Taub-NUT prostorvrijeme

Matija Gašparlin*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: 17. kolovoza 2021.)

Sažetak

Taub-NUT prostorvrijeme homogeno je rješenje Einsteinove jednadžbe u praznom prostoru $R_{\mu\nu} = 0$. Postoje barem dva neekvivalentna analitička proširenja Taubovog prostora u NUT prostor koji sadrži zatvorene geodezike beskonačne afine duljine koji ne prelaze granicu u Taubov prostor. Veza dvaju neekvivalentnih analitičkih proširenja promatra se preko pokrivača prostora.

I. UVOD

U ovom radu promatramo metriku Taub-NUT prostorvremena s topologijom $\mathbb{R} \times S^3$ i pronalazimo njene geodezike. Promatramo različita analitička proširenja prostorvremena, kao i pokrivač koji nam pomaže da vidimo odnos neekvivalentnih proširenja. Dvodimenzionalni primjer pomaže nam da svojstva prostora ilustriramo na jednostavniji način.

II. METRIKA

Želimo dobiti analitičku metriku Lorentzovog tipa svugdje na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$. Ukoliko uklonimo ishodište iz koordinata $(w,\ x,\ y,\ z)$ koje opisuju R^4 dobivamo analitičku mnogostrukost $\mathbb{R} \times S^3$. Definiramo funkcije t i $|q|^{-2}$ koje su analitičke svugdje na $\mathbb{R} \times S^3$:

$$e^t \equiv |q|^2 \equiv w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Diferencijalne forme koje su također analitičke svugdje na $\mathbb{R} \times S^3$ za $0 < |q|^2 < \infty$:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2|q|^{-2}\,(x\,dw - w\,dx - z\,dy + y\,dz)\\
\sigma_y &= 2|q|^{-2}\,(y\,dw + z\,dx - w\,dy - x\,dz)\\
\sigma_z &= 2|q|^{-2}\,(z\,dw - y\,dx + x\,dy - w\,dz)\\
dt &= 2|q|^{-2}\,(w\,dw + x\,dx + y\,dy + z\,dz)
\end{aligned}$$

Ove četiri diferencijalne forme čine kvadruplet kovarijantnih vektora koji su linearno nezavisni. Linearnu nezavisnost možemo vidjeti direktno iz vanjskog produkta:

$$\sigma_x \wedge \sigma_y \wedge \sigma_z \wedge dt = 2^4\,|q|^{-4}\,dw \wedge dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$$

Budući da u četverodimenzionalnom prostorvremenu imamo četiri linearno nezavisne diferencijalne forme, možemo ih koristiti kao bazu.

Tenzorsko polje koje promatramo je u toj bazi dano kao:

$$ds^2 = (t^2 + l^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + U(t)\,(2l)^2\,\sigma_z^2 + 2\,(2l)\sigma_z\,dt \quad (1)$$

i analitičko je svugdje na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$ ukoliko je funkcija $U(t)$ analitička za $-\infty < t < \infty$
i $l > 0 \in \mathbb{R}$.

Metrika je tada dana s:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} t^2 + l^2 & . & . & . \\ . & t^2 + l^2 & . & . \\ . & . & 4l^2 U(t) & 2l \\ . & . & 2l & . \end{pmatrix}$$

Vidimo da je $g_{\mu\nu}$ pseudo-Riemannova metrika Lorentzovog tipa sa indeksom $s = 1$, odnosno postoji minus predznak na vremenskoj komponenti dt.

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -(2l)^2 \cdot (t^2 + l^2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{-g} = 2l \cdot (t^2 + l^2) \qquad \text{za} \quad l > 0$$

Bitno je napomenuti da se u ovoj notaciji vremenska komponenta nalazi na posljednjem mjestu u četverovektorima pa tako i u matrci $g_{\mu\nu}$.

