Yang-Mills instantoni

Boris Ivetić*
Ruđer Bošković Institute,
Bijenička cesta 54, HR-10002 Zagreb, Croatia

Sažetak

Tema ovog seminara su instantonska rješenja u čistoj baždarnoj teoriji. U prvom djelu uvode se instantoni u 1D kvantnoj mehanici. U drugom (glavnom) djelu rada, prelazi se s čestice u 1D na neabelovo baždarno polje. Pritom su u fokusu razmatranja globalna (topološka) svojstva čiste baždarne teorije, posebice svojstva instantonskih rješenja (rješenja konačne akcije).

Sadržaj

1 Uvod

Kvantna teorija polja naša je trenutno najkompletnija eksperimentalno potvrđena teorija materije i interakcije. Ipak, ona pati od konceptualnih i praktičnih (računskih) problema. Kako je standardno formulirana (Feynmanovi dijagrami), ona je račun smetnje, tj. razvoj po potencijama konstante vezanja. Osnovni konceptualni problem koji se javlja je pitanje konvergencije takvog reda. Ispada da je konvergencija reda "samo" *asimptotska* - konvergira do nekog člana u razvoju, nakon čega nas dodavanje viših članova udaljava od rješenja. Praktični problem s perturbativnom formulacijom jest što je na nekim energijama interakcija jaka, tj. konstanta vezanja je veća od jedinice, pa je perturbativni razvoj nemoguć. Primjer za to je interakcija kvarkova u hadronima i mezonima.

*bivetic@irb.hr

Postoji i alternativna formulacija teorije polja koja proizlazi iz Feynmanove formulacije kvantne mehanike preko integrala po stazama ili funkcionalnih integrala (engl. *path integral, functional integral*)[2]. Iako i ona pati od konceptualnih problema (još uvijek ne postoji korektna matematička formulacija funkcionalnih integrala) i računskih problema (za svega nekoliko potencijala moguće je eksplicitno izvrijedniti amplitudu), uz mali "trik" prelaska na euklidsko prostor-vrijeme (Wickova rotacija) moguć je razvoj u red po potencijama $\hbar$, što omogućuje tretiranje problema s jakim vezanjem, npr. tuneliranje. Nulti red razvoja odgovara poluklasičnoj aproksimaciji, pa je razvoj po $\hbar$ u nekom smislu i fizikalniji od razvoja po konstanti vezanja.

U kontekstu ovog kolegija zanimljivo je da se radi o integralnoj (globalnoj) formulaciji teorije. To nam omogućuje da koristimo topologiju. Kako to često u topologiji biva, moći ćemo bez pravog računa "na prste" napipati (mnoga svojstva) rješenja. U ovom seminaru bavimo se instantonskim rješenjima.

Plan seminara je sljedeći. U 2. poglavlju razmatra se česticu u 1D potencijalu preko integrala po stazama, u euklidskom prostoru u aproksimaciji stacionarne faze (poluklasičnoj aproksimaciji). Pronalaze se instantonska rješenja. U 3. poglavlju prelazi se na kvantnu teoriju polja. Iznose se najosnovnije činjenice o baždarnoj teoriji polja. Definiraju se klase homotopije baždarnih transformacija, prvo na primjeru $U(1)$, a zatim na $SU(n)$. Eksplicitno se konstruiraju instantoni kao rješenja konačne akcije euklidske baždarne teorije polja za klasu homotopije danu jednim namotajem.

2 Instantoni u 1D kvantnoj mehanici

U Feynmanovoj formulaciji, amplituda vjerojatnosti da čestica koja se nalazila u točki x_i u trenutku $t_i = -T/2$ dospije u točku x_f u trenutku $t_f = T/2$ jednaka je zbroju amplituda vjerojatnosti po svim mogućim putevima po kojima je čestica mogla dospjeti iz početne u konačnu točku (generalizacija eksperimenta s dvije pukotine na kontinuum). Pri tome najveći doprinos amplitudi dolazi od klasičnog puta minimuma akcije, a doprinosi puteva koji sve više odstupaju od klasičnog puta potisnuti su sa sve višim potencijama $\hbar$. Pišemo

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \int [dx] e^{-S/\hbar}. \tag{1}$$

S lijeve strane imamo amplitudu vjerojatnosti da će vlastito stanje položaja $|x_i\rangle$ preći u neko drugo stanje $|x_f\rangle$ pod djelovanjem operatora evolucije, gdje je hamiltonijan $H = p^2/2 + V(x)$ (čestica jedinične mase) i gdje je napravljeno analitičko produljenje vremenske koordinate $t \to -it$ (Wickova rotacija, prelazak na euklidski prostor). S desne strane imamo normalizacijsku konstantu N, euklidsku akciju ($-i$ puta akcija u prostoru Minkowskog),

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V \right] \tag{2}$$

dok simbol $[dx]$ označava integral po svim putevima $x(t)$ koji vode od x_i u $t = -T/2$ do x_f u $t = T/2$. Konkretno, neka je $\tilde{x}(t)$ jedan takav put. Tada opći put u principu možemo zapisati kao

