

# Holonomija u fizici

Anton Perkov

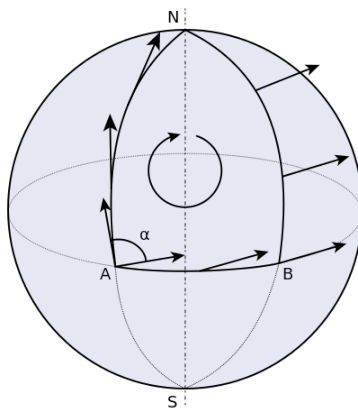
Akadska godina 2015./2016.

## Abstract

Predstavljene su definicije paralelnog transporta, grupe holonomije i restringirane holonomije, te neke poveznice s diferencijalnom geometrijom, topologijom, i povijesti fizike. Pokazani su geometrijski izvodi kuta rotacije Foucaultovog njihala i Thomasove precesije pomoću metode tangencijalnih stožaca. Iznesen je kvantni adijabatski teorem i objašnjeno porijeklo Berryjeve faze, te njena uloga u Aharonov-Bohm efektu.

## 1. Uvod

U geometriji (poglavito Riemannovoj geometriji) je poznat problem opisa paralelnog prijenosa vektora po zakrivljenim mnogostrukostima, ilustriran na Slici 1. Do kraja 19. stoljeća je problem većim dijelom ostao čisto fenomenološke, heurističke prirode.



Slika 1: Prikaz skretanja vektora paralelnim prijenosom duž sfere po točkama  $A \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow A$ , te razlika početnog i završnog stanja.

Usporednim razvitkom alata diferencijalne geometrije i teorije grupa, naročito teorije Liejevih grupa i algebarske topologije, otvoren je put preciznoj definiciji holonomije, opisa paralelnog prijenosa i povezivanjem s lokalnim i globalnim svojstvima mnogostrukosti, od čega je najpoznatiji rezultat Ambrose-Singer teorem iz 1953., međutim, za nabrojati njegove fizikalne primjene u teoriji struna i LQG ovdje nema mnogo mjesta.

U klasičnoj fizici je uloga holonomije u opisu pojava manje zastupljena nego u modernoj fizici, uglavnom zato što je E. Cartan definirao holonomiju tek 1926. godine iz apstraktnih motivacija, željevši dublje proučiti i klasificirati simetrične mnogostrukosti. Uloga joj prominentno raste u teorijskoj fizici tek šezdesetih i sedamdesetih godina, gdje joj počinje primjena u "teorijama svega" i baždarnim teorijama izraslih iz QFT-a. Uloga u opisu klasične i nerelativističke kvantne fizike postaje očita kasnije, počevši s [2] koji prepoznaje važnost geometrijske faze u adijabatskom procesu iz [8], što je opisano u jednom od idućih poglavlja. No, za precizan opis holonomije u tim fenomenima potrebno je shvatiti o čemu je uopće riječ. Stoga je u nastavku izloženo nekoliko osnovnih definicija.

Neka je  $(E, \pi, M, F, G)$  glatki vektorski svežanj nad diferencijabilnom mnogostrukosti  $M$ , te neka je  $U \subset M$  otvoreni skup, a  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  interval. Označimo s  $\Gamma(E, U)$  skup prereza u totalnom prostoru  $E$  nad područjem  $U \subset M$ , a s  $\Gamma(E)$  skup prereza u  $E$  nad čitavim baznim prostorom  $M$ .

**Def. 1.** Neka je  $\gamma : I \rightarrow M$  po dijelovima gladak put. Za  $\sigma \in \Gamma(E, U)$  definiramo

$$\dot{\gamma}(t) \equiv \frac{d}{dt}\gamma(t) \equiv \dot{\gamma}^i(t) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} \in \Gamma(TM).$$

Gornja definicija se može shvatiti kao rastav pune derivacije  $d/dt$  na linearnu kombinaciju parcijalnih derivacija (vektora baze u tangentnom prostoru).

**Def. 2.** (Paralelni transport [1]): Prerez  $\sigma(t) \in \Gamma(E)$  je paralelan duž  $\gamma(t)$  ako vrijedi

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\sigma(t) = 0, \forall t \in I. \quad (1)$$

Paralelni transport vektora  $v_0 \in E_p$  iz točke  $P = \gamma(a) \in M$  u točku  $\gamma(t)$  je preslikavanje

$$\tau_{\gamma(t)} : E_{\gamma(a)} \rightarrow E_{\gamma(t)}$$

dano rješenjem sustava (1) s početnim uvjetom  $\sigma(a) = v_0$ .

Gornja definicija, u osnovi, kaže da paralelni transport kao ulaz uzima početni vektor  $v_0$  i izbacuje taj vektor pomaknut po krivulji do proizvoljne točke  $\gamma(t)$ .

U idućoj definiciji se podrazumijeva da je definirana koneksija  $\nabla$ , međutim ona neće biti eksplicitno potrebna za primjene koje će doći kasnije, a sve tehničke detalje zapravo sređuje kovarijantna derivacija  $\nabla_X$ , tako da će se koneksija  $\nabla$  pojavljivati samo kao formalna, "knjigovodstvena" oznaka.

Prije same definicije, valja primjetiti da je  $\tau_\gamma$  linearno i invertibilno preslikavanje. Linearnost je nasljeđena iz vektorske strukture prostora  $E$ , a invertibilnost je posljedica jedinstvenosti rješenja sustava (1) s početnim uvjetom, koja pak (skupa s egzistencijom rješenja) proizlazi iz Picard-Lindelöf teorema (poznatog i pod imenom Cauchy-Lipschitz teorem). Stoga je  $\tau_\gamma \in GL(E_x)$ , odnosno moguće je definirati  $(\tau_\gamma)^{-1}$ .

