Teoremi o singularitetima

Ana Bokulić

31.8.2018.

Sažetak

Predstavljeni su najvažniji teoremi o singularitetima te su dana fizikalna opravdanja glavnih pretpostavki na kojima se temelje. Prije iskazivanja teorema preciziran je koncept singulariteta, navedeni uvjeti koji ukazuju na singularnost prostorvremena te uvedeni svi potrebni matematički alati. Iako teoremi ne govore puno o prirodi singulariteta, daju nam predodžbu o svemiru u kojem živimo. Za kraj, dan je pogled na daljnje unaprijeđenje teorema te njihov značaj za razvoj novih teorija.

1 Uvod

U nekim rješenjima Einsteinove jednadžbe i najjednostavnijim kozmološkim modelima uočavaju se divergencije članova metrike ili zakrivljenosti. Primjerice, metrika Schwarzschildovog prostorvremena glasi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2), \tag{1}$$

pa bismo intuitivno očekivali postojanje singulariteta za $r = 0$ i $r = 2M$. No, je li svaka divergencija bilo koje fizikalne ili geometrijske veličine dobar kriterij kako bismo prostorvrijeme proglasili singularnim? Nažalost, postoji cijeli niz protuargumenata takvoj definiciji te ćemo u nastavku pokazati kako je problem puno suptilniji. Poteškoće će se pojaviti već pri pokušaju definiranja i klasifikacije singulariteta.

S pojmom singulariteta susreli smo se i u drugim fizikalnim teorijama te je logično postaviti pitanje zašto im se unutar opće teorije relativnosti poklanja tolika pažnja. Naime, ostale teorije imaju unaprijed zadan prostor, a na nama je samo da utvrdimo vrijednosti fizikalnih veličina u točkama prostora. Ukoliko fizikalna veličina divergira u nekoj točki, tada kažemo da u toj točki postoji singularitet. Ovdje je situacija potpuno drugačija budući da tražimo rješenje koje opisuje metričku strukturu samog prostorvremena. Nemamo referentnu pozadinu u odnosu na koju određujemo gdje se događa divergencija.

Referirajući se na gornji primjer Schwarzschildove metrike, lako se može pomisliti kako su singulariteti posljedica nametnutih simetrija te se kao takvi ne mogu realizirati u realnim fizikalnim situacijama. Teoremi o singularitetima koji ne pretpostavljaju nikakvu simetriju odbacuju ovakve tvrdnje. Štoviše, centralni teorem (Hawking, Penrose iz 1970. godine) pokazat će kako imamo razloga vjerovati da je i naše prostorvrijeme singularno. Preciznije, dokazat ćemo postojanje nepotpunih geodezika, što će se ispostaviti kao najbolji način karakterizacije singularnih prostorvremena. Da bi postojao nepotpuni geodezik, moraju biti zadovoljeni uvjeti na zakrivljenost i kauzalnost te je upravo to obrazac na kojem počivaju teoremi o singularitetima.

2 Singulariteti

U ovom ćemo poglavlju pokušati odgovoriti na pitanje što je singularitet, odnosno, kako prepoznati singularno prostorvrijeme. Vratimo se na primjer iz uvoda, Schwarzschildovo rješenje. Članovi metrike divergiraju za $r = 0$ i $r = 2M$ pa bismo naivno mogli zaključiti kako za obje vrijednosti parametra postoji singularitet. Međutim, ne smijemo zaboraviti da su komponente metričkog tenzora ovisne o izboru koordinatnog sustava. Može se pokazati kako prelaskom na nove koordinate svjetlosni geodezici prelaze $r = 2M$ te taj radijus predstavlja horizont crne rupe, a ne singularitet. Drugi problem na koji nailazimo je taj što singularitet uopće ne možemo promatrati kao dio prostorvremena. Ono je definirano kao uređen par kojeg čine mnogostrukost Lorentzovog tipa i pripadna metrika $(M,\, g_{ab})$ te ne uključuje točke u kojima komponente metričkog tenzora divergiraju.

Opis singulariteta kao divergencije komponenata tenzora zakrivljenosti nije zadovoljavajuće jer i one ovise o izboru koordinatnog sustava. Čak niti korištenje skalara izgrađenih od tenzora zakrivljenosti (npr. R, $R_{abcd}R^{abdc}, R_{ab}R^{ab}...$) nije dovoljno dobar kriterij, iako je riječ o veličinama koje ne ovise o koordinatama. Postoje rješenja Einsteinove jednadžbe za koje svi takvi skalari iščezavaju, ali je prostorvrijeme svejedno singularno. Pronađeni su i brojni drugi primjeri "patoloških" ponašanja prostorvremena što znatno otežava definiranje singulariteta.

Ideja koja se pokazala najuspješnijom temelji se na detekciji "rupa" nastalih uklanjanjem singulariteta. Geometrijski se ta ideja očituje kao postojanje nepotpunih krivulja konačne duljine. Točnije, postoji krivulja koju je nemoguće proširiti u jednom smjeru i ima ograničenu vrijednost svog parametra. Formalniji iskaz dan je sljedećim definicijama.

