

Hodgeova dekompozicija u elektromagnetizmu i dinamici fluida

Nikola Crnković

Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb

September 20, 2017

Sažetak

Iskazan je Hodgeov dekompozicijski teorem. Objašnjena su uvjeti i terminologija teorema, a zatim su prikazani primjeri. Iskazana su svojstva općeniti vektorskih polja i Biot-Savartovog operatora koji izlaze iz Hodgeovog teorema. Na kraju su dane praktične primjene koje dolaze iz teorije čvorova.

1 Uvod

Neka je Ω kompaktna domena s glatkim rubom $\partial\Omega$ u 3-prostoru i neka je $VF(\Omega)$ beskonačno dimenzionalan vektorski prostor svih glatkih vektorskih polja na Ω s L^2 sklaranim produktom:

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{W} d\tau, \quad (1)$$

gdje je $d\tau$ volumeni element. Pod "glatko", ekvivalentno C^∞ , podrazumijevamo da derivacije svih redova postoje i kontinuirane su.

Teorem 1.1 (Hodgeov teorem dekompozicije). *Prostor $VF(\Omega)$ je direktna suma pet međusobno ortogonalnih podprostora:*

$$VF(\Omega) = FK \oplus HK \oplus CG \oplus HG \oplus GG \quad (2)$$

sa

$$\begin{aligned} \ker[\text{rot}] &= HK \oplus CG \oplus HG \oplus GG \\ \text{img}[\text{rot}] &= FK \oplus HK \oplus CG \\ \text{img}[\text{grad}] &= CG \oplus HG \oplus GG \\ \ker[\text{div}] &= FK \oplus HK \oplus CG \oplus HG \end{aligned} \quad (3)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} FK &= \text{Fluxless Knots} = \{ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \text{ svi unutrašnji tokovi} = 0 \}, \\ HK &= \text{Harmonic Knots} = \{ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \}, \\ CG &= \text{Curly Gradients} = \{ \vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \text{ svi rubni tokovi} = 0 \}, \\ HG &= \text{Harmonic Gradients} = \{ \vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \psi \text{ lokalno konstantna na } \partial\Omega \}, \\ GG &= \text{Grounded Gradients} = \{ \vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \psi|_{\partial\Omega} = 0 \}, \end{aligned}$$

i konačno ,

$$\begin{aligned} HK &\cong H_1(\Omega; \mathbb{R}) \cong H_2(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\text{genus od } \partial\Omega}, \\ HG &\cong H_2(\Omega; \mathbb{R}) \cong H_1(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(\# \text{ komp. od } \partial\Omega) - (\# \text{ komp. od } \Omega)}. \end{aligned}$$

Značenje uvjeta i terminologije ćemo objasniti u 2. i 3. poglavlju. Uvodimo Biot-Savartov operator čija ćemo neka svojstva detaljnije proučiti u 4.2 poglavlju. Iako je navedeno za prostor $VF(\Omega)$ glatkih vektora na Ω sa L^2 skalarnim produktom teorem vrijedi i za L^2 upotpunjavanjem $VF(\Omega)$ i navedenih podprostora.

Ako glatko vektorsko polje \vec{V} na Ω gledamo kao distribuciju električne struje, tada sa Biot-Savartovom formulom dobivamo magnetsko polje $\vec{BS}(V)$ u 3-prostoru:

$$\overrightarrow{BS}(V)(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{V}(x) \times \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} d\tau_x \quad (4)$$

Ako ograničimo magnetsko polje na domenu Ω , tada imamo Biot-Savartov operator:

$$\overrightarrow{BS} = VF(\Omega) \rightarrow VF(\Omega) \quad (5)$$

Dvije fundamentalne veličine koje se koriste pri proučavanju DNK, dinamike fluida, fizike plazme i općenito teoriji čvorova su *broj uvijanja* $Wr(K)$ i *helicitet* $H(\vec{V})$. Te dvije veličine su invarijantne u vremenu[5], zbog poveznice s fluidima kaže se da su invarijate na tok fluida.

Veličina *broj uvijanja* $Wr(K)$ (writhing number) glatke krivulje K u 3-prostoru je standardna mjera koliko se krivulja omotava i uvija oko sebe. Definirana je formulom:

$$Wr(K) = \frac{1}{4\pi} \int_{K \times K} \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda} \times \frac{d\vec{y}}{dt} \right) \cdot \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} d\lambda dt, \quad (6)$$

gdje su $d\lambda$ i dt infinitezimalni putevi. Broj uvijanja se koristi pri proučavanju molekule DNK.

Helicitet $H(\vec{V})$ glatkog vektorskog polja \vec{V} na domeni Ω u 3-prostoru je standardna mjera koliko se silnice polja omotavaju i uvijaju jedna oko druge. Definiran je formulom:

$$H(\vec{V}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \times \Omega} \vec{V}(x) \times \vec{V}(y) \cdot \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} d(\tau_x) d(\tau_y) \quad (7)$$

Helicitet je za vektorka polja isto što i broj uvijanja za čvorove. Može se pokazati da, ako je \vec{V} distribucija električne struje tada je helicitet $H(\vec{V})$ L^2 skalarni produkt \vec{V} i $\overrightarrow{BS}(\vec{V})$:

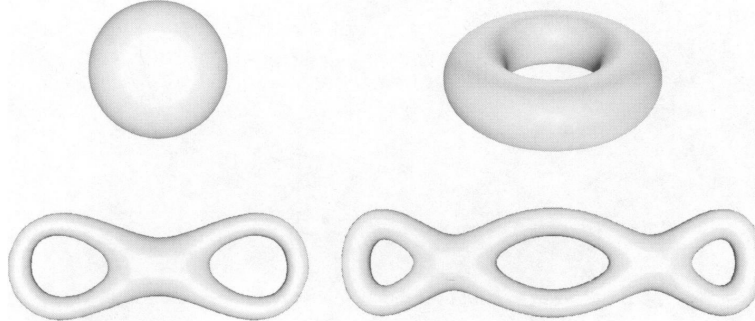
$$H(\vec{V}) = \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \overrightarrow{BS}(\vec{V}) d\tau = \langle \vec{V}, \overrightarrow{BS}(\vec{V}) \rangle, \quad (8)$$

2 Topologija

Hodgeov Teorem pokazuje kako struktura prostora vektorskih polja definirana na kompaktnu domenu u 3-prostoru odražava topologiju domene. Ovdje ćemo ukratko objasniti neke pojmove te topologije.

