

Topološki opis kvantnog Hallovog efekta

ANA NAJEV

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet,
Sveučilište u Zagrebu, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

21. kolovoza 2016.

Sažetak

Ispitan je problem elektrona u dvodimenzionalnom periodičkom potencijalu u uniformnom magnetskom polju. Pokazali smo vezu između Hallove provodnosti dobivene teorijom linearnog odgovora i broja nultočki valne funkcije u magnetskoj Brillouinovoj zoni. Topološki magnetska Brillouinova zona odgovara torusu T^2 . Faze valne funkcije na T^2 tvore glavni $U(1)$ svežanj čiji je prvi Chernov broj direktno vezan uz kvantizaciju Hallove provodnosti, a koneksija na svežnju je povezana s baždarnim vektorskim potencijalom A .

I. UVOD

Klasični Hall efekt prvi je uočio i opisao Edwin Hall 1879. godine. Primijetio je da na struju koja prolazi kroz metalnu pločicu postavljenu okomito u magnetsko polje djeluje Lorentzova sila. Zbog utjecaja te sile dolazi do ogiba i nakupljanja naboja na rubovima pločice u smjeru okomitom na gibanje struje. Jačina i predznak dobivenog napona ovise o svojstvima materijala. Zbog toga Hallov efekt postaje bitan alat za proučavanje nositelja naboja u vodičima i upućuje na koncept pozitivno nabijenih šupljina kao prijenosnika struje. Cijelo stoljeće nakon otkrića Hallovog efekta, Klaus von Klitzing pronalazi kvantni Hallov efekt za kojeg već 1985. godine dobiva Nobelovu nagradu. Poluklasični računi upućivali su na to da Hallov napon, koji je povezan s nedijagonalnim elementima tenzora otpornosti, mora biti proporcionalan magnetskom polju, dok dijagonalni elementi ϱ_{xx} ne bi smjeli ovisiti o njemu. Na veliko iznenađenje, von Klitzing u eksperimentima na silikonskim MOSFET-ima¹ u jakim

magnetskim poljima i na vrlo niskim temperaturama (do 2 Kelvina) dobiva sasvim drugačije rezultate (Slika 1). Mjerenja nisu pokazala proporcionalnu ovisnost ϱ_{xy} s B već su se pojavili platoi različitih širina. Također je dobiveno da longitudinalna otpornost ϱ_{xx} nije konstantna već brzo oscilira i iščezava na tim platoima. Slično ponašanje se dobilo kada se umjesto promjene magnetskog polja (kojim kontroliramo parcijalnu popunjenost određenog Landauovog nivoa) mijenjao napon na "gate-u" koji modulira broj nositelja naboja u MOSFET-u.

Dakle, eksperimentalne opservacije pokazale su praktički iščezavajuću disipaciju:

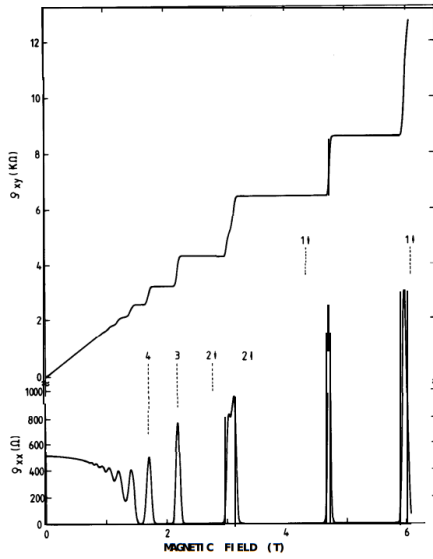
$$\sigma_{xx} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

te kvantizaciju Hallove provodnosti:

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

dičima tada stvaraju kvantnu potencijalnu jamu u koju donorski elektroni upadaju i stvaraju dvodimenzionalni elektronski plin. Razlika energetske nivoa takvih elektrona u potencijalnoj jami uglavnom bude reda $10^3 K$ što je puno veće od kriogenih temperatura na kojima se proučava QHE. Stoga su svi elektroni (ako je to konzistentno s Paulijevim principom) "zamrznuti" u najnižoj elektronskoj vrpici, ali i dalje slobodni za gibanje u ravni poluvodiča koji stvara jamu. Tako je dinamika elektrona efektivno dvo-dimenzionalna iako sama kvanta jama nije.

