

Geodezici Kerrove crne rupe i Carterova konstanta

Ante Ravlić, F-4310

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb

10. rujna 2018.

Sažetak

U ovom radu izvodimo jednadžbe gibanja u Kerrovoj metrici. Pokazuje se da postoji još jedna "skrivena" konstanta gibanja te da je sustav u potpunosti integrabilan. Zatim proučavamo karakteristike periodičkih geodezika u ekvatorijalnoj ravnini. Razvijamo osnovnu nomenklaturu kojom jednoznačno možemo opisati svaku periodičku orbitu. Generalizacija na 3D slučaj i dalje slijedi istu nomenklaturu uz određene redefinicije parametara. Razumijevanje periodičkih orbita čini temelj proučavanja geodezika u Kerrovoj metrici.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Izvod jednadžbi gibanja	4
3	Geodezici	8
3.1	Uvod u nomenklaturu	9
3.2	Energijski dijagram	12
3.3	Usporedba periodičkih i aperiodičkih rješenja	14
3.4	3D slučaj	15
4	Zaključak	17
A	Kako nacrtati orbite	18
B	Ergosfera i povlačenje referentnih sustava	19

1 Uvod

Kerrova rješenja Einsteinovih i Einstein-Maxwellovih jednadžbi predstavljaju najopćenitiju klasu rješenja koja opisuju polje neutralnog ili električki nabitog rotirajućeg tijela u asimptotski ravnom prostorvremenu.¹ Kako bi pronašli metriku rotirajuće crne rupe tražimo aksijalno simetrična rješenja oko osi rotacije koja je stacionarna (a time i Killingov vektor). Kerrova metrika u Boyer-Lindquistovim koordinatama i jedinicama ($G = c = 1$, te $M = \mu = 1$ ²) je dana s[1, 2, 3, 4]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4arsin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2\theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right) d\phi^2, \quad (1)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2\theta, \\ \Delta &= r^2 - 2r + a^2. \end{aligned}$$

Da nismo koristili parametrizaciju u kojoj je $M = 1$, mogli bismo se uvjeriti da M i a parametriziraju moguća rješenja, gdje je M Komarova energija [1], a a angularni moment po jediničnoj masi

$$a = \frac{J}{M}. \quad (2)$$

Metrika (1) se u slučaju kada $a \rightarrow 0$ reducira na Schwarzschildovu metriku, dok u $M \rightarrow 0$ i $J \rightarrow 0$ dobivamo ravno prostorvrijeme. Veza s Kartezijevim koordinatama je dana kao

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \cos\phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \sin\phi \\ z &= \sqrt{r^2 + a^2} \cos\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Zbog aksijalne simetrije i neovisnosti o vremenskim translacijama imamo dva Killingova vektora, $K = \partial_t$ i $R = \partial_\phi$. Može se pokazati da horizont događaja nalazimo pomoću uvjeta [1]

$$g^{rr} = 0. \quad (4)$$

¹asimptotski ravno prostorvrijeme je ono za koje buduća i prošla svjetlosna beskonačnost (future and past null-infinity (eng.)) te beskonačnost prostornog tipa (spacelike infinity (eng.)) imaju istu strukturu kao prostorvrijeme Minkowskog

² M je masa crne rupe, dok je μ reducirana masa

Budući da je $g^{rr} = \Delta/\Sigma^2$ i $\Sigma \geq 0$ imamo uvjet

$$\Delta = r^2 - 2r + a^2 = 0. \quad (5)$$

Postoje tri slučaja ovisno o predznaku a

- $a > 1 \rightarrow$ postoji goli singularitet
- $a = 1 \rightarrow$ ekstremalno rješenje
- $a < 1 \rightarrow$ fizikalno, rješenja su $r_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}$.

U posljednjem slučaju r_{\pm} predstavljaju horizonte događaja. Označimo Killingov vektor vremenske translacije s $K = \partial_t$, norma K^μ je dana s

$$K^\mu K_\mu = -\frac{1}{\Sigma^2}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta). \quad (6)$$

Točke u kojima je $K^\mu K_\mu = 0$ zovu se stacionarne granične plohe³ i zadane su jednažbom

$$(r - 1)^2 = 1 - a^2 \cos^2 \theta, \quad (7)$$

dok je vanjski horizont događaja

$$(r_+ - 1)^2 = 1 - a^2. \quad (8)$$

Područje između ovih dviju površina zove se ergosfera. Prikaz strukture horizonta za Kerrovo rješenje nalazi se na slici (1). Unutar ergosfere gibanje je ograničeno na smjer rotacije crne rupe (u ϕ smjeru). Točka $r = 0$ nije pravi singularitet zakrivljenosti već $\Sigma = 0$ (U toj točki invarijanta $R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu}$ divergira [1]). Budući da je $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ slijedi

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

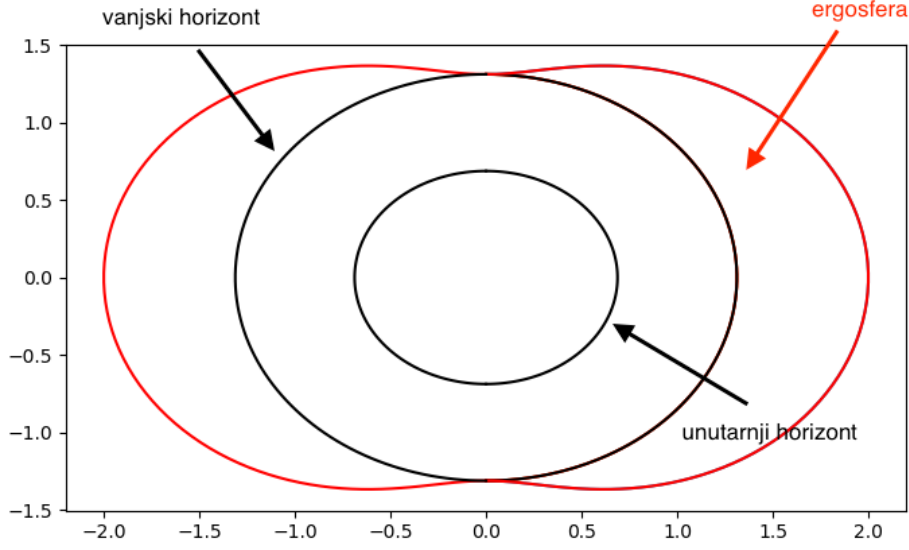
Skup točaka opisan s jednažbom (9) čini prsten. Kažemo da je rotacija *izgladila* Schwarzschildov singularitet u prsten.

