zovemo Riemannova sfera. Iz jednadžbe (3) vidimo da ξ divergira na sjevernom polu. Ako $\xi = \zeta/\eta$ predstavimo količnikom neka dva nova kompleksna broja, osim što ćemo regularizirati sjeverni pol (on sad postaje par $(\zeta, 0)$), dobit ćemo i nove stupnjeve slobode koji će nam omogućiti tretman šireg skupa četverovektora. Zasad smo preslikali samo vektore svjetlosnog tipa s fiksnim vremenom T.

Ovom zamjenom jednadžba (4) postaje

$$x = \frac{\zeta\bar{\eta} + \bar{\zeta}\eta}{\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta}}, \quad y = \frac{i(\bar{\zeta}\eta - \zeta\bar{\eta})}{\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta}}, \quad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - \eta\bar{\eta}}{\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta}}.$$

Jednadžba (2) sugerira da izraz u nazivniku poistovjetimo s T. Uz konvencionalni faktor $1/\sqrt{2}$, za koordinate dobivamo:

$$\begin{array}{ll} T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta}), & X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta\bar{\eta} + \eta\bar{\zeta}) \\ Y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\zeta}\eta - \eta\bar{\zeta}), & Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta\bar{\zeta} - \eta\bar{\eta}). \end{array} \tag{5}$$

No ovime i dalje nismo pokupili sve moguće četverovektore jer vrijedi $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$. Ali zato imamo sve svjetlosne vektore za $T > 0$ ili $T < 0$, tj. pola svjetlosnog stošca. Pošto dva kompleksna broja imaju 4 realna parametra, a svjetlosni vektori 3, postoji redundantnost u zapisu. Nju vidimo iz toga što varijable ζ i η dolaze u parovima $\zeta\bar{\eta}, \eta\bar{\zeta}, \zeta\bar{\zeta}$ i $\eta\bar{\eta}$, što je invarijantno na zamjenu $(\eta, \zeta) \to (e^{i\theta}\eta, e^{i\theta}\zeta)$.

Promotrimo sad općenite linearne transformacije para (ζ, η). One su dane s 4 kompleksna broja a, b, c, d:

$$\begin{array}{l} \zeta \to \hat{\zeta} = a\zeta + b\eta \\ \eta \to \hat{\eta} = c\zeta + d\eta. \end{array} \tag{6}$$

Riemannova sfera se onda transformira kao

$$\xi \to \hat{\xi} = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}. \tag{7}$$

Uz dodatan uvjet[1] $ad - bc \neq 0$, ovo je holomorfna transformacija u kompleksnoj ravnini poznata pod imenom Möbiusova transformacija[3]. Matrični zapis jednadžbe (6) je:

$$\begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = \det \mathbf{S} = 1$$

U trećem potpoglavlju ćemo vidjeti kako 2×2 kompleksne matrice s jediničnom determinantom, koje tvore grupu $SL(2, \mathbb{C})$, odgovaraju Lorentzovim transformacijama.

B. Algebarska slika

Cilj nam je par (ζ, η) obogatiti dodatnom algebarskom strukturom, konkretno skalarnim produktom. U trećem potpoglavlju pokazat ćemo da je ta struktura analogna Minkowski metrici. U ostatku potpoglavlja sljedimo uglavnom [4] uz ponešto [2] Neka je S dvodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Definicija I.1 ***Simplektička struktura*** *na parno dimenzionalnom vektorskom prostoru S je bilinearna, antisimetrična, nedegenerirana 2-forma $\epsilon \equiv [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}] : S \times S \to \mathbb{C}$, za sve $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in S$. Prostor S skupa s $[\cdot, \cdot]$ zovemo* ***simplektički vektorski prostor****.*
Linearnu transformaciju $Q : S \to S$ zovemo ***simplektičkom*** *ako čuva produkt, tj. $[Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\zeta}] = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}]$ za sve $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}$. Općenito, skup svih simplektičkih transformacija prostora $\mathbb{C}^{2n}$ tvori* ***simplektičku grupu*** *pripadne dimenzije, $Sp(2n)$.*

U slučaju kad je S dvodimenzionalan, $Sp(2)$ je izomorfna $SL(2)$, što ćemo kasnije pokazati. Korisno je napraviti usporedbu s Euklidskim i Lorentzovim skalarnim produktom. U Euklidskom svaki vektor pomnožen sa sobom daje pozitivan broj, dok je u Lorentzovom taj broj općenito realan i jednak je nuli samo za vektore svjetlosnog tipa. No u antisimetričnom produktu, svaki je vektor sam sebi ortogonalan.
Posebno u dvodimenzionalnom S, vektori proporcionalni sami sebi ujedno su i jedini međusobno ortogonalni

[1] U suprotnom se transformacija svodi na konstantu $f(z) = a/c$.

vektori.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, postoje η i $\zeta \neq c\eta$ t.d. $[\eta, \zeta] = 0$. Kako je S dvodimenzionalan, η i ζ tvore bazu. No iz toga slijedi da je produkt svih vektora s η jednak nuli, a pošto je $\eta \neq 0$, ovo je kontradikcija s pretpostavkom nedegeneriranosti. $\square$

Dakle, postoje η i ζ takvi da $[\eta, \zeta] = c \neq 0$. Stoga za proizvoljni η možemo pronaći ζ i podijeliti ga s c t.d. $[\eta, \zeta] = 1$. Svi takvi parovi tvore bazu.

Definicija I.2 *Neka su $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota} \in S$ te je $\boldsymbol{\iota}$ izabran tako da je $[\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota}] = 1$. Tada par $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota})$ tvori* ***spin bazu*** *na S.*

Baza nam omogućuje da komponente (ζ^0, ζ^1) proizvoljnog spin-vektora $\boldsymbol{\zeta} \in S$ definiramo kao:

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta^0 \boldsymbol{o} + \zeta^1 \boldsymbol{\iota} = (\zeta^0, \zeta^1), \tag{8}$$

gdje su

$$\zeta^0 = [\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\iota}] = -[\boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\zeta}], \quad \zeta^1 = [\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\zeta}] = -[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{o}],$$

te vrijedi:

$$\boldsymbol{o} = (1, 0), \quad \boldsymbol{\iota} = (0, 1).$$

Koristimo konvenciju u kojoj su vektor $\boldsymbol{\zeta}$ i njegove komponente ζ^0, ζ^1 pisane istim slovom grčkog alfabeta. U daljnjim tvdrnjama pretpostavljamo da smo fiksirali bazu $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota})$.