¹Dvodimenzionalni elektronski plin se može realizirati na površini poluvodiča gdje je ona uglavnom u kontaktu s izolatorskim materijalom. Energetske vrpce u poluvo-



Slika 1: Eksperimentalni rezultati Hallovog otpora $R_H = q_{xy}$ i otpornosti $q_{xx} \sim R_x$ kao funkcija magnetskog polja za fiksnu gustoću naboja i pri temperaturama od oko 8mK.

u realnom uređaju koji sadrži dvodimenzionalni elektronski plin na koji djeluje jako magnetsko polje. To nas vodi na intrigantan zaključak da je kvantizacija univerzalna i neovisna od mikroskopskih detalja kao što je tip poluvodičkog materijala, čistoća i veličina uzorka, precizna vrijednost magnetskog polja, isl.² Već 1981. godine R. B. Laughlin je postavio temelje teorije koja objašnjava cjelobrojni kvantni Hallov efekt. Njegov argument je bio da ovakva egzaktna kvantizacija mora biti posljedica općenitijeg principa koji je određen geometrijskom prirodom problema, odnosno da je za rezultat zaslužna baždarna invarijantnost.

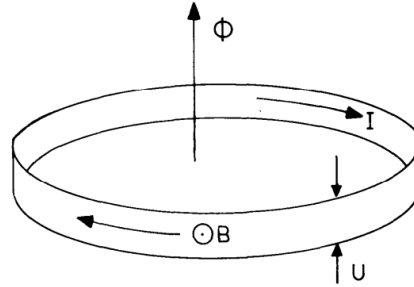
²Otpornost (teorijska veličina) i otpor (eksperimentalno mjerljiva veličina) su u klasičnim sistemima (oblika hiperkocke) veličine L vezani relacijom: $R = \rho L^{2-d}$ gdje je d dimenzija sustava. U 2D je stoga otpornost uzorka invarijantna na skalu i $\frac{e^2}{h} R$ je bezdimenzionalan. Ta činjenica omogućuje vrlo precizna mjerenja koja inače ne bi bila moguća zbog utjecaja ruba uzorka. Nadalje, kako ispada da je disipacija gotovo 0 u QHE stanju, sam oblik uzorka i točno određena mjesta na kojima očitavamo napon postaju nebitna.

II. LAUGHLINOV PREGLED QHE

Laughlin pretpostavlja dovoljno hladan 2D elektronski plin tako da postoji kvantna koherencija kroz cijeli uzorak. Tada je u mogućnosti govoriti o valnoj funkciji i Hamiltonijanu sustava. On razmatra takav plin zadržan na dvodimenzionalnoj vrpici koja je savijena u petlju, te čiju površinu okomito probada uniformno magnetsko polje B (Slika 3).



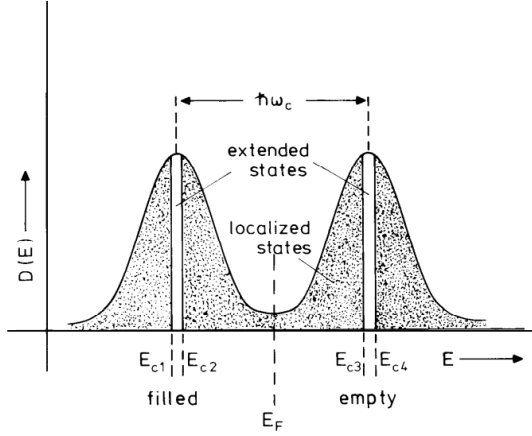
Slika 2: Laughlinov argument za geometriju vrpce.



Slika 3: Model 2D sistema korištenog za izvod kvantiziranog Hallovog otpora.

