Hopfova bifurkacija u Hamiltonovom formalizmu

Franka Prahin
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 14. listopada 2019.)

U ovom radu proučavat ćemo pojavu grana periodičkih orbita Hopfove bifurkacije u Hamiltonovom formalizmu u prisutstvu kompaktnih grupa simetrije koristeći diferencijalnu geometriju. Prije opisa same bifurkacije, uvest ćemo i objasniti matematičke pojmove nužne za bolje razumijevanje pojave iste. Teorijsko razmatranje ovog fenomena bit će na kraju popraćeno s nekoliko primjera.

I. UVOD

Hamiltonova formulacija klasične mehanike temelji se na konceptu energije, a ponašanje sustava opisano je rješenjima Hamiltonovih jednadžbi. Tu formulaciju napisat ćemo u jeziku diferencijalne geometrije i koristiti ju za opis Hopfove bifurkacije,
Hopfova bifurkacija je kritična točka u kojoj sustav gubi na stabilnosti i pojavi se periodičko rješenje. Preciznije, to je lokalna bifurkacija prilikom koje fiksna točka sustava izgubi stabilnost kada par kompleksnih svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravnini prijeđe imaginarnu os. Pod određenim pretpostavkama o dinamičkom sustavu, zatvorena putanja male amplitude u faznom prostoru počinje se granati iz položaja stabilne ravnoteže i dolazi do bifurkacije. Svrha ovog rada nije dokazivanje svih teorema koji će biti navedeni, već matematički opis pojave koju proučavamo, a na kraju ćemo dati konkretne primjere sustava u kojima se pojavljuje Hopfova bifurkacija.

II. SIMPLEKTIČKA GEOMETRIJA

Prije no što se počnemo baviti Hopfovom bifurkacijom, definirat ćemo pojmove iz diferencijalne geometrije[1] koji će se spominjati u cijelom radu. Osnovni pojam u diferencijalnoj geometriji je mnogostrukost koja ima ulogu faznog prostora na kojoj je definirano skalarno polje, odnosno hamiltonijan. Dinamika sustava opisana je krivuljama u faznom prostoru koje su rješenja Hamiltonovih jednadžbi gibanja.

Definicija 2.1. Simplektička mnogostrukost (M, ω_{ab}) je uređeni par glatke $2n$-mnogostrukosti M i nedegenerirane zatvorene 2-forme ω_{ab}. Ovu formu zovemo **simplektičkom formom.**

Pojasnimo malo pojam nedegeneriranosti naše 2-forme ω_{ab}. To po definiciji znači da je $i_X\omega|_p = 0$ za sve $p \in M$ samo ako je $X^a = 0$. Stoga je preslikavanje $\widehat{\omega} : T_pM \to T_p^*M$, definirano preko $\widehat{\omega}(X) = \omega(X, \cdot)$, izomorfizam vektorskih prostora.

Definicija 2.2. Simplektička forma Ω na vektorskom prostoru Z je nedegenerirana antisimetrična bilinearna forma, a (Z, Ω) čine **simplektički vektorski prostor.**

U nastavku navodimo teorem bez dokaza, koji će nam pomoći pri interpretaciji koordinata na promatranoj mnogostrukosti (iskaz i dokaz mogu se naći u literaturi[1]).

Teorem 2.3. (Darboux). Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost i $z \in M$. Tada postoji karta $(O_z, \{x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n\})$ na kojoj simplektička forma ω_{ab} poprima tzv. kanonski oblik

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dy^i \wedge dx^i. \tag{1}$$

Fazni prostor klasične mehanike je simplektička mnogostrukost, a koordinate iz gore navedenog teorema zovemo **kanonskim koordinatama** i označavamo ih s

$$\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}, \tag{2}$$

gdje su q^i generalizirane koordinate konfiguracijskog prostora, a p_i generalizirani impulsi.

Definicija 2.4. Neka su (M, ω_{ab}) i $(M'\omega'_{ab})$ simplektičke mnogostrukosti. Difeomorfizam $f : M \to M'$ zovemo **simplektomorfizam** ako je $f^*\omega' = \omega$.

Razlog zašto spominjemo definiciju simplektomorfizma je taj što su oni u kontekstu klasične mehanike kanonske transformacije.