Definicija I.3 *Svakom spinoru $\boldsymbol{\zeta} = \zeta^0 \boldsymbol{o} + \zeta^1 \boldsymbol{\iota} \in S$ pridružen je $\boldsymbol{\zeta}^* = \zeta_0 \boldsymbol{o}^* + \zeta_1 \boldsymbol{\iota}^* \in S^*$, gdje je S^** ***dualni prostor*** *prostoru $S \implies S^* : S \to \mathbb{C}$. Dualni spinori (vektori) $\boldsymbol{o}^*$ i $\boldsymbol{\iota}^*$ tvore bazu dualnog simplektičkog prostora i dani su definicijom $\boldsymbol{o}^*(\boldsymbol{\zeta}) = [\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\zeta}])$, te $\boldsymbol{\iota}^*(\boldsymbol{\zeta}) = [\boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\zeta}]$.*

Pri konstrukciji dualnog prostora korišten je kanonski (ovisi o bazi) izomorfizam $S \to S^*$. Komponentni zapis produkta dva spinora je

$$[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}] = \zeta^0 \eta^1 - \zeta^1 \eta^0 = \zeta^A \eta^B \epsilon_{AB},$$

gdje se podrazumijeva Einsteinova konvencija. Uvjet da $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota})$ tvore ortonormiranu spin-bazu svodi se na

$$\epsilon_{AB} o^A o^B = \epsilon_{AB} \iota^A \iota^B = 0, \quad \epsilon_{AB} o^A \iota^B = -\epsilon_{AB} \iota^A o^B = 1.$$

Iz tog slijedi da komponente 2-forme $\boldsymbol{\epsilon}$ matrično možemo pisati kao

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponente dualnog vektora dobivamo preko

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \epsilon_{AB} \xi^A \eta^B = \left(\epsilon_{AB} \xi^A\right) \eta^B = \xi_B \eta^B.$$

Očito je

$$\xi_B = \epsilon_{AB} \xi^A = \xi^A \epsilon_{AB}.$$

Kako je $[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}] = \zeta^0 \eta^1 - \zeta^1 \eta^0 = \zeta_0 \eta^0 + \zeta_1 \eta^1$, komponente dualnog spinora su

$$\zeta_0 = -\zeta^1, \quad \zeta_1 = \zeta^0. \tag{9}$$

Negativni inverz 2-forme $\boldsymbol{\epsilon}$ je

$$\epsilon^{AB} = -\left(\epsilon^{-1}\right)^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenzore ϵ^{AB} i ϵ_{AB} možemo koristiti za podizanje i spuštanje indeksa analogno metrici. Pritom moramo paziti na poredak indeksa jer je ϵ antisimetričan. Spuštanje indeksa prikazano je u jednadžbi (11). Podizanje dobivamo preko

$$[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}] = \zeta^A \eta^B \epsilon_{AB} = \zeta_A \eta^A = -\zeta^A \eta_A = \zeta_A \epsilon^{AB} \eta_B \implies \eta^A = \epsilon^{AB} \eta_B.$$

Dakle, pravila za dizanje i spuštanje su:

$$\zeta^A = \epsilon^{AB} \zeta_B, \tag{10}$$

$$\zeta_B = \zeta^A \epsilon_{AB}, \tag{11}$$

a u njihovu točnost lako se uvjerimo uvrštavanjem $A, B \in \{0, 1\}$ i usporedbom s (9). Trik kojim pamtimo poredak je pravilo da su slijepi indeksi (oni koji se kontrahiraju) uvijek susjedni i leže na pravcu sjeverozapad-jugoistok. Alternativno, left to lower, right to rise.

Slijede neka elementarna svojstva $\boldsymbol{\epsilon}$ spinora:

$$\begin{aligned} I.&\quad \epsilon^{AB}\epsilon_{AC} = \delta^B_C = \epsilon_C{}^B \\ II.&\quad -\epsilon_{BA}\epsilon^{CB} = \delta^C_A = -\epsilon^C{}_A \\ III.&\quad \epsilon_A{}^B = -\epsilon^B{}_A \\ IV.&\quad \epsilon^{AB} = -\epsilon^{BA} \end{aligned}$$

Dokaz: I. Naizgled nije jasno da li se indeks diže ili spušta. Točno rješenje vidi se preimenovanjem $B \to C$ u (11), jer ne postoji takvo preimenovanje u (10); II. Slično, preimenovanjem $AB \to BA$ u (11); III. Zamjenom $CA \to AX$ u I i $CB \to BX$ u II te korištenjem IV dobivamo jednakost lijevih strana iz čega slijedi tvrdnja. Svojstvo IV posljedica je zahtjeva antisimetričnosti produkta. □

Teorem I.1 *$Sp(2)$ je izomorfna $SL(2, \mathbb{C})$.*[2]

Dokaz: Očito je da vrijedi

$$\epsilon^{AB} = o^A \iota^B - \iota^A o^B.$$

Promotrimo ponašanje pri transformacija baze $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota}) \to (\hat{\boldsymbol{o}}, \hat{\boldsymbol{\iota}})$:

$$\hat{o}^A = a o^A + b \iota^A, \quad \hat{\iota}^A = c o^A + d \iota^A.$$

Prema prethodnoj relaciji,

$$\hat{\epsilon}^{AB} = \hat{o}^A \hat{\iota}^B - \hat{\iota}^A \hat{o}^B = o^A o^B (ac - ca) + \iota^A \iota^B (bd - db) + o^A \iota^B (ad - bc) - \iota^A o^B (ad - bc).$$

Očito je nužan i dovoljan uvijet da transformacija čuva ϵ to da je $ad - bc = 1$, što u matričnom zapisu postaje $\det \mathbf{S} = 1$. □

Iz jednadžbe (5) vidimo da će nam osim elemenata iz S trebati i kompleksno konjugirani elementi iz $\overline{S}$. Za $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in S$, konjugat $a\boldsymbol{\eta} + b\boldsymbol{\zeta}$ bio bi $\overline{a}\overline{\boldsymbol{\eta}} + \overline{b}\overline{\boldsymbol{\zeta}}$, a ne $a\overline{\boldsymbol{\eta}} + b\overline{\boldsymbol{\zeta}}$. Dakle linearnost je narušena i potrebno je uvesti novi vektorski prostor $\overline{S}$ koji je dan anti-izomorfizmom $S \to \overline{S}$. Ovo preslikavanje standardno dobivamo tako da konjugiramo komponente vektora iz S, a konvencionalno označavamo sa crticom $'$ iznad slova indeksa uz crtu iznad varijable[3]:

$$\eta^A \to \overline{\eta^A} \equiv \overline{\eta}^{A'}.$$

I ovaj prostor ima sebi dualan prostor, $\overline{S}^*$. Za komponente vrijedi $\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} = \epsilon_{A'B'} = \epsilon^{A'B'}$. Ukupno imamo 4 prostora u kojima žive spinori, to su $(S, S^*; \overline{S}, \overline{S}^*)$.