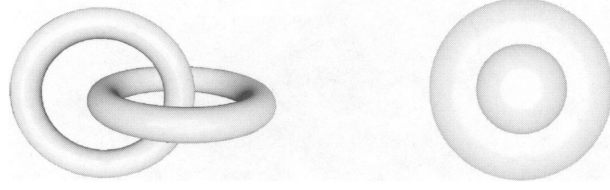
2.1 Genus

Genus povezane, orijentirane kompaktne plohe je topološki invarijantan cijeli broj koji predstavlja najveći broj prereza uz ne-presijecajuće zatvorene jednostavne krivulje bez mijenjanja povezanosti plohe, ili drugim riječima genus je broj rupa plohe (kakvu ima krafna). Može se reći da je to najveći broj zatvorenih jednostavnih linija koje se mogu nacrtati na plohi koje se ne sijeku i ne separiraju plohu. Npr. Slika 1 prikazuje neke od najjednostavnijih kompaktnih domena u 3-prostoru: kugla, torus, dvostruki torus i trostruki torus. Navedene domene se ograničeni površinama genusa nula, jedan, dva i tri, respektivno. Genus čvora je definiran kao minimalni genus svih ploha čiji rub je zadani čvor (Seifertove površine).

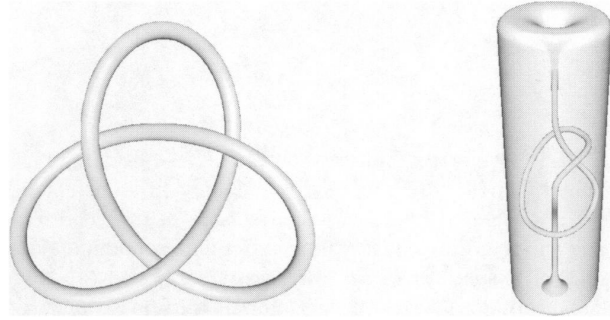


Slika 1: Domene s različitim genusima. Kugla-genus 0, torus-genus 1, dvostruki torus-genus 2, trostruki torus-genus 3.

Kažemo da su dvije domene homeomorfne (ili topološki ekvivalentne) ako postoji neprekinuta bijekcija između domena i ima neprekidni inverz. Kao npr. sfera i kocka, ili kugla s krumpirom, ili torus s čajnom šalicom. Domene, kao i rubovi povezane domene u 3-prostoru mogu imati nekoliko komponenti (Slika 3). Treba napomenuti da dvije topološki različite domene mogu imati topološki ekvivalente rubove kao na Slici 3.



Slika 2: Domene s nekoliko komponente. Lijevo: par povezanih torusa s dvije komponente domene. Desno: područje između dvije koncentrične sfere koje ima dva komponenta ruba.



Slika 3: Dvije topološki različite domene mogu imati topološki ekvivalente rubove.

2.2 Apsolutna i relativna homologija

Neka je Ω kompaktna domena u 3-prostoru, s glatkim rubom $\partial\Omega$. Osnovne topološke informacije o Ω koje trebamo daju se njezinom homologijom s realnim koeficijentima. Apsolutna homologija od Ω sastoji se od vektorskih prostora $H_i(\Omega; \mathbb{R})$, za $i = 0, 1, 2, 3$, dok je relativna homologija domene Ω modulo njezinog ruba $\partial\Omega$ sastoji se od vektorskih prostora $H_i(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R})$ za iste vrijednosti i . Relativna homologija pomaže odrediti koji dio apsolutnog homolognog prostora dolazi iz kojeg se podprostora. Koristimo samo homologiju sa realnim koeficijentima, tako da nadalje u ovom poglavlju ne pišemo simbol \mathbb{R} . Treba napomenuti da se općenito $H_i(\Omega)$ i $H_i(\Omega, \partial\Omega)$ promatraju kao grupe s oznakama $H_i(\Omega; G)$ i $H_i(\Omega, \partial\Omega; G)$, gdje je G grupa.

Apsolutni homologi vektorski prostor $H_0(\Omega)$ generira se klasama ekvivalencije točaka u Ω , gdje su dvije točke smatraju ekvivalentnim ako se mogu povezati putem u Ω . $H_1(\Omega)$ generira se klasama ekvivalencije usmjerenih petlji u Ω , gdje su dvije petlje ekvivalentne ako je njihova razlika rub orijentirane plohe u Ω . Prostor $H_2(\Omega)$ generira klasama ekvivalencije zatvorenih orijentiranih površina u Ω , gdje su dvije plohe ekvivalentne ako je njihova razlika granica nekih orijentiranih podregija Ω . Prostor $H_3(\Omega)$ je uvijek nula. Prostori idu do $i = 3$ jer općenito vrijedi [3], za dimenziju d domene Ω^d : $H_p(\Omega^d) = 0$ za $p > d$. Homologi prostori su topološki invarijanti[3]. Dakle, ako imamo dvije domene Ω_1 i Ω_2 , i ako se njihove grupe homologije razlikuju, za neke koeficijente \mathbb{R} , tada te domene ne mogu biti homeomorfne.