Gustoća stanja ovakvog sistema kada nema nereda je opisana delta funkcijama, gdje svaka odgovara jednom Landauovom nivou. Vidjeli smo da se u eksperimentalnom postavu mijenja gustoća stanja ili vanjsko magnetsko polje. U oba slučaja kemijski potencijal se mora nalaziti između Landauovih nivoa gdje razdvaja popunjena stanja od praznih. Povećavanjem gustoće stanja mijenja se broj popunjenih Landauovih nivoa, stoga bi očekivali monotoni rast σ_{xy} s gustoćom stanja, a ne pojavu platoa. Objašnjenje za pojavu platoa konstantnog σ_{xy} daju nečistoće i rubna stanja u uzorku, s druge strane, vidjet ćemo, preciznost samog efekta rezultat je topoloških svojstava kvantnih stanja. Dakle, Laughlin tvrdi da se u prisustvu nereda, kojeg imamo u realnim sistemima, delta funkcije nivoa šire u pojase proširenih stanja koja

su odvojena "repovima" lokaliziranih (Slika 4).



Slika 4: Model proširene gustoće stanja 2D elektronskog plina u jakom magnetskom polju gdje unutar svakog Landauovog nivoa razlikujemo proširena i lokalizirana stanja.

Pod uvjetom iščezavajuće provodnosti σ_{xx} energija je očuvana i možemo zapisati Faradayev zakon indukcije u obliku koji povezuje struju I s adijabatskom derivacijom ukupne energije E po toku magnetskog polja Φ :

$$I = \frac{\partial E}{\partial \Phi} = \frac{1}{L} \frac{\partial E}{\partial A} \quad (3)$$

gdje smo zatim izraz napisali pomoću uniformnog vektorskog potencijala A usmjerenog duž petlje. Ova derivacija je različita od nule samo zahvaljujući faznoj koherenciji valnih funkcija oko petlje. Na lokalizirana stanja A utječe tako da pomnoži svaku valnu funkciju s $\exp(\frac{ieAx}{\hbar c})$, što ne rezultira promjenom energije i pojavom struje. Za proširena stanja baždarna transformacija je zabranjena osim ako ne vrijedi:

$$A = n \frac{\hbar c}{eL} \quad (4)$$

Drugim riječima, po Aharonov-Bohm efektu dodavanje kvanta magnetskog toka $\Delta\Phi$ preslikava sustav u samog sebe. Tada fazna koherencija omogućava vektorskom potencijalu da poveća energiju tjeranjem popunjenih stanja prema rubu vrpce. Energija stanja mijenja se linearno s promjenom vektorskog potencijala

ΔA (Za detalje pogledati [1]) pa je povećanje energije rezultat prijenosa naboja s jednog ruba vrpce na drugi. Dakle, pokazali smo da je kvantni Hallov efekt usko povezan s proširenim stanjima u središtima Landauovih nivoa te rezultat baždarnosti invarijantnosti sustava. U sljedećim poglavljima poopćiti ćemo Laughlinove argumente i raspraviti topološke aspekte dvo-dimenzionalnog periodičkog sustava u magnetskom polju.

III. ELEKTRONSKA STANJA U PRISUSTVU MAGNETSKOG POLJA

Općenito, nabijene čestice u magnetskom polju mogu biti samo u orbitama s diskretnim vrijednostima energije. Te svojstvene energije nazivamo Landauovim nivoima, a za njih je specifično da su vrlo degenerirani te da je broj elektrona po nivou direktno proporcionalan jačini magnetskog polja. Energija n -tog Landauovog nivoa jednaka je:

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \quad (5)$$

Gdje je $\omega_c = \frac{eB\hbar}{mc}$ ciklotronska frekvencija. Degeneracija je vrlo velika i jednaka za svaki od nivoa, a odgovara omjeru ukupnog toka magnetskog polja i kvanta magnetskog toka $N_\phi = \frac{\Phi}{\Phi_0}$. Problem koji proučavamo je 2D neinteragirajući elektronski sustav u uniformnom magnetskom polju okomitom na njegovu ravninu. Schrödingerova jednačba tada poprima oblik:

$$H\Psi = [\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + U(x, y)]\Psi = E\Psi \quad (6)$$