2 Izvod jednažbi gibanja

U slučaju konzervativnih sustava za koje Hamiltonijan ne ovisi eksplicitno o vremenu, Hamilton-Jacobijeva jednažba koja definira funkciju izvodnicu $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ glasi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left[q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right] = 0. \quad (10)$$

³stationary limit surface (eng.)



Slika 1: Struktura horizonta Kerrovog rješenja. Područje između vanjskog horizonta i statičke granične plohe (crveno) se naziva ergosfera. Izabrali smo bočni pogled na crnu rupu.

Da bi jednađžba bila neovisna o vremenu rješenje mora izgledati kao

$$S = \alpha_1 + S_0(q_1, \dots, q_n, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (11)$$

HJ jednađžba za konzervativni sustav se svodi na

$$H \left[q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n} \right] = -\alpha_1, \quad (12)$$

gdje konstantu α_1 možemo identificirati s energijom

$$-\alpha_1 \equiv E. \quad (13)$$

Daljnju separaciju možemo provesti ako je ovisnost Hamiltonijana o koordinati q_1 sadržana u sklopu neke proizvoljne funkcije $f(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1})$. Tada HJ jednađžba postaje

$$H \left[f, \dots, q_n, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n} \right] = E. \quad (14)$$

Za problem kažemo da je potpuno separabilan ako postupak separacije možemo provesti za svaku varijablu. Rješenje HJ jednađžbe možemo zapisati u obliku

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = -E(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + \sum_j S_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (15)$$

U ovom radu pokazat ćemo da je problem gibanja u Kerrovoj metriki (1) potpuno separabilan, a time i integrabilan. Tri očite konstante gibanja su reducirana masa μ , energija E , te z-komponenta angularnog momenta L . Koristeći Carterov pristup [4] pronaći ćemo i četvrtu konstantu gibanja. Jednadžbe gibanja možemo izvesti počevši od Lagranžijana gibanja slobodne čestice

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (16)$$

gdje se derivacije odnose na afini parametar λ . Koristeći transformaciju $\tau = \mu\lambda$ dolazimo do uvjeta normalizacije

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\mu^2, \quad (17)$$

gdje se sada derivacije odnose na vlastito vrijeme τ . Za vremenolike geodezike $\mu^2 > 0$, dok za svjetlosne geodezike $\mu^2 = 0$. Može se pokazati da je Hamiltonijan dan s [2, 4]

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (18)$$

gdje je $p_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ generalizirani impuls. HJ jednadžba glasi

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = H \left[x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \right] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta}. \quad (19)$$

Komponente metrike u Boyer-Lindquistovim koordinatama su

$$\begin{aligned} g \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = & -\frac{1}{\Delta \Sigma} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial \phi} \right]^2 \\ & + \frac{1}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 + \frac{\Delta}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

HJ jednadžba sa raspisanim komponentama glasi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial \lambda} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \Sigma^2} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 \\ & + \frac{1}{2 \Sigma^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{\partial S}{\partial \phi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 + \frac{\Delta}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Koordinate t i ϕ su cikličke

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (22)$$

Uvrštavanjem gornjeg ansatza dolazimo do jednadžbi

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + a^2\mu^2 \cos^2 \theta + \left(aE \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta}\right)^2 \\ = -\Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + 2[(r^2 + a^2)E - aL_z] \frac{dS_r}{dr} - \mu^2 r^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Koristeći relacije $p_\theta = \partial S_\theta / \partial \theta$ i $p_r = \partial S_r / \partial r$ gornja jednadžba će biti ispunjena jedino ako

$$p_\theta^2 + \left(aE \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta}\right)^2 + a^2\mu^2 \cos^2 \theta = \mathcal{K}, \quad (24)$$

$$\Delta p_r^2 - 2[(r^2 + a^2)E - aL_z] p_r + \mu^2 r^2 = -\mathcal{K}, \quad (25)$$

gdje je \mathcal{K} konstanta. Jednadžbe (24) i (25) zajedno sa $p_t = -E$ i $p_\phi = L_z$ čine potpun skup konstanti gibanja. Koristeći oznake kao u [4] dolazimo do

$$\frac{dS_\theta}{d\theta} = \sqrt{\Theta}, \quad (26)$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \frac{1}{\Delta}(P + \sqrt{R}), \quad (27)$$

gdje smo definirali

$$\begin{aligned} \Theta &= Q - \cos^2 \theta [a^2(\mu^2 - E^2) + L_z^2 \sin^{-2} \theta], \\ P &= E(r^2 + a^2) - L_z a, \\ R &= P^2 - \Delta(\mu^2 r^2 + \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Definiramo novu konstantu gibanja $Q = \mathcal{K} - (L_z - aE)^2$ koja se zove *Carterova* konstanta. Ukupno rješenje za HJ akciju glasi

$$S = -\frac{1}{2}\mu^2 \lambda - Et + L_z \phi + \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta + \int^r \Delta^{-1} P dr + \int^r \Delta^{-1} \sqrt{R} dr. \quad (28)$$

Kako bi došli do jednadžbi geodezika koristimo činjenicu da su derivacije HJ akcije po konstantama gibanja i same konstante. Time dobivamo sljedeći sustav jednadžbi [4, 5]

$$\begin{aligned} \Sigma \dot{r} &= \pm \sqrt{R}, \\ \Sigma \dot{\theta} &= \pm \sqrt{\Theta}, \\ \Sigma \dot{\phi} &= -\left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{a}{\Delta} P, \\ \Sigma \dot{t} &= -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P. \end{aligned} \quad (29)$$