Na simplektičkoj mnogostrukosti M svaka glatka funkcija $f \in C^\infty(M)$ inducira pripadno vektorsko polje definirano pomoću izomorfizma $\hat{\omega}$:

$$X_f = \widehat{\omega}^{-1}(-\,\mathrm{d}f), \tag{3}$$

gdje je negativan predznak uz d konvencija.

Ako integralnu krivulju X_f^a zadamo skupom funkcija $q^1(\lambda), \dots, q^n(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$, gdje je λ parametar, tada duž nje mora biti ispunjen sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dq^i}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}. \tag{4}$$

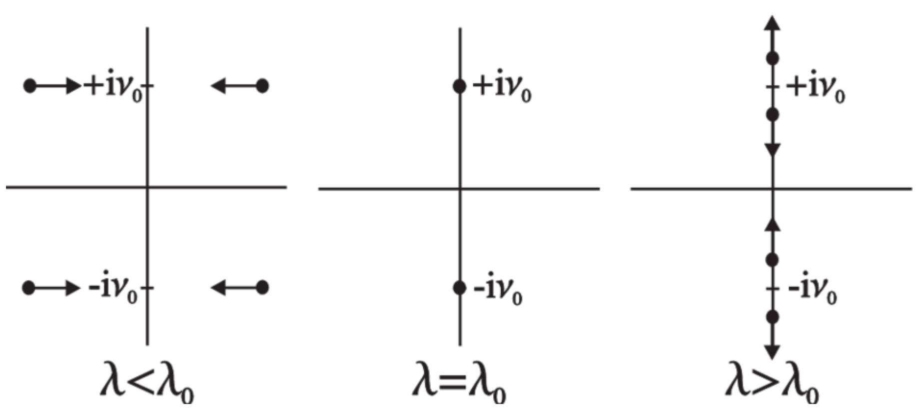
Definicija 2.5. Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost. Za vektorsko polje $X^a \in TM$ kažemo da je **hamiltonijansko** ili **simplektičko** ako vrijedi $\pounds_X \omega = 0$.

Teorem 2.6. Neka je (M, ω_{ab}) simplektička mnogostrukost. Tada je X^a lokalno hamiltonijansko vektorsko polje ako i samo ako postoji lokalno definirana funkcija f za koju je $X^a = X_f^a$. Za funkciju f kažemo da je generator 1-parametarske familije kanonskih transformacija.

Hamiltonijan $H : M \to \mathbb{R}$ je funkcija koja definira dinamiku fizikalnog sustava na način da integralne krivulje hamiltonijanskog vektorskog polja X_H predstavljaju vremensku evoluciju sustava. Parametar integralne krivulje označavamo s t i interpretiramo ga kao fizikalno vrijeme. Jednadžbe (4) postaju **Hamiltonove jednadžbe:**

$$\dot{q^i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{5}$$

Neka je (V, ω) simplektički vektorski prostor i G kompaktna Liejeva grupa na V. Nadalje, neka je $h_\lambda \in \mathbb{R}$ 1-parametarska familija G-invarijantnih hamiltonijana takvih da za svaku vrijednost parametra λ, ishodište bude ravnotežni položaj pridruženog hamiltonijanskog vektorskog polja, odnosno, $\mathrm{d}h_\lambda(0) = 0$, za proizvoljni parametar λ. Proučavat ćemo nelinearne implikacije sljedećeg ponašanja: pretpostavimo da postoji λ_0 i svojstvene vrijednosti $\pm i\nu_0$ u spektru linearizacije dinamike inducirane hamiltonijanskim vektorskim poljem $X_{h_{\lambda_0}}$ oko nule koje se ponašaju kao na slici kada parametar λ pomičemo oko λ_0[2]. Takvo ponašanje zove se Hopfova bifurkacija koju ćemo opisati pomoću hamiltonijana i bit će glavni predmet proučavanja u ovom radu.



Slika 1. Ponašanje svojstvenih vrijednosti u Hopfovoj bifurkaciji.

Prirodni dinamički elementi koji se pojavljuju u proučavanju kontinuirane grupe simetrije G su tzv. **položaji ravnoteže** i **periodičke orbite**.

III. POSTAVLJANJE PROBLEMA

Većina naših razmatranja bit će smještena u konačno dimenzionalnom simplektičkom vektorskom prostoru (V, ω). Zanimat će nas 1-parametarska familija G-ekvivarijantnih hamiltonijana $h_\lambda \in C^\infty(V)^G$ takvih da zadovoljavaju 4 hipoteze koje ćemo navesti kasnije. Prije toga valja objasniti i definirati još neke pojmove.