---

[2] Prisjetimo se definicija: simplektička transformacija $Q \in Sp(2)$ je ona koja čuva produkt, $[Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\zeta}] = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}]$, dok je grupa $SL(2, \mathbb{C})$ sastavljena od 2×2 kompleksnih matrica determinante jedan.

[3] Iznimka je $\boldsymbol{\epsilon}$ spinor tako da umjesto $\overline{\epsilon}_{A'B'}$ pišemo $\epsilon_{A'B'}$

Definicija I.4 ***Spinor*** *valencije* $(p,q;r,s)$ *definiramo kao multilinearno preslikavanje* $\chi : S^p \times \overline{S}^q \times S^{*r} \times \overline{S}^{*s} \to \mathbb{C}$. *Komponente u bazi* $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota})$ *su* $\chi^{A\ldots CS'\ldots U'}{}_{D\ldots FW'\ldots Y'}$.

Pošto su S i $\overline{S}$ anti-izomorfni, bez gubitka općenitosti možemo međusobno permutirati indekse s crticom i one bez nje, ali gornje i donje indekse koji imaju odnosno nemaju crticu ne smijemo permutirati jer su S i S^* izomorfni pa može doći do konfuzije. Na primjer, za bilokoji $(1,1;1,1)$ spinor vrijedi

$$\kappa^{AB'}{}_{CD'} = \kappa^{B'A}{}_{D'C'} = \kappa^{B'}{}_{D'}{}^{A}{}_{C} \quad ,$$

ali za $(2,0;2,0)$ spinor

$$\tau^{AB}{}_{CD} \neq \tau^{BA}{}_{CD}.$$

C. Spoj dvije perspektive

Spinor tipa $(1,1;0,0)$ u bazi $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota})$, tj. $(\overline{\boldsymbol{o}}, \overline{\boldsymbol{\iota}})$ je oblika

$$\tau^{AA'} = a o^A \bar{o}^{A'} + d \iota^A \bar{\iota}^{A'} + b o^A \bar{\iota}^{A'} + c \iota^A \bar{o}^{A'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Pogledajmo sada relacije (5) i uvrstimo u njih $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\iota}$. Vidimo da su T, X, Y, Z spinori tipa $(1,1;0,0)$:

$$\begin{aligned} T^{AA'} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{o}^{A'} + \iota^A \bar{\iota}^{A'}), \;\; X^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{\iota}^{A'} + \iota^A \bar{o}^{A'}) \\ Y^{AA'} &= \tfrac{i}{\sqrt{2}}(\iota^A \bar{o}^{A'} - o^A \bar{\iota}^{A'}), \;\; Z^{AA'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\iota^A \bar{\iota}^{A'} - o^A \bar{o}^{A'}). \end{aligned}$$

Za svaki odabir $A, A' \in \{0,1\}$ dobivamo četverovektor $\sigma^\mu = (T, X, Y, Z)$:

$$\sigma^\mu{}_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \quad \sigma^\mu{}_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0), \quad \sigma^\mu{}_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0), \quad \sigma^\mu{}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1). \tag{13}$$

Obrnuto, za svaki odabir μ dobivamo spinor $\tau^{AA'}$ valencije $(1,1;0,0)$:

$$\begin{aligned} \sigma^{AA'}{}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{AA'}{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^{AA'}{}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{AA'}{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Do na faktor $1/\sqrt{2}$ prepoznajemo jediničnu i Paulijeve matrice. Ovime smo dobili sljedeću korespondenciju između četverovektora i spinora tipa $(1,1;0,0)$:

$$U^\mu = (T, X, Y, Z) \overset{\sigma}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} T+Z & X-iY \\ X+iY & T-Z \end{pmatrix} = U^{AA'}. \tag{14}$$

Uveli smo Infeld-van der Waerden (IvdW) simbole $\sigma^\mu{}_{AA'}$ i $\sigma^{AA'}{}_\mu$. Ovu korespondenciju preko njih kompaktnije zapisujemo kao:

$$V^\mu = \sigma^\mu{}_{AA'} V^{AA'}, \quad V^{AA'} = \sigma^{AA'}{}_\mu V^\mu.$$

Svaka od σ^μ matrica je hermitska, a sve zajedno tvore bazu za prostor svih 2×2 hermitskih matrica što je očigledno iz matrice na desnoj strani (14) uz realne (T, X, Y, Z). Dvostruka determinanta iste matrice iznosi $2 \det V^{AA'} = 2|V^{AA'}| = T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$, a to je Lorentz invarijanta pridružena četverovektoru V^μ. Ovaj rezultat mogli smo dobiti i koristeći IvdW simbole:

$$V^2 = V^\mu V_\mu = V^\mu g_{\mu\nu} V^\nu = \sigma^\mu{}_{AA'}\sigma^\nu{}_{BB'} g_{\mu\nu} V^{AA'} V^{BB'}$$

Korištenjem izraza (13), uvrštavanjem se eksplicitno provjeri da vrijedi

$$\sigma^\mu{}_{AA'}\sigma^\nu{}_{BB'} g_{\mu\nu} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}.$$

Spinor ϵ_{AB} zovemo **spinorna Minkowski metrika**. Komponente su mu jednake $\boldsymbol{\epsilon}$ spinoru definiranom ranije. Spinorna metrika nam omogućuje da V^2 pišemo kao

$$\begin{aligned}
V^2 &= V^{AA'}\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}V^{BB'} = \\
&= V^{00}\epsilon_{01}\epsilon_{01}V^{11} + V^{01}\epsilon_{01}\epsilon_{10}V^{10} + V^{10}\epsilon_{10}\epsilon_{01}V^{01} + V^{11}\epsilon_{10}\epsilon_{10}V^{00} = \\
&\overset{(12)}{=} ad - bc - cb + ad = 2|V^{AA'}|.
\end{aligned}$$