Sustav (29) iako izgleda relativno jednostavno, nećemo koristiti za numeričku integraciju kod crtanja geodezika. Zbog prisutnosti funkcije korijena imamo problem kod točaka obrata gdje R i Θ iščezavaju i derivacija mijenja predznak. Numerička greška se kod takvih točaka akumulira s vremenom. Pokazuje se da je bolje koristiti jednadžbe dobivene iz Hamiltonove formulacije. Koristeći jednadžbu (18) te Hamiltonove jednadžbe gibanja

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (30)$$

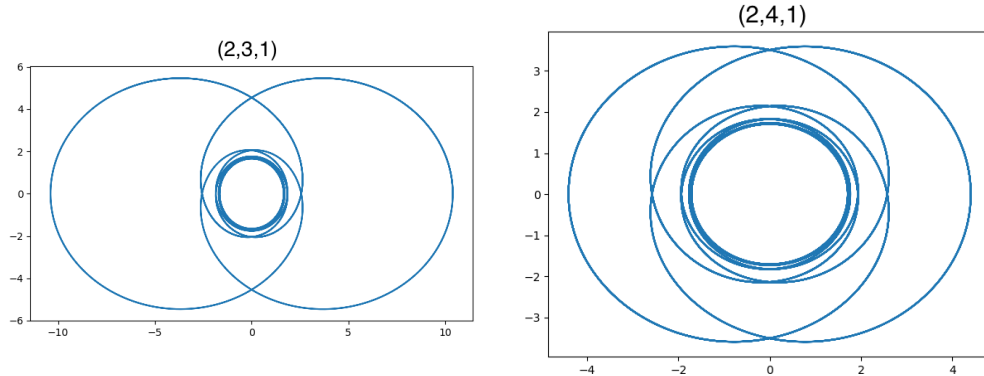
dolazimo do sustava [5]

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\Delta}{\Sigma} p_r, \\ \dot{p}_r &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{2\Sigma} \right) p_r^2 - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\Sigma} \right) p_\theta + \frac{d}{dr} \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\Sigma} p_\theta, \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\Delta}{2\Sigma} \right) p_r^2 - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2\Sigma} \right) p_\theta + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} \right), \\ \dot{t} &= \frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial E} (R + \Delta\Theta), \\ \dot{p}_t &= 0, \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial L} (R + \Delta\Theta), \\ \dot{p}_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Sustav koji smo dobili predstavlja sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda kod kojih nema problema sa korijenom kod točaka obrata, te njih koristimo kod numeričke integracije kako bi dobili izgled geodezika.

3 Geodezici

U ovom poglavlju fokusirat ćemo se na vremenolike geodezike, te koristimo $\mu = 1$. Svjetlosne geodezike fotona bismo dobili uvrštavanjem $\mu = 0$ u jednadžbe gibanja. Također umjesto L_z ćemo pisati samo L . Posebno ćemo razmotriti periodičke orbite oko crne rupe. Budući da sve ostale orbite možemo prikazati kao malene perturbacije periodičke orbite to će se pokazati dovoljnim za razumijevanje strukture putanja oko Kerrove crne rupe. Za početak se usmjeravamo na slučaj gibanja u ekvatorijalnoj ravnini, a zatim poopćavamo na 3D slučaj.



Slika 2: Primjer dvije $z = 2$ orbite. Jasno vidimo da obje orbite zatvaraju dva lista u ekvatorijalnoj ravnini. Parametri orbita su $a = 0.995$, lijevo: $L = 2$, $E = 0.918339$, desno: $L = 1.82$, $E = 0.839747$.

3.1 Uvod u nomenklaturu

U ovom potpoglavlju biramo $\theta = \pi/2$, odnosno slučaj ekvatorijalnih geodezika. Za opis orbita oko crnih rupa dovoljno je poznavati triplet cijelih brojeva (z, w, v) [5]. Cilj nam je uspostaviti vezu između dane periodičke orbite te brojeva (z, w, v) . Svaka orbita načini određen broj listova prije zatvaranja, taj broj označavamo sa z^4 . Na slici (2) nalazi se prikaz orbita za koje je $z = 2$.

No, određena orbita fiksiranog z broja može više puta okružiti oko središta, te općenito između dva uzastopna apastrona napraviti kut $2\pi w$, gdje je w^5 novi cijeli broj potreban za potpuni opis orbita. Primjer orbita sa $w = 3$ i $w = 4$ nalazi se na slici (3).

Potreban nam je još jedan cijeli broj kako bismo u potpunosti specificirali orbitu. On se odnosi na vrh poligona u smjeru kojeg se orbita namata. Vrhove poligona označavamo počevši od apastrona s oznakom $v = 0$ te povećavajući v^6 u smjeru u kojem se giba čestica. Primjer oznaka je dan na slici (4).

Dozvoljeni interval za varijablu v je

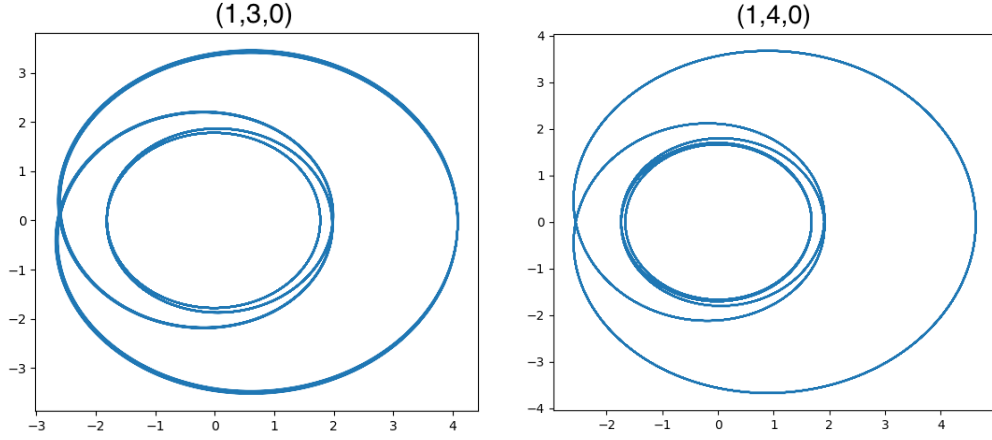
$$1 \leq v \leq z - 1, \quad (32)$$

budući da krećemo brojati od $v = 0$. Posebno treba paziti na $z = 1$ orbite

⁴zoom (eng.)