**Def. 3.** (Grupa holonomije [1]) Grupa holonomije u točki  $x \in M$  definirana je kao skup paralelnih pomaka nad svim zatvorenim krivuljama koje prolaze kroz tu točku, odnosno

$$Hol_x(\nabla) = \{\tau_\gamma \in GL(E_x) | \gamma(a) = \gamma(b) \wedge \exists t_0 \in I, \gamma(t_0) = x\} \quad (2)$$

Restringirana grupa holonomije je podgrupa  $Hol_x^0(\nabla) \subset Hol_x(\nabla)$  sastavljena od paralelnih pomaka nad krivuljama  $\gamma$  koje su kontraktibilne, odnosno u istoj klasi homotopije kao točka.

Lako je uvjeriti se kako obje holonomije doista zadovoljavaju svojstva grupe [1]:

- Grupa je zatvorena obzirom na konkatenciju paralelnih prijenosa duž zatvorenih krivulja  $\gamma(t)$  i  $\gamma'(t)$ , jer se od njih može konstruirati nova krivulja

$$d(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Grupa je asocijativna (očito iz gornje konstrukcije i iz  $\tau_\gamma \in GL(E_x)$ )
- Neutralni element je trivijalna petlja  $\gamma(t) = x_0 \in M$
- Inverzni element preslikavanja duž petlje je preslikavanje duž iste petlje u suprotnom smjeru, odnosno

$$(\gamma(t))^{-1} = \gamma(1-t).$$

Pomoću ovih grupa moguće je konstruirati i fundamentalnu grupu pojedine mnogostrukosti:

$$\pi_1(M) = Hol_x(\nabla)/Hol_x^0(\nabla).$$

Očigledno, ako je mnogostrukost jednostavno povezana, tada su ove dvije grupe holonomije izomorfne i fundamentalna grupa je trivijalna. Također, ukoliko je mnogostrukost  $M$  ravna (odnosno Riemannov tenzor  $R^a_{bcd}$  iščezava), tada je grupa holonomije trivijalna. Opće poznata je i činjenica da je paralelni transport duž geodezika mnogostrukosti također identiteta [1].

## 2. Foucaultovo njihalo

Opis rotacije ravnine njihanja Foucaultovog njihala se u klasičnoj mehanici obično dobiva iz djelovanja Coriolisove sile, dane formulom [3]

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \Omega \quad (3)$$

gdje je  $\mathbf{v}$  brzina tijela na Zemljinoj površini, a  $\Omega$  kutna brzina Zemljine rotacije.

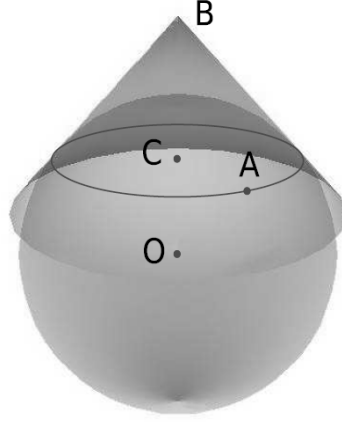
Takav pristup daje formulu zakretanja ravnine njihanja nakon jednog sideričkog dana, odnosno jedne rotacije Zemlje oko svoje osi u odnosu na daleke zvijezde, u adijabatskoj aproksimaciji, odnosno gdje je kut njihanja malen, a period njihanja mnogo manji od perioda rotacije Zemlje (vidi npr.[7], str 132; ondje je dan  $\Omega_z = \dot{\varphi}_E$ ):

$$\varphi_E = -2\pi \cos \theta_0 \quad (4)$$

gdje je  $\varphi_E$  kut za koji se ravnina zakrene nakon jednog dana, a  $\theta_0$  polarni kut, povezan s geografskom širinom  $\alpha$  preko  $\theta_0 = \pi/2 - \alpha$ . Međutim, takvo je ponašanje moguće izvesti geometrijski, pomoću paralelnog transporta [3].

Označimo s  $M$  sferu koja predstavlja idealiziranu Zemljinu površinu. Prvo valja primjetiti kako je  $\mathbf{v} \in TM$ , te je za neku odabranu geografsku širinu  $\theta_0$  moguće konstruirati podsvežanj na sferu u obliku stošca, što je prikazano na Slici 2.

Uzmimo da je radijus Zemlje jediničan, te ispisujemo vektore:



Slika 2: Geometrijski prikaz podsvježnja na sferi za odabrani  $\theta_0 = \angle(COA)$ . Ovdje je  $A$  proizvoljna početna točka na kružnici, dok je  $C$  središte te kružnice. Figura je orijentirana tako da je  $B$  iznad sjevernog pola, no analogna analiza se može napraviti i za južni pol.

$$\vec{OA} = (\mathbf{n} \sin \theta_0, \cos \theta_0) \quad (5)$$

$$\vec{CA} = (\mathbf{n} \sin \theta_0, 0) \quad (6)$$

$$\vec{BA} = \left( \mathbf{n} \sin \theta_0, -\frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right), \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  jediničan vektor u ravnini kružnice. Komponenta  $z$  vektora (7) je dobivena iz zahtjeva ortogonalnosti tangentnog vektora na sferu, odnosno

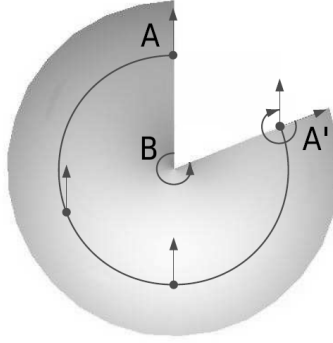
$$\vec{BA} \cdot \vec{OA} = 0. \quad (8)$$

Nadalje, inducirana metrika na stošcu je Euklidska, i moguće je odabrati koordinatni sustav  $(\rho, \varphi)$ , gdje je  $\rho$  udaljenost točke na stošcu od točke  $B$ , a  $\varphi$  azimutalni kut definiran u odnosu na točku  $A$  na sferi. Metrika na stošcu tada postaje

$$g = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cos^2 \theta_0 d\varphi \otimes d\varphi \quad (9)$$

Reskaliranjem varijabli  $\varphi \rightarrow \varphi / \cos \theta_0$  (što je moguće jer je  $\theta_0$  konstantan) metrika stošca prelazi u metriku polarnog sustava u ravnini.