Relativni homologi vektorski prostor $H_0(\Omega, \partial\Omega)$ je uvijek nula. $H_1(\Omega, \partial\Omega)$ je generiran s klasama ekvivalencije orijentiranih putova čije su krajnje točke leže na $\partial\Omega$, gdje su dva takva puta ekvivalentna ako je njihova razlika, povećana po potrebi putovima na $\partial\Omega$, rub orijentirane plohe u Ω . Prostor $H_2(\Omega, \partial\Omega)$ je generiran klasama ekvivalencije orijentiranih površina čiji rubovi leže na $\partial\Omega$, gdje su dvije takve plohe ekvivalentne ako je njihova razlika, po potrebi povećana dijelovima $\partial\Omega$, granica neke orijentirane podregije Ω . I na kraju, prostor $H_3(\Omega, \partial\Omega)$ ima za bazu orijentirane komponente Ω , budući da su to subregije Ω čije granice leže na $\partial\Omega$. Dimenzije homolognih prostora i njihove isomorfizme s drugim homolognim prostorima se pronalaze pomoću alata kao što su Poincareova i Alexanderova dualnost, Mayer-Vietorisov niz itd. Dimenzije svih homologija je napisana u Tablici 1.

Apsolutna Homologija	Dimenzija	Relativna Homologija	Dimenzija
$H_0(\Omega)$	# komp. od Ω	$H_0(\Omega, \partial\Omega)$	0
$H_1(\Omega)$	ukupni genus od $\partial\Omega$	$H_1(\Omega, \partial\Omega)$	# komp. od $\partial\Omega$ - # komp. od Ω
$H_2(\Omega)$	# komp. od $\partial\Omega$ - # komp. od Ω	$H_2(\Omega, \partial\Omega)$	ukupni genus od $\partial\Omega$
$H_3(\Omega)$	0	$H_3(\Omega, \partial\Omega)$	# komp. od Ω

Table 1: Dimenzije pojedinih apsolutnih i relativnih homoloških vektorskih prostora.

Homologija domene definicije igra važnu ulogu u vektorskom računanju kao što su Stokesov teorem i teorem o divergenciji. Npr. ako imamo glatko vektorsko polje \vec{V} na Ω i integriramo to polje po glatkoj orijentiranoj krivulji C u Ω (pišemo $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}$) da dobijemo cirkulaciju polja \vec{V} oko C . Ako \vec{V} nema rotacije tada cirkulacija \vec{V} oko C ovisi samo o homolognoj klasi C u $H_1(\Omega)$, što je posljedica Stokesovog teorema. Slično, ako želimo integrirati \vec{V} po orijentiranom putu P (pišemo $\int_P \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}$), čiji završeci leže na rubu $\partial\Omega$, i ako \vec{V} nema rotacije i ortogonalno je s rubom $\partial\Omega$, tada taj integral ovisi samo o homolognoj klasi P u $H_1(\Omega, \partial\Omega)$. Što je također posljedica Stokesovog teorema.

Pretpostavimo sada da je S glatka orijentirana ploha bez ruba u Ω i promotrimo tok (3. poglavlje, jednačba (11)) od \vec{V} kroz S . Ako \vec{V} nema izvora (nema divergencije), tada taj tok ovisi samo o homolognoj klasi S u $H_2(\Omega)$. Slično, možemo izračunati tok \vec{V} kroz glatku površinu Σ u Ω kada Σ ima granicu koja nije prazna. Ako je $(\Sigma, \partial\Sigma) \subset (\Omega, \partial\Omega)$ i ako \vec{V} nema izvora i tangentan je s rubom $\partial\Omega$, tada vrijednost toka \vec{V} kroz Σ ovisi samo o relativnoj homolognoj klasi Σ u $H_1(\Omega, \partial\Omega)$. Zadnja dva primjera su posljedice teorema o divergenciji.

3 Podprostori

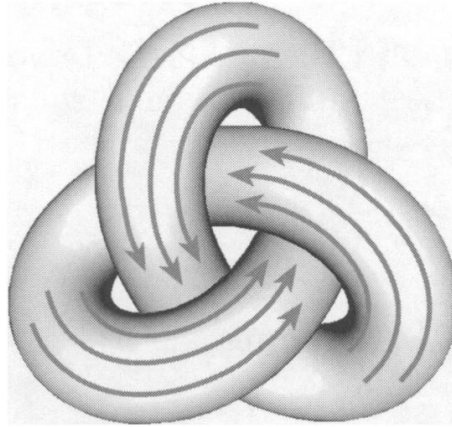
Ovdje ćemo objasniti podprostore koji se nalaze u direktnoj sumi, pokazati primjere tih podprostora i ukratko opisati kako se dokazuje Hodgeov teorem dekompozicije.

Promotrimo podprostor od $VF(\Omega)$ koji se sastoji od svih bez-divergentnih polja na Ω koji su tangenti s $\partial\Omega$. Ta se vektorska polja upotrebljavaju za reprezentaciju nestlačljivih tekućina unutar fiksnih granica, i magnetska polja unutar uređaja za zadržavanje plazme (Slika 4). Zato definiramo čvorove (knots):

Definicija 3.1.

$$K = \text{Knots} = \{\vec{V} \in VF(\Omega) : \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0\}, \quad (9)$$

gdje je \vec{n} jedinični vektor koji je izvan domene Ω i normalan na rub $\partial\Omega$. Što znači da uvjet $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ označava vektorsko polje \vec{V} koje je tangentno s rubom $\partial\Omega$ i vrijedi samo na rubu. Uvjet $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ vrijedi kroz cijelu Ω . Ovakva vektorska polja se još zovu i fluidni čvorovi i predstavljaju protjecanje struje u magnetostatici.