Definicija 1. Točka p je **krajnja točka** krivulje $\gamma : [a, b\rangle \to M$ ako je $\lim_{t\to b} \gamma(t) = p$. Može se nalaziti ili u kauzalnoj prošlosti svake točke na krivulji pa ju nazivamo prošlom krajnjom točkom ili u kauzalnoj budućnosti svake točke na krivulji pa ju nazivamo budućom krajnjom točkom.

Definicija 2. **Polu-krivulja** je krivulja koja ima jednu krajnju točku, a u suprotonom je smjeru beskrajna. Polu-krivulja je potpuna u odnosu na neki parametar ukoliko je on neograničen.

Iz svega navedenog zaključujemo da nepotpune polu-krivulje ukazuju na singularnost prostorvremena, ali uz još jedno dodatno ograničenje: promatrana krivulja mora biti ograničene akceleracije. U suprotnom bismo slučaju mogli pronaći vremensku krivulju čija je duljina proizvoljno bliska nuli pa bi regularna prostorvremena bila pogrešno prozvana singularnima. Najčešće ćemo koristiti krivulje bez akceleracije, geodezike. U tom slučaju možemo reći da je potpunost vremenskih i svjetlosnih geodezika minimalni uvjet da bi prostorvrijeme bilo bez singulariteta.

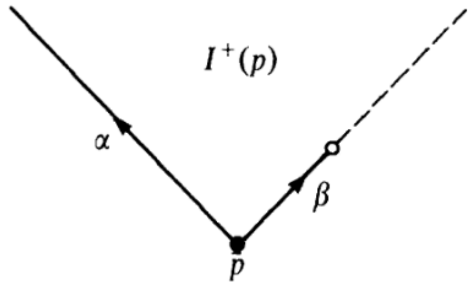
No, niti ova karakterizacija singulariteta nije idealna. Postoje prostorvremena koja se mogu proširiti te se time eliminiraju naizgled problematične točke (kao primjer ponovno može poslužiti Schwarzschildovo prostorvrijeme i ranije objašnjena situacija radijusa $r = 2M$). Njih ne smatramo singularnima pa u nastavku pretpostavljamo da radimo s maksimalno proširenim prostorvremenima. Osim ovog, postoji drugi puno ozbiljniji prigovor. Dan je primjer geodetski potpunog prostorvremena, ali koje sadrži vremenske krivulje ograničene akceleracije i konačne duljine. Promatrač koji se kreće tom krivuljom nestao bi, iako je po gornjoj definiciji takvo prostorvrijeme nesingularno. Iz tog razloga dodajemo zahtjev da krivulje ograničene akceleracije moraju imati neograničenu duljinu kako bi prostorvrijeme bilo nesingularno.

3 Kauzalna struktura

Kauzalna struktura prostorvremena u općoj teoriji relativnosti lokalno se podudara s kauzalnom strukturom specijalne teorije relativnosti. Naime, kauzalnost je jednoznačno određena prihvaćanjem brzine svjetlosti kao gornje granice te se signali mogu slati isključivo putem kauzalnih krivulja (vremenskih i svjetlosnih). Globalno se uočavaju velike razlike zbog netrivijalne topologije, singulariteta te naginjanja svjetlosnih stožaca kako se pomičemo od točke do točke. Slijedi nekoliko definicija pojmova koji se standardno pojavljuju u iskazima i dokazima teorema.

Definicija 3. Za mnogostrukost M kažemo da je **vremenski orijentabilna** ukoliko postoji vektorsko polje kauzalnog (svjetlosnog ili vremenskog) tipa $X \in TM$, gdje je TM prostor tangentnih vektora na M. Tada kauzalne vektore $v \in T_pM$ možemo podijeliti u dvije klase: prošlo ($g(X(p), v) > 0$) i buduće ($g(X(p), v) < 0$) orijentirane.

Definicija 4. Neka su $p, q \in M$. $I^+(p) = q$ nazivamo **kronološkom budućnošću** p ukoliko postoji buduće orijentirana neprekidna krivulja vremenskog tipa od p prema q. **Kronološka prošlost** $I^-(p)$ definira se analogno. $J^+(p) = q$ nazivamo **kauzalnom budućnošću** p ukoliko postoji buduće orijentirana neprekidna krivulja kauzalnog tipa od p prema q. **Kauzalna prošlost** $J^-(p)$ definira se analogno.
Napomena: Kauzalna budućnost obuhvaća i samu točku p. Točka p nije dio svoje kronološke budućnosti ako ne postoji zatvorena vremenska krivulja.



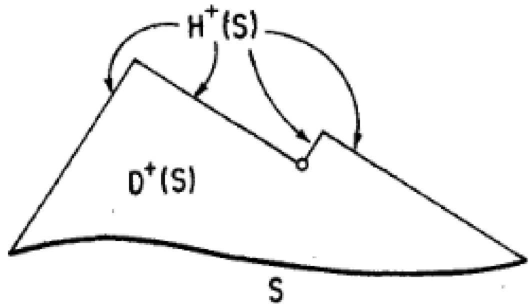
Slika 1: Prikazano je prostorvrijeme u kojem je jedna točka uklonjena. Ne postoji kauzalna krivulja koja povezuje točku p s točkama na isprekidanoj liniji. Dakle, kauzalna budućnost $J^+(p)$ sastoji se od kronološke budućnosti $I^+(p)$ i svjetlosnih geodezika α i β.