Definicija 3.1. Neka su M i N dvije mnogostrukosti i G Liejeva grupa koja djeluje na M kao $\Phi_g : M \to M$ i na N kao $\Phi_g : N \to N$. Glatko preslikavanje $f : M \to N$ je **ekvivarijantno** u odnosu na ova djelovanja ako za svaki $g \in G$ vrijedi

$$f \circ \Phi_g = \Phi_g \circ f, \tag{6}$$

odnosno, ako dijagram na slici 2 komutira.[2]

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_g"'] & N \arrow[d, "\Psi_g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Slika 2. Komutativni dijagram za ekvivarijantnost.

Neformalno rečeno, preslikavanje između dva prostora je ekvivarijantno kada "poštuje" grupna djelovanja na tim prostorima. Ekvivarijantnost je vrsta simetrije za funkcije koje idu iz jednog prostora simetrije u drugi. Nadalje, kažemo da je funkcija ekvivarijantno preslikavanje kada na njenu domenu i kodomenu djelujemo istom grupom simetrije i kada funkcija komutira s djelovanjem grupe. Dakle, primjena neke simetrične transformacije prije računanja funkcije davat će isti rezultat ako prvo izračunamo funkciju, a zatim na nju djelujemo transformacijom simetrije.
Primjerice, preslikavanje identitete $i : X \to X$ je uvijek ekvivarijantno, a fizikalan primjer bi bilo impulsno preslikavanje angularnog momenta.

Definicija 3.2. (Rezonantni prostor.)
Neka je (V, ω) simplektički vektorski prostor i neka je $A : V \to V$ infinitezimalno simplektičko linearno preslikavanje, to jest, linearno hamiltonijansko vektorsko polje na (V, ω). Odgovarajuća hamiltonijanska funkcija je dana s:

$$Q_A := \frac{1}{2}\omega(Av, v), \tag{7}$$

za svaki $v \in V$. Budući da je A element iz simplektičke Liejeve algebre $\mathfrak{sp}(V)$, možemo primjeniti Jordanovu dekompoziciju operatora A na poluprosti i nilpotentni dio, $A = A_S + A_N$, te vrijedi $[A_S, A_N] = 0$. Ako je ν_0 svojstvena vrijednost od A i period $T_{\nu_0} := \frac{2\pi}{\nu_0}$, definiramo rezonantni prostor U_{ν_0} od A s primitivnim periodom T_{ν_0} kao: $U_{\nu_0} := \ker(e^{A_S T_{\nu_0}} - I)$.

Rezonantni prostor ima sljedeća svojstva:

1. U_{ν_0} jednak je direktnoj sumi svojstvenih potprostora od A koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\pm ik\nu_0$, $k \in \mathbb{N}^*$.
2. $(U_{\nu_0}, \omega|_{U_{\nu_0}})$ je simplektički potprostor od (V, ω).
3. Preslikavanje $\theta \in S^1 \mapsto e^{\frac{\theta}{\nu_0} A_S}|_{U_{\nu_0}}$ generira simplektičko S^1-linearno djelovanje na $(U_{\nu_0}, \omega|_{U\nu_0})$, čije pridruženo ekvivarijantno impulsno preslikavanje označavamo s $\mathbf{J}$: $U_{\nu_0} \to Lie(S^1)^* \simeq \mathbb{R}$.
4. Rezonantni podprostor $(U_{\nu_0}, \omega|_{U_{\nu_0}})$ je G-invarijantan.

Definicija 3.3. (Redukcija normalne forme)
Neka je (V,ω,h_λ) λ-parametarska familija ($\lambda \in \Lambda$, Λ je Banachov prostor) G-hamiltonijanskih sustava takvih da je $h_{\lambda_0}(0)=0$, $dh_{\lambda_0}(0)=0$, i G-ekvivarijantno infinitezimalno simplektičko preslikavanje $A := DX_{h_{\lambda_0}}(0)$ nije singularno (D je ovdje derivacija), te su $\pm i\nu_0$ svojstvene vrijednosti operatora A. Nadalje, neka je $(U_{\nu_0},\omega|_{U_{\nu_0}})$ rezonantni prostor od A s primitivnim periodom T_{ν_0}. Za svaki $k \geq 0$ postoje C^k preslikavanja $\psi : U_{\nu_0} \times \Lambda \to V$ i C^{k+1} preslikavanja $\widehat{h_\lambda} : U_{\nu_0}\times\Lambda \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $\psi(0,\lambda)$=0 za svaki $\lambda \in \Lambda$, $D_{U_{\nu_0}}\psi(0,\lambda)$=$\mathbb{I}_{U_{\nu_0}}$, te je $\widehat{h_\lambda}$ $G\times S^1$ invarijantna funkcija.