Slika 4: Fluidni čvor ("Blood flow"), heliciteteta $H(\vec{V}) = \pm 3\Phi^2$ (više u poglavlju 4.3).

Sada definiramo gradijente:

Definicija 3.2. Za neku glatku realnu funkciju ψ definiranu na Ω

$$G = \text{gradijenti} = \{\vec{V} \in VF(\Omega) : \vec{V} = \vec{\nabla}\psi\}, \quad (10)$$

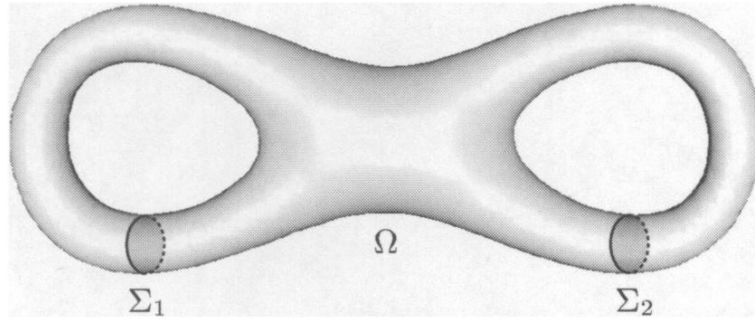
Može se pokazati[1] da je prostor $VF(\Omega)$ je direktna suma dva ortogonalna potprostora $K \oplus G$.

Neka Σ označava bilo koju glatku orijentiranu plohu u Ω čiji rub $\partial\Sigma$ leži unutar ruba $\partial\Omega$ domene Ω . Tada Σ zovemo površinu poprečnog presjeka i pišemo $(\Sigma, \partial\Sigma) \subset (\Omega, \partial\Omega)$. Orijetiramo Σ odabirom jednog od svojih dva jediničnih normalnih vektorskih polja \vec{n} . Zatim, za bilo koji vektor polja \vec{V} na Ω , definiramo tok \vec{V} kroz Σ :

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} dA, \quad (11)$$

gdje je dA element površine. Pretpostavimo da je \vec{V} ne-divergentno i tangentno na $\partial\Omega$. Tada vrijednost Φ ovisi samo o homolognoj klasi Σ u relativnoj homolognoj grupi $H_2(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R})$. Na primjer, ako je Ω je torus s N rupa, tada je $H_2(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R})$ generirana s disjuktivnim orijentiranim poprečnim presjecima $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots \Sigma_N$ postavljeni

tako da da presjecanje Ω sa tim poprečnim presjecima proizvodi jedno jednostavno povezano područje kao na Slici 5. Tokovi $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_N$ od \vec{V} kroz ove poprečne plohe određuje protok \vec{V} kroz bilo koju drugu površinu poprečnog presjeka.



Slika 5: Poprečni presjeci na domeni s dvije rupe.

3.1 FK

Ako tok Φ vektorskog polja \vec{V} kroz svaku presječenu površinu isčezava, tada kažemo da su svi unutrašnji tokovi 0, zatim definiramo:

Definicija 3.3. Fluxless Knots (bez-protočni čvorovi)

$$FK = \{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \text{ svi unutrašnji tokovi} = 0\}. \quad (12)$$

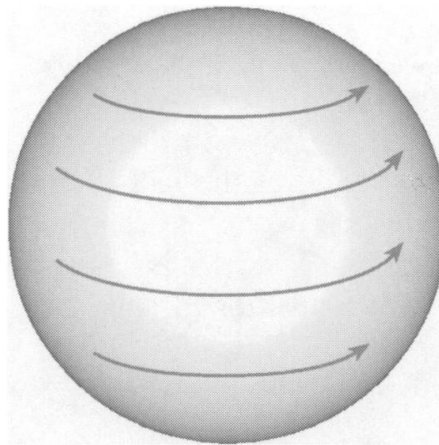
Može se pokazati[1] da se bez-protočni čvorovi mogu i dati preko rotacije drugog vektorskog polja:

$$FK = \{\vec{\nabla} \times \vec{U} : \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0, \vec{U} \times \vec{n} = 0\}$$

Primjer 1. (FK) Neka je Ω kugla radijusa 1 centrirana u ishodištu u 3-prostoru. Promotrimo vektorsko polje (Slika 6):

$$\vec{V} = -y\hat{x} + x\hat{y},$$

koje je vektorsko polje rotacije oko z-osi sa konstantnom kutnom brzinom. Ne-divergetno ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) i tangetno sa rubom kugle ($\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$), tj. pripada podprostoru FK , jer nema harmoničnih čvorova na kugli (genus od $\partial\Omega$ je jednak nuli).



Slika 6: Vektorsko polje u podprostoru bezprotočnih čvorova (FK).

3.2 HK

Definicija 3.4. Harmonic Knots (harmonični čvorovi)

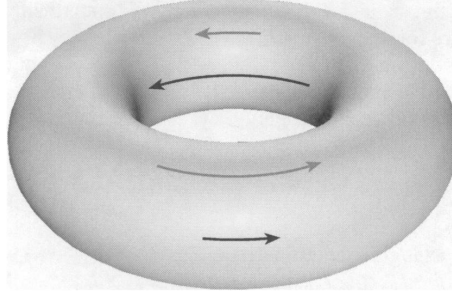
$$HK = \{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0\}. \quad (13)$$

Prostor HK izomorfan sa homolognom grupom $H_1(\Omega, \mathbb{R})$ i, pomoću Poincareovom dualnošću, izomorfan sa relativnom homolognom grupom $H_2(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R})$, koji je konačno-dimenzionalan vektorski prostor, sa dimenzijom jednak genusu na $\partial\Omega$.