⁵whirl (eng.)

⁶vertex (eng.)



Slika 3: Parametri orbita su $a = 0.995$, $L = 1.82$, lijevo: $E = 0.833302$, desno: $E = 0.844241$. Orbita na desnoj slici prebriše kut za 2π više prije povratka u apastron u odnosu na onu na lijevoj slici.

jer za njih (32) ne vrijedi, stoga

$$\begin{aligned} 1 \leq v \leq z - 1, & \quad z > 1, \\ v = 0, & \quad z = 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Postoji još jedna degeneracija na koju moramo paziti, a to je da za dani w , (z, v) par može opisivati istu orbitu. To rješavamo uvjetom da su z i v relativno prosti. Dozvoljeni v tada zadovoljavaju

$$\begin{aligned} 1 \leq v \leq z - 1, & \quad z > 1, & \quad z \bmod v = 0, \\ v = 0, & \quad z = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

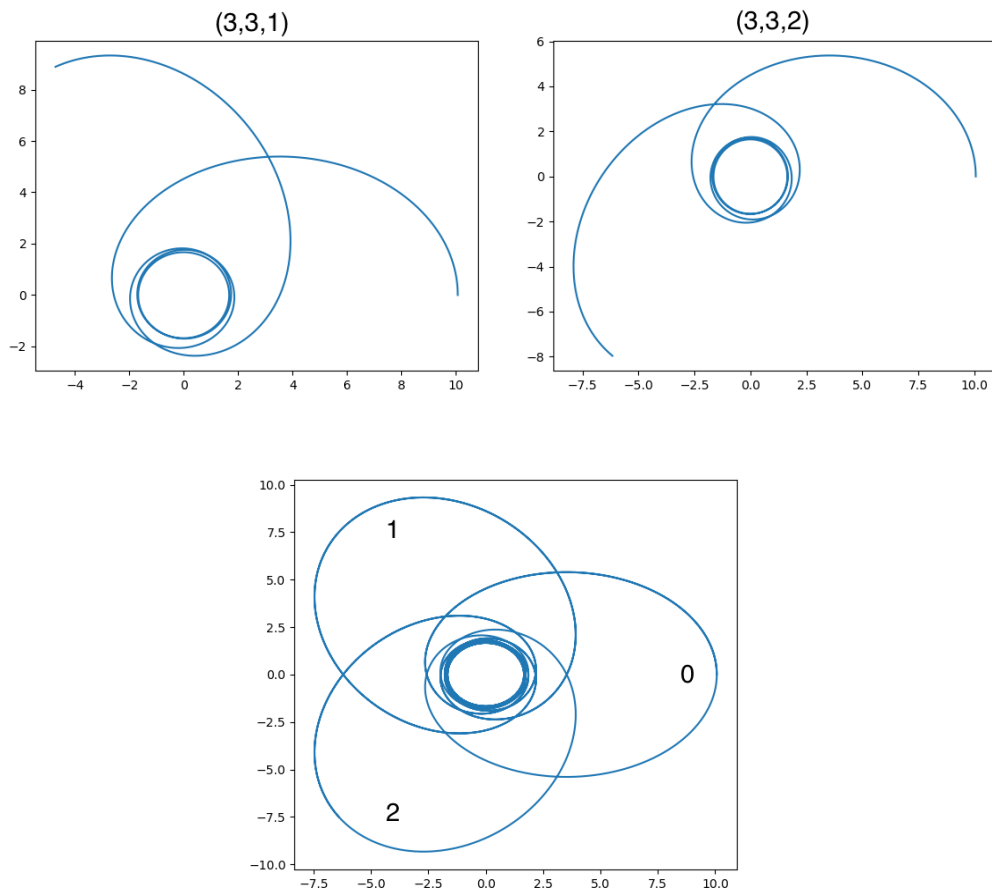
Postoji veza između (z, w, v) oznaka i racionalnih brojeva. Općenito možemo pisati

$$q = s + \frac{m}{n}, \quad (35)$$

gdje je $s \geq 0$ cijeli broj, te su m i n relativno prosti te zadovoljavaju $1 \leq m \leq n - 1$. To su isti uvjeti koje zadovoljavaju i (z, w, v) pa možemo pisati

$$q \equiv w + \frac{v}{z}, \quad (36)$$

za svaku periodičku orbitu. Broj q svojstven svakoj orbiti možemo definirati i pomoću tzv. fundamentalnih frekvencija. Definiramo $\omega_r = 2\pi/T_r$ gdje je T_r vrijeme potrebno čestici da prijeđe udaljenost između dva apastrona, te



Slika 4: Parametri orbita su $a = 0.995$, $L = 2$, lijevo: $E = 0.916235$, desno: $E = 0.920204$. Dolje: prikaz cijele orbite. U oba slučaja ona ima isti oblik, stvar je u različitoj orijentaciji namatanja. Brojevima 0,1,2 su označeni vrhovi pojedinih poligona.

$\omega_\phi = T_r^{-1} \int_0^{T_r} (d\phi/dt) dt$, što je prosječna frekvencija po radijalnoj oscilaciji. Vrijedi [6]

$$\frac{\omega_\phi}{\omega_r} = 1 + q. \quad (37)$$

Zanimljivo je da kod periodičkih orbita postoji diskretan spektar energija u ovisnosti o q za koje periodičke orbite mogu postojati. Općenito u Kerrovom slučaju možemo pronaći funkcionalnu ovisnost $q(a, E, L)$. Krenemo od definicije [6]

$$q = \frac{2}{2\pi} \int_{r_p}^{r_a} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr - 1, \quad (38)$$

gdje su r_a i r_p udaljenosti apastrona odnosno periastrona, te iskoristimo jednadžbe geodezika (29) kako bi dobili [6]

$$q = \frac{1}{\pi} \int_{r_p}^{r_a} \left(\frac{-(aE - L) + \frac{a}{\Delta} P}{\sqrt{R}} \right) dr - 1. \quad (39)$$

Gornji izraz za dani L i a možemo integrirati kako bismo dobili funkcionalnu ovisnost $q(E)$, no zbog singularnog ponašanja podintegralne funkcije numerička greška je velika. Može se pokazati da se integral (39) da zapisati u analitičkom obliku pomoću eliptičkih integrala [6].