Normalizacija nam je zanimljiva jer ako ostanemo dovoljno blizu nuli na U_{ν_0} i $\lambda_0 \in \Lambda$, tada su S^1-položaji ravnoteže $G \times S^1$-invarijantnog hamiltonijana $\widehat{h_\lambda}$ preslikani pomoću funkcije $\psi(\cdot,\lambda)$ u skup periodičkih rješenja od (V,ω,h_λ) u okolinu $0 \in V$ s periodima bliskim T_{ν_0}. U narednim diskusijama, problem traženja periodičkih orbita za (V,ω,h_λ) ćemo zamijeniti traženjem S^1 položaja ravnoteže $G\times S^1$-invarijantne familije hamiltonijanskih sustava $(U_{\nu_0},\omega|_{U_{\nu_0}},\widehat{h_\lambda})$ koje ćemo zvati **ekvivalentnim sustavom.** Svojstva preslikavanja ψ impliciraju sljedeće:

$$\mathcal{A} := A|_{U_{\nu_0}} = D_V X_{h_{\lambda_0}}(0)|_{U_{\nu_0}} = D_V X_{h_{\lambda_0}|_{U_{\nu_0}}}(0) = D_V X_{\widehat{h_{\lambda_0}}}(0). \tag{8}$$

III.1. Generička struktura rezonantnog prostora U_{ν_0} i kanonska forma simplektičkog para $(\omega|_{U_{\nu_0}},\mathcal{A})$

Zbog svega navedenog, možemo zaključiti da je rezonantni prostor U_{ν_0} $G \times S^1$-simplektički vektorski prostor, te ga možemo podijeliti na direktnu sumu dva $G \times S^1$-invarijantna potprostora: $U_{\nu_0} = V_0 \oplus V_1$. Baza vektorskog prostora u kojoj su sadržani matrični izrazi istovremeno za $\omega|_{U_{\nu_0}}$ i $\mathcal{A}$ je:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \nu_0\mathbb{J}_{2n} & \mathbb{I}_{2n} \\ 0 & \nu_0\mathbb{J}_{2n} \end{pmatrix}, \quad \omega|_{U_{\nu_0}} = \mathbb{J}_{4n} \tag{9}$$

gdje je $\mathbb{I}_{2n}$ $2n$-dimenzionalna jedinična matrica, a $\mathbb{J}_{2n}$ je definirana kao:

$$\mathbb{J}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

III.2. Položaji ravnoteže i kritične točke

Kao što smo operator A rastavili na poluprost i nilpotentan dio, analogno možemo rastaviti i $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_S + \mathcal{A}_N$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{sp}_G(U_{\nu_0})$. Definiramo ekvivarijantno impulsno preslikavanje $\mathbf{J}$:$U_{\nu_0} \to Lie(S^1)^* \simeq \mathbb{R}$ pridruženo simplektičkom S^1-linearnom djelovanju dano s: $(\theta,v) \mapsto e^{\frac{\theta}{\nu_0}\mathfrak{A}_S}v$, $\theta \in S^1, v \in U_{\nu_0}$. Za svaki $\xi \in Lie(S^1) \simeq \mathbb{R}$ i svaki $v \in U_{\nu_0}$ pišemo: $\mathbf{J}^\xi(v) := \mathbf{J}(v)\xi$. Linearnost djelovanja implicira da za svaki $\xi \in Lie(S^1) \simeq \mathbb{R}$ i svaki $v \in U_{\nu_0}$, impulsno preslikavanje je jedinstveno određeno izrazom:

$$\mathbf{J}^\xi(v) = \frac{1}{2}\omega|_{U_{\nu_0}}(\xi\cdot v,v), \tag{11}$$

gdje točka označava pridruženu reprezentaciju Liejeve algebre Lie(S^1) na U_{ν_0} preko S^1-djelovanja. Jednadžbu (9) onda možemo preciznije napisati kao:

$$\mathbf{J}(v) = \frac{1}{2\nu_0}\omega|_{U_{\nu_0}}(A_S v,v), \tag{12}$$

što nas navodi na jednakost $d^2\mathbf{J}(v,w) = \omega|_{U_{\nu_0}}(A_S v,w)$ za svaki $v,w \in U_{\nu_0}$. Tada baza u izrazu (9) poprima sljedeći oblik:

$$d^2\mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{J}_{2n} \\ -\mathbb{J}_{2n} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Zanimljivo svojstvo Hamiltonovog formalizma je to što se traženje položaja ravnoteže svodi na određivanje kritičnih točaka tzv. proširenog hamiltonijana. U našem slučaju to znači da ekvivalentni sustav $(U_{\nu_0}, \omega|_{U_{\nu_0}}, \widehat{h_\lambda})$ ima S^1 položaj ravnoteže u $v \in U_{\nu_0}$ (prisjetimo se da to predstavlja periodičku orbitu originalnog sustava (V, ω, h_λ) s periodom bliskim T_{ν_0}) ako i samo ako postoji $\xi \in Lie(S^1)$ za koji vrijedi $d(\widehat{h_\lambda} - \mathbf{J}^\xi)(v) = 0$. Jednom kad smo našli par (v, ξ) koji zadovoljava navedenu jednakost, reći ćemo da je v položaj ravnoteže s brzinom ξ.

Sada kada imamo sve što nam treba, možemo navesti 4 hipoteze spomenute na početku poglavlja:

(H1) $h_\lambda(0) = 0$ i $\mathrm{d}h_\lambda(0) = 0$ za svaki λ.

(H2) Postoji vrijednost λ_0 parametra λ za koju preslikavanje $A_{\lambda_0} := D_V X_{h_{\lambda_0}}(0)$ nije singularno i ima vrijednosti $\pm i\nu_0$ u svom spektru ($\nu \neq 0$).

(H3) Rezonantni prostor U_{ν_0} možemo prikazati kao direktnu sumu dva potprostora.

(H4) Jednoparametarska familija G-hamiltonijanskih sustava (V, ω, h_λ) zadovoljava da je $\sigma'(\lambda_0) \neq 0$, gdje je $\sigma(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R})$ glatka realna funkcija.

Zadnja hipoteza je više tehničke prirode, ali nam je korisna jer pomoću nje možemo pokazati da funkcija kojom opisujemo ponašanje parametra λ mijenja predznak kada je $\lambda = \lambda_0$.[3]

IV. HOPFOVA BIFURKACIJA U HAMILTONOVOM FORMALIZMU I PERIODIČKE ORBITE

U primjerima simetričnih familija hamiltonijanskih sustava vrlo često susrećemo da kanonska grupa simetrije G sadrži neprekidnu globalnu hamiltonijansku simetriju.
Pretpostavimo da G sadrži Liejevu podgrupu H. Kažemo da je kanonsko djelovanje podgrupe H na V globalno hamiltonijansko kada joj možemo pridružiti ekvivarijantno impulsno preslikavanje $\mathbf{K} : V \to \mathfrak{h}^*$ čije su komponente $\mathbf{K}^\xi := \langle \mathbf{K}, \xi \rangle \in C^\infty$, $\xi \in \mathfrak{h}$, infinitezimalni generatori djelovanja:

$$\xi_V(v) = \frac{d}{dt} e^{t\xi \cdot v}. \tag{14}$$

Definicija 4.1. Neka je (V, ω, h) hamiltonijanski sustav sa simetrijom danom preko kanonskog djelovanja Liejeve grupe H na V. Točka $v \in V$ zove se **periodička točka** ako postoji $\tau > 0$ i $g \in H$ takvi da $F_{t+\tau}(v) = g \cdot F_t(v)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, gdje je F_t tok hamiltonijanskog vektorskog polja X_h. Skup $\gamma(v) := F_t|t > 0$ zove se **periodička orbita** kroz točku v. Konstanta $\tau > 0$ naziva se period, a grupni element $g \in H$ je fazni pomak.

IV.1. Jednadžba bifurkacija

Prije nego što napišemo samu jednadžbu bifurkacija, iskazat ćemo sljedeći teorem i napisati samo najbitnije informacije iz dokaza. Potpuni iskaz i dokaz narednog teorema može se naći u literaturi[3].