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t) \tag{3}$$

gdje je $x_n(t)$ potpuni skup ortonormiranih funkcija koje iščezavaju na rubovima,

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt x_n(t) x_m(t) = \delta_{nm}, \qquad x_n(\pm T/2) = 0 \tag{4}$$

Tada je mjera $[dx]$

$$[dx] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} dc_n. \tag{5}$$

Ako akcija ima stacionarnu točku (ili više njih), tada ta točka iscrpljuje integral zbog male vrijednosti parametra $\hbar$ (aproksimacija stacionarne faze). Recimo da imamo jednu stacionarnu točku, tj. klasični put minimuma (ekstrema) akcije $\tilde{x}(t)$, zadanu kao

$$\frac{\delta S}{\delta \tilde{x}} = -\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + V'(\tilde{x}) = 0, \tag{6}$$

gdje crtica označava derivaciju s obzirom na x. Tada akciju razvijemo (u smislu varijacije) oko te točke i zadržimo se na vodećem članu,

$$S(x) \approx S(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{x}^2}(x - \tilde{x})^2, \tag{7}$$

što odgovara razvoju do prvog reda po $\hbar$. Nadalje, puteve parametriziramo preko vlastitih funkcija druge varijacijske derivacije akcije u stacionarnoj točki

$$-\frac{d^2 x_n}{dt^2} + V''(\tilde{x}) x_n = \lambda_n x_n \tag{8}$$

što nam za amplitudu daje umnožak Gaussovih integrala, koje znamo računati,

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N e^{-S(\tilde{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2} [1 + O(\hbar)] \tag{9}$$

$$= N e^{-S(\tilde{x})/\hbar} [\det(-\partial_t^2 + V''(\tilde{x}))]^{-1/2} [1 + O(\hbar)] \tag{10}$$

gdje smo pretpostavili da su sve svojstvene vrijednosti pozitivne i gdje je korišteno

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2/2} = (2\pi/a)^{1/2}. \tag{11}$$

U slučaju da akcija ima više stacionarnih točaka, ukupna amplituda je suma tih doprinosa.

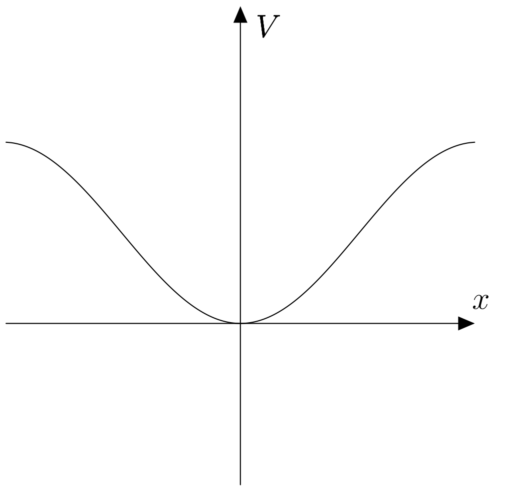
Uočimo kako jednadžba za stacionarnu točku (6) daje očuvanu veličinu

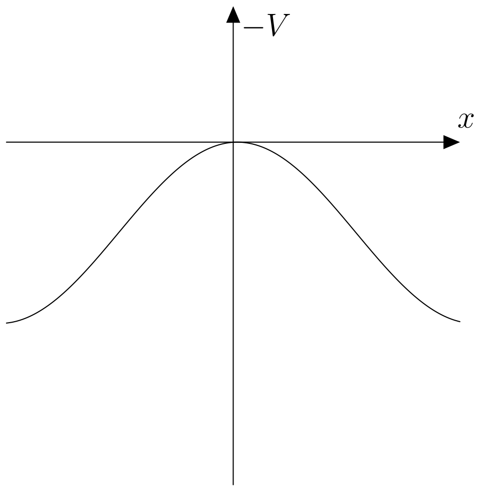
$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 - V(\tilde{x}) \tag{12}$$

koja odgovara energiji klasične čestice koja se giba u potencijalu $-V$.

2.1 Uvod u poluklasičnu metodu: potencijal s lokalnim minimumom

Zamislimo da imamo česticu u potencijalu kao na slici (a) dolje. Ne moramo zadati točan izraz potencijala, dovoljno je da potencijal u nuli ima lokalni minimum. Slika (b) predstavlja potencijal $-V$, koji osjeća klasična čestica prema analogiji iz prethodnog poglavlja.