Primjer 2. (HK) Neka je Ω torus koji je nastao revolucijom kruga oko z-osi (ima genus jednak jedan). Koristeći cilindrične koordinate (r, φ, z) , promotrimo vektorsko polje:

$$\vec{V} = \frac{\hat{\varphi}}{r}$$

koje je magnetsko polje nastale od struje koje teče u z-smjeru (Slika 7). Lagano se provjeri da polje \vec{V} ispunjava uvjete za podprostor harmoničnih čvorova (HK). Harmonični čvorovi su obično dobri za opisivanje magnetostatskih polja.



Slika 7: Vektorsko polje u podprostoru harmoničkih čvorova (HK).

3.3 CG

Ako je \vec{V} vektorsko polje definirano na Ω , kažemo da su svi tokovi \vec{V} na rubu su nula ako je tok kroz svaku komponentu ruba $\partial\Omega$ jednak nuli. Tada definiramo rotacijske gradijente:

Definicija 3.5. Curly Gradijents (rotacijski čvorovi)

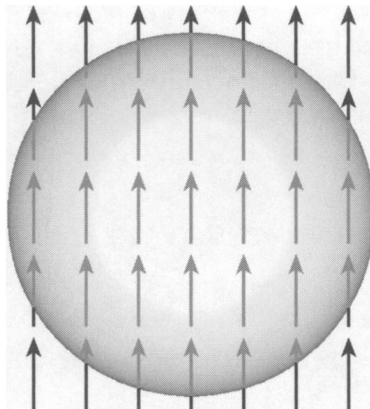
$$CG = \{\vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \text{ svi rubni tokovi} = 0\}. \quad (14)$$

Potprostor CG je dobio takvo ime jer su to jedini gradijenti čija slika leži u rotaciji.

Primjer 3. (CG) Neka je Ω opet kugla radijusa 1 centrirana u ishodištu. Promotrimo harmoničku funkciju z i njezino gradijentno polje (Slika 8):

$$\vec{V} = \vec{\nabla}z = \hat{z},$$

Koje je bez-divergentno i ima tok jednak nuli kroz jedinu komponentnu ruba $\partial\Omega$, tj. pripada podprostoru rotacijskih gradijenta (CG).



Slika 8: Vektorsko polje u podprostoru rotacijskih gradijenta (CG).

3.4 HG

Definicija 3.6. Harmonic Gradijents (harmonički gradijenti)

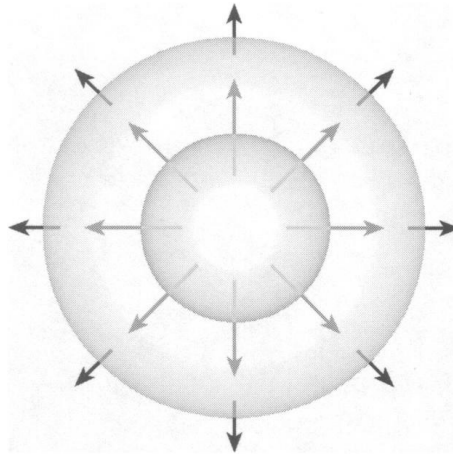
$$HG = \{\vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \psi \text{ lokalno konstantna na } \partial\Omega\}, \quad (15)$$

gdje rubni uvjet znači da funkcija ψ je konstantna na svakoj komponenti ruba $\partial\Omega$. Potprostor HG je izomorfan a apsolutnom homologijom $H_2(\Omega; \mathbb{R})$, i pomoću Poincareove dualnosti, izomorfan sa relativnom grupom homologije $H_1(\Omega, \partial\Omega; \mathbb{R})$, koji je konačno-dimenzionalan vektorski prostor, sa dimenzijom jednako razlici broja komponenta od Ω oduzeto od broja komponenta $\partial\Omega$. Ova polja se zovu harmonična jer funkcija ψ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\nabla^2\psi = 0$.

Primjer 4. (HG) Neka je Ω prostor između dviju koncentričnih sfera (rub ima dvije komponente a cijela domena jednu), radijusa 1 i 2, centrirane u ishodištu. Koristeći sferne koordinate (r, θ, φ) , promotrimo harmoničnu funkciju $1/r$ i njezin gradijentno vektorsko polje:

$$\vec{V} = \vec{\nabla}(1/r) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$

koje je polje koje opada s inverznim kvadratom (Slika 9). Pošto je funkcija $1/r$ konstantna na svakoj komponenti $\partial\Omega$, vektorsko polje \vec{V} pripada podprostoru harmoničnih gradijenata (HG).



Slika 9: Vektorsko polje u podprostoru harmoničkih gradijenata (HG).

3.5 GG

I na kraju definiramo grounded gradient (uzemljen gradijent):

Definicija 3.7. Grounded Gradients (uzemljeni gradijenti)

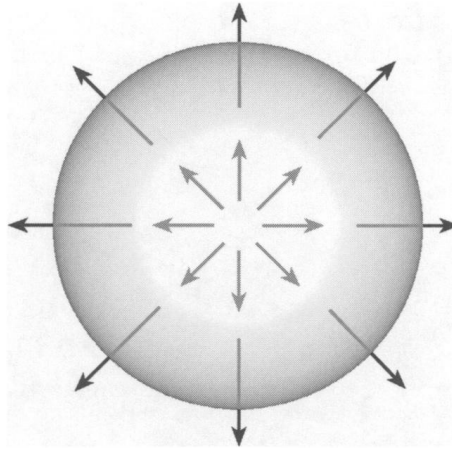
$$GG = \{\vec{V} \in VF(\Omega) : \vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \psi|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (16)$$

koji je dobio ime jer gradijenti funkcija isčezavaju na $\partial\Omega$.