Sad u stilu [5] promatramo općenitu transformaciju $\boldsymbol{\Lambda}$ koja djeluje na $\boldsymbol{\zeta}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\zeta^A \to \hat{\zeta}^A = \Lambda^A{}_B \zeta^B \equiv \boldsymbol{\Lambda\zeta} \\
&\bar{\zeta}^{A'} \to \hat{\bar{\zeta}}^{A'} = \bar{\Lambda}^{A'}{}_{B'}\bar{\zeta}^{B'} = \bar{\zeta}^{B'}(\overline{\Lambda^T})_{B'}{}^{A'} = \bar{\zeta}^{B'}(\Lambda^\dagger)_{B'}{}^{A'} \equiv \boldsymbol{\zeta\Lambda}^\dagger \\
&X^{AA'} \to \hat{X}^{AA'} = \boldsymbol{\Lambda X \Lambda}^\dagger.
\end{aligned}$$

Kako bi determinanta ostala ista, mora vrijediti

$$|\boldsymbol{\Lambda}||\boldsymbol{\Lambda}^\dagger| = 1 \implies |\boldsymbol{\Lambda}| = e^{i\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Odabirom $\lambda = 0$ dobivamo $\Lambda \in SL(2,\mathbb{C})$. Kako djelovanje elemenata iz $SL(2,\mathbb{C})$ čuva Lorentz invarijantnu normu, Lorentzove transformacije možemo poistovjetiti s elementima grupe $SL(2,\mathbb{C})$[4]. Provjerimo još očuvanost spinorne metrike pri Lorentzovim transformacijama:

$$\begin{aligned}
&\zeta_A \to \hat{\zeta}_A = \Lambda_A{}^B \zeta_B = \boldsymbol{\Lambda\zeta}, \\
&\zeta_A \to \hat{\zeta}_A = (\Lambda^T)^B{}_A \zeta_B = \boldsymbol{\zeta\Lambda}^T, \\
&\epsilon_{AB} \to \hat{\epsilon}_{AB} = \boldsymbol{\Lambda\epsilon\Lambda}^T.
\end{aligned}$$

Za matrice

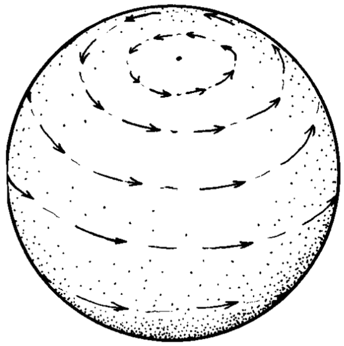
$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

očito vrijedi

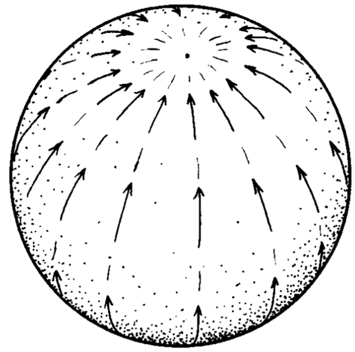
$$\boldsymbol{\Lambda\epsilon\Lambda}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix} = \boldsymbol{\epsilon}.$$

Kao što Lorentzove transformacije čuvaju metriku, tako spinorne Lorentzove transformacije, tj. elementi grupe $SL(2,\mathbb{C})$ čuvaju spinornu metriku.
Općenita kompleksna matrica M ima 8 realnih parametara. Uz uvjet $|M| = 1$, broj parametara se smanjuje na 6, što odgovara 3 rotacije i 3 potiska Lorentzove grupe. Kako je identiteta sadržana ($1_{2\times 2}$), radi se o ortokronoj svojstvenoj Lorentzovoj grupi pošto je to jedina komponenta povezana s jedinicom. Za rotaciju oko osi

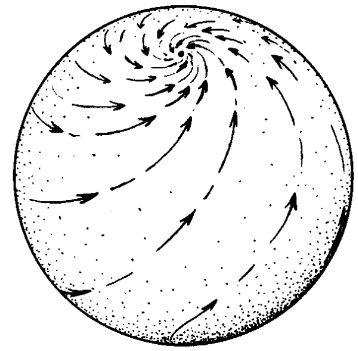
[4] Preciznije, svakoj Lorentzovoj transformaciji odgovaraju dva elementa $\Lambda, -\Lambda \in SL(2,\mathbb{C})$, no ovaj 2 na 1 homomorfizam ne mijenja bitno fiziku, tj. pripadne Liejeve algebre su izomorfne.



(a) Rotacija oko z-osi. [1]



(b) Potisak u smjeru z-osi. [1]



(c) Istovremena rotacija i potisak. [1]

$\boldsymbol{\theta}$ i potisak rapiditetom $\boldsymbol{\rho}$, odgovarajuća Lorentzova transformacija (jednovalentnog tj. dvokomponentnog) spinora ζ^A dana je s:

$$\Lambda^A{}_B = \exp(i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}/2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}/2),$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Ograničimo se prvo samo na rotacije oko z-osi, dakle $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$. Gornja transformacija je tada:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Pogledajmo sada oblik potiska u smjeru z-osi, $\boldsymbol{\rho} = (0, 0, \rho)$, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} e^{-\rho/2} & 0 \\ 0 & e^{\rho/2} \end{pmatrix}.$$

Ove dvije matrice komutiraju pošto su dijagonalne. Iz toga slijedi da je istovremena transformacija oblika

$$\Lambda_3 = \Lambda_1\Lambda_2 = \begin{pmatrix} e^{(i\theta-\rho)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(i\theta-\rho)/2} \end{pmatrix}.$$

U prvom potpoglavlju smo spinorne transformacije povezali s Riemannovom sferom putem Möbiusovih transformacija (7). Usporedbom dobivene matrice s (6) slijedi $a = e^{(i\theta-\rho)/2}, b = 0, c = 0, d = e^{-(i\theta-\rho)/2}$. Möbiusova transformacija je

$$\boldsymbol{\xi} \to \hat{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\boldsymbol{\xi} e^{(i\theta-\rho)/2}}{e^{-(i\theta-\rho)/2}} = e^{i\theta-\rho}\boldsymbol{\xi}.$$

Djelovanje rotacije dano je s $\boldsymbol{\xi} \to \hat{\boldsymbol{\xi}} = e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}$. Efekt te rotacije u kompleksnoj ravnini na sferu se reflektira kao rotacija sfere (sjetimo se stereografske projekcije)

Ova transformacija kopmleksne ravnine na Riemannovu (nebesku) sferu djeluje kao što je prikazano na slici 3a.