Ukoliko odaberemo $U(t)$ kao:

$$U(t) \equiv -1 + 2\frac{mt + l^2}{t^2 + l^2} = \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{t^2 + l^2} \qquad (2)$$

gdje su t_1 i t_2 singulariteti funkcije $U(t)$:

$$t_1 = m - \sqrt{m^2 + l^2} \qquad t_2 = m + \sqrt{m^2 + l^2} \qquad (3)$$

tada je metrika (1) analitička svugdje na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$ i rješenje je Einsteinove jednažbe u praznom prostoru $R_{\mu\nu} = 0$, što ovdje nećemo eksplicitno dokazivati.

Sada kad smo sigurni da su komponente metrike $g_{\mu\nu}$ analitičke funkcije svugdje na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$, možemo sa koordinata (w, x, y, z) prijeći na koordinate (t, ψ, θ, ϕ) gdje su ψ, θ, ϕ klasični Eulerovi kutevi. Pritom koristimo koordinatne transformacije:

$$w = e^{t/2}\,\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi + \phi}{2} \qquad x = e^{t/2}\,\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi - \phi}{2}$$

$$y = e^{t/2}\,\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi - \phi}{2} \qquad z = e^{t/2}\,\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi + \phi}{2}$$

* matija@unispot.hr

Na $SO(3)$ Eulerov kut ψ je definiran na intervalu $0 \leq \psi < 2\pi$. Znamo da je $SU(2)$ univerzalna grupa pokrivanja od $SO(3)$ te ju dvostruko pokriva. Također je $SU(2)$ izomorfna i homeomorfna sa S^3 pa onda na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$ kutu ψ dopuštamo dvostruko veći interval dok ostali kutevi imaju iste intervale kao na $SO(3)$:

$$0 \leq \psi < 4\pi \qquad 0 \leq \theta < \pi \qquad 0 \leq \phi < 2\pi$$

U novim koordinatama (t, ψ, θ, ϕ) metrika (1) poprima oblik:

$$\begin{aligned} ds^2 = (t^2 + l^2) \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \\ + \; U(t) \cdot (2l)^2 \cdot (d\psi + \cos\theta d\phi)^2 \\ - \; 2 \cdot (2l) \cdot (d\psi + \cos\theta d\phi)dt \end{aligned} \quad (4)$$

Taub je promatrao samo dio prostora gdje vrijedi $U(t) > 0$ u kojemu su plohe $t = const.$ prostornog tipa, dok su Newman, Unti i Tamburino promatrali metriku za dio prostora $U(t) < 0$ na kojem su za $t, \theta, \phi = const.$ vektori u ψ smjeru vremenskog tipa. Da bi pokazali jedinstvenost analitičkog proširenja Taub dijela prostorvremena preko $t = 0$ u NUT dio prostorvremena, prvo pogledajmo jednostavniji dvodimenzionalan primjer.

III. JEDNOSTAVNI DVODIMENZIONALNI PRIMJER

Uređen par $(\mathcal{M}, g_{ab})$ glatke m-mnogostrukosti i metrike Lorentzovog tipa zvat ćemo prostorvrijeme. Promatramo metriku na prostoru s topologijom $\mathbb{R} \times S^1$:

$$ds^2 = -\frac{1}{t}\, dt^2 + t\, d\psi^2 \quad (5)$$

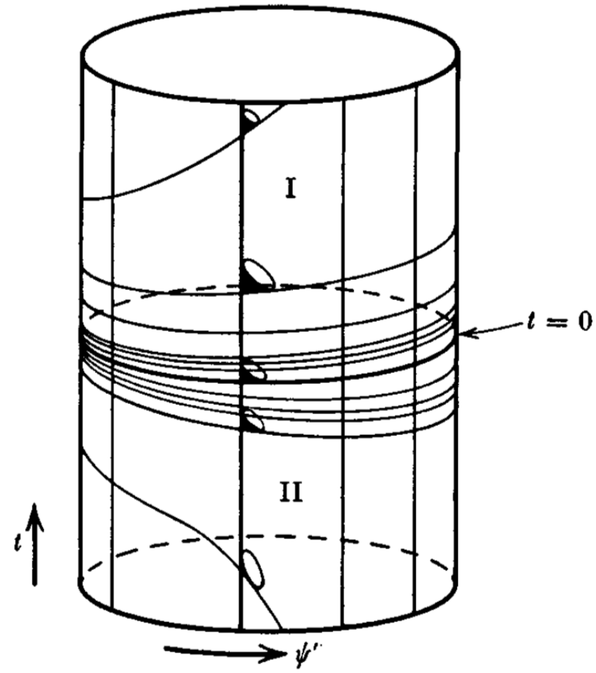
gdje je $0 \leq \psi < 2\pi$ i $0 < t < \infty$. Vidimo da metrika ima singularitet za $t = 0$. Ako napravimo proširenje mnogostrukosti $\mathcal{M}$ definirane sa ψ i t pomoću nove koordinate:

$$\psi' = \psi - \ln(t)$$

metrika g' tada je dana s:

$$(ds')^2 = 2\, d\psi'\, dt + t\, (d\psi')^2 \quad (6)$$

Ova metrika analitička je na mnogostrukosti $\mathcal{M}'$ sa topologijom $\mathbb{R} \times S^1$ gdje je $-\infty < t < \infty$. Dio $(\mathcal{M}', g')$ sa $t > 0$ izometričan je originalnom $(\mathcal{M}, g)$. Na slici 1 prikazana je mnogostrukost $(\mathcal{M}', g')$ i njeni geodezici:



Slika 1. $(\mathcal{M}', g')$ sa topologijom cilindra $\mathbb{R} \times S^1$. Crnim linijama označene su dvije familije geodezika. Također vidimo orijentaciju budućih svjetlosnih stožaca. Slika preuzeta iz članka[1]

Iz nagiba svjetlosnih stožaca vidimo da za $t < 0$ postoje svjetske linije vremenskog tipa, što nije slučaj za područje $t > 0$. Računski to možemo dobiti tako da promatramo normu tangentnog vektora krivulje parametrizirane s ψ, za konstantan t, koja je jednaka t te je svjetska linija vremenskog tipa za $t < 0$.

III.1. Geodezici

Rješavamo geodetsku jednadžbu za metriku (6):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

gdje uvijek postoji izbor afinog parametra koji nam desnu stranu geodetske jednadžbe svodi na 0. Prisjetimo li se definicije Christoffelovih simbola:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \cdot [\partial_\nu\, g_{\sigma\mu} + \partial_\mu\, g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\nu}]$$

dobivamo da su za metriku (6) neiščezavajući simboli sljedeći:

$$\Gamma^t_{\psi t} = \Gamma^t_{t\psi} = \frac{1}{2}$$
$$\Gamma^t_{\psi\psi} = \frac{t}{2}$$
$$\Gamma^\psi_{\psi\psi} = -\frac{1}{2}$$

Ubacivanjem Christoffelovih simbola u geodetsku jednadžbu dobivamo diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\frac{dt}{d\lambda}\frac{d\psi}{d\lambda} + \frac{t}{2}\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\psi}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Iz druge diferencijalne jednadžbe dobivamo rješenja za ψ:

$$\psi(\lambda) = A - 2\ln(\lambda + B) \tag{8}$$

Prvu familiju geodezika dobivamo za $\psi = const. \in [0,\, 2\pi]$, dok druga familija odgovara rješenju:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = A - 2\ln(\lambda + B) \\ t(\lambda) = C\cdot(A+\lambda)^2 + D\cdot(A+\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

gdje su A, B, C i D proizvoljne konstante. Vidimo da imamo jednu familiju geodezika (vertikalne linije na slici 1) koje prolaze kroz granicu $t = 0$, dok geodezici iz druge familije kruže prema $t = 0$, ali nikad ne prelaze u dio prostora II te za velike $t \to \infty$ imaju beskonačnu afinu duljinu.