Čestica se u početnom trenutku ($t = -T/2$) nalazi u $x_i = 0$ i zanima nas amplituda vjerojatnosti da će se u trenutku $t = T/2$ nalaziti u $x_f = 0$. Uz takve rubne uvjete, jedino rješenje (6) (jedina stacionarna točka) je

$$\tilde{x}(t) = 0,$$

što daje

$$S(\tilde{x}) = 0.$$

Imamo

$$\langle 0|e^{-HT}|0\rangle = N[\det(\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2}, \tag{13}$$

gdje je

$$\omega^2 = V''(0),$$

koeficijent uz kvadratni član u razvoju potencijala oko nule. Uz pogodan odabir normalizacijske konstante, dobije se za velike T

$$N[\det(\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}. \tag{14}$$

Ako razvijemo početno i konačno stanje po vlastitim stanjima hamiltonijana

$$|0\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|0\rangle \tag{15}$$

tada je

$$\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle = \sum_n e^{-E_n T/\hbar}\langle 0|n\rangle\langle n|0\rangle. \tag{16}$$

Zbog velikog T (i malog $\hbar$) gornja je suma iscrpljena vodećim doprinosom, tj. energijom osnovnog stanja. Usporedbom sa (15) dolazimo do energije osnovnog stanja

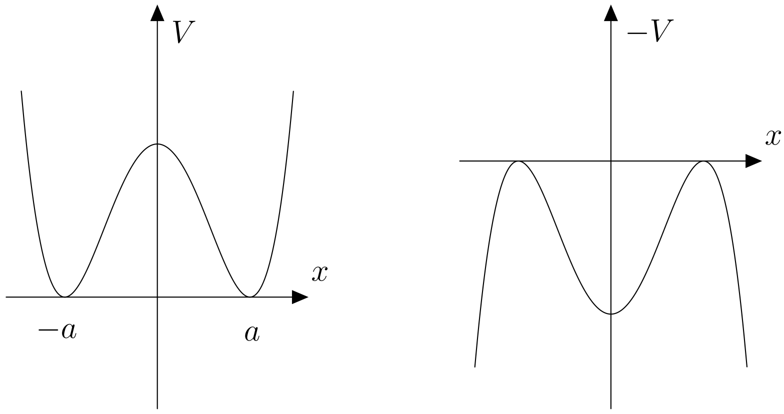
$$E_0 = \frac{1}{2}\omega\hbar[1 + O(\hbar)] \tag{17}$$

što odgovara energiji osnovnog stanja harmoničkog oscilatora.

Bez obzira na točan oblik potencijala, potencijal s minimumom možemo u vodećem redu aproksimirati harmoničkim oscilatorom. Za reći nešto više, potrebno je zadati potencijal izvan lokalnog minimuma.

2.2 Dvostruka jama i instantoni

Sada promatramo manje trivijalan primjer dvostruke potencijalne jame, na slici.



Zanimat će nas

$$\langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle = \langle -a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle \tag{18}$$

i

$$\langle a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \langle -a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle \tag{19}$$

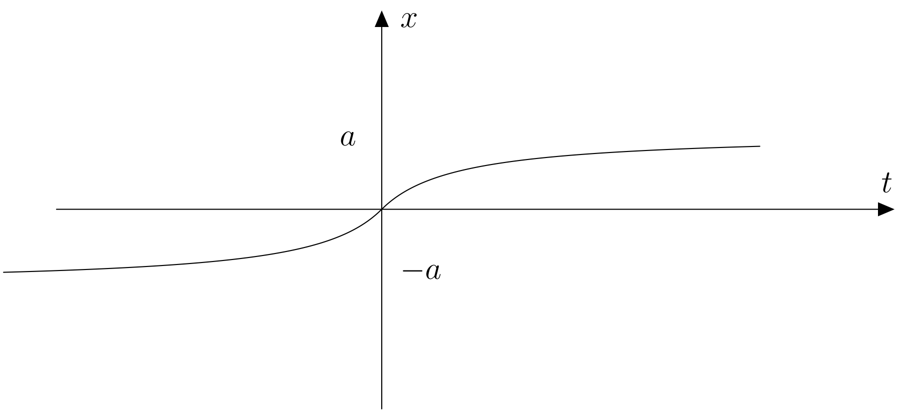
U analogiji s klasičnom česticom, ta rješenja odgovaraju čestici koja samo sjedi na jednom vrhu potencijala, odnosno čestici koja ide iz stanja mirovanja na jednom vrhu u stanje mirovanja na drugom vrhu. Za drugi slučaj, klasično to znači $T \to \infty$, a nas će zanimati baš taj limes. Tada energija iščezava,

$$\frac{dx}{dt} = (2V)^{1/2} \tag{20}$$

odnosno

$$t = t_1 + \int_0^x dx'(2V)^{-1/2} \tag{21}$$

gdje je t_1 trenutak u kojem se čestica nalazi u $x = 0$. Ovo rješenje naziva se instanton (antiinstanton), slika,



sa centrom u t_1. Akcija (anti)instantona je dana s

$$S_0 = \int_{-a}^{a} dx(2V)^{1/2} \tag{22}$$

što odgovara integralu koji se javlja u poluklasičnoj (WKB) aproksimaciji. Naziv instanton dolazi od toga što je to rješenje lokalizirano u vremenu (analogija sa solitonom). Blizu rubova, potencijal možemo zamijeniti kvadratnom funkcijom, pa jednadžba (21) daje za velike t

$$\frac{dx}{dt} = \omega(x-a) \tag{23}$$

odnosno $x - a \sim e^{-\omega t}$, gdje $1/\omega$ predstavlja širinu instantona. U slici klasične čestice u "obrnutom" potencijalu to je rješenje kad čestica sporo putuje s jednog vrha potencijala, polako nakuplja brzinu i zatim brzo prelazi kroz središnji dio te se opet sporo (dugo) penje prema drugom vrhu.