Impuls \mathbf{p} i baždarni vektorski potencijal \mathbf{A} nalaze se u x - y ravnini, a potencijal $U(x, y)$ je periodičan u oba smjera.

$$U(x + a, y) = U(x, y + b) = U(x, y) \quad (7)$$

Ukupan Hamiltonijan nije translacijski invarijantan na pomake a u x smjeru i b u y smjeru. Razlog tomu je što vektorski potencijal \mathbf{A} nije konstantan unatoč činjenici da je magnetsko polje uniformno. Neka je $\mathbf{R} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ vektor Bravaisove rešetke za koji je $U(x, y)$ periodičan.

Vektorski potencijal će se u točkama udaljenim za \mathbf{R} razlikovati do na gradijent skalarne funkcije:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}+\mathbf{R}) + \nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Uvodimo sada operator magnetske translacije za koji je ukupni Hamiltonijan invarijantan³.

$$T_R = \exp\{(i/\hbar)\mathbf{R}[\mathbf{p} + (\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2]\} \quad (9)$$

Ovaj operator magnetske translacije slijedi takozvanu magnetsku algebru pri kojoj vrijedi:

$$T_a T_b = \exp(2\pi i \phi) T_b T_a \quad (10)$$

gdje je $\phi = \frac{eB}{h} ab$ broj magnetskih tokova kroz jediničnu ćeliju. Kada je $\phi = \frac{p}{q}$ racionalan broj (p i q su relativno prosti brojevi) možemo pronaći podskup translacija koje komutiraju jedna s drugom. Stoga sada definiramo magnetsku jediničnu ćeliju pomoću uvećanog vektora Bravaisove rešetke $\mathbf{R}' = n(q\mathbf{a}) + m\mathbf{b}$ kroz koju će prolaziti cjelobrojni višekratnik magnetskog toka. Neka su ψ svojstvene funkcije H i $T_{R'}$, onda su svojstvene vrijednosti dane s:

$$\begin{aligned} T_{qa}\psi &= e^{ik_1 qa} \psi \\ T_b\psi &= e^{ik_2 b} \psi \end{aligned} \quad (11)$$

gdje su k_1 i k_2 generalizirani impulsi određeni magnetskom Brillouinovom zonom: $0 \leq k_1 \leq \frac{2\pi}{qa}$, $0 \leq k_2 \leq \frac{2\pi}{b}$. Bitno je uočiti da magnetska Brillouinova zona topološki odgovara torusu T^2 zbog rubnih uvjeta. Naime, točke u \mathbf{k} -prostoru kao što su $k_1 = 0$ i $\frac{2\pi}{qa}$ (ili $k_2 = 0$ i $\frac{2\pi}{b}$) odgovaraju istom stanju. Kako se radi o periodičkom potencijalu valne funkcije možemo zapisati u Blochovoj formi:

$$\psi_{k_1 k_2}^\alpha(x, y) = e^{ik_1 x + ik_2 y} u_{k_1 k_2}^\alpha(x, y) \quad (12)$$

Sada Schrödingerovu jednadžbu (6) možemo zapisati u obliku:

$$H(k_1, k_2) u_{k_1 k_2}^\alpha = E^\alpha u_{k_1 k_2}^\alpha \quad (13)$$

gdje je Hamiltonijan:

$$H(k_1, k_2) = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + \hbar\mathbf{k} + e\mathbf{A})^2 + U(x, y) \quad (14)$$

³Za uniformno magnetsko polje vektorski potencijal \mathbf{A} zapisan je u simetričnom baždarenju.

x i y komponente vektora \mathbf{k} odgovaraju k_1 i k_2 . Treba uočiti da svojstvena energija E^α ovisi kontinuirano o \mathbf{k} , stoga njegovim mijenjanjem u magnetskoj Brillouinovoj zoni dobivamo podskup energija koje pripadaju vrpici indeksiranoj s α . Nadalje, ako svojstvena funkcija $u_{k_1 k_2}^\alpha$ zadovoljava (13) onda je i $u_{k_1 k_2}^\alpha e^{if(k_1 k_2)}$ svojstvena funkcija istog Hamiltonijana za bilo koju proizvoljnu glatku funkciju $f(k_1 k_2)$ koja je neovisna o x i y . To znači da transformacija:

$$u_{k_1 k_2}'^\alpha = u_{k_1 k_2}^\alpha e^{if(k_1 k_2)} \quad (15)$$

mijenja samo ukupnu fazu valne funkcije, a to ne mijenja vrijednost fizikalnih opservabli. Dakle, ta stanja su fizikalno ekvivalentna.