Definicija 5. Podskup $S \subset M$ nazivamo **akronalnim** ako ne postoje $p, q \in S$ takvi da $q \in I^+(p)$, odnosno, ako $I^+(S) \cap S = \emptyset$.

Definicija 6. **Budući horizmos** akronalnog skupa $S \subset M$ u odnosu na U je skup $E^+(S,U) = J^+(S,U) - I^+(S,U)$. $E^+(S,M)$ označavamo s $E^+(S)$. Zatvoreni akronalni skup S za koji je $E^+(S)$ kompaktan naziva se buduće zatočenim skupom.

Definicija 7. **Buduća domena ovisnosti** zatvorenog, akronalnog skupa S (oznaka $D^+(S)$) je skup svih događaja $p \in M$ takvih da svaka prošlo beskrajna krivulja kroz p presijeca S. Analogna tvrdnja vrijedi za prošlu domenu ovisnosti, $D^-(S)$. Ukupna domena ovisnosti $D(S)$ unija je buduće i prošle te predstavlja skup događaja za koje su uvjeti potpuno određeni onima na S.

Definicija 8. $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-(D^+(S))$ naziva se **budućim Cauchyjevim horizontom**. Budući Cauchyjev horizont označava buduću granicu buduće domene ovisnosti skupa S. Analogno se definira i prošli Cauchyjev horizont, H^-. Ukupni Cauchyjev horizont njihova je unija te predstavlja rub domene ovisnosti od S.



Slika 2: Prostornovremenski dijagram na kojem su prikazani buduća domena ovisnosti $D(S)^+$ i Cauchyjev horizont $H(S)^+$ zatvorenog akronalnog skupa S u prostorvremenu Minkowskog s jednom uklonjenom točkom.

Definicija 9. **Cauchyjeva ploha** je zatvoreni akronalni skup Σ za koji vrijedi $D(\Sigma) = M$. Cauchyjevu plohu svaka kauzalna krivulja presjeca točno jednom.

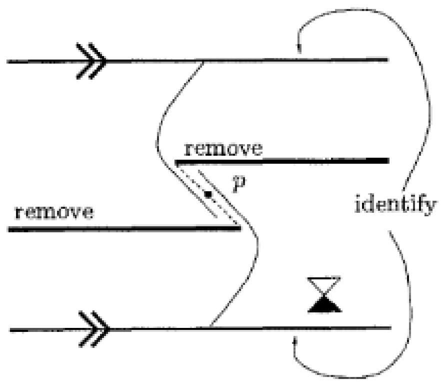
Nakon uvođenja osnovnih pojmova navodimo podjelu uvjeta kauzalnosti po njihovoj jačini.

Definicija 10. **Kronološko prostorvrijeme** ne sadrži niti jednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa. **Kauzalno prostorvrijeme** ne sadrži niti jednu zatvorenu krivulju kauzalnog tipa.

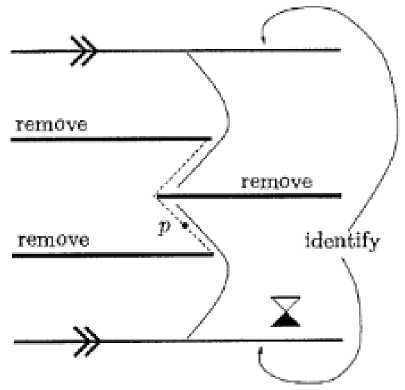
Definicija 11. Prostorvrijeme (M, g_{ab}) nazivamo **jako kauzalnim** ako za svaku $p \in M$ i svaku okolinu O točke p postoji okolina V točke p sadržana u O tako da niti jedna kauzalna krivulja ne presijeca V više od jednom. Ako prostorvrijeme narušava jaku kauzalnost u točki p, tada u okolini p postoje kauzalne krivulje koje su proizvoljno blizu presijecanju.

Lema 1. Neka je (M, g_{ab}) jako kauzalno i neka je $K \in M$ kompaktan. Tada svaka kauzalna krivulja sadržana u K mora imati prošlu i buduću krajnju točku u K.

Definicija 12. Najjači uvjet na kauzalnost je **globalna hiperboličnost** prostorvremena. Za prostorvrijeme (M, g_{ab}) koje sadrži Cauchyjevu plohu kažemo da je globalno hiperbolično. U globalno hiperboličnom prostorvremenu čitava prošlost i budućnost mogu biti rekonstruirane pozivajući se na uvjete na Σ.



Slika 3: Prostorvrijeme koje je kauzalno, ali nije jako kauzalno



Slika 4: Prostorvrijeme koje je jako kauzalno

4 Kongruencija geodezika i energijski uvjeti

Postavljanje određenih uvjeta na tenzor energije i impulsa T_{ab} nužna je pretpostavka u iskazima teorema o singularitetima. Pozivajući se na Einsteinovu jednadžbu, bit će dana fizikalna interpretacija te argumenti za njihovo uvođenje. Drugi važan rezultat ovog poglavlja jednostavna je geometrijska relacija s puno dubljim fizikalnim značenjem poznata kao Raychaudhurijeva jednadžba.