U ukupnoj amplitudi (19) odnosno (20) moramo uračunati doprinos arbitrarnog broja (anti)instantona, međusobno razmaknutih puno više od širine pojedinih instantona[1].
1) Za n međusobno jako udaljenih (anti)instantona, akcija je n puta (23).
2) Osim tokom kratkih intervala instantona, druga derivacija potencijala je ω^2. Kada ne bi bilo instantona, determinanta bi bila (15), pa očekujemo da će korekcija koju će davati (anti)instantoni determinanti biti oblika

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} K^n. \tag{24}$$

Neće nam biti potreban eksplicitan izraz za K.
3) Potrebno je integrirati po različitim centrima instantona,

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{t_1}^{T/2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{T/2} dt_n = T^n/n! \tag{25}$$

4)Sveukupno, amplituda (19) je

$$\langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{\text{parni } n} \frac{(Ke^{-S_0/\hbar}T)^n}{n!}[1+O(\hbar)], \tag{26}$$

dok je (20) isti izraz, samo se sumira po neparnim n, odnosno

$$\langle \pm a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}\frac{1}{2}[\exp(Ke^{-S_0/\hbar}T) \mp \exp(-Ke^{-S_0/\hbar}T)]. \tag{27}$$

Ako opet raspišemo stanja $|\pm a\rangle$ po vlastitim stanjima hamiltonijana, vidimo da imamo dva stanja koja daju najveći doprinos, sa energijama

$$E_{\mp} = \frac{1}{2}\hbar\omega \mp \hbar K e^{-S_0/\hbar}. \tag{28}$$

Iako je drugi član zanemariv u odnosu na korekcije reda $\hbar^2$, on je jednak polovici razlike energija E_+ i E_-. U [1] je pronađen K kao

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left|\frac{\det(-\partial_t^2+\omega^2}{\det'(-\partial_t^2+V''(\tilde{x}))}\right|^{1/2}, \tag{29}$$

gdje crtica označava da je u determinanti izuzeta vlastita vrijednost osnovnog stanja, te je eksplicitno pronađen i pokazano je da se dobija ista vrijednost amplitude kao WKB metodom.
No i bez tog faktora, dobili smo očekivani poluklasični rezultat. Energija osnovnog stanja odgovara energiji harmoničkog oscilatora i dvostruko je degenerirana (čestica sjedi u lijevom, odnosno desnom minimumu), a degeneraciju razbija penetracija barijere, proporcionalno $e^{-S_0/\hbar}$, gdje je S_0 dano s (23), isto kao u WKB metodi.

[1] To se naziva aproksimacija rijetkog plina.

3 Instantoni u Yang-Millsovoj teoriji

3.1 $SU(n)$ baždarna teorija

Ideja ovog podpoglavlja je uvođenje konvencija i osnova baždarne teorije.
Baždarna polja su skup vektorskih polja $A_\mu^a(x)$, gdje je $\mu = 1, \ldots, 4$ indeks 4D Euklidskog prostor-vremena, a $a = 1, \ldots, n^2 - 1$ predstavlja indeks baždarne $SU(n)$ grupe.
Generatori grupe su $n^2 - 1$ antihermitskih matrica T^a koje čine Liejevu algebru

$$[T^a, T^b] = c^{abc} T^c \tag{30}$$

gdje su c^{abc} strukturne konstante. Za slučaj $SU(2)$ grupe,

$$[T^a, T^b] = \epsilon^{abc} T^c \tag{31}$$

generatori su $T^a = -i\sigma^a/2$, gdje su σ^a, Paulijeve matrice.
Definiramo matrična polja $A_\mu(x)$

$$A_\mu = g A_\mu^a T^a,$$

gdje je g baždarna konstanta vezanja (jakost samointerakcije polja). Tenzor polja $F_{\mu\nu}(x)$ je

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{32}$$

a akcija (Euklidska) je

$$S = \frac{1}{4g^2} \int d^4x Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \tag{33}$$

Lokalna baždarna transformacija je preslikavanje sa 4D Euklidskog prostora u baždarnu grupu,

$$g(x) = \exp \lambda^a(x) T^a \tag{34}$$

gdje su $\lambda^a(x)$ proizvoljne funkcije. Polja se transformiraju kao

$$F_{\mu\nu} \to g F_{\mu\nu} g^{-1} \tag{35}$$

odnosno

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}. \tag{36}$$

Očito smo odabrali akciju (34) upravo na način da ona bude baždarno invarijantna.

3.2 Baždarne transformacije i klase homotopije

Definicija
Homotopija između dva kontinuirana preslikavanja f i g s topološkog prostora X na topološki prostor Y je definirana kao kontinuirano preslikavanje $h : X \times [0, 1] \to Y$ t.d. za $x \in X$ $h(x, 0) = f(x)$ i $h(x, 1) = g(x)$. Kontinuirane funkcije f i g su homotopno ekvivalentne ako i samo ako postoji funkcija h sa gore navedenim svojstvima.