IV. KUBOVA FORMULA ZA HALLOVU PROVODNOST I VEZA S PRVOM CHERNOVOM KLASOM

Teorija linearnog odgovora predstavlja alat za opis realnih eksperimentalnih opservabli. Na njoj se bazira Kubova formula koja odražava linearni odgovor fizikane veličine na vremenski ovisnu smetnju. U našem slučaju promatramo Kubovu formulu za struju nastalu perturbacijom sustava slabim električnim poljem. Hallova provodnost odgovara komponenti struje odgovora u smjeru okomitom na vanjsko električno polje. Za Hallovu provodnost kojoj doprinosi popunjena vrpca indeksa α i koja je usrednjena po magnetskoj Brillouinovoj zoni dobiva se (Za detalje pogledati [4] i [5]):

$$\sigma_{xy}^\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int d^2k \int d^2r \left(\frac{\partial u_{k_1 k_2}^{\alpha*}}{\partial k_2} \frac{\partial u_{k_1 k_2}^\alpha}{\partial k_1} - \frac{\partial u_{k_1 k_2}^{\alpha*}}{\partial k_1} \frac{\partial u_{k_1 k_2}^\alpha}{\partial k_2} \right) \quad (16)$$

Definirajmo sada vektorsko polje u magnetskoj Brillouinovoj zoni kao:

$$\mathbf{A}(k_1, k_2) = \int d^2r u_{k_1, k_2}^* \nabla_k u_{k_1, k_2} \quad (17)$$

Hallova provodnost zapisana preko vektorskog polja postaje:

$$\sigma_{xy}^\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int d^2k [\nabla_k \times \mathbf{A}(k_1, k_2)]_3 \quad (18)$$

Sada trebamo obratiti pažnju na to da magnetska Brillouinova zona topološki odgovara

torusu T^2 , a kako torus nema rub primjena Stokesovog teorema u izrazu (18) dala bi $\sigma_{xy}^\alpha = 0$ za jedinstveno definirano vektorsko polje na T^2 . Pojava Hallove provodnosti različite od 0 implicira da vektorsko polje \mathbf{A} ne može biti periodička funkcija rubnih uvjeta Brillouinove zone. U prethodnom poglavlju pokazali smo da promjena faze ukupne funkcije ne mijenja fizikalne opservable. Za vektorsko polje transformacija (15) daje:

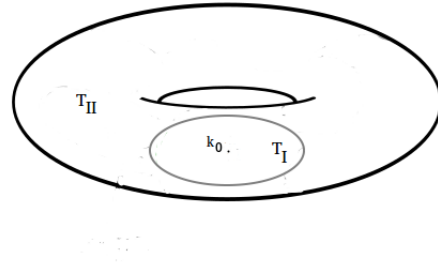
$$\mathbf{A}'(k_1, k_2) = \mathbf{A}(k_1, k_2) + i\nabla_k f(k_1, k_2) \quad (19)$$

Odmah možemo uočiti iz jednadžbe (18) da je Hallova provodnost invarijantna na tu transformaciju. Primijetimo sada da faza valne funkcije ne može biti određena jedinstveno i glatko na torusu ako Hallova provodnost ne iščezava. Razlog tome je postojanje nultočki valne funkcije u kojima faza nije definirana. Razmotrimo jednostavniji slučaj u kojem valna funkcija iščezava u samo jednoj točki \mathbf{k}_0 na torusu. Podijelimo sada torus na dva disjunktna podskupa T_I i T_{II} tako da se \mathbf{k}_0 nalazi u T_I . Kako T_{II} ne sadrži točku u kojoj je valna funk-