Potisak djeluje na način $\boldsymbol{\xi} \to \hat{\boldsymbol{\xi}} = e^{-\rho}\boldsymbol{\xi}$. Reskaliranjem kompleksne ravine točke na sferi se pomiču duž meridijana, prikazano na slici 3b. Općenito, istovremena rotacija i potisak u smjeru z-osi ima efekt na sferu prikazan na slici 3c.

Komponente tenzora u Minkowski prostorvremenu obično su zadane preko baze u kojoj svaki vektor ima smjer duž točno jedne prostovremenske dimenzije, npr. $(1, 0, 0, 0)$ koja se ponekad zove **Ortonormirana tetrada** ili Minkowski tetrada. Razlog je to što je metrika dijagonalna u toj bazi pa su računi lakši.

No takvi vektori općenito nemaju samo jednu neiščezavajuću komponentu kad se prevedu u spinore. Također, $(1,1;0,0)$ spinori koji imaju samo jednu neiščezavajuću komponentu (jedan broj u 2×2 matrici) nemaju samo jednu komponentu kad se prevedu u četverovektore. Četverovektore koje dobivamo prevođenjem spinorne baze označavamo s

$$\begin{aligned} l^a &= o^A\overline{o}^{A'}, \; n^a = \iota^A\overline{\iota}^{A'}, \quad m^a = o^A\overline{\iota}^{A'}, \quad \overline{m}^a = \iota^A\overline{o}^{A'}, \\ l_a &= o_A\overline{o}_{A'}, \; n_a = \iota_A\overline{\iota}_{A'}, \quad m_a = o_A\overline{\iota}_{A'}, \quad \overline{m}_a = \iota_A\overline{o}_{A'}. \end{aligned}$$

Njihove vrijednosti u ortonormiranoj Minowski bazi su dani s VdW simbolima (13). Ove vektore zovemo **nul-tetrada** ili Newman-Penrose nul-tetrada. Za nju vrijedi

$$l_a n^a = l^a n_a = -m^a\overline{m}_a = -\overline{m}^a m_a = 1.$$

Vektori l^a i n^a su realni svjetlosni vektori, dok su m^a i $\overline{m}^a$ kompleksni svjetlosni vektori.

Spinornu strukturu ne možemo definirati za proizvoljno prostorvrijeme. U prvom potpoglavlju vidjeli smo da moramo odabrati prošlu ili buduću nebesku sferu za sve spinore, što implicira vremensku orijentabilnost prostorvremena. U idućem poglavlju vidjet ćemo da se Levi-Civita tenzor koji definira prostovremensku orijentabilnost dobiva iz spinorne metrike $\boldsymbol{\epsilon}$ bez pretpostavljanja dodatne strukture. Stoga je razumno pretpostaviti da za postojanje **spinorne strukture** prostorvrijeme mora biti i prostorvremenski orijentabilno. Ova dva zahtjeva su nužna ali općenito ne i dovoljna.

Za kraj dajemo iskaz teorema 1.5.6. iz [1]:

Teorem I.2 (Geroch 1968) *Nekompaktno prostovrijeme M ima spinornu strukturu ako i samo ako je moguće definirati četiri neprekidna vektorska polja nad M koji tvore ortonormiranu tetradu u tangentnom prostoru TM.*

II. ELEKTROMAGNETIZAM U SPINORNOM FORMALIZMU

U ovom poglavlju neke tenzore i veličine koje dolaze s njima prenijeti ćemo u domenu spinora. Prvo uvodimo neke spinorne identitete koje zatim primjenjujemo u drugom potpoglavlju.

A. Korisne relacije

Spinor koji je antisimetričan u tri ili više indeksa nužno iščezava. To je posljedica dvodimenzionalnosti simplektičkog vektorskog prostora; barem jedan indeks se u komponentama pojavljuje dvaput (a takvi članovi iščezavaju u antisimetrizaciji). Poseban slučaj je spinor

$$\epsilon_{[AB}\epsilon_{C]D} = 0.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} = 0.$$

Zatim podižnemo indekse C i D te preuređujemo,

$$\epsilon_A{}^C\epsilon_B{}^D - \epsilon_B{}^C\epsilon_A{}^D = \epsilon_{AB}\epsilon^{CD}. \tag{15}$$

Kontrakcijiom s proizvoljnim dvovalentnim spinorom χ_{CD} imamo

$$2\chi_{[A,B]} = \chi_{AB} - \chi_{BA} = \chi_C{}^C\epsilon_{AB}.$$

Kako je $\chi_{AB} = \chi_{(AB)} + \chi_{[A,B]}$, slijedi

$$\chi_{AB} = \chi_{(AB)} + \frac{1}{2}\chi_C{}^C\epsilon_{AB}.$$

Dakle, antisimetrični dio dvovalentnog spinora proporcionalan je spinornoj metrici. Sličan rezultat može se dobiti i za spinore više valencije. Indukcijom se dobiva da se spinor $\tau_{A...F}$ može zapisati kao suma simetričnog spinora $\tau_{(A...F)}$ i produkata ϵ-spinora sa simetričnim spinorima niže valencije.

Neka je sada Z^a proizvoljan (kompleksni) svjetlosni vektor, njegov spinorni ekvivalent je $Z^{AA'}$. Svaki svjetlosni vektor Z^a može se u spinornom obliku zapisati kao

$$Z^{AA'} = \eta^A \zeta^{A'} \implies Z^{AA'} Z_{AA'} = \eta^A \overline{\zeta}^{A'} \eta_A \overline{\zeta}_{A'} = (\eta^A \eta_A)(\overline{\zeta}^{A'} \overline{\zeta}_{A'}) = 0.$$

Spinor koji odgovara realnom svjetlosnom vektoru je hermitski (vidi (14)), što implicira

$$\eta^A \overline{\zeta}^{A'} = \zeta^A \overline{\eta}^{A'}. \tag{16}$$

Kontrakcijom s η_A odnosno ζ_A dobivamo $\boldsymbol{\zeta} \propto \boldsymbol{\eta}$. Apsorbiranjem konstante proporcionalnosti u komponente dobivamo da je realni svjetlosni vektor moguće zapisati kao

$$Z^{AA'} = \pm \zeta^A \overline{\zeta}^{A'}. \tag{17}$$

Pozitivni/negativni predznak implicira parametrizaciju preko buduće/prošle nebeske sfere. Zato je bitno da je prostorvrijeme vremenski orijentabilno pri razmatranju polja spinora.
Pretpostavimo da imamo konstantno polje $Z^{AA'}$ u svakoj točki prostorvremena. Kad prostorvrijeme ne bi bilo vremenski orijentabilno, mogli bi po zatvorenoj putanji (poput Möbiusove vrpce) doći iz + u - predznak ili obrnuto, što bi impliciralo da su komponente negdje nula zbog neprekidnosti.