Ovim postupkom je efektivno uspostavljen difeomorfizam između polarne ravnine  $\mathbb{R}^2$  i stošca kao tangencijalne mnogostrukosti na sferu u  $\mathbb{R}^3$ , što omogućuje analizu paralelnog transporta. U uvodu je već naglašeno da je grupa holonomije trivijalna za mnogostrukosti s iščezavajućim Riemmanovim tenzorom (odnosno ravnim mnogostrukostima), što znači da paralelni transport po bilo kojoj zatvorenoj krivulji ne mijenja vektor (u uobičajenom Euklidskom smislu), kao što je prikazano na Slici 3 za slučaj pomicanja vektora po dodirnoj kružnici stošca i sfere. Drugim riječima, vektor je invarijantan na djelovanje elemenata holonomije [1].



Slika 3: Stožac iz Slike 2 izrezan duž linije  $BA$  i izravnat (čuvajući udaljenosti) u ravninu. Točke  $B$  i  $A$  su iste kao sa Slike 2, dok se točka  $A'$  pojavila kao posljedica rezanja stošca, te ona u izvornoj slici koincidira s  $A$ .

U točki  $A'$  su za usporedbu prikazani početni vektor i vektor dobiven paralelnim pomakom duž dodirne kružnice stošca i sfere, te je evidentno kako ta dva vektora nisu identična. Štoviše, moguće je mentalno konstruirati rotaciju vektora u smjeru kazaljke na satu dok se sam vektor transportira u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Ukoliko se uzme da vektor pokazuje duž ravnine rotacije, vidljiv je geometrijski argument za rotaciju ravnine njihanja Foucaultovog njihala. [3]

Ostaje još pitanje dobivanja formule (4) geometrijskim argumentom. Kut  $\varphi_E$  u radijanima je moguće dobiti iz omjera duljine kružnog luka  $|AA'| = 2\pi|\vec{CA}|$  (u smjeru suprotnom od kazaljke na satu) i radijusa  $|\vec{BA}|$ :

$$\varphi_E = -\frac{2\pi|\vec{CA}|}{|\vec{BA}|} = -2\pi \cos \theta_0 \quad (10)$$

Negativni predznak u formuli dolazi od činjenice da je rotacija vektora u smjeru kazaljke na satu. Iz formule je vidljivo da najveću dnevnu precesiju ( $\varphi_E = -2\pi$ , odnosno  $\varphi_E/24h = -15^\circ$ ) imaju polovi (geometrijski, za njih je slika 2 puni krug). Ravnina njihanja se ne rotira na ekvatoru (za nju slika 2 u limesu  $\theta \rightarrow \pi/2$  postaje iščezavajući kružni isječak), što je konzistentno s činjenicom da je ekvator geodezik sfere. [7]

Za usporedbu, uvrštavanjem geografske širine Zagreba ( $\alpha = 90^\circ - \theta_0 = 45^\circ 50'$ ) dobije se  $\varphi_E/24h \approx -10.76^\circ/h$ .

### 3. Thomasova precesija

U specijalnoj teoriji relativnosti, kompozicija dva nekolinearna Lorentzova potiska općenito rezultira Lorentzovom transformacijom koja nije čisti potisak, već kombinacija potiska i prostorne rotacije (što je moguće vidjeti iz algebre Poincaréove grupe, o čemu je par crtica moguće naći u Dodatku B), poznate kao Wignerova rotacija ili Thomasova precesija, dana formulom: [3]

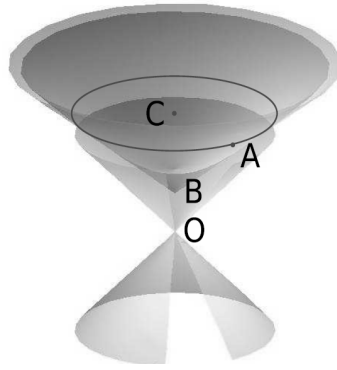
$$\phi_E = -2\pi\gamma, \quad (11)$$

gdje je  $\gamma$  standardan Lorentzov faktor, a  $\phi_E$  kut precesije nakon jednog perioda jednolikog kružnog gibanja. Taj je rezultat moguće dobiti na nekoliko načina (npr. [6]), no ovdje će fokus biti na sličnoj geometrijskoj metodi kao za Foucaultovo njihalo.

Za početak, uzimamo da je metrika Minkowskog definirana sa

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1),$$

pa četverobrzina  $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$  zadovoljava  $u^2 = 1$  (koristimo konvenciju  $c = 1$ ). Ove relacije definiraju prostor brzina kao hiperboloid na suprotnim stranama svjetlosnog stošca, od kojih je onaj u budućnosti prikazan na Slici 4. [3]



Slika 4: Trodimenzionalna projekcija 4D prostora brzina. Prikazan je hiperboloid skupa sa svjetlosnim stošcem i stošcem s apeksom u  $B$  tangentnim na hiperboloid u svim točkama s istim  $\gamma$  kao  $A$ .

Čestica može zakretanjem u prostoru poprimiti bilo koju od brzina s kružnice s centrom u točki  $C$ .