4.1 Energijski uvjeti

Prema slabom energijskom uvjetu, gustoća energije $T_{ab}v^a v^b$ koju mjeri bilo koji promatrač čiji je četverovektor brzine v^a mora biti nenegativna:

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \tag{2}$$

za svaki vremenski vektor v^a. Privlačnost gravitacije manifestira se kroz jaki energijski uvjet:

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^a v^b \geq 0, \tag{3}$$

za svaki vektor v^a vremenskog tipa. Korisniji oblik ovog teorema dobiva se iz Einsteinove jednadžbe (uz $\Lambda = 0$) te postaje očita veza s Riccijevim tenzorom. Einstenova se jednadžba kontrahira s $v^a v^b$ te potom iskoristi veza Riccijevog skalara i traga tenzora T_{ab} dobivena uzimanjem traga Einsteinove jednadžbe.

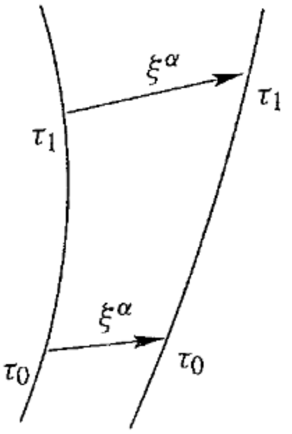
$$8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^a v^b = 8\pi(T_{ab}v^a v^b + \frac{1}{2}T) = R_{ab}v^a v^b \geq 0. \tag{4}$$

Jaki energijski uvjet ne implicira slabi ukoliko nije riječ o vektorima svjetlosnog tipa. Za vektore svjetlosnog tipa ta su dva uvjeta ekvivalentna. Postoji i treći uvjet, dominantni energijski uvjet koji ograničava brzinu toka energije na manju ili jednaku brzini svjetlosti. Nametanje tog uvjeta čini tenzor energije i impulsa fizikalnim.

Energijski uvjeti vrijede za klasičnu materiju, no kvantni efekti mogu dovesti do njihovog narušenja. Jedno od predloženih rješenja tog problema korištenje je uprosječenih verzija navedenih teorema. Ali neka novija istraživanja ekspanzije svemira i modeli inflacije ukazuju na moguće narušenje jakog energijskog uvjeta čak i tada.

4.2 Kongruencija geodezika

Neka je M mnogostrukost i $O \subset M$ otvoren skup. Kongruencija je familija krivulja takvih da kroz svaku točku $p \in O$ prolazi točno jedna krivulja iz te familije te se one međusobno ne presijecaju. Sada želimo odrediti kako kongruencija evoluira s vremenom. Preciznije, želimo odrediti ponašanje vektora devijacije ξ^a između dva susjedna geodezika u kongruenciji kao funkciju vlastitog vremena geodezika τ. Trenutno je razmatranje ograničeno na geodezike vremenskog tipa.



Slika 5: Vektor devijacije između susjednih članova kongruencije

Vektore tangentne na vremenski geodezik označavat ćemo s u^a. Uvodimo tenzorsko polje $B_{ab} = \nabla_b u_a$ koje opisuje nemogućnost paralelnog transporta vektora devijacije:

$$\xi^b \nabla_b u^a = u^b \nabla_b \xi^a = B^a{}_b \xi^b. \tag{5}$$

Osim toga, uvodimo i transverzalnu ($u^a h_{ab} = 0$) metriku definiranu s $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$. Tenzor B_{ab} moguće je rastaviti na tri dijela: simetrični dio bez traga, antisimetrični dio te dio s tragom različitim od nule. Definiramo skalar ekspanzije $\theta = B^{ab} h_{ab}$, tenzor smicanja $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ i tenzor rotacije $\omega = B_{[ab]}$ tako da rastav glasi:

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \tag{6}$$

Skalar ekspanzije opisuje relativnu promjenu volumena poprečnog presjeka kongruencije geodezika ([2], poglavlje 2.3.8.):

$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V \tag{7}$$

Drugi pojam povezan sa skalarom ekspanzije ekstrinzična je zakrivljenost, K_{ab}, prostorne hiperplohe[1] Σ. Definirana je kao $K_{ab} = \nabla_a u_b = B_{ba}$ te mjeri promjenu metrike h_{ab} duž kongruencije ortogonalne na Σ. Kod takve kongruencije nema rotacije ($\omega_{ab} = 0$) pa je K_{ab} simetričan te je njegov trag jednak skalaru ekspanzije, $K = \theta$.