U(1) grupa

Odredimo prvo klase homotopije u jednostavnom slučaju $U(1)$ baždarne grupe (elektromagnetizam) u dvodimenzionalnom prostor-vremenu. Taj slučaj možemo vizualizirati, a $SU(2)$ teorija na 4D prostor-vremenu će slijediti po analogiji.
Grupa $U(1)$ je grupa kompleksnih brojeva modula jedan, odnosno "topološki gledano" S^1. U dvije prostornovremenske dimenzije umjesto hipersfere imamo kružnicu, S^1. Dakle tražimo klase homotopije preslikavanja sa S^1 na S^1.
One su dane kao

$$g^{(\nu)}(\theta) = e^{i\nu\theta} \tag{37}$$

gdje je ν cijeli broj kojeg zovemo broj namotaja (engl. *winding number*) ili Pontryaginov indeks.[2] Svako preslikavanje sa S^1 na S^1 je homotopno jednom od preslikavanja $g^{(\nu)}$. Premda to ovdje nećemo egzaktno dokazivati, možemo se uvjeriti u to na sljedeći način. Zamislimo elastičnu traku na kojoj imamo ucrtanu skalu od 0 do 2π, te cilindar, također jednako skaliran. Elastičnu traku namotavamo oko cilindra. Traku možemo namotati nula puta ($\nu = 0$), što odgovara trivijalnom preslikavanju kad traku stisnemo u točku i stavimo uz jedinicu na valjku,

$$g^{(0)}(\theta) = 1.$$

Klasa homotopije ovaga je pomicanje točke (trake) uokolo valjka. Zatim traku možemo namotati jedan puta ($\nu = 1$) tako da se skale na traci i na valjku poklapaju,

$$g^{(1)}(\theta) = e^{i\theta},$$

što odgovara identiteti. Klasa homotopije identitete jesu sva preslikavanja koja se mogu dobiti kontinuiranom deformacijom (rastezanjem i okretanjem, bez da se traka odljepljuje ili skida s cilindra). Zatim traku možemo namotati dva puta ($\nu = 2$) itd. Ako je ν negativan broj, tada traku namotavamo u suprotnom smjeru.
Svakom preslikavanju sa S^1 na S^1 pridružen je broj namotaja. Taj broj je jedinstveno zadan kao:

$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_o^{2\pi} d\theta g \frac{dg^{-1}}{d\theta}. \tag{38}$$

Direktnim računom se možemo uvjeriti da g zadan u (40) daje ispravan rezultat kad se uvrsti u (41). Također, pokazuje se kako je (41) invarijantno na deformacije. Infinitezimalna deformacija $g \to g + \delta g$ dana je s

$$\delta g = i(\delta\lambda)g,$$

gdje je $\delta\lambda$ proizvoljna infinitezimalna realna funkcija na krugu. Deformacija integranda u (41) je onda

$$\delta(g\frac{dg^{-1}}{d\theta}) = -i\frac{d(\delta\lambda)}{d\theta} \tag{39}$$

što iščezava prilikom integracije po cijeloj kružnici, pa ν ostaje nepromijenjen prilikom infinitezimalnih deformacija. Isto slijedi i za konačne deformacije, koje su kompozicija

[2] Postoje različite (ekvivalentne) definicije za broj namotaja u različitim granama matematike, no sve se svode na intuitivnu definiciju "na prste" koju dajemo ovdje. U topologiji, broj namotaja je poseban slučaj stupnja preslikavanja, gdje točna definicija uključuje grupu homologije. Vidi [4].

infinitezimalnih.
Prema tome, sva standardna preslikavanja S^1 na S^1 pripadaju nekoj od klasa homotopije, a broj namotaja je jedinstveno definirana veličina za svaku klasu. Baždarne funkcije čine klase homotopije, tj. klasificirane su prema broju namotaja. Baždarne transformacije mijenjaju polje, no uvijek ga ostavljaju u istoj klasi homotopije.

$SU(2)$ grupa

Sada se vraćamo u 4D (Euklidski) prostor, a baždarna grupa je $SU(2)$. To je grupa unitarnih unimodularnih 2×2 matrica. Svaka takva matrica može se zapisati kao linearna kombinacija jedinične matrice i Paulijevih matrica

$$g = a\mathbb{1} + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

gdje vrijedi $a^2 + \mathbf{b}^2 = 1$. Topološki gledano, $SU(2)$ je S^3, isto kao i hipersfera u 4D Euklidskom prostorvremenu. Stoga nas zanimaju preslikavanja sa S^3 na S^3.
Kao i u slučaju S^1 i ovdje su klase homotopije dane brojem namotaja hipershere oko hipersfere. Imamo trivijalno preslikavanje,

$$g^0(x) = 1,$$

zatim preslikavanje identitete,

$$g^{(1)}(x) = (x_4\mathbb{1} + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})/r \tag{40}$$