Vektori koji opisuju hiperboloid i odnose među označenim točkama:

$$\vec{OA} = (\gamma, \mathbf{n}\gamma v) \quad (12)$$

$$\vec{CA} = (0, \mathbf{n}\gamma v) \quad (13)$$

$$\vec{BA} = (\gamma v^2, \mathbf{n}\gamma v), \quad (14)$$

gdje je, opet,  $\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$  jedinični vektor u ravnini  $xy$ , odnosno kružnice sa središtem u  $C$ , a prva komponenta vektora  $\vec{BA}$  dobivena iz uvjeta da je taj vektor ortogonalan na hiperbolu u metrici Minkowskog, odnosno

$$\vec{BA} \cdot \vec{OA} = 0. \quad (15)$$

Gornje jednadžbe su slične onima dobivenima za sferu, tj. (5)-(8).

Dobivanje inducirane metrike na stošcu zahtijeva malo više posla nego u slučaju sfere. Proizvoljna točka  $X$  na stošcu je opisana radijvektorom iz  $B$ :

$$\vec{BX} = \rho(v, \mathbf{n}). \quad (16)$$

Variranjem  $\vec{BX}$  po  $\rho$  i  $\phi$ , odnosno raspisivanjem diferencijalne 1-forme po komponentama, dobiva se

$$d\vec{B}\vec{X} = \frac{\partial \vec{B}\vec{X}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{B}\vec{X}}{\partial \phi} d\phi \quad (17)$$

$$= d\rho(v, \mathbf{n}) + \rho(0, d\mathbf{n}), \quad (18)$$

gdje je  $d\mathbf{n} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)d\phi$ . Primjetimo da vrijedi  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$ .

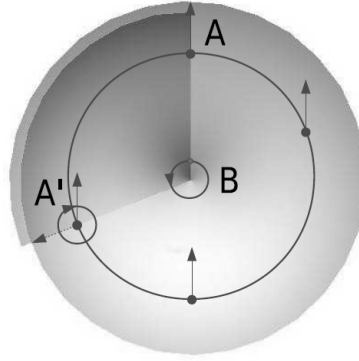
Metrika na stošcu dobiva se kontrahiranjem dvije 1-forme iz (18) metrikom Minkowskog:

$$g = \frac{1}{\gamma^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi, \quad (19)$$

odnosno reskaliranjem varijabli  $\phi \rightarrow \phi/\gamma$  i  $\rho \rightarrow \gamma\rho$  dobiva se

$$g = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi, \quad (20)$$

odnosno ponovno je dobivena euklidska metrika u polarnom sustavu. Stoga se, analogno kao sa sferom, stožac može razrezati duž linije  $BA$ , razmotati tako da se sačuvaju udaljenosti i kutevi i položiti na ravninu, kao na Slici 5.



Slika 5: Stožac iz Slike 4, izrezan duž linije  $BA$  i izravnat (čuvajući udaljenosti i kuteve) u ravninu. Točke  $B$  i  $A$  su iste kao sa Slike 4, dok se točka  $A'$  pojavila kao posljedica rezanja stošca, te ona u izvornoj slici koincidira s  $A$ .

Postupak dobivanja kuta Thomasove precesije je sličan kao za dobivanje kuta rotacije Foucaultovog njihala [3]: potrebno je podijeliti duljinu luka  $|AA'|$  s radijusom kružnice  $|BA|$ , odnosno u konačnici se dobije

$$\phi_E = -\frac{2\pi|\vec{CA}|}{|BA|} = -2\pi\gamma. \quad (21)$$

Kao i prije, negativan predznak dolazi od činjenice da čestica precesira u smjeru kazaljke na satu dok se u prostoru njezina brzina rotira suprotno od kazaljke na satu, što je vidljivo na Slici 5.

## 4. Berryjeva faza

Berryjeva faza je, kao i rotacija ravnine njihanja Foucaultovog njihanja i Thomasova precesija, primjer neholonomne pojave. To znači da, tijekom nekog zatvorenog

ciklusa, gdje je završna točka jednaka početnoj, rezultatno stanje nije jednako početnom (vidjeti npr. [4], str. 333 i [1], str. 369). U slučaju Foucaultovog njihala i Thomasove precesije radilo se o jednostavnoj cikličnoj promjeni nekog realnog parametra u prostoru. Za matematički opis Berryjeve faze potrebno je, pak, poznavati kvantni adijabatski teorem [2].

**Tm. 1.** (*Kvantni adijabatski teorem*) Neka je  $H(t), 0 \leq t \leq 1$  glatki Hamiltonijan, i neka je  $E(t) \in C^\infty$  izolirana nedegenerirana svojstvena vrijednost Hamiltonijana za svaki  $t$ . Neka je  $\psi_T(s)$  rješenje Schrödingerove jednadžbe

$$i\hbar \frac{d\psi_T(s)}{ds} = H(s/T)\psi_T(s) \quad (22)$$

s početnim uvjetom  $\psi_T(0) = \phi_0$ , gdje vrijedi  $H(0)\phi_0 = E(0)\phi_0$ . Tada vrijedi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(T) = \phi_1, \quad (23)$$

gdje je  $\phi_1$  svojstveno stanje Hamiltonijana  $H(1)$ , odnosno

$$H(1)\phi_1 = E(1)\phi_1. \quad (24)$$

Dokaz teorema se može naći npr. u [4], str. 327.

Slično kao u klasičnoj mehanici, adijabatska promjena je promjena vanjskih uvjeta sustava koja se događa veoma polako. To je ovdje označeno limesom  $T \rightarrow \infty$ , gdje je  $T$  omjer vremenskih skala adijabatske promjene i dinamike sustava (tzv. karakterističnih vremena).