Prilikom dokazivanja teorema o singularitetima, relevantna je jednadžba evolucije skalara ekspanzije. Krenimo od jednadžbe za tenzor B_{ab}:

$$\begin{aligned} u^c\nabla_c B_{ab} &= u^c\nabla_c\nabla_b u_a \\ &= (\nabla_c\nabla_b u^a - R_{adbc}u^d)u^c \\ &= \nabla_b(u^c\nabla_c u_a) - \nabla_a u_c\nabla_b u^c - R_{adbc}u^d u^c \\ &= -B_{ac}B^c{}_b - R_{adbc}u^d u^c \end{aligned}$$

Sada izračunamo trag te jednadžbe:

$$\begin{aligned} h^{ab}u^c\nabla_c B_{ab} &= \frac{d\theta}{d\tau} \\ &= -B_{ac}B^{ca} - R_{dc}u^d u^c \end{aligned}$$

Lako je provjeriti da vrijedi $B_{ab}B^{ba} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^{ab}\sigma_{ab} - \omega^{ab}\omega_{ab}$. Uvrštavanjem se dobiva:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\omega_{ab} - R_{ab}u^a u^b \tag{8}$$

Izraz (8) nazivamo Raychaudhurijevom jednadžbom za kongruenciju vremenskih geodezika. Važnost te jednadžbe otkriva se u teoremu o fokusiranju:

Teorem 1. Neka je kongruencija vremenskih gedoezika orgotonalna na hiperplohu te neka vrijedi jaki energijski uvjet. Tenzor smicanja po definiciji je prostornog tipa ($\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$). Tada iz (8) slijedi:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}u^a u^b \leq 0. \tag{9}$$

Ekspanzija se smanjuje tijekom evolucije kongruencije. Dakle, početno divergirajuća ($\theta > 0$) kongruencija u budućnosti će divergirati sporije, dok će početno konvergirajuća ($\theta < 0$) kongruencija konvergirati brže. Takvo je ponašanje posljedica privlačnosti gravitacije koju jamči jaki energijski uvjet.
Raychaudhurijeva jednadžba povlači i nešto manje općenitu nejednakost:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0, \tag{10}$$

[1] uronjena trodimenzionalna podmnogostrukost (u 4D)

koju potom integriramo te kao konačan rezultat dobijemo:

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau, \tag{11}$$

gdje je θ_0 početna vrijednost. Pretpostavimo da je kongruencija početno konvergirajuća. Tada $\theta \to -\infty$ unutar konačnog vremena $\tau \leq 3/|\theta_0|$. Ako vremenski vektor u^a opisuje gibanje fluida duž geodezika, tada će se stvoriti singularitet jer se volumen smanjuje, a gustoća neomeđeno raste. U ostalim slučajevima doći će do razvoja kaustika, točke u kojoj se sastaju geodezici. Takva je točka singularitet kongruencije, a ne strukture prostorvremena. Da bi gornji rezultat ukazivao na prostornovremenske singularitete, potrebni su dodatni globalni argumenti.

Preostaje pogledati slučaj kongruencije svjetlosnih vektora. Taj je problem nešto složeniji jer za vektore svjetlosnog tipa vrijedi $u^a u_a = 0$ pa nije moguće definirati transverzalnu metriku na analogan način kao za vremenske vektore. No, sve jednadžbe imaju potpuno isti oblik i svi zaključci vrijede, jedina je razlika numerički faktor uz skalar ekspanzije $(\frac{1}{2}\theta h_{ab})$ koji odražava činjenicu da sada radimo s vektorskim prostorom dimenzije 2.

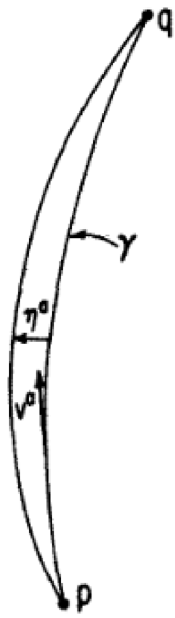
5 Konjugirane točke i uvjet generičnosti

Konjugirane točke na geodezicima zanimljive su pri analizi strukture prostorvremena jer daju informaciju o duljini krivulja koje možemo provući kroz par takvih točaka. Ukoliko one postoje, geodezik više ne predstavlja maksimum duljine između njih, već postoji krivulja veće duljine. U nastavku slijedi matematička definicija, a potom ćemo povezati konjugirane točke s ponašanjem kongruencije geodezika.

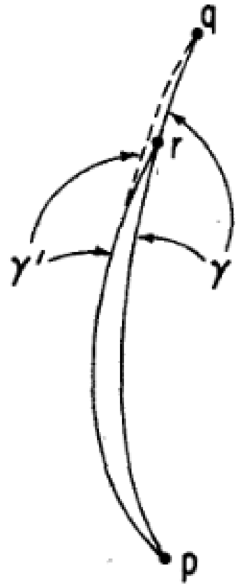
Definicija 12. Neka je M mnogostrukost i neka je γ geodezik s tangentnim vektorom v^a. Rješenje η^a jednadžbe devijacije geodezika

$$v^a \nabla_a (v^b \nabla_b \eta^c) = -R^c_{abd} \eta^b v^a v^d \tag{12}$$

naziva se Jacobijevim poljem na γ. Par točaka $p, q \in \gamma$ nazivamo **konjugiranima** ukoliko postoji Jacobijevo polje različito od nule, ali koje iščezava u točkama p i q. Jednostavnije rečeno, p i q su konjugirane točke ukoliko infinitezimalno blizak geodezik siječe γ u p i q.



Slika 6: Konjugirane točke geodezika γ.



Slika 7: Vremenski geodezik γ sadrži točku r konjugiranu točki p. Postoji vremenska krivulja γ' veće duljine od geodezika γ.