Ako sada pogledamo drugo proširenje $(\mathcal{M}'', g'')$ definirano s:

$$\psi'' = \psi + \ln t$$

dobivamo metriku g'' danu s:

$$(ds'')^2 = -2\,d\psi''\,dt + t\,(d\psi'')^2 \tag{10}$$

koja je također analitička svugdje na $\mathcal{M}''$ s istom topologijom $\mathbb{R}\times S^1$. Vidimo da se metrika (9) razlikuje od metrike (6) samo po jednom minus predznaku, međutim ako idemo računati geodezike nove metrike vidimo da će dvije familije geodezika zamjeniti uloge. Vertikalni geodezici metrike (6) sa slike 1 za metriku (9) postaju spiralni i ne prolaze kroz $t = 0$, dok oni spirali postaju vertikalne linije sa $\psi = const.$ i prolaze kroz $t = 0$. Postoje dva neekvivalentna analitička proširenja $(\mathcal{M}, g)$ te su oba geodetski nepotpuna, odnosno postoje geodezici koji su nepotpune krivulje jer nemogu prijeći granicu $t = 0$.

Da bi pokazali neekvivalentnost mnogostrukosti $\mathcal{M}'$ i $\mathcal{M}''$ prvo moramo vidjeti da su pripadne metrike ekvivalentne u području $t > 0$. Ekvivalencija metrika jasna je iz transformacije koja ih povezuje:

$$\psi'' = \psi' + 2\ln(t)$$

Neekvivalentnost metrika kada je t u intervalu $-\infty < t < \infty$ vidimo ako promatramo krivulju na $t-\psi$ cilindru odnosno $\mathbb{R}\times S^1$:

$$\psi' = 0 \qquad ; \qquad t = -\lambda$$

gdje je $-\infty < \lambda < \infty$. Ovako zadana krivulja i njena transformacija na drugoj mnogostrukosti $\mathcal{M}''$:

$$\psi'' = 2\ln(-\lambda) \qquad ; \qquad t = -\lambda \tag{11}$$

su oboje analitičke jer je i $t(\lambda)$ analitička funkcija parametra λ. Tangentni vektori na krivulji (10) su:

$$\psi''_V = \frac{d\psi''}{d\lambda} = \frac{2}{\lambda} \qquad t_V = \frac{dt}{d\lambda} = -1$$

Vidimo da tangentni vektor $\psi''_V \to \infty$ kada $\lambda \to 0$. Dobili smo rezultat da je krivulju nemoguće analitički proširiti preko $\lambda = 0$ u mnogostrukosti $\mathcal{M}''$, a moguće u mnogostrukosti $\mathcal{M}'$ što nam govori da su $\mathcal{M}'$ i $\mathcal{M}''$ neekvivalentna analitička proširenja $\mathcal{M}$.

Još jedno svojstvo promatrane dvodimenzionalne metrike jest da ravna što vidimo ako iz ravne metrike:

$$ds^2 = d\xi^2 - d\eta^2 = d(\xi+\eta)\,d(\xi-\eta)$$

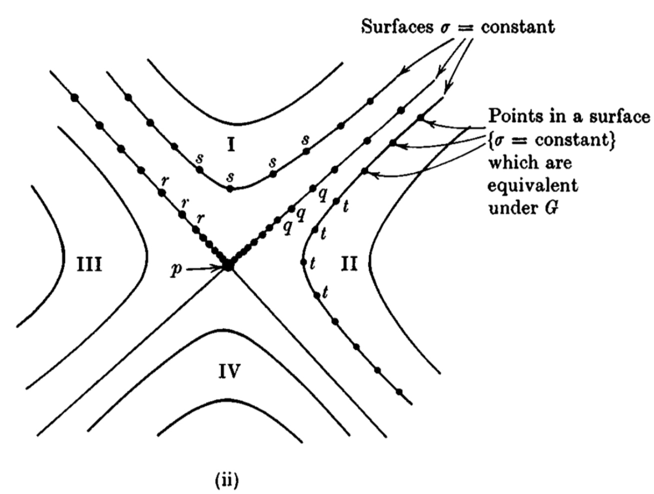
napravimo transformaciju:

$$\xi + \eta = 2t\,e^{\frac{\psi}{2}} \qquad \xi - \eta = -2t\,e^{-}\frac{\psi}{2}$$

Pritom poluravnina definirana s $\eta > \xi$ pokriva cilindar $\mathbb{R}\times S^1$ definiran s t i ψ beskonačno mnogo puta.