Teorem kaže da, u adijabatskoj aproksimaciji, sustav koji se nalazi u osnovnom svojstvenom stanju Hamiltonijana i nakon promjene ostaje u tom osnovnom stanju, iako na kraju procesa Hamiltonijan i svojstvena stanja mogu izgledati sasvim drugačije od početnog (vidi npr. [4], str. 324).

Uzmimo sad općeniti hermitski operator  $\hat{A}(\mathbf{x})$  ovisan o skupu parametara  $\mathbf{x}$ , s izoliranim nedegeneriranim svojstvenom vrijednošću  $E(\mathbf{x})$ . Tada pridruženi svojstveni vektor definira vlakno svežnja nad parametarskim prostorom [2], tj.

$$F = \{(\mathbf{x}, \phi) | \hat{A}(\mathbf{x})\phi = E(\mathbf{x})\phi\}. \quad (25)$$

Neka je  $C(t)$  zatvorena krivulja u tom parametarskom prostoru, takva da je  $\hat{A}(C(t)) \equiv H(t)$  te da zadovoljava uvjete adijabatskog teorema. Tada proizlazi da su  $\phi_1$  i  $\phi_0$  vezani do na fazni faktor. [8]

M.V.Berry je 1984. godine uvidio da ta faza, uz uobičajenu dinamičku fazu, sadrži i dodatan član, odnosno da je cijeli izraz oblika

$$\phi_1 = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T E(s/T) ds \right] \exp [i\gamma(C)] \phi_0, \quad (26)$$

gdje je  $\gamma(C)$  tzv. geometrijska ili Berryjeva faza, ovisna o obliku putanje u parametarskom prostoru. Drugim riječima, iako se Hamiltonijan vratio u početni oblik, stanje sustava nije potpuno identično početnom. Dobivenu geometrijsku fazu je moguće čak i eksperimentalno izmjeriti (za detalje vidjeti [8]).

Ukoliko se oblik valne funkcije iz (26) ubaci u Schrödingerovu jednadžbu (22), dobije se jednadžba evolucije geometrijske faze:



$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + i \psi_n \frac{d\gamma_n}{dt}, \quad (27)$$

gdje indeks  $n$  označava  $n$ -to svojstveno stanje Hamiltonijana  $H$ . Uz razumnu pretpostavku da su stanja ortonormirana, uzimanjem skalarnog produkta gornje jednačbe dobiva se

$$\frac{d\gamma_n}{dt} = i \langle \psi_n | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \rangle. \quad (28)$$

Parcijalnu derivaciju funkcije je moguće rastaviti po lančanom pravilu na iduću sumu:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi_n}{\partial R_i} \frac{dR_i}{dt} = (\nabla_R \psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (29)$$

gdje su  $R_i$  parametri Hamiltonijana koji prolaze kroz adijabatsku promjenu. Uvrštavanjem u jednačbu (28) slijedi

$$\frac{d\gamma_n}{dt} = i \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (30)$$

odnosno integracijom jednačbe dobiva se

$$\gamma_n(T) = i \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot dt = i \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (31)$$

Kako nas zanimaju zatvoreni neholonomni procesi, gornja i donja granica integracije su iste, pa je Berryjeva (geometrijska) faza dana kružnim integralom

$$\gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (32)$$

koji je općenito različit od nule.

Kako je  $\gamma_n(T)$  realan (jer se pojavljuje kao fazni faktor u (26)),  $\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$  je nužno imaginaran. Ukoliko su svojstvene funkcije Hamiltonijana realne, tada je gornji izraz istovremeno realan i imaginaran, tj. jednak nuli, pa Berryjeva faza u tom slučaju iščezava.

## 5. Aharonov-Bohm efekt

Iz teorije polja je poznat princip lokalne baždarne invarijantnosti jednačbi na izbor potencijala [5]:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (33)$$

gdje je  $\Lambda$  proizvoljna funkcija vremenske i prostornih koordinata. Taj se princip obilato koristi i u klasičnoj elektrodinamici (za primjere vidjeti [9], str. 419). Zanimljivost kvantnomehaničke prirode se pojavljuje u vidu toga što Schrödingerova jednačba ne barata s poljima, već s potencijalima, pa u ovom slučaju Hamiltonijan poprima oblik ([4], str. 343)

$$H = \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla + q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (34)$$

gdje je  $\phi \equiv A^0$  i  $\mathbf{A} \equiv (A^1, A^2, A^3)$ . Kvantna teorija je i dalje baždarno invarijantna, no Aharonov i Bohm su 1959. pokazali da, čak i kad je vanjsko polje  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ , kvantna čestica osjeća utjecaj potencijala. [10]

Neka se čestica s nabojem  $q$  giba kroz prostor gdje je  $\mathbf{B} = 0$ , ali  $\mathbf{A} \neq 0$ . Vremenski ovisna Schrödingerova jednačba tada glasi

$$\left( \frac{1}{2m} (i\hbar\nabla + q\mathbf{A})^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (35)$$

gdje potencijal  $V$  može i ne mora sadržavati ovisnost o električnom potencijalu  $q\phi$ .

Pretpostavimo da  $\mathbf{A}$  ne ovisi o  $t$ . Moguće je provesti transformaciju iz [10], danu sa

$$\Psi = e^{ig} \Psi', \quad (36)$$

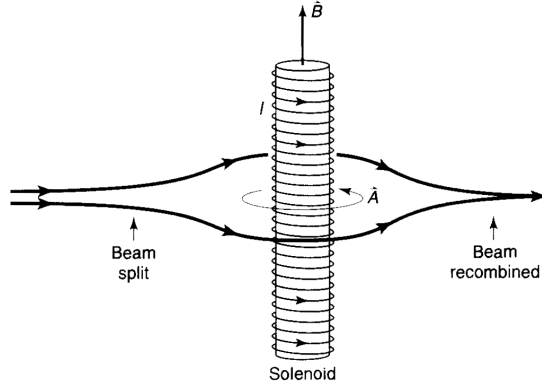
gdje je (za  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ )

$$g(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (37)$$

a izbor donje granice integracije je proizvoljan. Uvrštavanjem u (35) se može dobiti da  $\Psi'$  zadovoljava standardnu Schrödingerovu jednačbu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' + V \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}. \quad (38)$$

Aharonov i Bohm su u [10] predložili nekoliko eksperimenata kojima bi izmjerili  $g$ . Postav jednog od njih je dan na slici 6.