Sljedeće razmatramo simetrični dvovalentni spinor ϕ_{AB}. Izraz $\phi_{AB}\xi^A\xi^B$ je polinom drugog stupnja u varijablama ξ^0 i ξ^1. Prema fundamentalnom teoremu algebre ovaj polinom može se rastaviti na produkt dva linearna faktora:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}\xi^A\xi^B &= \phi_{00}\xi^0\xi^0 + 2\phi_{10}\xi^1\xi^0 + \phi_{11}\xi^1\xi^1 \\ &= \left(\xi^1\right)^2 \left[\phi_{00}K^2 + 2\phi_{10}K + \phi_{11}\right] \\ &= \left(\xi^1\right)^2 \left(\alpha_0 K + \alpha_1\right)\left(\beta_0 K + \beta_1\right) \\ &= \left(\alpha_A \xi^A\right)\left(\beta_B \xi^B\right), \end{aligned} \tag{18}$$

gdje je $K = \xi^0/\xi^1$. Kako je ξ^A proizvoljan, slijedi

$$\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}.$$

Ova procedura zove se kanonska dekompozicija spinora ϕ_{AB} i bit će nam od koristi pri razmatranju elektromagnetskog spinora.

Levi-Civita tenzor u spinornom obliku dan je s:

$$\epsilon_{abcd} = \epsilon_{AA'BB'CC'DD'} = i\left(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\epsilon_{A'D'}\epsilon_{B'C'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\epsilon_{A'C'}\epsilon_{B'D'}\right). \tag{19}$$

Iako se pojavljuje faktor i, Levi-Civita tenzor je realan jer kompleksnom konjugacijom i postaje $-i$ te se mijenjaju prvi i drugi član u zagradi pa je spinor hermitski. Antisimetričnost u indeksima a i b te c i d lako se dobi uvrštavanjem. Za srednje indekse lakše je izvesti $\epsilon_{abcd} + \epsilon_{acbd} = 0$. Iz antisimetrije svih susjednih indeksa slijedi totalna antisimetrija.

Pomoću spinora α^A i $\beta^A \neq c\alpha^A$ možemo konstruirati hermitski spinor prostornog tipa:

$$\eta_{\pm}^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^A \overline{\beta}^{A'} + \beta^A \overline{\alpha}^{A'}),$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\eta^2 = \eta^{AA'}\eta_{AA'} &= \frac{1}{2}(\alpha^A\overline{\beta}^{A'} + \beta^A\overline{\alpha}^{A'})(\alpha_A\overline{\beta}_{A'} + \beta_A\overline{\alpha}_{A'}) = \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^A\overline{\beta}^{A'}\beta_A\overline{\alpha}_{A'} + \beta^A\overline{\alpha}^{A'}\alpha_A\overline{\beta}_{A'}) = \\
&= \frac{1}{2}([\beta,\alpha]\overline{[\alpha,\beta]} + [\alpha,\beta]\overline{[\beta,\alpha]}) = \\
&= -|[\alpha,\beta]|^2.
\end{aligned}$$

□

B. Elektromagnetski spinor i dualnost

Promotrimo realni elektromagnetski tenzor $F_{ab} = F_{AA'BB'}$. Antisimetrija u F_{ab} implicira

$$F_{AA'BB'} = -F_{BB'AA'} = \frac{1}{2}(F_{ABA'B'} - F_{BAB'A'}). \tag{20}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem člana $F_{ABB'A'}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
F_{ab} = F_{ABA'B'} &= \frac{1}{2}\left(F_{ABA'B'} - F_{ABB'A'}\right) + \frac{1}{2}\left(F_{ABB'A'} - F_{BAB'A'}\right) && (21)\\
&= F_{AB[A'B']} + F_{[AB]B'A'}. && (22)
\end{aligned}$$

Kontrakcijom s (15) slijedi

$$F_{ABA'B'} = \frac{1}{2}\epsilon_{A'B'}F_{ABC'}{}^{C'} + \frac{1}{2}\epsilon_{AB}F_C{}^C{}_{B'A'}.$$

Usporedbom s prvom jednakosti u (20) vidimo da $F_{ABC'}{}^{C'}$ i $F_C{}^C{}_{B'A'}$ moraju biti simetrični u A, B i A', B'. Stoga uvodimo simetrični spinor (zapravo preimenujemo)

$$\phi_{AB} = \phi_{(AB)} = \frac{1}{2}F_{ABC'}{}^{C'} \implies \overline{\phi}_{A'B'} = \frac{1}{2}F_C{}^C{}_{B'A'}. \tag{23}$$

Konačni rezultat je

$$F_{ab} = F_{ABA'B'} = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}, \tag{24}$$

gdje je ϕ_{AB} **elektromagnetski spinor**, u literaturi često zvan Maxwellov spinor. Ovom procedurom smo informaciju koju sadrži realni i antisimetrični F_{ab} (6 realnih brojeva) preveli u 3 kompleksna broja:

$$\phi_0 = \phi_{00},\ \phi_1 = \phi_{01} = \phi_{10},\ \phi_2 = \phi_{11}.$$

Uz prostovremensku orijentaciju, tj. postojanje Levi-Civita tenzora, moguće je definirati dualni EM tenzor pomoću Hodgeovog duala:

$$\star F_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd}.$$

Da bi dobili spinornu verziju potrebno je tenzoru ϵ_{abcd} koji je dan u jednadžbi (19) podići indekse c i d, ondnosno pripadnom spinoru podići C, C' i D, D'. Time dobivamo:

$$\epsilon_{ab}{}^{cd} = i(\epsilon_A{}^C\epsilon_B{}^D\epsilon_{A'}{}^{D'}\epsilon_{B'}{}^{C'} - \epsilon_A{}^D\epsilon_B{}^C\epsilon_{A'}{}^{C'}\epsilon_{B'}{}^{D'}).$$

Kontrakcijom ovog spinora s (24) dobivamo

$$\star F_{ABA'B'} = -i\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + i\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}. \tag{25}$$