Nužan i dovoljan uvjet da bi točka q bila konjugirana točki p je da za kongruenciju kauzalnih geodezika iz p vrijedi $\theta \to -\infty$ u točki q.

Propozicija 1. Neka je $(M,\ g_{ab})$ prostorvrijeme koje zadovoljava $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ za sve ξ^a vremenskog tipa. Neka je Σ hiperploha prostornog tipa s tragom ekstrinzične zakrivljenosti $K{=}\theta < 0$ u točki $q \in \Sigma$. Tada unutar vlastitog vremena $\tau \leq 3/|K|$ postoji točka p konjugirana Σ duž geodezika γ koji prolazi kroz q te je ortogonalan na Σ.

Teorem 2. Neka je $(M,\ g_{ab})$ jako kauzalno prostorvrijeme. Neka je $p \in M$, a Σ akronalna, glatka hiperploha i τ funkcija duljine[2] definirana na $C(\Sigma, p)$[3]. Nužan uvjet da bi τ postigao svoju maksimalnu vrijednost na $\gamma \in C(\Sigma, p)$ je da γ bude geodezik ortogonalan na Σ bez točaka konjugiranih Σ između Σ i q.

Teorem 3. Neka je $(M,\ g_{ab})$ globalno hiperbolično prostorvrijeme. Neka je $p \in M$ i Σ Cauchyjeva ploha. Tada postoji krivulja $\gamma \in C(\Sigma, p)$ za koju τ postiže maksimalnu vrijednost na $C(\Sigma, p)$.

Za kraj još navodimo uvjet generičnosti koji se smatra valjanim u svim fizikalno

[2] $\tau = \int (-T^a T_a)^{1/2} dt$, T^a je vektor tangentan na kauzalnu krivulju

[3] C(p,Σ) predstavlja skup neprekidnih buduće usmjerenih kauzalnih krivulja od p do Σ

realističnim prostorvremenima te njegovu posljedicu.

Definicija 14. Prostorvrijeme $(M,\, g_{ab})$ zadovoljava **uvjet kauzalne generičnosti** ako svaki kauzalni geodezik posjeduje najmanje jednu točku za koju vrijedi $\xi^a \xi^b \xi_{[c} R_{d]ab[e} \xi_{f]} \neq 0$.

Propozicija 2. Neka $(M,\, g_{ab})$ zadovoljava uvjet kauzalne generičnosti te pretpostavimo da vrijedi jaki energijski uvjet ($R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$). Tada je svaki beskrajni geodezik ili nepotpun ili sadrži konjugirane točke.

6 Teoremi o singularitetima

Teorem 4. Neka je (M, g_{ab}) globalno hiperboličko prostorvrijeme te je zadovoljen jaki energijski uvjet, $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ za sve ξ^a vremenskog tipa. Pretpostavimo da postoji glatka (ili barem C^2) Cauchyjeva ploha Σ prostornog tipa. Trag ekstrinzične zakrivljenosti plohe Σ (za prošlo orijentiranu ortogonalnu geodetsku kongruenciju) svugdje zadovoljava $K \leq C < 0$, gdje je C konstanta. Tada niti jedna prošlo usmjerena vremenska krivulja od Σ ne može imati duljinu veću od $3/|C|$, dakle, svi prošlo usmjereni vremenski geodezici su nepotpuni.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji prošlo usmjerena vremenska krivulja λ od plohe Σ čija je duljina veća od $3/|C|$. Neka je p točka na λ te se nalazi na udaljenosti većoj od $3/|C|$ od Σ. Po teoremu 3 tada postoji krivulja maksimalne duljine od p do Σ koja također mora imati duljinu veću od $3/|C|$. Pozivajući se na teorem 2, γ mora biti geodezik bez konjugiranih točaka između p i Σ. No, ovdje se uočava kontradikcija s propozicijom 1 po kojoj mora postojati konjugirana točka između Σ i p. Zaključujemo da ovako zadana krivulja γ ne postoji.

Važno je naglasiti kako gornji teorem vrijedi isključivo uz vrlo jaku pretpostavku o globalno hiperboličnom prostorvremenu. Možemo se stoga zapitati nije li logičnije zaključiti da on ne vrijedi nego da je prostorvrijeme singularno? Cilj je dati što općenitiji kriterij za postojanje singulariteta, pa je stoga prvi korak postavljanje slabijeg uvjeta na kauzalnu strukturu. Hawkingov teorem iz 1967. ne uključuje globalnu hiperboličnost svemira, ali zato uvodi dodatni uvjet da Σ mora biti kompaktna te je moguće zaključiti samo da barem jedan geodezik vremenskog tipa mora biti nepotpun.

Teorem 5.(Hawking, 1967.) Neka je $(M,\, g_{ab})$ jako kauzalno prostorvrijeme te je zadovoljen jaki energijski uvjet, $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ za sve ξ^a vremenskog tipa. Pretpostavimo da postoji kompaktna, akronalna, glatka hiperploha S bez ruba takva da za prošlosno usmjerenu ortogonalnu geodetsku kongruenciju od S vrijedi $K < 0$ svugdje na S. Neka C označava maksimalnu vrijednost K, tako da je $K \leq C < 0$ na S. Tada bar jedan prošlo usmjeren geodezik vremenskog tipa od S nema duljinu veću od $3/|C|$.