Slika 6: Eksperimentalni postav Aharonov-Bohm efekta. Snop elektrona se rascijepi na dva i rekombinira nakon prolaska oko zavojnice.

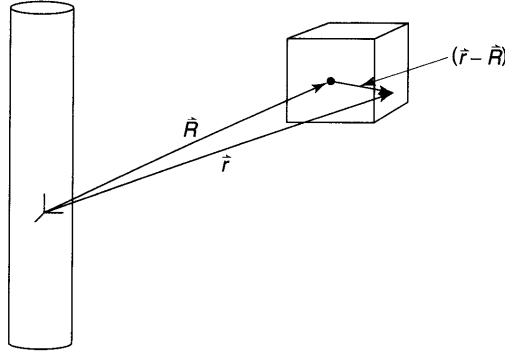
Neka su elektroni dovoljno daleko od zavojnice da je  $\mathbf{B} = 0$ . Potencijal je dan sa  $\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}$ , gdje je  $\Phi$  tok magnetskog polja unutar zavojnice, pa fazna transformacije glasi

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left( \frac{\hat{\phi}}{r} \right) \cdot (r\hat{\phi}d\phi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (39)$$

Suprotni predznaci dolaze od toga što elektroni mogu putovati paralelno ili antiparalelno u odnosu na  $\mathbf{A}$  oko zavojnice. Stoga snopovi dolaze na cilj s ukupnom faznom razlikom  $\frac{q\Phi}{\hbar}$ , koju je moguće izmjeriti kao interferenciju.

Iznenadujuće je što se Aharonov-Bohm efekt može opisati geometrijski kao primjer Berryjeve faze, i to čak van adijabatskog režima. To se moglo naslutiti iz (36) i (37): valna funkcija uz dinamičku fazu opet dobije dodatan fazni faktor ovisan o opisanom putu u konfiguracijskom prostoru, koji se u ovom slučaju uzima kao parametarski prostor. Berry je tu vezu pokazao u [8] slijedećim izvodom.

Neka je dana čestica naboja  $q$  zatočena u kutiji centriranoj u točki  $\mathbf{R}$  izvan zavojnice, pa je vrijednost potencijala ograničena na skup vrijednosti  $V(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , gdje je  $\mathbf{r}$  radijvektor čestice. Situacija je prikazana na slici 7.



Particle confined to a box, by a potential  $V(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ .

Slika 7: Skica uz izvod veze između Aharonov-Bohm efekta i Berryjeve faze

Svojstvene funkcije Hamiltonijana su u tom slučaju dane Schrödingerovom jednačinom:

$$\left( \frac{1}{2m} (i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})) + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right) \psi_n = E_n \psi_n \quad (40)$$

Uz uvođenje supstitucija analognih s (36) i (37) moguće je dobiti Schrödingerovu jednačinu za  $\psi'_n$ :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right) \psi'_n = E_n \psi'_n. \quad (41)$$

Bitno je napomenuti kako je ovim postupkom dobiven  $\psi'_n$  kao funkcija razlike  $(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , za razliku od  $\psi_n$  koji je funkcija zasebnog  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{R}$ .

Kako bi se dobio globalan rezultat koristan za integraciju, potrebno je "kutiju s česticom" pomicati oko zavojnice. Za usporedbu s Berryjevom fazom potrebno je dobiti podintegralni skalarni produkt iz (32), sa skupom parametara  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{R}$ .

Kako je

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R (e^{ig} \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})) = -\frac{iq}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) + e^{ig} \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (42)$$

tako je skalarni produkt (definiran u  $L^2$  prostoru) dan sa

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} (\psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}))^* e^{ig} \left( -\frac{iq}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_R \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right) d^3\mathbf{r} \\
&= -\frac{iq}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \int \psi_n'^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi'_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3\mathbf{r} \\
&= -\frac{iq}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}),
\end{aligned} \tag{43}$$

gdje je iskorištena činjenica da je  $\nabla_R = -\nabla$ , te da posljednji integral iščezava jer je to očekivana vrijednost impulsa u svojstvenom stanju Hamiltonijana  $H = -\hbar^2/2m\nabla^2 + V$ . Ubacivanjem u (32) i korištenjem Stokesovog teorema dobije se

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{\hbar} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{q\Phi}{\hbar}, \tag{44}$$

što je upravo razlika u fazi među elektronima kod rekombinacije snopa predviđena jednačbom (39).

## 6. Zaključak

U ovom je seminaru izložen novi pogled na nekoliko tema iz fizike koje na prvi pogled nemaju gotovo ništa zajedničko. Nakon uvođenja osnovnih definicija paralelnog transporta i grupa holonomije, pokazano je kako je pomoću njih moguće sistematizirati neka geometrijska opažanja koja su zajednička među danim sustavima i ukazati na zajedničko svojstvo - neholonomnost.

U opisu Foucaultovog njihala i Thomasove precesije iskorištena je metoda stošca tangentnog na sferu koja predstavlja Zemlju, odnosno na hiperboloid relativističkih brzina, te je pokazano da paralelan prijenos vektora duž krivulja koje nisu geodezici općenito ne vraća vektore u početno stanje, već ih rotira pod nekim kutom, ovisnim o parametru koji se gleda: u klasičnom slučaju je to bila geografska širina  $\theta$ , dok je u relativističkom to bio Lorentzov faktor  $\gamma$ . U oba slučaja se krucijalnom pokazala metoda prikazivanja zakrivljene mnogostrukosti Euklidskom, odakle je intuitivno poznat paralelni transport prenesen natrag na mnogostrukost.