U slučaju Lorentzove metrike, dvostruka primjena Hodgeovog duala daje faktor -1 ispred polaznog tenzora:

$$(\star)^2 = -1,$$

što daje svojstvene vrijednosti $\pm i$. Tenzor dakle možemo rastaviti na način

$$F = F_+ + F_-, \quad \star F_\pm = \pm i F_\pm.$$

Tenzor F_+ je do na faktor i sam sebi dualan (eng. self-dual), dok je F_- sam sebi anti-dualan (eng. anti-self-dual). Njih možemo konstruirati iz F_{ab}:

$$F_\pm = \frac{1}{2}(F_{ab} \mp i \star F_{ab}).$$

Korištenjem (24) i (25) dobivamo

$$F_+ = \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}, \quad F_- = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'}. \tag{26}$$

Očito vrijedi $F_+ = \overline{F_-}$. Prisjetimo se Maxwellovih jednadžbi u kovarijantnom obliku:

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{ab} &= -J^b \\ \nabla_a \star F^{ab} &= 0. \end{aligned}$$

U vakuumu nema izvora pa se jednadžbe reduciraju na

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{ab} &= 0 \\ \nabla_a \star F^{ab} &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Ovaj sustav invarijantan je na zamjenu $F \to \star F$. U praksi je često od koristi to što $F_\pm$ rješenje jedne jednadžbe automatski zadovoljava drugu. Kako bi preveli Maxwellove jednadžbe u spinorni formalizam potrebno je prvo definirati spinornu kovarijantnu derivaciju.

Definicija II.1 *Neka su $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ spinorna polja i neka su $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\phi}$ iste valencije.* ***Spinorna kovarijantna derivacija*** *definirana je kao preslikavanje $\nabla_x = \nabla_{XX'} : \theta_{\dots} \to \theta_{\dots;XX'}$ za koje vrijedi:*

- $\nabla_x(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}) = \nabla_x\boldsymbol{\theta} + \nabla_x\boldsymbol{\phi}$,
- $\nabla_x(\boldsymbol{\theta\psi}) = (\nabla_x\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta}(\nabla_x\boldsymbol{\psi})$,
- $\boldsymbol{\psi} = \nabla_x\boldsymbol{\theta} \implies \overline{\boldsymbol{\psi}} = \nabla_x\overline{\boldsymbol{\theta}}$.
- $\nabla_x\epsilon_{AB} = \nabla_x\epsilon^{AB} = 0$.
- ∇_x komutira sa zamjenom indeksa koja ne uključuje X, X'.
- $\nabla_x\nabla_y f = \nabla_y\nabla_x f$ za skalarna polja f.

Postojanje i jedinstvenost spinorne kovarijantne derivacije pokazani su u poglavlju 4.4 [1]. Pogledajmo jednadžbu (27) u spinornom obliku za F_+:

$$\nabla_{AA'}F_+^{AA'BB'} = 0.$$

Koristeći treće svojstvo spinorne kovarijantne derivacije i činjenice da je $\overline{F_+} = F_-$, slijedi

$$\nabla_{AA'}F_-^{AA'BB'} = 0.$$

Drugim riječima, dovoljno je pronaći jedno od $F_\pm$ rješenja pa stoga uvrštavamo spinornu verziju F_- iz (26):

$$\nabla_{AA'}\phi^{AB}\epsilon^{A'B'} = 0.$$

Korištenjem drugog i četvrtog svojstva spinorne kovarijantne derivacije slijedi spinorni zapis **Maxwellove jednadžbe u vakuumu**:

$$\nabla_{AA'}\phi^{AB} = 0. \tag{28}$$

Jedan elegantan način nalaženja rješenja Maxwellovih jednadžbi u spinornom formalizmu je preko tzv. Debyeovog potencijala χ. Neka je o^A konstantno spinorno polje u Minkowski prostoru i neka je χ kompleksno skalarno polje koje zadovoljava valnu jednadžbu $\Box\chi = 0$, gdje je $\Box = \nabla_{AA'}\nabla^{AA'}$. Tada simetrični spinor ϕ_{AB} dobiven preko

$$\phi_{AB} = \nabla_A{}^{A'}\nabla_B{}^{B'}(\chi\bar{o}_{A'}\bar{o}_{B'})$$

zadovoljava jednadžbu (28). Za kraj promatramo klasifikaciju elektromagnetskog tenzora/spinora.

C. Klasifikacija elektromagnetskog tenzora

Promatramo kanonsku dekompoziciju Maxwellovog spinora kao u (18):

$$\phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}.$$

Ako su $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ proporcionalni, za $\boldsymbol{\phi}$ kažemo da je **algebarski specijalan** ili da je tipa N. Ako spinori nisu proporcionalni, kažemo da je $\boldsymbol{\phi}$ **algebarski generalan** ili tipa I (jedan).

Istu klasifikaciju moguće je zadati promatranjem svojstvene jednadžbe EM tenzora:

$$F_{\mu\nu}V^\nu = \lambda V_\mu. \tag{29}$$

Iz relacije

$$V_{[c}F_{a]b}V^b = 0$$

slijedi da za $\lambda \neq 0$ svojstveni vektor V^a mora biti svjetlosni. U slučaju da postoji samo jedan svojstveni vektor, F_{ab} (i ϕ_{AB}) je tipa N tj. nul odonosno svjetlosnog tipa. U slučaju dva svojstvena vektora, F_{ab} je tipa I. Tada su svojstveni vektori generirani s α_A i β_A prema proceduri iz (17).

Znamo da EM tenzor posjeduje skalarnu i pseudoskalarnu invarijantu:

$$F^2 = F_{ab}F^{ab} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2), \qquad F\star F = F_{ab}\star F^{ab} = -4\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Ekvivalentna definicija svjetlosnog EM polja je iščezavanje obje invarijante, kao što ćemo uskoro pokazati.

$$F^2 = 0, \qquad F\star F = 0$$

pa očekujemo da ovakva polja imaju „lijepa" svojstva. U kontekstu Einsteinove jednadžbe ovakvo rješenje zovemo elektrovakuum svjetlosnog tipa. Ravni valovi u Minkowski prostoru tipičan su primjer. Nužan i dovoljan uvjet za postojanje svjetlosnog elektrovakuuma dan je u [6]. Jedan od teorema koji se elegantno dokaže u spinornom formalizmu je teorem 2.8.2. iz [4]:

Teorem II.1 (Mariot-Robinson) *Neka je F_{ab} tipa N. Tada svjetlosni vektor $\alpha^A\alpha^{A'}$ generira shear-free*[5] *svjetlosnu kongruenciju geodezika.*

---

[5] Doslovni prijevod riječi shear je smicanje. Ono predstavlja tendenciju deformacije sfere u elipsoid dok putuje duž geodezika.