Teorem 4.2. Neka je (V, ω, h_λ) jednoparametarska familija G-hamiltonijanskih sustava koja zadovoljava **(H1)-(H4)**. Pretpostavimo da G sadrži podgrupu H kojoj je pridruženo ekvivarijantno impulsno preslikavanje $\mathbf{K}$:$V \to \mathfrak{h}^*$. Nadalje, neka je U_{ν_0} rezonantni prostor s primitivnim periodom T_{ν_0}. Tada za svaki $\xi \in \mathfrak{h}$ dovoljno male norme $\| \xi \|$ postoji barem onoliko periodičkih orbita koliko ima ravnotežnih položaja $G^\xi \times S^1$ ekvivarijantnog vektorskog polja definiranog na jediničnoj sferi na V_0.

Važnost navedenog teorema je u tome što nam broj ravnotežnih položaja može dati neku procjenu koliko bi se periodičkih putanja moglo naći u sustavu koji promatramo, što se ponekad može izračunati koristeći topološke strukture.

Skica dokaza: Sjetimo se baze rezonantnog prostora U_{ν_0} koristeći matrični izraz (9) koji je konzistentan s rastavom $U_{\nu_0} = V_0 \oplus V_1$. Dokaz započinjemo definirajući $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}$-parametarsku familiju hamiltonijanskih funkcija danih s $h_{\lambda,\xi} = h_\lambda - \mathbf{K}^\xi$. Periodičke orbite koje tražimo možemo dobiti pomoću kritičnih točaka funkcije $\widehat{h_\lambda} - \mathbf{K}^\xi - \mathbf{J}^{\zeta+\alpha}$, odnosno elemenata $(v, \alpha, \lambda, \xi) \in U_{\nu_0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{h}$ za koje funkcija

$$F^\zeta(v, \alpha, \lambda) := \nabla_{U_{\nu_0}} \left(\widehat{h_\lambda} - \mathbf{K}^\xi - \mathbf{J}^{\zeta+\alpha} \right)(v) \tag{15}$$

ima nultočke. Tu jednadžbu lineariziramo u točki $(0, 0, \lambda_0, 0)$ i nakon toga koristimo postupak Lyapunov-Schmidtove redukcije koji možemo provesti kada je u jednadžbi (15) zadovoljeno $\zeta = \nu_0$. Konačno, dobijemo *reduciranu jednadžbu bifurkacije:*

$$B(v_0, \alpha, \lambda, \xi) = \nabla_{U_{\nu_0}} \left(\widehat{h_\lambda} - \mathbf{K}^\xi - \mathbf{J}^{\nu_0+\alpha} \right)(v_0 + v_1(v_0, \alpha, \lambda, \xi)) \tag{16}$$

gdje je v_1 funkcija: $v_1 : V_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{h} \to V_1$, i $v_0 \in V_0$.

IV.2. Bifurkacija neperiodičkih orbita

Alati iz Teorema 4.2. korisni su nam za traženje periodičkih orbita, no za neperiodičke orbite koristit ćemo analitički pristup. Motivacija za to nam je primjer vezanog harmoničkog oscilatora u magnetskom polju koji ćemo sada analizirati.

Promatramo sustav dvije identične čestice jediničnog naboja u ravnini koje su podvrgnute identičnim harmoničkim silama te je homogeno magnetsko polje okomito na smjer ravnine gibanja. Označimo s (q_1, q_2) , (q_3, q_4) koordinate konfiguracijskog prostora prve i druge čestice respektivno, te s γ konstantu koja određuje intenzitet magnetskog polja. Hamiltonijan našeg sustava je:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2)+\left(\frac{\gamma^2}{2m} - \frac{k}{2}\right)(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)+\frac{\gamma}{m}(p_1q_2-p_2q_1)+\frac{\gamma}{m}(p_3q_4-p_4q_3)+f(\pi_1^i, \pi_2^i, \pi_3^i, \pi_4^i) \tag{17}$$

gdje su

$$\pi_1^i = q_i^2 + q_{i+2}^2, \quad \pi_2^i = p_i^2 + p_{i+2}^2, \quad \pi_3^i = p_i q_{i+2} - p_{i+2} q_i, \quad \pi_4^i = q_i p_i + q_{i+2} p_{i+2}, \quad i \in \{1, 2\} \tag{18}$$

a f je funkcija višeg reda u svojim varijablama koja opisuje nelinearnu interakciju između dvije čestice.
Ovaj sustav ima ravnotežni položaj u točki $(q_q, q_3, q_2, q_4, p_1, p_3, p_2, p_4) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ za sve vrijednosti parametara γ i k. Linearizacija jednadžbe gibanja u toj točki dana je matricom

$$\mathcal{A}_k = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{m}\mathbb{J}_4 & \frac{1}{m}\mathbb{I}_4 \\ \left(k - \frac{\gamma^2}{m}\right)\mathbb{I}_4 & -\frac{\gamma}{m}\mathbb{J}_4 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