Skica dokaza: Prepostavimo suprotno, tj. da svi prošlo usmjereni vremenski geodezici od S imaju duljinu veću od $3/|C|$. Prostorvrijeme $((D(S))^\circ,\, g_{ab})$ zadovoljava pretpostavke teorema 4, a $H(S)$ je rub $D(S)$ pa svi takvi geodezici moraju siječi H^- prije nego što njihova duljina postane veća od $3/|C|$. To znači da $H^-(S) \neq \emptyset$. Dokazivanjem kompaktnosti $H^-(S)$ dolazi se do kontradikcije. Za to treba pokazati da za svaki $p \in H^-(S)$ postoji ortogonalni geodezik maksimalne duljine od S do p, gdje je p gomilište niza $\{p_n\}$ u $H^-(S)$. Ali rub S prazan je skup pa se može dokazati da je u H^- sadržan budući beskrajni svjetlosni geodezik. To nije u skladu s lemom 1 i dobivamo kontradikciju.

U ovom se trenutku može postaviti pitanje je li narušenjem kauzalnosti moguće izbjeći pojavu singulariteta? Odgovor na to pitanje daje poopćeni Hawkingov teorem. Naime, u iskazu prethodnog teorema moguće je odbaciti pretpostavku o kauzalnosti i pritom dokazati postojanje nepotpunih geodezika vremenskog tipa. Dakle, u općenitom slučaju, odustajanje od uvjeta na kauzalnost nije garancija za nepostojanje singulariteta.

Dokaz u prilog tvrdnji da singulariteti nisu posljedica nametnute simetrije dao je Penrose u svom teoremu iz 1965. Ideja je bila pokazati da odstupanje od sferne simetrije neće spriječiti stvaranje singulariteta. Motiviran proučavanjem dvodimenzionalnih sfernih površina (r,t=konst.) unutar horizonta Schwarzschildovog prostorvremena uvodi novi koncept, tzv. zatvorene zatočene plohe. To su C^2 zatvorene plohe sa svojstvom da i ulazni i izlazni budući svjetlosni geodezici ortogonalni na plohu konvergiraju (imaju negativan skalar ekspanzije θ). Intuitivno, ploha se nalazi u tako jakom gravitacijskom polju da čak i izlazne svjetlosne zrake bivaju povučene natrag. Budući da ništa ne može putovati brže od svjetlosti, sva je materija zarobljena unutar sukcesivnih ploha sve manje i manje površine. Primjenjivost ovog koncepta leži u tome što sama ploha ne mora poštivati nikakvu simetriju. Primjer zatvorene zatočene plohe pronalazimo u ranije spomenutom Schwarzschildovom rješenju. Naime, svi svjetlosni geodezici unutar horizonta crne rupe kreću se prema $r = 0$, što je konzistentno s definicijom zatočene plohe.

Sljedeći teorem tvrdi da formiranje zatvorene zatočene plohe, uz još neke hipoteze, nužno implicira postojanje singulariteta. Situacija u kojoj se očekuje stvaranje takve plohe je gravitacijski kolaps.

Teorem 6. (Penrose, 1965.) Neka je (M, g_{ab}) povezano, globalno hiperbolično prostorvrijeme s nekompaktnom Cauchyjevom plohom Σ. Vrijedi slabi ili jaki energijski uvjet, tj. $R_{ab}k^a k^b \geq 0$ za sve vektore k^a svjetlosnog tipa. Pretpostavimo nadalje da M sadrži zatvorenu zatočenu plohu T. Neka $\theta_0 < 0$ označava maksimalnu vrijednost skalara ekspanzije θ za oba skupa ortogonalnih geodezika na T. Tada bar jedan buduće usmjeren svjetlosni geodezik od T ima duljinu ne veću od $2/|\theta_0|$.

Ideja dokaza: Pokazati da je rub $I^+(T)$ kompaktan ako je M geodetski potpuno te da je taj zahtjev u kontradikciji s postojanjem nekompaktne Cauchyjeve plohe Σ.

Najveći napredak u razumijevanju uvjeta pod kojim prostorvrijeme smatramo singularnim napravili su Hawking i Penrose formulirajući teorem koji uklanja većinu nepoželjnih pretpostavki.

Teorem 7.(Hawking, Penrose 1970.) Pretpostavimo da prostorvrijeme (M, g_{ab}) zadovoljava sljedeće uvjete:

1) vrijedi jaki energijski uvjet: $R_{ab}v^a v^b \geq 0$ za sve vektore v^a svjetlosnog i vremenskog tipa
2) vrijedi uvjet generičnosti za svjetlosne i vremenske vektore
3) ne postoje zatvorene vremenske krivulje
4) vrijedi barem jedno od ovih svojstava:
   i) (M, g_{ab}) sadrži kompaktni akronalni skup bez ruba
   ii) (M, g_{ab}) sadrži zatvorenu zatočenu plohu
   iii) postoji točka $p \in M$ takva da skalar ekspanzije budućih ili prošlih svjetlosnih geodezika kroz p postaje negativan, tj. svjetlosni geodezici bivaju fokusirani i počinju konvergirati,

tada (M, g_{ab}) mora sadržavati bar jedan nepotpuni geodezik vremenskog ili svjetlosnog tipa.