III.2. Pokrivač od $(\mathcal{M}, g)$

Pokrivač mnogostrukosti Lorentzovog tipa $(\mathcal{M}, g)$ je dio dvodimenzionalnog prostorvremena Minkowskog $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\eta})$, odnosno područje koje se nalazi u budućem svjetlosnom stošcu točke p na slici 2:



Slika 2. Područje 1 prostorvremena Minkowskog kao pokrivač $(\mathcal{M}, g)$. Označene su hiperbole invarijantnih točaka na transformacije iz Lorentzove grupe, sve točke označenje istim slovima međusobno identificiramo. Slika preuzeta iz članka[1]

Grupa izometrija dvodimenzionalnog prostorvremena Minkowskog $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\eta})$ je grupa transformacija koje ostavljaju duljine vektora invarijantnima. Uz standardnu definiciju $\tilde{\eta}$ imamo:

$$v^2 = c^2 \, \tilde{t}^2 - \tilde{x}^2$$

Prepoznajemo Lorentzovu grupu transformacija koja čuva upravo kvadratnu formu $\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2$. Imamo slobodu raditi u sustavu jedinica gdje je $c = 1$. Na slici 2 sa $\sigma = \tilde{t}^2 - \tilde{x}^2$ označene su hiperbole na kojima su sve točke invarijantne s obizirom na Lorentzovu grupu. Ukoliko dvodimenzionalnu Lorentzovu grupu označimo s LG imamo da je $(\mathcal{M}, g)$ jednak kvocjentnom skupu prvog kvadranta 2D prostorvremena Minkowskog i Lorentzove grupe:

$$(\mathcal{M}, g) = (I, \tilde{\eta})/LG \tag{12}$$

Elementi dvodimenzionalne Lorentzove grupe su preslikavanja A^n za $n \in \mathbb{Z}$, takvi da $(\tilde{t}, \, \tilde{x})$ transformiraju na način:

$$A(\tilde{t}, \, \tilde{x}) = (\tilde{t} \cosh \pi + \tilde{x} \sinh \pi, \, \tilde{x} \cosh \pi + \tilde{t} \sinh \pi)$$

Za sve $n \in \mathbb{Z}$ identificiramo sve točke $A^n(p)$ sa točkama iz $\mathcal{M}$:

$$\begin{gathered}(\tilde{t} \cosh n\pi + \tilde{x} \sinh n\pi, \, \tilde{x} \cosh n\pi + \tilde{t} \sinh n\pi) \\ \Leftrightarrow \\ t = \frac{1}{4}(\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2) \; ; \; \psi = 2arc \tanh(\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}})\end{gathered} \tag{13}$$

Djelovanje grupe izometrija LG na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je *properly discontinuous* ako:

(1) $\quad \forall$ točka $p \in \mathcal{M}$ ima okolinu $\mathcal{U}$ td. $A(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$

(2) $\quad$ ako su $q, \, r \in \mathcal{M}$ takvi da $\nexists A \in LG$ sa $A(q) = r$, tada postoje okoline $\mathcal{U}$ *i* $\mathcal{U}'$ od točaka q *i* r takve da $(\nexists B \in LG) \, ; \; B(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$

Zahtjev (1) osigurava da je kvocjentni skup $\mathcal{M}/LG$ mnogostrukost, dok zahtjev (2) osigurava da je Hausdorffova, odnosno da za svake dvije različite točke postoje disjunktne okoline. Vrijedi da je kvocjentni skup (10) Hausdorffov.