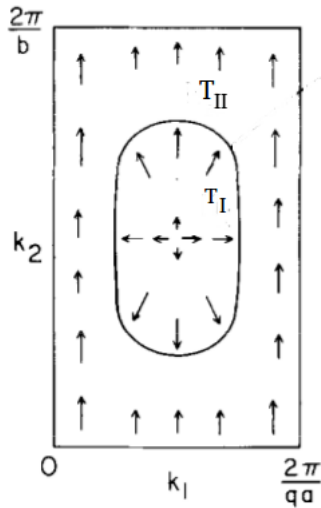
funkcije u $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ izabrati neku proizvoljnu vrijednost. Jednom kad je vrijednost izabrana faza valne funkcije može se kontinuirano definirati na proizvoljnoj okolini \mathbf{k}_0 . Tako imamo dvije različite definicije faze valne funkcije na T_I i T_{II} . Očito, te definicije moraju zadovoljavati baždarnu transformaciju:

$$u_I^\alpha = e^{if(\mathbf{k})} u_{II}^\alpha \quad (20)$$

gdje je $f(\mathbf{k})$ glatka funkcija na zatvorenoj petlji γ koja razdvaja T_I i T_{II} . Ova netrivialna topo-



Slika 6: Torus Brillouinove zone podijeljen na dva podskupa.



Slika 5: Shematski dijagram faze valne funkcije u magnetskoj Brillouinovoj zoni. (Preuzeto iz [4])

cija 0 faza valne funkcije na tom dijelu može se odrediti globalno. Na primjer možemo valnu funkciju u T_{II} učiniti realnom, a za fazu valne

logija valne funkcije prenosi se na vektorsko polje koje također ima dvije različite definicije na T_I i T_{II} . One se također razlikuju do na baždarnu transformaciju:

$$\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_{II} = i\nabla_k f(k_1, k_2) \quad (21)$$

Sada se Hallova provodnost svodi na dva doprinosa, jedan od T_I i jedan od T_{II} . Kako obje površine imaju rub, korištenjem Stokesovog teorema možemo pisati:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^\alpha &= \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_I} d^2k [\nabla_k \times \mathbf{A}_I(k_1, k_2)]_3 + \\ &+ \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{II}} d^2k [\nabla_k \times \mathbf{A}_{II}(k_1, k_2)]_3 \quad (22) \\ &= \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \mathbf{A}_I dk - \int_\gamma \mathbf{A}_{II} dk \right) \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu pazili smo na suprotne orijentacije obilaska petlje γ . Konačno za Hallovu provodnost dobivamo:

$$\sigma_{xy}^\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \nabla_k f(\mathbf{k}) dk = \frac{e^2}{h} \nu \quad (23)$$

Vrijednost linijskog integrala:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \nabla_k f(\mathbf{k}) dk \quad (24)$$

mora biti cijeli broj jer se vektori stanja moraju savršeno poklopiti nakon obilaska petlje γ . Integral u stvari broji koliko puta se baždarna transformacija $f(\mathbf{k})$ zakrenula za 2π pri promjeni \mathbf{k} duž petlje γ . Taj broj je topološka invarijanta poznata kao prva Chernova klasa. Invarijanta je zbog toga što se ne može promijeniti nikakvom glatkom deformacijom petlje γ . Dakako, pri deformaciji kojom jedna ili više dodatnih nultočki valne funkcije prelaze u područje T_I , broj okretaja će se povećati za cijeli broj. To upravo odgovara popunjavanju višeg Landauovog nivoa. U slijedećem poglavlju poopćiti ćemo dobiveni rezultat na proizvoljan broj nultočki u magnetskoj Brillouinovoj zoni. U tom slučaju poslužiti ćemo se teorijom svežnjeva.