Propozicija 3 Gornji rezultat konzistentan je s tvrdnjom da sljedeći uvjeti ne mogu biti istovremeno zadovoljeni:

a) svaki beskrajni svjetlosni i vremenski geodezik ima par konjugiranih točaka
b) (M, g_{ab}) jako je kauzalno
c) postoji akronalni skup S takav da su $E^+(S)$ i $E^-(S)$ kompaktni, tj. postoje zatočeni skupovi.

U usporedbi s Hawkingovim teoremom, gornji teorem dodaje samo jednu novu hipotezu, onu o uvjetima generičnosti. No, njegova je prednost što u potpunosti uklanja pretpostavku o širenju svemira. Razlika u odnosu na Penroseov teorem je ta da ne pretpostavlja globalnu hiperboličnost prostorvremena (ne mora sadržavati Cauchyjevu plohu). Navedeni razlozi čine ga općenitijim pa samim time primjenjivim na puno više slučajeva. Daje dobar temelj tvrdnji da je naše prostorvrijeme singularno jer astronomska opažanja i neki kozmološki modeli potvrđuju tvrdnje na kojima je utemeljen. Sporna je točka prepostavka da ne postoje zatvorene vremenske krivulje. Pitanje je koliko je njihovo odbacivanje opravdano pri opisu realnih, fizikalnih prostorvremena.

Kao i kod ostalih teorema o singularitetima, najslabija mu je točka zaključak. Teoremi nam ne odgovaraju na pitanje o kojoj je vrsti singulariteta riječ. Ne znamo događa li se divergencija skalara zakrivljenosti, komponente tenzora zakrivljenosti ili neke veličine koja nije povezana sa zakrivljenošću. U ovom slučaju čak ne možemo znati niti koja je vrsta geodezika nepotpuna, svjetlosni ili vremenski.
Danas se radi na poboljšavanju teorema o singularitetima ponajprije oslabljivanjem njihovih pretpostavki, primjerice eliminacijom jakog energijskog uvjeta, manjim oslanjanjem na kauzalnost i razmatranjem singulariteta unutar teorija alternativnih općoj teoriji relativnosti. Također, postoji nekoliko otvorenih pitanja vezanih uz kozmologiju i kvantne efekte. Ubrzano širenje svemira vezano je uz postojanje pozitivne kozmološke konstante, a trenutno nije sasvim jasno kako ju ukomponirati u teoreme o singularitetima. Pojava singulariteta ukazuje na nepotpunost klasične teorije. U ekstremnim

uvjetima kakve predstavljaju singulariteti, važni postaju kvantni efekti. Ne zna se koja je budućnost teorema o singularitetima unutar kvantnog režima opisanog još neotkrivenom teorijom kvantne gravitacije.

7 Zaključak

Potaknuti divergirajućim ponašanjem članova metrike u egzaktnim rješenjima Einsteinove jednadžbe započeli smo detaljniju analizu prostorno-vremenskih singulariteta. Prvi je korak bio opisati singularitete koordinatno neovisno jer u dovoljno dobrom koordinatnom sustavu neke početno problematične točke nestaju. Nepotpuni geodezici pokazali su se kao dovoljno dobri indikatori singulariteta u prostorvremenu. Dovoljno su općeniti jer obuhvaćaju i situacije u kojima singularitet nije posljedica divergencije zakrivljenosti. Ideja teorema o singularitetima pronalazak je takvog geodezika.

Najvažniji rezultat svakako je Hawking-Penroseov teorem koji snažno sugerira da živimo u singularnom prostorvremenu. Vrijednost teorema je i u tome što su iznjedrili neke nove korisne koncepte poput zatvorene zatočene plohe.

Teoreme o singularitetima nemoguće je formulirati bez dodatnih pretpostavki o geometriji prostorvremena, kauzalnosti i energijskih uvjeta. Potonji su posebno problematični kada se uključe kvantni efekti, a moguće je i da će ih novije spoznaje proglasiti nevažećima. Nije poznato koja je sudbina teorema o singularitetima u tom slučaju. Neka rješenja Einsteinove jednadžbe sadrže zatvorene vremenske krivulje koje narušavaju kauzalnost, dok ih ovdje razmatrani teoremi zabranjuju. Moderniji teoremi ne odbacuju njihovo postojanje. Potraga za kvantnom teorijom gravitacije potaknuta je između ostalog i singularitetima koji jasno upozoravaju da postojeća teorija ne funkcionira uvijek. Uz sva ova otvorena pitanja vidimo kako problem singulariteta nikako nije stvar prošlosti.

Literatura

[1] R. M. Wald: General relativity, The University of Chicago Press, 1984

[2] M. Kriele: Spacetime, Springer, 1999

[3] E. Poisson: A relativist's Toolkit, Cambridge University Press, 2004

[4] J. M. M. Senovilla, D. Garfinkle: The 1965 Penrose singularity theorem, Classical and Quantum Gravity, Vol. 32,2015

[5] G. F. R. Ellis, B. G. Schmidt: Singular space-times, General Relativity and Gravitation, Vol. 8, 1977

[6] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge University Press, 1973