čije su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_k = \pm\frac{1}{m}\sqrt{km - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - km}}. \tag{20}$$

Ako pomičemo parametar k u blizini $k_0 = \gamma^2/m$, tada ove svojstvene vrijednosti predstavljaju Hopfovu bifurkaciju prikazanu na slici 1. Kada bismo promatrali ovaj eksperiment, ono što bismo vidjeli prilikom bifurkacije je kako se čestice počinju gibati po orbitama.

V. OSTALI PRIMJERI HOPFOVE BIFURKACIJE

Za kraj ćemo spomenuti još nekoliko zanimljivih primjera i modela u kojima dolazi do pojave Hopfove bifurkacije.

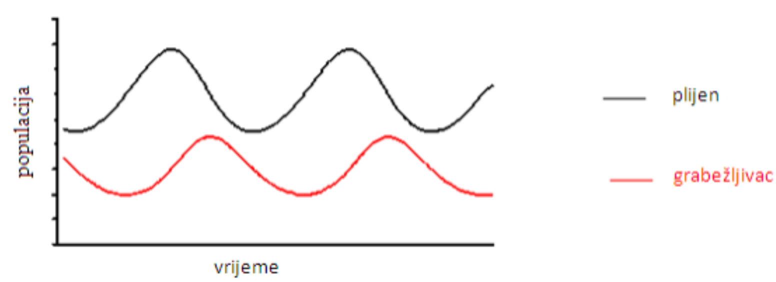
V.1. Lotka-Volterra jednadžbe

Lotka-Volterra jednadžbe su par nelinearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, a koriste se za opis dinamike ekološkog sustava u kojem interagiraju dvije vrste: grabežljivac i plijen. Promjena populacija grabežljivaca i plijena dana je sustavom jednadžbi:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y \tag{21}$$

gdje je x broj plijena, y broj grabežljivaca, a $\alpha, \beta, \gamma i \delta$ su parametri koji opisuju interakciju dvije vrste.

Navedene jednadžbe imaju periodička rješenja, ali se ona ne mogu zapisati pomoću standardnih trigonometrijskih funkcija, a linearizacija jednadžbi vodi na rješenje slično jednostavnom harmoničkom gibanju, što je prikazano na slici 3.
Fizikalno značenje krije se u tome što su rješenja deterministička i kontinuirana. To implicira da se generacije obje vrste kontinuirano preklapaju, odnosno uvijek koegzistiraju.

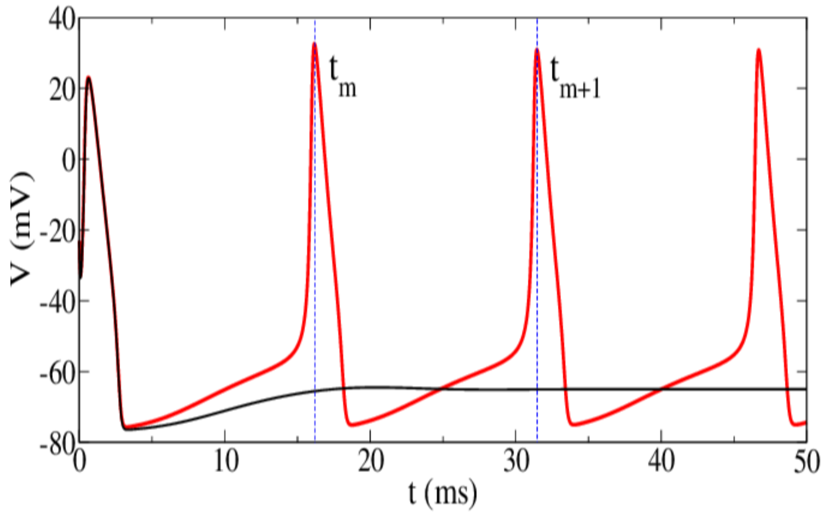


Slika 3. Promjena populacija grabežljivca i plijena u vremenu.