3.2 Energijski dijagram

Općenito u slučaju Kerrove metrike gibanje testne čestice ne možemo izraziti kao gibanje u nekom efektivnom potencijalu (osim u slučaju $\theta = \pi/2$). Standardni zapis jednadžbe gibanja pomoću efektivnog potencijala je

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff} = E_{eff}, \quad (40)$$

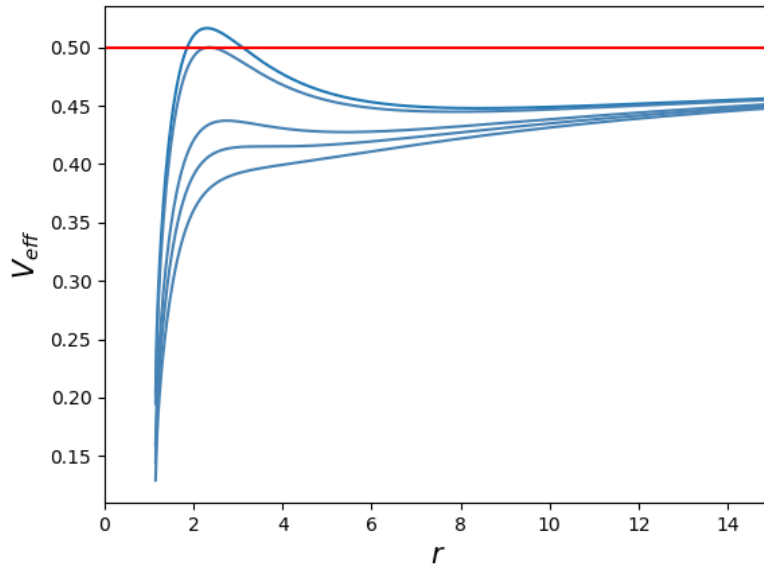
što vrijedi u slučaju Schwarzschildove metrike. No ukoliko promatramo ponašanje samo u točkama obrata možemo konstruirati pseudo-efektivni potencijal za kvalitativnu analizu orbita. Analogon jednadžbe (40) za slučaj crne rupe koja rotira (gdje se derivacija odnosi na afini parametar λ kako bi razvezali sustav polarnih i radijalnih jednadžbi) je

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{R}{2} = 0, \quad (41)$$

gdje je R od prije definirana radijalna funkcija. U ovom slučaju E ne možemo separirati na jednu stranu jednadžbe. No ako samo promatramo ponašanje u točkama obrata gdje vrijedi $\dot{r} = 0$, a time i $R(r) = 0$ možemo doći do rješenja za E . Za analitički izraz pogledati [3]. Tada pseudo-efektivni potencijal definiramo kao

$$V_{eff} \big|_{\dot{r}=0} = \frac{E^2}{2}. \quad (42)$$

Ovo nam dozvoljava da prikazemo točke fiksne energije te identificiramo točke obrata. Primjer grafa pseudo-potencijala za različiti angularni moment L se nalazi na slici (5). Crvenom linijom na (5) je označena najdublja vezana sferična orbita (ibso)⁷, radi se o nestabilnoj kritičnoj orbiti sa $E = 1$. Najdublja stabilna sferična orbita (isso)⁸ se karakterizira kao sedlasta točka V_{eff} kada dovoljno spustimo angularni moment na L_{isso} . Kada je $L < L_{isso}$ orbite padaju u crnu rupu.



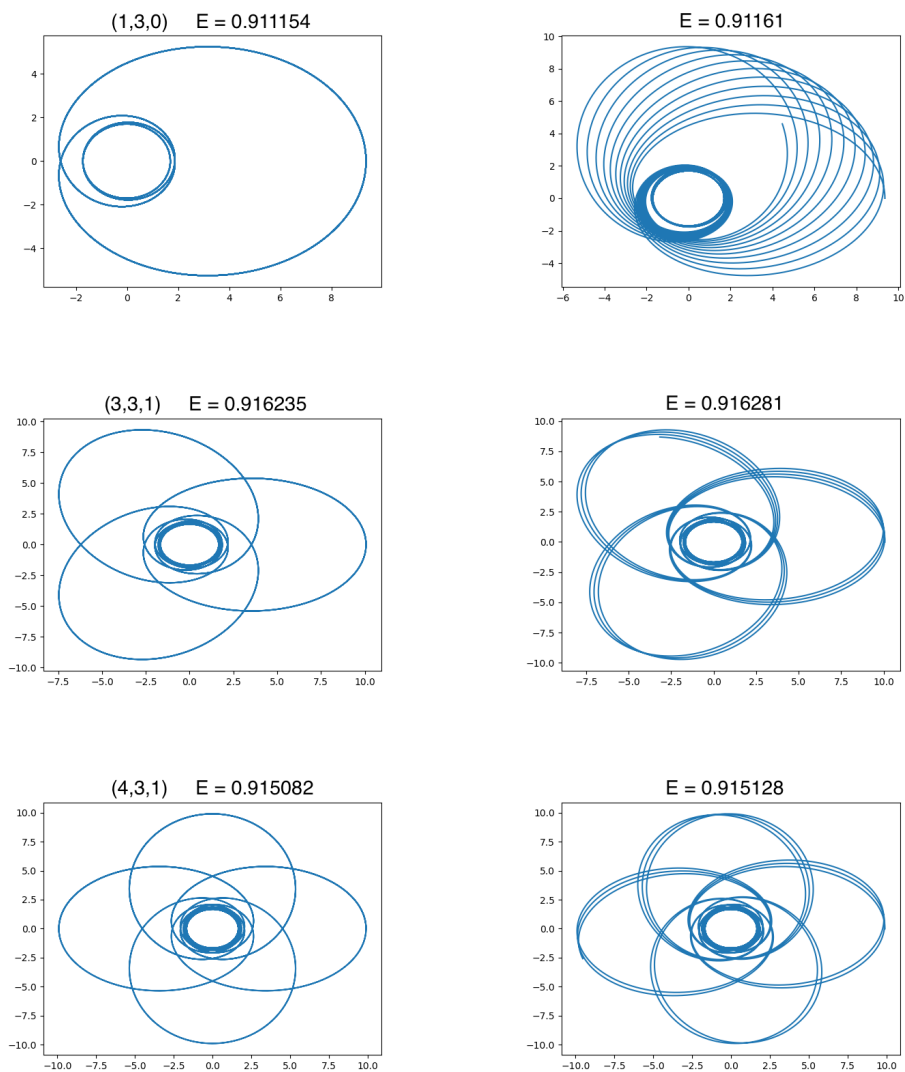
Slika 5: Krivulje konstantne energije za različite angularne momente L , gdje je parametar $a = 0.99$. Od najviše prema najnižoj vrijednosti parametri su $L = 1.36 > L_{ibso}$, $L = L_{ibso} = 1.329728$, $L_{isso} < L = 1.2 < L_{ibso}$, $L = L_{isso} = 1.142004$, $L = 1.08 < L_{isso}$. Crvenom linijom je označena najdublja vezana sferna orbita (ibso). Ispod kritične vrijednosti L_{isso} sve orbite padaju u crnu rupu.