Prisjetimo li se analitičkih proširenja $(\mathcal{M}', g')$ i $(\mathcal{M}'', g'')$ možemo primijetiti da ako promotrimo djelovanje Lorentzove grupe na područja II i III prostorvremena Minkowskog dobivamo upravo kvocjentne skupove jednake analitičkim proširenjima $(\mathcal{M}, g)$:

$$(\mathcal{M}', g') = (I + II, \, \tilde{\eta})/LG$$

$$(\mathcal{M}'', g'') = (I + III, \, \tilde{\eta})/LG$$

te vrijedi da su oba prostora Hausdorffova, budući da su ispunjeni uvjeti (1) i (2) za djelovanje elemenata iz grupe LG. Ako pokušamo djelovati Lorentzovom grupom na područje $(I + II + III)$ dobivamo da je prvi uvjet zadovoljen, ali drugi nije, odnosno ne dobivamo Hausforffov prostor. Problematičke točke nalaze se na granicama područja I i II i granici I i III na slici 2 označene slovima r i q.

Ukoliko nas zanima maksimalno ne-Hausdorffovo proširenje dvodimenzionalnog prostorvremena Minkowskog $\tilde{\mathcal{M}}$, vidimo da je uvjet (1) zadovoljen kada elementi Lorentzove grupe djeluju na prostoru $\tilde{\mathcal{M}} - \{p\}$, odnosno svugdje osim u ishodištu. Tako da je $(\tilde{\mathcal{M}} - \{p\}, \, \tilde{\eta})/LG$ maksimalno ne-Hausdorffovo proširenje $(\mathcal{M}, \, g)$

Ako uključimo ishodište p i promatramo $\tilde{\mathcal{M}}/LG$ vidimo da to čak nije ni mnogostrukost budući da tada ne vrijede zahtjevi (1) i (2). Ukoliko koristimo definiciju vlakna $L(\tilde{\mathcal{M}})$ kao skup parova linearno nezavisnih vektora $(X, \, Y)$ td. $X, \, Y \in T_q$ u svim točkama $q \in \tilde{\mathcal{M}}$, dobivamo da djelovanje Lorentzovih transformacija A na $\tilde{\mathcal{M}}$ inducira preslikavanje A_* koje na svežnju $L(\tilde{\mathcal{M}})$ djeluje kao:

$$(X, \, Y)_q \qquad \Rightarrow \qquad (A_* X, \, A_* Y)_{A(q)}$$

gdje su q i $A(q)$ točke u $\tilde{\mathcal{M}}$ i $L(\tilde{\mathcal{M}})$. Ako je element Lorentzove grupe transformacija A različit od operatora identitete, tada su uvjeti (1) i (2) zadovoljeni, odnosno:

$$L(\tilde{\mathcal{M}})/LG \qquad \text{je Hausdorffova mnogostrukost}$$

Dobili smo da kvocijentni prostor svežnja nad ne-Hausdorffovom ne-mnogostrukosti i Lorentzove grupe može biti Hausdorffova mnogostrukost.

IV. TAUB-NUT PROSTORVRIJEME

Vratimo se na prvobitno promatranu metriku (4) i mnogostrukost $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times S^3$. Budući da je $\mathcal{M}$ jednostavno povezan, odnosno svaki zatvoreni put moguće je neprekidno deformirati u konstantan put, ne možemo promatrati pokrivač kao u dvodimenzionalnom primjeru. Jednostavna povezanost $\mathcal{M}$ još je jedan razlog zašto smo kut ψ ograničili na interval $0 \leq \psi < 4\pi$. Moramo promatrati $\mathcal{M}$ kao vlaknasti svežanj s vlaknom $\mathbb{R} \times S^1$ i bazom S^2 kako bi dobili ukupnih $\mathbb{R} \times S^3$. Projekcija svežnja je pritom:

$$\pi : \; \mathcal{M} \to S^2 \qquad \text{td.} \qquad (t, \, \psi, \, \theta, \, \phi) \to (\theta, \, \phi)$$