V. TOPOLOŠKI ASPEKT KVANTIZACIJE HALLOVOG EFEKTA

Kao što smo već pokazali, ako je $u_{k_1 k_2}(x, y)$ svojstveno stanje sustava onda je i $e^{if(k_1, k_2)} u_{k_1 k_2}^{\alpha}(x, y)$. To nas upućuje na zaključak da je funkcija $f(k_1, k_2)$ glatko preslikavanje s krivulje $\gamma \subset T_I \cap T_{II}$ na grupu $U(1)$ faza $e^{if(\mathbf{k})}$. Dakle, razmatramo glavni $U(1)$ svežanj nad T^2 . Detaljnije, uzmimo da torus možemo prekriti s četiri pokrivača $T_i, i = 1, \dots, 4$, gdje je T_i potprostor R^2 . Sada definirajmo 4 područja T'_i :

$$\begin{aligned} T'_1 &= \{(k_1, k_2) | 0 < k_1 < \frac{\pi}{qa}, 0 < k_2 < \frac{\pi}{b}\}, \\ T'_2 &= \{(k_1, k_2) | \frac{\pi}{qa} < k_1 < \frac{2\pi}{qa}, 0 < k_2 < \frac{\pi}{b}\}, \\ T'_3 &= \{(k_1, k_2) | \frac{\pi}{qa} < k_1 < \frac{2\pi}{qa}, \frac{\pi}{b} < k_2 < \frac{2\pi}{b}\}, \\ T'_4 &= \{(k_1, k_2) | 0 < k_1 < \frac{\pi}{qa}, \frac{\pi}{b} < k_2 < \frac{2\pi}{b}\} \end{aligned} \quad (25)$$

Neka su područja T_i malo veća od T'_i tako da ih sadrže. Glavni $U(1)$ svežanj je topološki prostor lokalno izomorfan $T_i \times U(1)$ u svakom T_i . Mi promatramo određeno vlakno čija je globalna topologija definirana svojstvenim stanjem u_{k_1, k_2} . Svežanj izgrađujemo na

sljedeći način: Izabiremo valnu funkciju koja ne iščezava na preklapu pokrivača T_i . Kako je T_i kontraktibilan, moguće je izabrati takvu faznu konvenciju da je fazni faktor $\theta_i(k_1, k_2)$ glatka funkcija u pojedinom T_i osim u nultočkama valne funkcije. Kao što smo ranije vidjeli, općenito nije moguće imati globalnu faznu konvenciju koja vrijedi za sve pokrivače. Zbog toga imamo funkciju prijelaza Φ_{ij} na preklapu dva pokrivača $T_i \cap T_j$:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \exp(i[\theta_i(k_1, k_2) - \theta_j(k_1, k_2)]) \\ &= \exp[if_{ij}(k_1, k_2)] \end{aligned} \quad (26)$$

Ako Φ_{ij} shvaćamo kao kartu $\Phi_{ij} : U(1) \rightarrow U(1)$, glavni $U(1)$ svežanj nad T^2 je u potpunosti određen tom funkcijom prijelaza. Na ovaj način smo konstruirali netrivialni svežanj. Općenito svežnjeve klasificiramo po cijelim brojevima koji karakteriziraju funkcije prijelaza. Ti cijeli brojevi odgovaraju integralima po zakrivljenosti svežnjeva kada na njima definiramo koneksiju. 1-formu koneksiju općenito možemo pisati:

$$\omega = g^{-1} A g + g^{-1} dg = A + id_f \quad (27)$$

gdje je $g = e^{if} \in U(1)$ vlakno. Izabiremo 1-formu A kao:

$$\begin{aligned} A(k_1, k_2) &= A_{\mu}(k_1, k_2) dk_{\mu} \\ &= \langle u_{k_1 k_2} | \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} | u_{k_1 k_2} \rangle dk_{\mu} \end{aligned} \quad (28)$$

U područjima preklopa dvaju pokrivača T_i i T_j , funkcija prijelaza (26) povezuje lokalna vlakna g i g' u T_i i T_j na način:

$$g' = \Phi g \quad (29)$$

Ovo je ekvivalentno baždarnoj transformaciji u (15). Transformaciju A možemo napisati pomoću (15), (26) i (28) kao:

$$A' = \Phi A \Phi^{-1} + \Phi d\Phi^{-1} = A - i \frac{\partial f}{\partial k_{\mu}} dk_{\mu} \quad (30)$$