Primjer 5. (GG) Neka je Ω kugla radijusa 1 centrirana u ishodištu. Promotrimo funkciju $r^2 - 1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ i njezino gradijentno vektorsko polje:

$$\vec{V} = \vec{\nabla}(r^2 - 1) = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z}.$$

Funkcija $r^2 - 1$ je konstantna na $\partial\Omega$ (jednaka je nuli), tj. vektorsko polje \vec{V} pripada u podprostor uzemljenih gradijenata (GG). U klasičnoj elektrodinamici \vec{V} je električno polje koje proizvode prostorni naboji unutar kugle ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 6$):



Slika 10: Vektorsko polje u podprostoru prizemljenih gradijenta (GG).

Hodgeov teorem o dekompoziciji se pokazuje na slijedeći način. Prvo se prostor $VF(\Omega)$ rastavi na podprostore čvorova K i gradijentnih polja G tako da se uzmu dva polja iz svakog podprostora i zatim se trivijalno, pomoću sklarnog produkta i identiteta iz vektorske analize, pokaže da su ta dva podprostora ortogonalna. Zatim se svaki od tih podprostora rastavi na druge podprostore: K na $FK \oplus HK$, a G na $CG \oplus HG \oplus GG$ na sličan način.

Vektorsko polje \vec{V} pripada potprostoru $HG \oplus GG$ ako i samo ako je gradijent glatke funkcije ψ na Ω koja je konstantna na svakoj komponenti $\partial\Omega$, ili ekvivalentno, \vec{V} je gradijentni vektor koji je ortogonalan s $\partial\Omega$. Tvrdnja Teorema 4.2 da takvi vektorski prostori oblikuju jezgru Biot-Savart operatora.

Pet ortogonalnih direktnih sumada od $VH(\Omega)$ se mogu označiti sa sljedećim svojstvima:

$$\begin{aligned} FK &= (\ker[\text{rot}])^\perp \\ HK &= (\ker[\text{rot}] \cap (\text{img}[\text{grad}])^\perp) = (\ker[\text{rot}]) / (\text{img}[\text{grad}]) \cong H_1(\Omega; \mathbb{R}) \\ CG &= (\text{img}[\text{grad}]) \cap (\text{img}[\text{rot}]) \\ HG &= (\ker[\text{div}] \cap (\text{img}[\text{rot}])^\perp) = (\ker[\text{div}]) / (\text{img}[\text{rot}]) \cong H_2(\Omega; \mathbb{R}) \\ GG &= (\ker[\text{div}])^\perp \end{aligned}$$

4 Primjena Hodgeovog teorema

4.1 Primjena na polja

Ovdje ćemo primijeniti Hodgeov teorem na općenitom polju. Općenito kada imamo vektorsko polje definiranog na omeđenoj domeni pitamo se možemo li je vektorsko polje gradijent neke funkcije ili rotacije drugog vektorskog polja. Takva i slična pitanja ćemo ovdje odgovoriti.

Primjer 6. Kako znamo jel je neko vektorsko polje \vec{V} na kompaktnoj domeni Ω (a) gradijent funkcije ili (b) rotacija nekog drugog $VF(\Omega)$ (b) ?

Odgovor na (a) je pozitivan ako je cirkulacija polja \vec{V} oko svake petlje nula. Obrnuto, ako je cirkulacija \vec{V} oko svake petlje nula onda $\vec{V} = \vec{\nabla}\psi$, gdje je $\psi(x)$ glatka realna funkcija definirana integracijom \vec{V} na bilo kojem putu iz početne točke x_0 u svakoj povezanoj komponenti od Ω do točke x . Ali ovo nije vrlo praktičan test.

Hodgeov teorem nam olakšava u traženju odgovora. Pogledajmo što nam kaže Hodgeov teorem o slici gradijenta i jezgri (kernelu) rotacije (3):

$$\begin{aligned} \ker[\text{rot}] &= HK \oplus CG \oplus HG \oplus GG \\ \text{img}[\text{grad}] &= CG \oplus HG \oplus GG, \end{aligned}$$

koji nam kaže da ako želimo se naše vektorsko polje \vec{V} nalazi u postoru gradijenta tada \vec{V} ne smije imati rotaciju, tj. $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ (tako da se nalaziti u jezgri rotacije) i mora imati cirkulaciju jednaku nula oko svake petlje na $\partial\Omega$ (da ima HK komponentu jednaku nuli), gdje su te petlje baza za $H_1(\Omega; \mathbb{R})$.

Za odgovor na (b) pogledajmo što nam Hodgeov teorem kaže o slici rotacije i jezgri divergencije:

$$\begin{aligned} \text{img}[\text{rot}] &= FK \oplus HK \oplus CG \\ \text{ker}[\text{div}] &= FK \oplus HK \oplus CG \oplus HG \quad . \end{aligned}$$

Da ispunimo uvijete prvo trebamo provjeriti jel li je $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, tako da se \vec{V} nalazi u jezgri divergencije. Zatim trebamo imati komponentu HG jednaku nula, a to postizemo tako da tok \vec{V} kroz svaku komponentu ruba $\partial\Omega$ bude nula. Sve ovo je lakše provjeriti nego provjeravati je li je tok kroz svaku zatvorenu površinu jednau nula, tj. provjeravati Stokesov teorem.

Primjer 7. Možemo li naći $\vec{V} \neq 0$, tako da je bez izvora i rotacije i da je tangentno s rubom ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \nabla \times V = 0$ i $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$)? Takva polja odgovaraju magnetostatskim poljima.

Ti uvjeti su upravo definicija definicija harmoničkih čvorova (HK)!

$$HK = \{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0\} \cong H_1(\Omega; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\text{genus od } \partial\Omega}.$$

Za pronalazak vektorskog polja koji odgovara traženog uvijeta trebamo provjeriti imaju li rubne komponente domene Ω barem jedan genus različit od nula.