Ovdje se koristi rezultat Hopfovog svežnja, pomnožen sa osi t. Ako vlakno označimo s $\mathcal{F} \equiv \mathbb{R} \times S^1$ i induciranu metriku $\tilde{g}$ koju dobivamo puštanjem $d\theta, \, d\phi \to 0$ u metrici (4):

$$\tilde{g} = U(t) \cdot (2l)^2 \cdot d\psi^2 - 2 \cdot (2l) \cdot d\psi \, dt \tag{14}$$

Sada nam $(\mathcal{F}, \tilde{g})$ opisuje prostorvrijeme na cilindru upravo onakvo promatrano u dvodimenzionalnom primjeru.

Sada tangentni prostor T_q u točki $q \in \mathcal{M}$ možemo rastaviti na potprostor V_q koji je tangentan na vlakno $\mathcal{F}$ i potprostor H_q. Kao i vlakno $\mathcal{F}$, potprostor V_q razapet je vektorima:

$$\frac{\partial}{\partial t} \qquad i \qquad \frac{\partial}{\partial \psi}$$

dok je H_q razapet:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad i \qquad \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}$$

Ako vektore X i Y rastavimo na komponente duž V_q i H_q, tada možemo i metriku (4) na T_q rastaviti na sljedeći način:

$$g(X,Y) = g_V(X_V, Y_V) + (t^2 + l^2) \cdot g_H(\pi_* X_H, \pi_* Y_H)$$

gdje je $g_V = \tilde{g}$ iz (13), a g_H je standardna metrika na sferi $g_H = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. g kao sumu g_V i $(t^2 + l^2) g_H$ moramo shvaćati samo lokalno, budući da ni $\mathbb{R} \times S^3$ nije direktni produkt $\mathbb{R} \times S^1$ i S^2.

Zanimljivi dio metrike g nalazi se u dijelu g_V. Upravo zbog toga smo promatrali dvodimenzionalni primjer. Sada ćemo, kao i u primjeru, promatrati analitička proširenja $(\mathcal{F}, g_V)$ kojima možemo dodati g_H kako bi dobili analitička proširenja promatrane metrike g, odnosno Taub-NUT prostorvremena $(\mathcal{M}, g)$. Metrika g_V ima singularitete u nultočkama funkcije $U(t)$ odnosno u $t_\pm$ iz (3). Ako se ograničimo na interval između nultočaka i definiramo mnogostrukost $\mathcal{F}_0$ pomoću ψ i $t_- < t < t_+$ tada, kao i u primjeru, $(\mathcal{F}_0, g_V)$ možemo proširiti koristeći transformaciju:

$$\psi' = \psi + \frac{1}{2l} \int \frac{dt}{U(t)} \tag{15}$$

Tada dobivamo transformiranu metriku g'_V danu s:

$$(ds')^2 = 4l\, d\psi' \cdot (l\, U(t)\, d\psi' - dt)$$

Ova metrika je analitička na mnogostrukosti $\mathcal{F}'_0$ definiranoj s ψ' i $-\infty < t < \infty$. Dio prostora $(\mathcal{F}'_0, g'_V)$ sa $t_- < t < t_+$ izometričan je $(\mathcal{F}_0, g_V)$. Kao i u primjeru, za $t_- < t < t_+$ ne postoje zatvorene svjetske linije vremenskog tipa, dok za $t < t_-$ i $t > t_+$ postoje. Jedina razlika u odnosu na dvodimenzionalni primjer je što je u primjeru prostor $(\mathcal{M}', g')$ imao jednu granicu na $t = 0$, dok kod $(\mathcal{F}'_0, g'_V)$ imamo dvije, na t_- i t_+. Isto tako imamo dvije familije geodezika, jednu koja presjeca obje granice t_- i t_+ i drugu koja kruži oko njih i nikad ih ne presječe, upravo kao i na slici 1 u primjeru.