⁷innermost bound spherical orbit (eng.)

⁸innermost stable spherical orbit (eng.)

3.3 Usporedba periodičkih i aperiodičkih rješenja

Racionalni brojevi q označavaju orbite koje su periodičke u smislu da se nakon nekog vremena zatvaraju. Ukoliko je q iracionalan broj, orbita se nikada ne zatvara već konstantno precesira oko crne rupe. Upravo takve aperiodičke orbite se mogu opisati malenom perturbacijom periodičkih orbita kako je prikazano na slici (6).



Slika 6: Lijevo: periodičke orbite za zadane parametre $a = 0.995$, $L = 2$. Desno: aperiodičke orbite sa iracionalnim brojem q koje se nikada ne zatvaraju, no možemo ih približno opisati sa periodičkim orbitama.

3.4 3D slučaj

Prikaz 3D orbita nalazi se na slici (7). Lijevi stupac prikazuje 3D orbitu, dok je s desne strane projekcija na $r - \cos \theta$ ravninu. Plava sfera predstavlja vanjski horizont događaja crne rupe. Zanimljivo je da projekcije na $r - \cos \theta$ ravninu čine Lissajousove krivulje. Općenito 3D orbite će biti zatvorene ako je omjer r i θ frekvencija racionalan broj, odnosno ako je

$$q_{r\theta} \equiv \frac{\omega_\theta}{\omega_r} - 1, \quad (43)$$

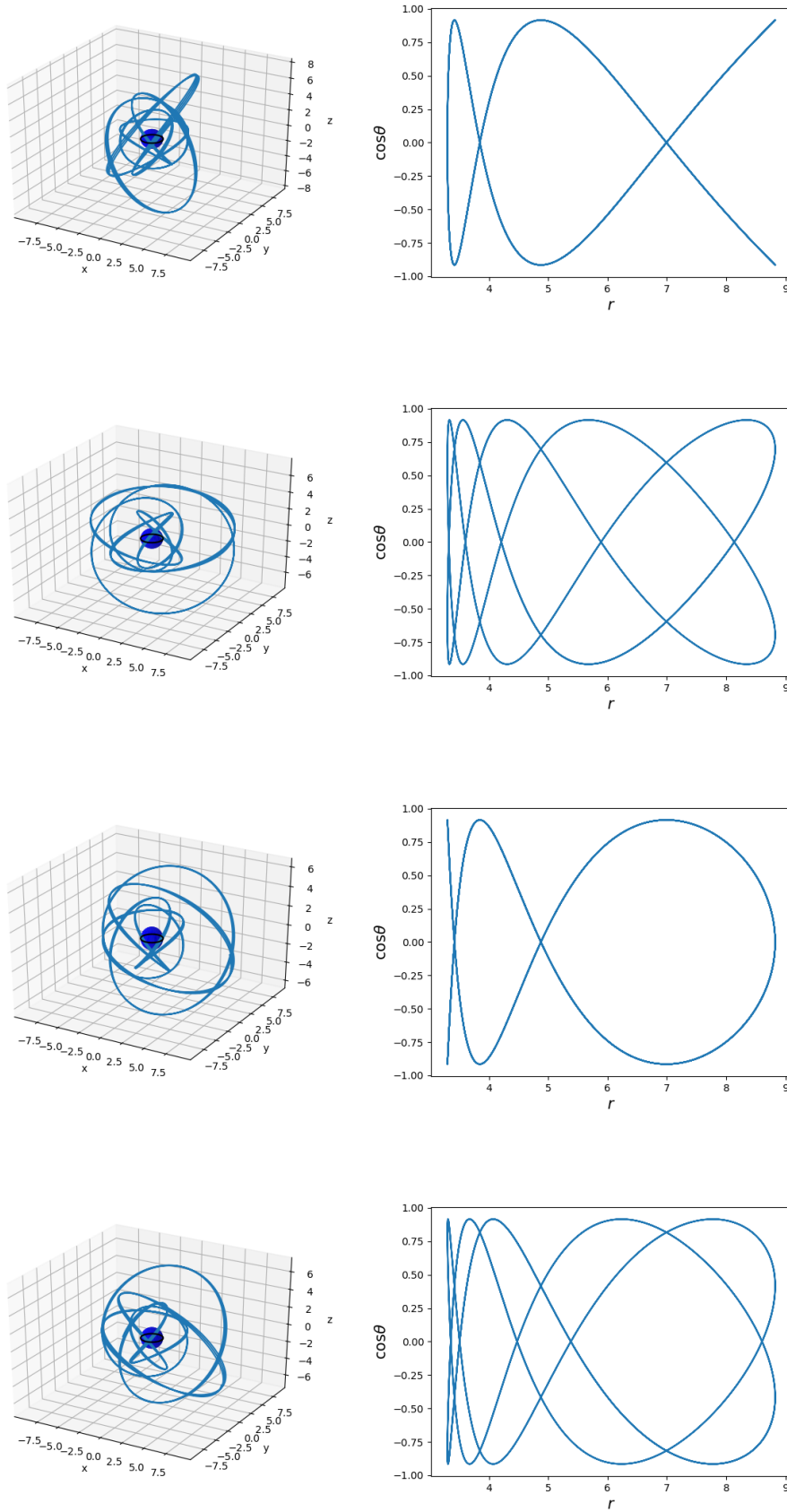
racionalan broj. Definiramo [3]

$$\omega_r \equiv \frac{2\pi}{\Lambda_r}, \quad \omega_\theta \equiv \frac{2\pi}{\Lambda_\theta}, \quad (44)$$

te

$$\begin{aligned} \Lambda_r &= 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{d\lambda}{dr} dr = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}}, \\ \Lambda_\theta &= 4 \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \frac{d\lambda}{d\theta} d\theta = 4 \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \end{aligned}$$