Primjer 8. Možemo li naći $V \neq 0$, tako da je bez izvora i rotacije i da je tangentno s rubom ($\nabla \cdot V = 0, \nabla \times V = 0$ i $V \times n = 0$)?

Ti uvjeti su upravo definicija definicija harmoničkih gradijenta (HG)!

$$HG = \{\vec{V} = \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \text{psi lokalno konstantna na } \partial\Omega\} \cong H_2(\Omega; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(\# \text{ komp. od } \partial\Omega) - (\# \text{ komp. od } \Omega)}$$

Za pronalazak vektorskog polja koji odgovara traženog uvijeta trebamo potražiti povezanu komponenta Ω koja ima više od jedne komponente ruba. Treba napomenuti jedan detalj jer nije odmah jasno da polje iz HG ispunjava uvjete. Dakle, ako je \vec{V} gradijentno polje na Ω koje generira funkcija ψ i ortogonalno je s rubom $\partial\Omega$, tada je ψ konstanta na svakoj komponenti ruba $\partial\Omega[2]$, što je upravo definicija HG .

4.2 Biot-Savartov operator

Sada ćemo Hodgeov teorem primjeniti na Biot-Savartov operator (4). Primjenimo li rotaciju na (4) u upotrijebimo identitete iz vektorske analize dobivamo:

$$\vec{\nabla} \times \overrightarrow{BS}(\vec{V})(\vec{y}) = \begin{cases} \vec{V}(\vec{y}) & \text{kada } \vec{y} \in \Omega \\ 0 & \text{kada } \vec{y} \in \mathbb{R} - \Omega = \Omega' \end{cases} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{y}} \int_{\Omega} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{V}(\vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\tau_x - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{y}} \int_{\Omega} \frac{\vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}}{|\vec{y} - \vec{x}|} dS_x \quad (17)$$

Ako upotrijebimo $d\rho/dt = -\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (jednadžba kontinuiteta) za volumni naboj kroz Ω i $d\sigma/dt = \vec{V} \cdot \vec{n}$ za površni naboj na $\partial\Omega$ drugi i treći član gornje jednadžbe moežmo prepoznati kao vremensku promjenu električnih polja koji dolaze od volumnih (\vec{E}_{ρ}) i površnih naboja (\vec{E}_{σ}), respektivno. Tada možemo gornju jednadžbu prepoznati kao Mawwellovu jednadžbu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{d}{dt}(\vec{E}_{\rho} + \vec{E}_{\sigma}) = \vec{J} + \frac{d\vec{E}}{dt}, \quad (18)$$

gdje je \vec{E} ukupno električno polje.

Ako je \vec{V} je bez izvora ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) tada drugi član na desnoj strani jednadžbe (17) iščezava, ako je \vec{V} tangentno s rubom $\partial\Omega$ ($\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$), tada treći član na desnoj strani jednadžbe (17) iščezava. Ako je oboje tada je \vec{V} fluidni čvor $K(9)$ i vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 4.1. Jednadžba $\vec{\nabla} \times \overrightarrow{BS}(\vec{V}) = \vec{V}$ vrijedi u Ω ako i samo ako je \vec{V} bez izvora i tangentno je s rubom $\partial\Omega$.

Ovaj rezultat je dobro poznat od prije. Ovaj teorem dodaje da se taj rezultat ne drži u drugim slučajevima . Utjecaj ovog teorema je da problemi svojstvenih vrijednosti za Biot-Savart operator, koji su važni za proučavanje heliciteta (poglavlje 1. i 4.3), ne može se generalno pretvoriti u problem svojstvene vrijednosti za rotaciju (tj, u sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi).

Slijedeći teorem se dokazuje uz pomoć slijedećeg izaza[6]:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{V} d\tau = - \int_{\partial\Omega} \vec{V} \times \vec{n} dS.$$

Teorem 4.2. Jezgra Biot-Savart operatora je upravo prostor gradijentnog vektorskog polja koja su ortogonalna na granici Ω (ekvivalentno $\vec{V} \in HG \oplus GG$).

Ako \vec{V} je glatko gradijentno polje vektora definiranog na Ω i ortogonalno na njegovu granicu, tada je njegovo magnetsko polje $\vec{BS}(\vec{V}) = 0$ kroz 3-prostor. Isto tako, ako je \vec{V} glatko polje vektora definirano na Ω čije magnetsko polje $\vec{BS}(\vec{V}) = 0$ u Ω , tada je \vec{V} gradijentno polje ortogonalno na granicu $\partial\Omega$, i s time $\vec{BS}(\vec{V}) = 0$ kroz 3-prostor. Jednostavnije rečeno podprostori HG i GG ne opisuju dobro magnetska polja. Fizikalni uzrok je to što ne postoje magnetski monopoli, koliko znamo za sada.

Slijedeći teorem se dokazuje uz pomoć Fubinijevog teorema i Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

Teorem 4.3. Biot-Savart operator je omeđen operator i stoga se proteže u omeđenog operatora na L^2 upotpunjavanju svoje domene, gdje je i kompaktan i Hermitski. Tj. vrijedi

$$\vec{BS} = \overline{VF}(\Omega) \rightarrow \overline{VF}(\Omega) \quad i \quad \langle \vec{V}_1, \vec{BS}(\vec{V}_2) \rangle = \langle \vec{V}_2, \vec{BS}(\vec{V}_1) \rangle .$$

Crta iznad $VF(\Omega)$ označava kompaktan zatvarač u $VF(\Omega)$ (skup ima kompaktan zatvarač ako je skup omeđen). I konačno, može se pokazati:

Teorem 4.4. Ako je $\vec{V} \in K(\Omega)$ tada $\vec{BS}(\vec{V})$ opada kao $1/r^3$ u beskonačnosti (inače opada kao $1/r^2$).