te analogno ostala preslikavanja

$$g^{(\nu)}(x) = [g^{(1)}(x)]^\nu \tag{41}$$

Da se svako preslikavanje S^3 na S^3 može kontinuirano deformirati u jedno od preslikavanja (44) vidi se "na prste" namatanjem elastičnih hipersfera jedne na druge, samo što je to sad teže vizualizirati od primjera kružnice. Da je pridruživanje klasi homotopije i jedinstveno, opet pokazujemo tako da pokažemo da je broj namotaja, dan kao

$$\nu = -\frac{1}{24\pi^2} \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \mathrm{Tr}[\epsilon^{ijk} g\partial_i g^{-1} g\partial_j g^{-1} g\partial_k g^{-1}], \tag{42}$$

homotopno invarijantna veličina (ne mijenja se pri kontinuiranim deformacijama), te da je (44) konzistentno s (45).
Dovoljno je pokazati da je (45) invarijantno na infinitezimalne varijacije,

$$\delta g = g\delta\lambda^a(x)T^a \equiv g\delta T \tag{43}$$

odnosno

$$\delta(g\partial_k g^{-1}) = -g(\partial_k \delta T)g^{-1}. \tag{44}$$

Sve tri derivacije u (44) daju jednaki doprinos varijaciji,

$$\delta\nu \sim \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \mathrm{Tr}[\epsilon^{ijk} g\partial_i g^{-1} g\partial_j g^{-1} g(\partial_k \delta T)g^{-1}]. \tag{45}$$

Uz pomoć identiteta

$$\partial_i(gg^{-1}) = g\partial_i g^{-1} + (\partial_i g)g^{-1} \tag{46}$$

to postaje

$$\delta\nu \sim \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \mathrm{Tr}[\epsilon^{ijk}\partial_i g^{-1}\partial_j g\partial_k]\delta T, \tag{47}$$

što isčezava kod parcijalne integracije zbog antisimetrije ϵ^{ijk}. Što se tiče konzistentnosti relacija (44) i (45), najlakše ju pokažemo za $\nu = 1$. Integrand je u tom slučaju kostantan, pa ga možemo evaluirati u sjevernom polu sfere, $x_4 = 1$, $x_i = 0$. Možemo odabrati takve kutne varijable θ_i da u toj točki budu jednake x_i. To nam daje

$$g\partial_i g^{-1} = -i\sigma_i \tag{48}$$

tj.

$$\mathrm{Tr}[\epsilon^{ijk}g\partial_i g^{-1}g\partial_j g^{-1}g\partial_k g^{-1}] = -12. \tag{49}$$

Ako uzmemo u obzir površinu sfere $2\pi^2$, relacija (45) egzaktno je zadovoljena za $\nu = 1$. Za više ν-eve, dokaz slijedi iz

$$g = g_1 g_2 \Rightarrow \nu = \nu_1 + \nu_2. \tag{50}$$

Umjesto preko baždarne funkcije koja definira polja u beskonačnosti, broj namotaja možemo i definirati preko integrala polja. Bez izvoda (vidi [1]) može se pokazati

$$\nu = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x Tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}), \tag{51}$$

gdje je tzv. dualni tenzor definiran na način

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}. \tag{52}$$

Iako ćemo se mi zadržati na $SU(2)$, u kontekstu ovog kolegija zanimljivo je spomenuti kako izraz za broj namotaja ovisi o baždarnoj grupi. Ako je baždarna grupa $U(1)$, sva preslikavanja sa S^3 na $U(1)$ mogu se kontinuirano deformirati u trivijalno preslikavanje. To znači da za ne-Abelovo polje ne postoji ekvivalent broja namotaja u 4 prostornovremenske dimenzije. Ako je baždarna grupa proizvoljna Lieva grupa G, tada zahvaljujući Bottovom teoremu, koji kaže da se svako preslikavanje sa S^3 na G može kontinuirano deformirati u preslikavanje na $SU(2)$ podgrupu od G, vrijedi sve što smo pronašli za $SU(2)$, posebno integralni izrazi (45) i (54).

3.3 θ vakuumi

Sada želimo generalizirati Faynmanov koncept integrala po putovima na teoriju polja. U principu nas zanima polje u beskonačnom prostor-vremenu, no biti će korisno prvo započeti u konačnom volumenu V i vremenu T. Za razliku od kvantne (čestične) mehanike, gdje je zahtjev za iščezavanjem varijacije akcije tražio definiciju rubnih uvjeta $x(t_i)$ i $x(t_f)$, ovdje to nije slučaj. Varijacija akcije je

$$\delta S = \frac{1}{g^2}\int d^3a n^\mu F_{\mu\nu}\delta A^\nu + \cdots, \tag{53}$$

gdje je d^3a element površine 4D kutije, a n^μ jedinični vektor okomit na površinu kutije. Iz antisimetrije $F_{\mu\nu}$-a slijedi da je dovoljno zadati tangencijalne komponente polja da iščezne površinski član. Normalne komponente onda mogu biti proizvoljne, no u skladu s odabranim baždaranjem (mi $A_3 = 0$) i sa uvjetom konačnosti akcije, i to čak kad pustimo granice kutije u beskonačnost. To znači da bismo morali integrirati i po svim tim slobodnim konfiguracijama, što je komplicirano.