Općenito, kada bismo napravili projekciju 3D orbita na orbitalnu ravninu koja je u svakom trenutku okomita na vektor angularnog momenta čestice dobili bi izgled orbita analogne onima u ekvatorijalnom slučaju kod prethodnih poglavlja [3]. To nam pokazuje da je za osnovno razumijevanje Kerrovih orbita dovoljno proučiti gibanje u ekvatorijalnoj ravnini. Također, svaku aperioidičku orbitu možemo prikazati kao perturbaciju periodičke orbite [3, 5, 6].



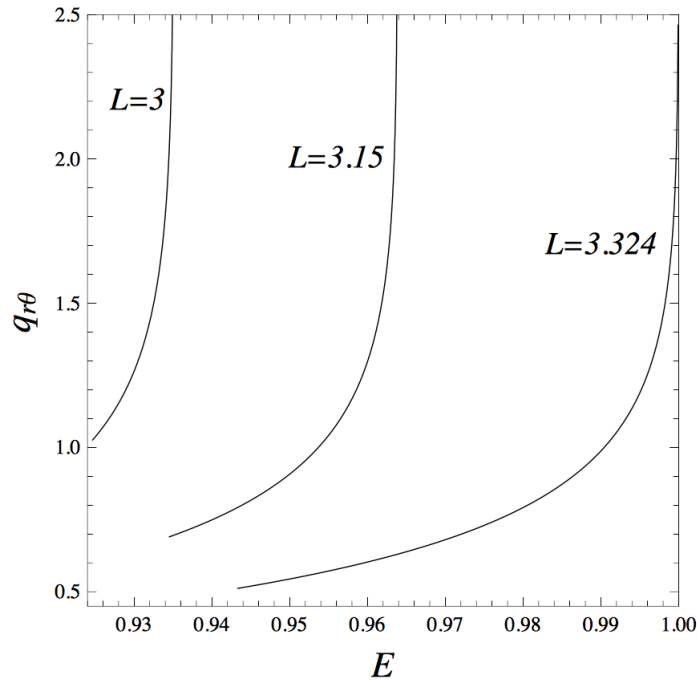
Slika 7: Prikaz periodičkih orbita sa parametrima $a = 0.99$, $L = 1.2$, $Q = 7.56$, $E = 932516$. Za početne uvjete biramo da čestica kreće iz apastrona $r_0 = r_a = 8.82713$. Redom od vrha prema dnu početni uvjeti za θ su, $\theta_0 = 0.414139$, $\theta_0 = 0.8$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = 2$. Lijevi stupac prikazuje 3D orbite, dok je desni stupac projekcija na $r - \cos\theta$ ravninu.

4 Zaključak

U ovom radu proučavali smo gibanje čestice u Kerrovoj metrici. To gibanje je analogno gibanju u polju aksijalnosimetrične neutralne crne rupe koja rotira s angularnim momentom a po jedinici mase. Pokazali smo da uz uobičajene konstante gibanja, reduciranu masu μ , z-komponentu angularnog momenta L , te energiju E , postoji još jedna konstanta koju označavamo s Q i zove se Carterova konstanta [4]. Veličine (μ, L, E, Q) čine potpun skup konstanti gibanja te je sustav integrabilan. Koristeći Hamilton-Jacobijev pristup izveli smo jednadžbe koje zadovoljavaju vremenoliki geodezici (29). Za numeričku integraciju je lakše koristiti sustav jednadžbi dobiven iz Hamiltonovog pristupa (31) budući da ne moramo paziti na promjenu predznaka prvih derivacija u točkama obrata. Prilikom opisa geodezika fokusirali smo se na periodičke orbite, koje čine temelj za razumijevanje gibanja čestica u Kerrovoj metrici. Svaku aperiodičku orbitu možemo dobiti kao malenu perturbaciju parametara periodičke orbite kao što je prikazano na slici (6). Zanimljivo je da u slučaju Kerrove metrike, nema orbita koje čine jednostavne elipse koje precesiraju oko centra zakrivljenosti kao u Schwarzschildovom slučaju [3, 5, 6]. Periodičke orbite se mogu jednoznačno opisati sa tripletom cijelih brojeva (z, w, v) koje možemo kombinirati u broj q pomoću relacije $q = w + v/z$. Ukoliko je broj q iracionalan orbita se neće nikada zatvoriti već precesira oko centra zakrivljenosti. Svaki iracionalni broj možemo približno opisati sa nekim racionalnim brojem te time i periodičkom orbitom. Generalizaciju na 3D slučaj gdje gibanje nije samo ograničeno na ekvatorijalnu ravninu je jednostavno napraviti ukoliko uvedemo opis pomoću fundamentalnih frekvencija koje su definirane kao (44). Energijski spektar dozvoljenih periodičkih orbita je diskretan [3, 5, 6].

A Kako nacrtati orbite

U ovom dodatku prikazat ćemo proces koji smo koristili pri crtanju orbita. Sustav jednažbi koji je potrebno riješiti je (31). Ukoliko želimo nacrtati orbitu određenog q broja za dani L , moramo potražiti kojoj energiji ona odgovara. Za to nam služi jednažba (39) koja je u [6] napisana u analitičkom obliku. Primjer jednog takvog grafa koji pokazuje vezu između $q_{r\theta}$ i energije E se nalazi na slici (8).