Iduća poglavlja, nakon iznošenja kvantnog adijabatskog teorema, opisuju Berryjevu fazu kao geometrijsku posljedicu mijenjanja skupa parametara nekog operatora po zatvorenoj krivulji u parametarskom prostoru. Jednačba (25), koja definira vlakno svežnja nad parametarskom mnogostrukosti, je zanimljiv materijal za daljnja razmatranja. Kao primjer pojavljivanja Berryjeve faze navodi se Aharonov-Bohm efekt, koji proizlazi iz baždarne slobode EM potencijala i opisuje EM pojave bez prisutstva ikakvih polja, već samo potencijala, koji su do tog predviđanja smatrani čisto matematičkim konstruktom.

Za kraj je u Dodatku A naveden primjer Hamiltonijana sustava s dva nede-generirana stanja u kojem se uvede perturbativna smetnja, te je objašnjeno kako takav sustav može objasniti porijeklo kvantizacije energije kao potpuno geometrijski problem brojanja listova Riemannove plohe kompleksnog perturbativnog parametra  $\epsilon$ . Navedena je i moguća poveznica takvog sustava s holonomijom.

## Dodatak A: Primjer s perturbiranim Hamiltonijanom

Neka je dan perturbirani Hamiltonijan dvostanjskog sustava s nedijagonalnom smetnjom (interakcijom) u obliku

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Označimo svojstvena stanja neperturbiranog sustava sa

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

sa svojstvenim energijama  $E_+ = a$  i  $E_- = b$ . Uključivanjem smetnje se mijenjaju svojstvena stanja i energije. U ovom slučaju nas zanima samo ovisnost svojstvenih energija o parametru  $\epsilon$ . Ta se ovisnost jednostavno može dobiti rješavanjem Schrödingerove jednadžbe  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ .

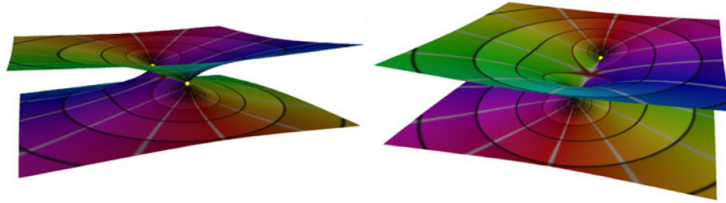
Karakteristična jednadžba:

$$\det(H - E \cdot I) = E^2 - (a + b)E + ab - \epsilon^2 c^2 = 0, \quad (47)$$

čija su rješenja dana s

$$E_{\pm}(\epsilon) = \frac{1}{2} \left( a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4\epsilon^2 c^2} \right). \quad (48)$$

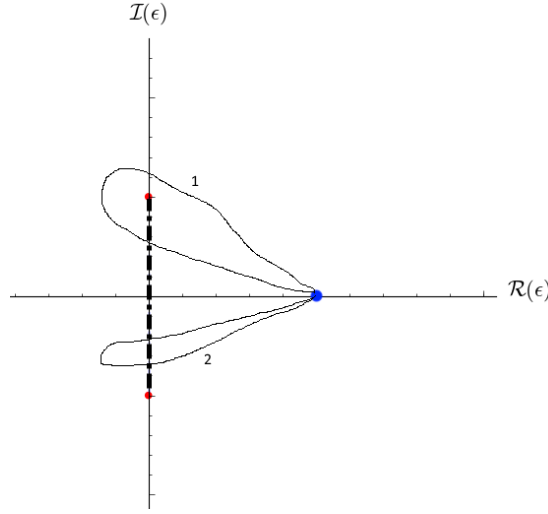
Ukoliko se dozvoli da  $\epsilon$  poprima vrijednosti u kompleksnoj ravnini, vidi se da tada razvoj u red izraza za energije dobije konačan radijus konvergencije, zbog povećanja domene parametra  $\epsilon$  na Riemannovu plohu za drugi korijen (Slika 8), odnosno činjenice da su  $\epsilon_{1,2} = \pm \frac{i(a-b)}{2c}$  točke grananja. Na Slici 9 iscrtkana linija između te dvije točke (označenih crveno) predstavlja mogući odabir reza.



Slika 8: Riemannova ploha za odabrani rez funkcije energije

Iz slika je vidljivo i da se zatvorene krivulje koje prolaze kroz neku točku (označenom plavom bojom) mogu podijeliti, za početak, u dvije vrste krivulja (označene s 1 i 2): one koje prolaze neparan broj rezova i završe u istoj točki ali na drugom listu, stoga uvjetno rečeno nisu ni zatvorene (osim ako se ne dodefinira svojevrzni "most" između listova koji se ne broji kao prolazak kroz rez), i one koje prolaze kroz paran broj rezova (uključujući 0) i završe u istoj točki na listu od kojeg su krenuli.

Moguće je intuitivno izvesti nekoliko zaključaka o topološkim svojstvima različitih tipova krivulja:



Slika 9: Prikaz dvije moguće krivulje na kompaktno prikazanoj Riemannovoj plohi, odnosno kompleksnoj  $\epsilon$  ravnini.

- Nijedna krivulja tipa 1 nije kontraktibilna
- Korolar: sve kontraktibilne krivulje su nužno tipa 2
- Sve krivulje oba tipa su involutorne: dvostruki prolaz krivuljama vraća na izvorni list, odnosno po efektu je ekvivalentan krivulji tipa 2. To je zato što se konkatencijom dvije krivulje s  $n$  prolaza kroz rez efektivno dobiva djelovanje krivulje s  $2n$  prolaza, koja je tipa 2.