U prošlom poglavlju smo iz topoloških razmatranja došli do baždarno očuvane veličine, broja namotaja. To znači da svaka slobodna konfiguracija odgovara nekom određenom broju namotaja. Ako puštamo kutiju sa našim poljem i rubnim uvjetima u beskonačnost, a pritom zahtjevamo konačnost akcije, to možemo jedino kontinuiranim transformacijama, tj. rastezanjem i deformiranjem kutije s poljem u beskonačnost. Time se ne mijenja broj namotaja. Argument (hand-waving) za ovo je da je broj namotaja jedina baždarno invarijantna veličina, i prema tome je jedina informacija koja mora "preživjeti" kad kutiju pustimo u beskonačnost.[3]

Prema tome, za velike kutije možemo zaboraviti na rubne uvjete. Ne moramo integrirati po slobodnim konfiguracijama polja, jer je ekvivalentno integrirati po konfiguracijama određenog broja namotaja n. Veličina koja nam treba je

$$F(V,T,n) = N\int [dA]e^{-S}\delta_{\nu n} \tag{54}$$

gdje $[dA]$ označava integraciju po svim konfiguracijama polja, uz zadane rubne uvjete, i uz fiksan broj namotaja n. Ova veličina onda odgovara amplitudi vjerojatnosti prelaska iz nekog u neko stanje, dana rubnim uvjetima. Što su točno ta stanja ovdje nije toliko važno. Važnije je uočiti kako za jako velike T_1 i T_2

$$F(V,T_1+T_2,n) = \sum_{n_1+n_2=n} F(V,T_1,n_1)F(V,T_2,n_2). \tag{55}$$

Ova relacija zapravo slijedi iz (53), koja daje broj namotaja kao integral gustoće polja. Time sugerira kako "ugurati" određeni broj namotaja u kutiju: tako da se dio ispuni konfiguracijom polja broja namotaja n_1, a drugi dio kutije konfiguracijom polja n_2. Ovo naravno ne broji one konfiguracije koje imaju značajnu gustoću na granicama dvaju djelova kutije, ali njihov doprinos ionako opada kako kutija raste.

Problem kod (58) je taj što očekujemo od amplituda vjerojatnosti dvaju događaja jako razmaknutih u vremenu da budu neovisne, tj. da ukupna amplituda bude jednostavan umnožak amplituda. Srećom, možemo preći sa konvolucije na množenje pomoću Fourierovog transformata,

$$F(V,T,\theta) \equiv \sum_n e^{in\theta}F(V,T,n) = N\int [dA]e^{-S+i\nu\theta}, \tag{56}$$

što daje

$$F(V,T_1+T_2,\theta) = F(V,T_1,\theta)F(V,T_2,\theta). \tag{57}$$

Vidimo da $F(V,T,\theta)$ mora biti proporcionalno očekivanoj vrijednosti operatora evolucije u vlastitom (osnovnom) stanju energije zadanom parametrom $\theta \in [0,2\pi]$ koje označavamo s $|\theta\rangle$ i nazivamo θ-vakuumom,

$$F(V,T,\theta) \sim \langle\theta|e^{-HT}|\theta\rangle = N'\int [dA]e^{-S+i\nu\theta} \tag{58}$$

Prema tome, baždarna teorija ima kontinuum osnovnih stanja, parametriziranih s θ. U svakom od njih, pravila računanja su kao i u 2. poglavlju, uz dodatak faktora $e^{i\nu\theta}$, što, prema (54), odgovara dodavanju člana proporcionalnog $\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ u lagranžijan. No, budući da se $\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ može napisati kao divergencija, nameće se pitanje jesu li različiti θ vakuumi ustvari ekvivalentni. U sljedećem poglavlju pokazati ćemo kako gustoća energije ovisi netrivijalno o θ.

[3] Konkretniji matematički dokaz u [1].

3.4 Instantoni

Sada konstruiramo instantone u $SU(2)$ Yang-Millsovoj teoriji. Definiramo ih kao rješenja konačne akcije koja imaju broj namotaja $\nu = 1$. Analogno, antiistantoni imaju broj namotaja $\nu = -1$. Ukupnoj amplitudi onda doprinose svi mogući brojevi instantona n i antiinstantona $\tilde{n}$, gdje je $n - \tilde{n} = \nu$. Po potpunoj analogiji s drugim poglavljem, imamo

$$\langle\theta|e^{-HT}|\theta\rangle \sim \sum_{n,\tilde{n}} \frac{(Ke^{-S_0})^{n+\tilde{n}}(VT)^{n+\tilde{n}}e^{i(n+\tilde{n})\theta}}{n!\tilde{n}!} = \exp(2KVTe^{-S_0}\cos\theta), \tag{59}$$

gdje je K doprinos determinante, kao u 2. poglavlju. Odavde odmah iščitavamo gustoću energije θ vakuuma,

$$E(\theta)/V = -2K\cos\theta e^{-S_0}, \tag{60}$$

koja netrivijalno ovisi o parametru θ, što znači da su svi vakuumi različiti.