Modificirajući Lotka-Volterra jednadžbe, dobivamo fenomen pod nazivom *paradoks obogaćenja* u kojem dolazi do bifurkacije. Uvodimo parametar K koji označava tzv. nosivi kapacitet plijena (maksimalna veličina populacije neke vrste koju okološ može održati). Kada parametar K dosegne kritičnu vrijednost, dolazi do Hopfove bifurkacije. Dakle, povećavanje nosivog kapaciteta plijena nakon određene vrijednosti dovodi do neravnoteže i izumiranja grabežljivca, što se čini kontraintuitivno i paradoksalno.

V.2. Hodgkin-Huxley model

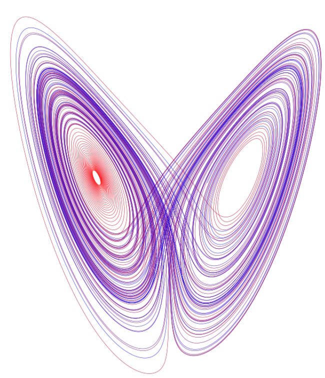
Hodgkin-Huxley model opisuje kako nastaju impulsi u neuronima i kako se propagiraju. Matematički, to je skup nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koje aproksimiraju električna svojstva stanica koje se mogu pobuditi, kao što su neuroni. Ako uzmemo struju I (koja šalje signale od jednog neurona do drugog) kao bifurkacijski parametar, tada dolazi do Hopfove bifurkacije. Povećanje struje povećat će i brzinu slanja signala neurona. Posljedica pojave Hopfove bifurkacije leži u tome što postoji minimalna brzina kojom neuron može poslati signal. To znači da se signal uopće šalje, ili se šalje minimalnom brzinom. Zbog tog "sve ili ništa" principa, nema glatke promjene u amplitudi napona, nego dolazi do naglog skoka, što je prikazano na slici ispod.



Slika 4. Amplituda napona u ovisnosti o vremenu u Hodgkin-Huxley modelu.

V.3. Lorenzov sustav

Lorenzov sustav je sustav običnih diferencijalnih jednadžbi poznat po tome što ima kaotična rješenja za određene vrijednosti parametara i početne uvjete. Skup kaotičnih rješenja jednadžbi Lorenzovog sustava naziva se *Lorenzov atraktor*, koji je u popularnoj znanosti poznat pod imenom "leptirov učinak" (*eng. butterfly effect*). Svojevrsno opravdanje tog znanstveno-popularnog naziva za Lorenzov atraktor je to što odsutstvo savršenog znanja početnih uvjeta sustava, pa čak i najmanja smetnja u zraku uzrokovana leptirovim letom, povlači da ne možemo precizno predvidjeti kako će se sustav ponašati kasnije u vremenu. Ova tvrdnja naglašava da fizikalni sustavi mogu biti potpuno deterministički i istovremeno nepredvidivi u odsudstvu kvantnih efekata. Također, ako grafički prikažemo rješenja jednadžbi Lorenzovog sustava, možemo primjetiti da ima leptiroliki oblik.



Slika 5. Lorenzov atraktor.

Osim u teoriji kaosa, Lorenzove jednadžbe pojavljuju se i u pojednostavljenim modelima lasera, dinama, električnim krugova, kemijskim reakcijama itd. Valja napomenuti da je Lorenzov atraktor teško analizirati, što dokazuje i činjenica da se nalazi na popisu Smaleovih problema. Problem je riješio matematičar Warwick Tucker 2002. godine za što je dobio R. E. Mooreovu nagradu.

VI. ZAKLJUČAK

U ovom radu dali smo matematički opis Hopfovoj bifurkaciji pomoću diferencijalne geometrije te objasnili što se fizikalno događa u sustavu pojavom iste. Posebnost ove bifurkacije je u tome što se pojavljuje u mnogim granama znanosti, kao što je matematička biologija, biologija stanica, dinamika fluida, kemija itd., a jako je važna i u proučavanju oscilacija. Ukratko, Hopfova bifurkacija važan je čimbenik kod proučavanja dinamičkih sustava i postoje brojni radovi koji ju opisuju upravo zbog njene široke primjene u istraživanjima i znanosti.

[1] I. Smolić: "Diferencijalna geometrija u fizici" - Sveučilište u Zagrebu 2019.
[2] Marsden, Ratiu: "Introduction to Mechanics and Symmetry"
[3] P. Chossat, J.P. Ortega, T.S. Ratiu: "Hamiltonian Hopf bifurcation with symmetry" - 2000.