Sada ćemo, očekivano, napraviti drugo proširenje, opet na interval $-\infty < t < \infty$ koristeći transformaciju:

$$\psi'' = \psi - \frac{1}{2l} \int \frac{dt}{U(t)} \tag{16}$$

i dobiti transformiranu metriku g''_V danu s:

$$(ds'')^2 = 4l\, d\psi'' \cdot (l\, U(t)\, d\psi'' + dt)$$

analitičku na mnogostrukosti $\mathcal{F}''$ definiranoj s ψ'' i $-\infty < t < \infty$ i izometričnu $(\mathcal{F}_0, g_V)$ na intervalu $t_- < t < t_+$. Opet, vezu dva neekvivalenta analitička proširenja dobivamo ako pogledamo pokrivač. Budući da je pokrivač četverodimenzionalnog Taub-NUT prostorvremena puno složeniji nego u jednostavnijem dvodimenzionalnom primjeru, ovdje ćemo samo povući analogiju s primjerom i preskočiti na rezultat. Dobiva se da $(\mathcal{F}'_0, g'_V)$ i $(\mathcal{F}''_0, g''_V)$ daju dva različita analitička proširenja $(\mathcal{M}, g)$ te postoje geodezici koji su nepotpune krivulje.

Ukoliko promatramo proizvoljno od dva analitička proširenja, recimo $(\mathcal{M}', g')$, plohe invarijantnosti grupe izometrija su 3-sfere koje su u području $t_- < t < t_+$ prostornog tipa, dok su za $t < t_-$ i $t > t_+$ vremenskog tipa. Budući da znamo da krivulje ne prolaze kroz $t = t_-$ i $t = t_+$, tada su te točke Cauchyevi horizonti koji dijele vremenske od prostornih ploha. Ukoliko uključimo i horizonte, područje $t_- \leq t \leq t_+$ je kompaktno i sadrži nepotpune vremenske i svjetlosne geodezike koji ne izlaze iz njega.

V. ZAKLJUČAK

Uveli smo metriku na mnogostrukosti $\mathbb{R} \times S^3$ koja je rješenje Einsteinove jednadžbe u praznom prostoru. Unutar metrike, funkcija $U(t)$ ima dva singulariteta koji nam dijele prostor na tri dijela odvojena Cauchyjevim horizontima. Za $U(t) < 0$ imamo NUT prostor u kojemu postoje zatvoreni geodezici vremenskog tipa, dok za Taubov prostor ne postoje. Pronašli smo dvije familije geodezika jednostavnog dvodimenzionalnog primjera od kojih jedna familija ne prolazi kroz granicu $t = 0$. Poopćenje analize geodezika na Taub-NUT prostorvrijeme pokazalo je da i u njemu postoje familije geodezika različitih tipova koji ne prelaze iz Taubovog u NUT prostor i obrnuto. Rastavili smo Taub-NUT prostorvrijeme na S^2 te vlakno $\mathcal{F} \equiv \mathbb{R} \times S^1$ ekvivalentno primjeru kako bi pokazali da postoje dva neekvivalentna analitička proširenja Taubovog prostora u NUT prostor, koja su geodetski nepotpuna. Moguće su daljnje analize metrike pomoću Killingovih vektora[3] koje otkrivaju svojstva singulariteta i geodezika u drugim kozmološkim rješenjima Einsteinove jednadžbe.

[1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis: The Large Scale Structure of Space-Time, Chapter 5.8

[2] C.W. Misner: Taub-NUT Space as a Counterexample to Almost Anything, in J. Ehlers (ed.): Relativity Theory and Astrophysics I: Relativity and Cosmology (1967) 160–169

[3] C.W. Misner and A.H. Taub: A Singularity-free Empty Universe, Soviet Physics JETP 28 (1969) 122

[4] I. Smolić: Diferencijalna geometrija u fizici, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, (2020.)

[5] Munkres, James R.: Topology, Upper Saddle River, NJ Prentice Hall, Inc