Preostaje još pronaći K i S_0. Mi ćemo se ovdje zadovoljiti time da nađemo S_0, koji je eksponencijalan, pa prema tome dominantan doprinos.[4] To znači da ćemo morati pronaći konfiguraciju polja koja odgovara instantonu. Uočimo prvo kako iz Schwartzove nejednakosti slijedi

$$\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \left[\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \int d^4x \mathrm{Tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})\right]^{1/2} \tag{61}$$

$$\geq \left|\int d^4x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})\right| = 32\pi^2|\nu|. \tag{62}$$

Prema tome, akcija ima apsolutni minimum u $S = \frac{8\pi^2}{g^2}|\nu|$, što je ostvareno za konfiguracije polja koje zadovoljavaju

$$F_{\mu\nu} = \pm\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{63}$$

Pokažimo egzistenciju takvih konfiguracija za $\nu = 1$. Sve one su baždarno ekvivalentne sa

$$A_\mu = g^{(1)}\partial_\mu[g^{(1)}]^{-1} + O(1/r^2), \tag{64}$$

gdje je $g^{(1)}$ jedinična transformacija dana s (43). Budući da je (67) rotacijski invarijantna, rješenja tražimo u obliku

$$A_\mu = f(r^2)g^{(1)}\partial_\mu[g^{(1)}]^{-1}. \tag{65}$$

Kada gornji Ansatz uvrstimo u (66) dobijemo

$$f(r^2) = \frac{r^2}{r^2+\rho^2}, \tag{66}$$

gdje je ρ proizvoljna konstanta koju zovemo veličina instantona. Pojavljivanje proizvoljne konstante posljedica je invarijantnosti na skalu klasične teorije polja.

Dakle, demonstrirali smo postojanje rješenja definitivnog broja namotaja $\nu = 1$ koja minimiziraju akciju. To su rješenja jednadžbi gibanja baždarne teorije polja.

[4] Doduše, u eksplicitnom računu K divergira u nuli, te je potrebno uvesti cut-off. Detaljnije u [1].

Pronašli smo izraz za minimum akcije koji odgovara tom rješenju. Gustoća energije θ vakuuma je

$$E(\theta)/V = -2K \cos\theta e^{-8\pi^2/g^2}. \tag{67}$$

Za kraj, možemo se još pitati o egzistenciji drugih rješenja broja namotaja $\nu = 1$, kao i rješenja s drugim brojem namotaja. Što se prvog tiče, teorem Atiyaha i Warda nam jamči da ne postoje druga rješenja $\nu = 1$. Što se tiče rješenja s brojem namotaja $|\nu| > 1$, ona su potisnuta u odnosu na rješenja s jednim namotajem eksponencijalno s ν, jer je njihova akcija ν puta veća.

4 Zaključak

U ovom seminaru konstruirali smo poluklasično rješenje čiste baždarne $SU(n)$ teorije, tzv. instantone. Pri tome nam je pomogao snažan topološki aparat koji nam je omogućio da klasificiramo klase baždarnih funkcija preko homotopije, gdje se funkcije unutar klase mogu dobiti jedne od drugih kontinuiranim deformacijama. Ova klasifikacija dala je i generalizaciju kopncepta integrala po putevima iz kvantne mehanike na teoriju polja kao integral po svim konfiguracijama polja koje se mogu dobiti kontinuiranim deformacijama od neke (zadane) konfiguracije, tj. po svim konfiguracijama unutar klase homotopije istog broja namotaja. Slično, u običnoj kvantnoj mehanici su svi putevi po kojima se integrira opet klasa homotopije. Konačno, dobili smo jednostavan eksplicitan izraz za konfiguraciju polja koja odgovara vodećem poluklasičnom rješenju. To rješenje je osam-parametarsko, gdje su tri parametra od invarijantnosti na konstantne baždarne transformacije, četiri parametra od translacijske invarijantnosti prostor-vremena (centar instantona) i jedan parametar od invarijantnosti na skalu (veličina instantona).

Za kraj spomenimo kako je ova rješenja nemoguće dobiti u kanonskom (perturbativnom) formalizmu, te da ona nisu samo od akademskog interesa. QCD se na određenim energijama može aproksimirati kao čista baždarna teorija (”more gluona”). Također, poluklasična metoda omogućava analizu stabilnosti SM vakuuma, gdje je proračun tzv. ”bounce” rješenja davao najpouzdanija ograničenja na mase Higgsa i top kvarka.[5]

Literatura

[1] S. Coleman, *Aspects of symmetry*, CUP (1988)

[2] R. Feynman, A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, M-H, (1965)

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_ number

[5] S. Coleman, *Phys. Rev. D***10** , 15 (1977)
C. Callan, S. Coleman, *Phys. Rev. D***16** 6 (1977)