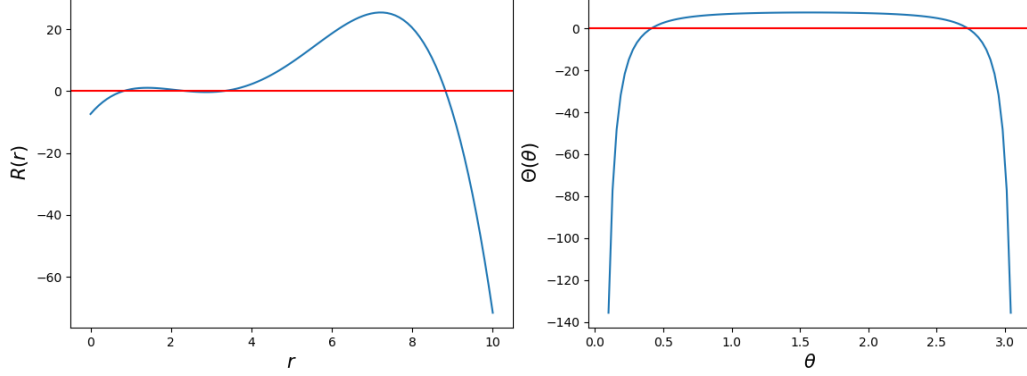


Slika 8: Graf prikazuje ovisnost $q_{r\theta}$ o energiji za vezane orbite uz zadani $a = 0.99$. Grafovi počinju za L_{isso} , odnosno od najdublje stabilne sferične orbite, sve do divergencije u L_{ibso} , kod zadnje vezane sferične orbite. Preuzeto iz [3].

Kao početne uvjete zgodno je odabrati točke obrata u θ i r smjeru, budući da za njih generalizirani impulsi p_r i p_θ iščezavaju. Dakle potrebno je riješiti sustav

$$\begin{aligned} R(r) &= 0, \\ \Theta(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Za traženje nultočki možemo se poslužiti nekom od funkcija modula *scipy* u



Slika 9: Lijevo: funkcija Θ u ovisnosti o kutu θ . Desno: funkcija R u ovisnosti o r . Presjek crvene linije s grafovima označava nultočke. Parametri su $a = 0.995$, $L = 2$, $E = 0.915128$.

programskom jeziku *Python*. Nultočke možemo očitati i grafički na slikama (9).

Jednom kada smo fiksirali početne uvjete, jednadžbu orbite dobivamo rješavajući sustav (31).

B Ergosfera i povlačenje referentnih sustava

Zanimljivo je pokazati da unutar ergosfere ne mogu postojati stacionarni promatrači. Dokaz se bazira na gibanju fotona unutar ergosfere [2]. Pretpostavimo da se fotoni gibaju unutar ergosfere s konstantnim r u ekvatorijalnoj ravnini ($\theta = \pi/2$, $dr = d\theta = 0$). Budući da promatramo fotone vrijedi $ds^2 = 0$ te iz metrike dobivamo jednakost

$$g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{33}d\phi^2 = 0. \quad (45)$$

Iz gornje jednadžbe možemo izvesti

$$g_{00} + 2g_{03}\frac{d\phi}{dt} + g_{33}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0, \quad (46)$$

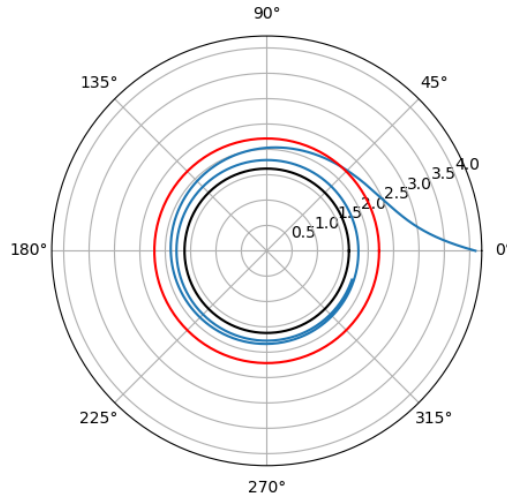
iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe imamo

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}, \quad (47)$$

gdje $+$ predznak odgovara gibanju u smjeru suprotnom od rotacije crne rupe, a $-$ odgovara gibanju zajedno s rotacijom crne rupe. Na površini ergosfere vrijedi $g_{00} = 0$ [2] pa kao rješenja dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= 0, \quad \text{u suprotnom smjeru,} \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{2g_{03}}{g_{33}}, \quad \text{u smjeru rotacije.} \end{aligned}$$

Dakle foton kojeg pošaljemo u smjeru suprotnom od rotacije crne rupe je stacionaran u ϕ . Za obične čestice, koje se gibaju brzinom manjom od svjetlosti vrijedi da moraju rotirati u istom smjeru kao i crna rupa bez obzira na njihov angularni moment. Pojam povlačenja referentnih sustava⁹ odnosi se na opservaciju da čestica koja početno kreće bez komponente brzine u smjeru ϕ , eventualno dobiva neiščezavajuću komponentu i počinje rotirati u smjeru crne rupe, kao što je prikazano na (10).



Slika 10: Povlačenje referentnih sustava. Čestica koja početno kreće s malenom komponentom brzine u ϕ smjeru eventualno spiralno upada u crnu rupu te se unutar ergosfere giba u smjeru rotacije crne rupe. Crna krivulja označava vanjski horizont, a crvena stacionarnu graničnu plohu. Područje između crne i crvene krivulje nazivamo ergosfera. Pogled na ekvatorijalnu ravninu odozgo s parametrima $a = 0.95$, $E = 1.0$, $L = 1.0$.

⁹frame dragging (eng.)

Literatura

- [1] S. Carroll: Spacetime And Geometry; An Introduction to General Relativity; Pearson Education Limited, 2014., poglavlje 6.
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: Gravitation; W. H. Freeman And Company, poglavlje 33.
- [3] R. Grossman, J. Levin, G. Perez-Giz: The Harmonic Structure of Generic Kerr Orbits, arXiv:1105.5811 [gr-qc]
- [4] B. Carter: Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields, Phys. Rev. 174:5, 1968.
- [5] J. Levin, G. Perez-Giz; A Periodic Table for Black Hole Orbits, arXiv:0802.0459 [gr-qc]
- [6] J. Levin: Energy Level Diagrams for Black Hole Orbits, arXiv:0907.5195 [gr-qc]