Postoji i suprotni rezultat:

Teorem II.2 (Robinson) *Pretpostavimo da prostorvrijeme posjeduje shear-free svjetlosnu kongruenciju. Tada postoji elektromagnetsko polje N takvo da je $\alpha^A \alpha^{A'}$ u svakoj točki tangenta na kongruenciju.*

Fizikalni značaj polja N tipa istražen je u [7] i usko je povezan s Lienard-Wiechertovim poljem[6].

Klasifikacija EM tenzora bitna je i u asimptotskoj analizi; u slučaju lokalizirane distribucije naboja i struja može se pokazati (teorem 3.5.4. iz [4]) da za $r \to \infty$ vrijedi

$$\phi_{AB} = \frac{[N]_{AB}}{r} + \frac{[I]_{AB}}{r^2} + O(r^{-3}) + ...$$

Ovdje je $[N]_{AB}$ doprinos svih polja N tipa, a $[I]_{AB}$ doprinos polja tipa I.

D. Invarijante i tenzor energije i impulsa

Prvo promatramo određene kontrakcije EM spinora:

$$\phi_A{}^A = \phi_{(AB)}\epsilon^{[AB]} = 0, \qquad \overline{\phi}_A{}^A = 0,$$

zatim

$$\begin{aligned}
\phi^2 = \phi_{AB}\phi^{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}\alpha^{(A}\beta^{B)} &= \frac{1}{4}(\alpha_A\beta_B\alpha^A\beta^B + \alpha_A\beta_B\alpha^B\beta^A\beta_A\alpha_B\alpha^A\beta^B + \beta_A\alpha_B\beta^A\alpha^B) = \\
&= \frac{1}{4}(0 + [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}][\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}] + [\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] + 0) = -\frac{1}{2}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2, \\
\overline{\phi}^2 = -\frac{1}{2}\overline{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}.
\end{aligned}$$

Promotrimo sada spinornu verziju skalarne i pseudoskalarne invarijante, neka je $z = [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'})(\phi^{AB}\epsilon^{A'B'} + \epsilon^{AB}\overline{\phi}^{A'B'}) \\
&= 2\boldsymbol{\phi}^2 + 2\overline{\phi}^2 + \phi_A{}^A\overline{\phi}_B{}^{B'} + \phi_B{}^B\overline{\phi}_A{}^{A'} = \\
&= 2\frac{-1}{2}([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 + \overline{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}^2) = -2Re(z^2), \\
F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} &= (\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'})(-i\phi^{AB}\epsilon^{A'B'} + i\epsilon^{AB}\overline{\phi}^{A'B'}) = \\
&= -2i\boldsymbol{\phi}^2 + 2i\overline{\phi}^2 + i\phi_A{}^A\overline{\phi}_B{}^{B'} - i\phi_B{}^B\overline{\phi}_A{}^{A'} = \\
&= 2\frac{-1}{2i}([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 - \overline{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}^2) = -2Im(z^2).
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} = -2z^2.$$

Sad je očito da za $\boldsymbol{\alpha} \propto \boldsymbol{\beta}$ obje invarijante iščezavaju. Ovaj izraz još je jedna potvrda činjenice da se spinori ponašaju kao „korijen" tenzorskih stuktura. Primijećujemo da konjugiranjem gornje jednadžbe skalarna invarijanta ostaje ista dok se pseudoskalarna mijenja. Ovakvo ponašanje očekujemo pri partitetnoj transformaciji, tj. refleksijama. Veza konjugacije i refleksija te općenito grupno teorijska pozadina spinora

---

[6] Polje zračenja električnog monopola koji se giba po proizvoljnoj putanji vremenskog tipa [8].

dobro je opisana u [9].

Tenzor energije i impulsa u vakuumu je

$$T_{\mu\nu} = [F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}].$$

Slično kao gore, lako se dobiva spinorna verzija koja ima nešto kompaktniji zapis nego tenzorska,

$$T_{AA'BB'} = 2\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}. \tag{30}$$

Osim u dalekom asimptotskom slučaju, spinori su korisni i u analizi blizu horizonta[7] crne rupe kao u npr. [10].

E. Zaključak

Spinori su kao svojevrsna generalizacija tenzora moćan alat u OTR-u. Njihova algebra temelji se na činjenici da je $SL(2,\mathbb{C})$ 2 na 1 homomorfizam $SO(1,3)$. Svaki četverovektorski indeks možemo raspakirati u dva dvovektorska pa su oni na neki način korijen Minkowski prostora.

Metrika je za razliku od realne četverodimenzionalne simetrične kompleksna dvodimenzionalna antisimetrična. Neke jednadžbe poput (28) i (30) izgledaju jednostavnije u spinornom zapisu.

U ovom radu razmatrali smo samo ravni Minkowski prostor, no spinore je kao i tenzore općenito moguće definirati na zakrivljenom prostoru. Tada sve poznate tenzorske strukture imaju svoj spinorni analogon. Jedan od zanimljivih objekata koje možemo konstruirati pomoću spinora su twistori čije transformacije tvore grupu $SU(2,2)$ koja četverostruko natkriva konformalnu grupu kompaktificiranog Minkowski prostora [11].

LITERATURA

[1] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time: Volume 1, Two-spinor calculus and relativistic fields*, vol. 1. Cambridge University Press, 1984.

[2] P. J. O'Donnell, *Introduction to 2-spinors in general relativity.* World Scientific, 2003.

[3] T. Needham, *Visual complex analysis.* Oxford University Press, 1998.

[4] J. Stewart and J. M. Stewart, *Advanced general relativity.* Cambridge university press, 1993.

[5] A. M. Steane, "An introduction to spinors," *arXiv preprint arXiv:1312.3824*, 2013.

[6] C. G. Torre, "The spacetime geometry of a null electromagnetic field," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 31, no. 4, p. 045022, 2014.

[7] E. T. Newman, "Maxwell fields and shear-free null geodesic congruences," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, no. 13, p. 3197, 2004.

[8] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, vol. 2. Addison-Wesley, 1962.

[9] É. Cartan, *The theory of spinors.* Dover books on Mathematics, 1981.

[10] P. Tod, "Conditions for non-existence of static or stationary, einstein–maxwell, non-inheriting black-holes," *General Relativity and Gravitation*, vol. 39, no. 2, pp. 111–127, 2007.

[11] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time: Volume 2, Spinor and twistor methods in space-time geometry*, vol. 2. Cambridge University Press, 1984.

[12] J. C. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*, vol. 4. World Scientific Publishing Company, 1994.

[7] Eng. near horizon analysis.