Može se pokazati da je ω invarijantan na transformacije (29) i (30) što ga opravdava kao koneksiju. Sada kada imamo koneksiju možemo

koristiti diferencijalnu geometriju na topološkom prostoru. Zakrivljenost je dana s:

$$F = dA = \frac{\partial A_\mu}{\partial k_\nu} dk_\nu \wedge dk_\mu \quad (31)$$

Prva Chernova klasa definirana je kao $c_1 = \frac{i}{2\pi} F$, a njegov integral po cijeloj mnogostrukosti T^2 daje prvi Chernov broj:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{i}{2\pi} \int F = \frac{i}{2\pi} \int dA \\ &= \frac{i}{2\pi} \int \frac{\partial A_\mu}{\partial k_\nu} dk_\nu \wedge dk_\mu \end{aligned} \quad (32)$$

On je cijeli broj i ne ovisi o izboru koneksije. Određen je samo topologijom glavnog $U(1)$ svežnja koji je konstruiran iz valne funkcije. Usporedbom s (18) potvrđujemo naslućeno:

$$\sigma_{xy}^\alpha = -\frac{e^2}{h} C_1 \quad (33)$$

odnosno, da je doprinos Hallovoj provodnosti od jedne popunjene vrpce u jedinicama $\frac{e^2}{h}$ dan s negativnim prvim Chernovim brojem.

VI. ZAKLJUČAK

Pokazali smo da u našem problemu dvodimenzionalnog periodičkog potencijala u uniformnom magnetskom polju imamo diferencijalnu geometriju na prostoru magnetske Brillouinove zone koja odgovara torusu T^2 . Fazni faktor vektora stanja na T^2 predstavlja vlakno u glavnom $U(1)$ svežnju, a koneksija na tom svežnju dana je preko $A(k_1, k_2)$. Prvi Chernov broj koji karakterizira postojeći svežanj je cijeli broj određen integralom povezanim s $A(k_1, k_2)$. Viši Chernovi brojevi ne postoje jer je bazni prostor dvodimenzionalan. Uspjeli smo povezati prvi Chernov broj s formulom za Hallovu provodnost (jedne popunjene vrpce) dobivenu pomoću teorije linearnog odgovora. Pojava neiščekivajuće σ_{xy} nam ukazuje na netrivialnu topologiju valnih funkcije na T^2 . Sama kvantizirana vrijednost Hallove provodnosti može se povezati s nultočkama valne funkcije u magnetskoj Brillouinovoj zoni. Ona broji koliko se puta zakrenula faza u okolini takvih nultočki. To znači

da poznavanjem topoloških struktura valnih funkcija možemo izbjeći četverodimenzionalnu integraciju u (16) pri računanju σ_{xy} . Faza valnih funkcija se ne može globalno odrediti, ali korištenjem više faznih konvencija je moguće prekrili cijelu Brillouinovu zonu. U konačnici, topološka priroda σ_{xy} nam garantira da se njen iznos neće promijeniti dok god promjena potencijala ne uzrokuje značajne deformacije Hamiltonijana kojima bi došlo do degeneracije promatrane vrpce.

LITERATURA

- [1] R. B. Laughlin, Quantized Hall conductivity in two dimensions, Phys. Rev. B 23, 10 (1981)
- [2] Klaus von Klitzing, The quantized Hall effect, Nobel lecture, December 9, (1985)
- [3] J. E. Avron, A Topological Look at the Quantum Hall Effect, Physics Today, (2003)
- [4] M. Kohmoto, Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance, Annals of Physics 160, (1985)
- [5] E. Fradkin, Field Theories of Condensed Matter Systems, Addison-Wesley, (1991)
- [6] J. Solyom, Fundamentals of the Physics of Solids, Volume II, Springer, (2009)
- [7] Steven M. Girvin, The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries, arXiv, Indiana University, (1998)
- [8] Sebastian Huber, ITP, ETH Zürich, Lectures on Topological quantum numbers in condensed matter systems