No, što se uopće događa prilikom prolaza kroz rez? Tijekom tog prolaza energija  $E$  mijenja predznak ispred korijena, tako da prolaskom kroz rez zapravo dobivamo kontinuiran prijelaz iz jedne svojstvene energije u drugu - funkcija energije je jedinstvena u analitičkom produljenju za  $\epsilon$  i iznosi

$$E(\epsilon) = \frac{1}{2} \left( a + b + \sqrt{(a-b)^2 + 4\epsilon^2 c^2} \right) \quad (49)$$

U tom smislu, energija uopće nije kvantizirana u izvornom smislu riječi - kvantizacija koja se događa sustavu je samo posljedica prolaza (glatkog, dapače analitičkog!) kroz rez na dvolisnoj Riemannovoj plohi, obilazeći točke grananja. U tom prijelazu funkcija energije mijenja predznak ispred korijena.

Drugim rječima, kvantizacija energetske stanja dolazi od brojanja listova Riemannovih ploha perturbacijskog parametra  $\epsilon$ . Sličan efekt se vidi i kod sustava s  $n$  energijskih nivoa, jer je kod njih Hamiltonijan dan  $n \times n$  matricom, koja daje algebarsku jednadžbu  $n$ -tog reda za energiju, pa se shodno tome  $\epsilon$  pojavljuje pod  $n$ -tim korjenom, bilo u eksplicitnim formulama za rješenje jednadžbe (za  $n \leq 4$ ), bilo tijekom perturbativnog rješavanja.

Ovdje je, naravno, "pod tepih podmeten" uvjet da Hamiltonijan mora biti hermitski operator, što je zadovoljeno za realni  $\epsilon$  i  $C$ , no ne vrijedi nužno za kompleksni  $\epsilon$  i  $C$ , te se kao posljedica javljaju kompleksne energije s kompliciranijim fizikalnim značenjem.

Eksperimentalna realizacija i opravdanje ovakvog postupka dano je u [12], dok u [13] i [14], uz buduće pažljivo istraživanje, postoji mogućnost povezivanja holonomije s tim fenomenom preko ondje iznesenih formalizma. Kao dobra opcija se čini navedenu pojavu proučavati i alatima monodromije.

## Dodatak B: Poincaréova grupa

Poincaréova, odnosno nehomogena Lorentzova grupa, je semidirektan produkt Lorentzove grupe  $SO(1, 3)$  i grupe translacija u prostor-vremenu. Djelovanje elemenata grupe se na vektore u 4-dimenzionalnom prostor-vremenu Minkowskog može zapisati kao

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (50)$$

gdje su  $\Lambda^\mu{}_\nu$  Lorentzove matrice, a  $a^\mu$  četiri parametra translacija u prostor-vremenu. Grupa je 10-parametarska (6 parametara iz Lorentzove grupe i 4 parametra translacije), te osim generatora rotacija  $J^i$  i generatora potisaka  $K^i$ , nasljeđenih iz Lorentzove grupe, postoje i impulsi kao generatori translacija u prostoru,  $P^i$ , i Hamiltonijan kao generator translacija u vremenu,  $H$ .

Komutacijske relacije algebre koje opisuju odnos Hamiltonijana, prostornih rotacija, potisaka i impulsa dane su sa:

$$[H, P^i] = [P^i, P^j] = [H, J^i] = 0 \quad (51)$$

$$[K^i, H] = iP^i \quad (52)$$

$$[J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk} P^k \quad (53)$$

$$[K^i, P^j] = iH\delta^{ij} \quad (54)$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad (55)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \quad (56)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad (57)$$

U 3. poglavlju je posebno od interesa komutator (56), kojeg je moguće protumačiti kao pojavljivanje prostorne rotacije u ravnini kombiniranjem dva Lorentzova potiska, te je ta rotacija usmjerena u obrnutom smjeru od pravila desne ruke (negativan predznak ispred strukturne konstante), u skladu s predviđanjima ponašanja Thomasove precesije iz 3. poglavlja. (vidi npr.[11], str. 208)

## 8. Literatura

- [1]: M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Taylor and Francis, Shizuoka, 1990.
- [2]: B.Simon, *Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem and Berry's Phase*, Phys.Rev.Lett. (51), 1983.
- [3]: M.I.Krivoruchenko, *Rotation of the swing plane of Foucault's pendulum and Thomas spin precession: Two faces of one coin.*, arXiv: 0805.1136v2, 2010.
- [4]: D.J.Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [5]: D.J.Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & sons, New York, 1987.
- [6]: A.Dragan, T.Odrzygóźdź, *Half-page derivation of the Thomas precession*, arXiv: 1211.1854, 2012.
- [7]: V.I.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [8]: M.V.Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proceedings of the Royal Society of London Series A vol. 394., 1984.
- [9]: D.J.Griffiths, *Introduction to Classical Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [10]: Y.Aharonov, D.Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, The Physical Review, vol.115, 1959.
- [11]: H.F.Jones, *Groups, Representations and Physics*, 2nd ed., IOP Publishing, Philadelphia, 1998.
- [12]: B.Dietz et al., *Exceptional Points in a Microwave Billiard with Time-Reversal Invariance Violation*, Phys.Rev.Lett. (106), 2010.
- [13]: R.Montgomery, *The Connection Whose Holonomy is the Classical Adiabatic Angles of Hannay and Berry and Its Generalization to the Non-Integrable Case*, Commun.Math.Phys. (120), 1988.
- [14]: S.W.Kim, T.Cheon, A.Tanaka, *Exotic quantum holonomy induced by degeneracy hidden in complex parameter space*, Phys. Lett. A, vol. 374, 2010.