Detaljan dokaz svih ovih teorema se može naći u [2].

4.3 Praktične primjene

Ovdje ćemo spomenuti praktične primjene[4].

Energija magnetskog polja u domeni Ω se računa pomoću slijedećeg izraza:

$$\varepsilon_M(\vec{V}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\vec{BS}(\vec{V})|^2 d\tau. \quad (19)$$

Energija magnetskog polja $\varepsilon_M(\vec{V})$ nije sačuvana u vremenu, ali ima važnu ulogu pri proučavanju magnetskim relaksacijama u kojima imamo početni oblik, magnetsko polje i helicitet, zatim nakon evolucije u vremenu dobivamo oblik u kojem vlastita polja Biot-Savartovog operatora, koja odgovaraju njegovim ekstremnim svojstvenim vrijednostima, postaju vektorska polja u Ω s minimalnom energijom za dani helicitet. Primjer za magnetsku relaksaciju je dana na Slici 11. Općenito se može pokazati slijedeća veza između $\varepsilon_M(\vec{V})$ i $H(\vec{V})$:

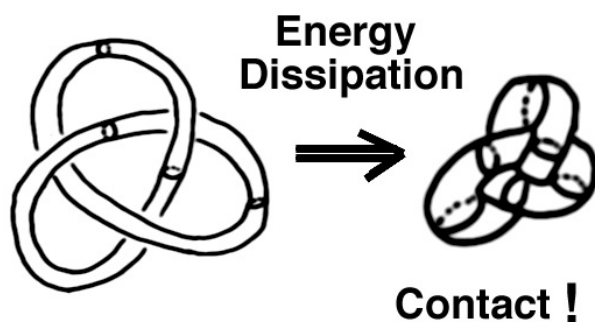
$$\varepsilon_M(\vec{V}) \geq \alpha |H(\vec{V})|, \quad (20)$$

gdje je $\alpha \neq 0$ konstanta koja ne ovisi o magnetskom polju. Ako gledamo fluidne čvorove K tada su volumen i tok Φ sačuvani u vremenu i možemo pisati drugi način definiranja heliciteta (za jedno polje):

$$H(\vec{V}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \Phi_i^2 SL_i, \quad (21)$$

gdje je SL (self-linking number) je broj koji predstavlja koliko je polje zapetljano samim sa sobom. Ako ima više polja tada se pojavljuje dodatni član koja opisuje međusobno uvijanje polja i SL nema više jednostavnu interpretaciju. Primjer takve definicije heliciteta je dano na Slici 4, gdje ima helicitet $H = \pm 3\Phi^2$.

Ako krenemo s poljem vektora \vec{V} koje je bez divergencije i tangentno s granicom svoje domene Ω , tj. fluidni čvor K , a zatim njezino magnetsko polje $\vec{BS}(\vec{V})$, iako bez divergencije, općenito neće biti tangentno s rubom $\partial\Omega$. U takvom slučaju, jednostavno modificiramo Biot-Savart operator $\vec{BS}(\vec{V})$ ortogonalnom projekcijom natrag u podprostor fluidnih čvorova K . Vlastita polja ovog modificiranog Biot-Savart operatora koji odgovaraju njegovim ekstremnim svojstvenim vrijednostima su fluidni čvorovi u Ω s minimumom energije za određen helicitet. Kada je domena Ω jednostavno povezana, ovaj model minimalne energije opisuje stabilnih polja plazme u Ω . Primjer takve primjene je prikazano na Slici 11.



Slika 11: Magnetska relaksacija magnetskog trolista. Imamo početni viskozni fluidni čvor koji je dan s početnom magnetskom energijom ε_M , oblikom, tokom Φ , volumenom T i helicitetom H . Zbog disipacije trenjem magnetska energija ε_M će se smanjiti s vremenom zbog čega će se magnetske strujnice približiti. Pošto je volumen sačuvan poprečni presjek će se povećati. S obzirom da su istovremeno su tok Φ i helicitet H sačuvani magnetske strunice će se dotaknuti i nastat će netrivialni oblik minimalne magnetske energije ε_M

5 Zaključak

Iskazali smo Hodgeov teorem i objasnili njegove dijelove i terminologiju. Onda smo teorem primjenili na općenita vektorska polja i dobili smo rezultate koji su jednostavniji od rezultata koje nam je dala samo vektorska analiza, kao što je pitanje je kako znamo jel je neko vektorsko polje rezultat gradijenta neke funkcije ili je rezultat rotacije nekog drugog vektorskog polja. Također smo primjenili Hodgeov teorem dekompozicije na Biot-Savartov operator i dobili smo rezultate koje potvrđuje i produbljuju shvaćanje o operatoru, što nam govori o korisnosti Hodgeovog teorema. Konačno, kao rezultat dekompozicije možemo proučavati magnetska polja i polja plazme koristeći svojstva iz teorije čvorova, ako ta polja pripadaju podprostoru fluidnih čvorova.

Literatura

- [1] J. Catarella, D. DeTurck, H. Gluck: Vector Calculus and the Topology of Domains in 3-Space, Am. Math. Monthly 109:5 (2002) 409–442.
- [2] J. Catarella, D. DeTurck, H. Gluck: The Biot-Savart operator for application to knot theory, fluid dynamics, and plasma physics, J. Math. Phys. 42 (2001) 876–905.
- [3] T. Frankel: The Geometry of Physics, poglavlje 13 i 14.
- [4] S. Lomonaco, The modern legacies of Thompson's atomic vortex theory in classical electrodynamics, AMS Proc.Symposia Applied Math. 51, 145–166 (1996).
- [5] D. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 2nd ed. Prentice–Hall, New Jersey, (1989), str 60.