Kobordizmi prostorvremena

Ivan Ćorić

31. kolovoza 2018.

Sažetak

U ovom seminaru prikazat će se nekoliko definicija i teorema korisnih u globalnoj analizi modela relativističkog svijeta. Promatrat će se i kobordizmi Lorentzovog tipa kao mehanizmi promjene topologije u kvantnoj gravitaciji. Pokazat će se da su uvjeti, da se na topološkom kobordizmu uvede odgovarajuća metrika, drugačiji za parne i neparne dimenzije.

1 Uvod

Teoremi koji će biti dokazani u ovom seminaru korisni su u razmatranju općenitih modela relativističkih svjetova. Rezultate dobivene tim razmatranjima nazivamo topološkim, jer ne uključuju Einsteinove jednadžbe direktno, već se bave općim svojstvima metrike Lorentzovog tipa na 4-mnogostrukosti. Sada je korisno definirati *geometriju* kao k-mnogostrukost koja nosi metriku Lorentzovog tipa. Modifikatori ispred geometrije se onda odnose na odgovarajuću strukturu (mnogostrukost ili metriku). Ako nije navedeno drugačije, uvijek se uzima da je mnogostrukost bez ruba, a ako kažemo samo geometrija mislimo na 4-mnogostrukost na kojoj je metrika sa signaturom $(-,+,+,+)$.

Nakon prikazivanja odgovarajućih teorema razmatrat će se promjene topologije prostorvremena putem kobordizama Lorentzovog tipa. Kako bi se uveli mehanizmi promjene (prostorne) topologije moraju se žrtvovati određene značajke koje pridružujemo prostorvremenima u kojima se (prostorna) topologija ne mijenja. Na primjer, pokazat ćemo da svaki kobordizam Lorentzovog tipa mora sadržavati zatvorenu vremenoliku krivulju (CTC). Takav slom kauzalnosti se može izbjeći dozvoljavanjem da metrika degenerira u nulu u izoliranim točkama, što se opet može povezati sa slomom principa ekvivalencije jer u tim točkama 4-mnogostrukost ne bi bila lokalno izomorfna prostorvremenu Minkowskog. U ostatku seminara razmatrat ćemo posljedice pokušaja očuvanja principa ekvivalencije koje nastaju zabranjivanjem degeneracije metrike.

2 Kauzalnost

U našem lokalnom području prostorvremena opažamo da u svakom događaju možemo utjecati samo na događaje koje leže u jednom (budućem) svjetlosnom stošcu. Ako pretpostavimo da je to univerzalno svojstvo prostorvremena, postavljamo globalno ograničenje na geometrije koje smatramo fizikalnima. Ovo ograničenje možemo izreći i matematički: a) ne postoje zatvorene vremenolike krivulje (CTC) i b) postoji kontinuirani izbor budućeg svjetlosnog stošca. Geometriju koja zadovoljava b) nazivamo *izokronom*. Ova dva ograničenja ćemo povezati u sljedećim teoremima, no prije toga su nam potrebne sljedeće definicije koje su dane prema [1]:

Definicija 1 *Neka je dano preslikavanje $\gamma : \Sigma \to M$ gdje je M mnogostrukost, a Σ povezan podskup od $\mathbb{R}$ koji sadrži više od jedne točke. Takav γ nazivamo putem. Za put γ kažemo da je gladak ako postoji neiščezavajuća derivacija $d\gamma$ stupnja C^∞. Sliku od γ nazivamo krivuljom.*

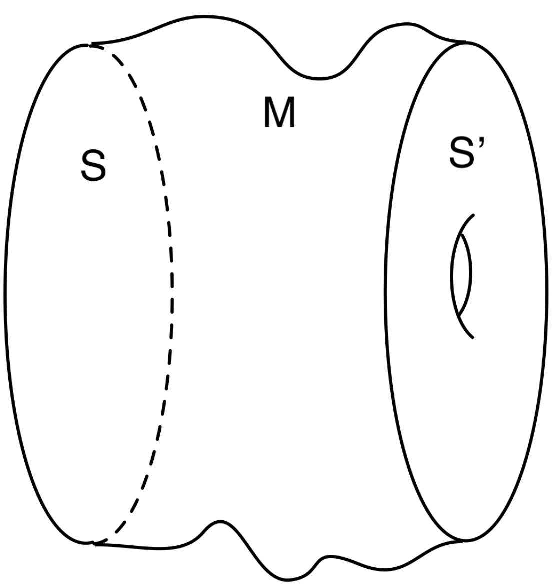
Za gladak put kažemo da je *vremenolik* ako mu je tangentni vektor u svakoj točki vremenolik. Za takav put kažemo da je *orijentiran u budućnost* ako je tangentni vektor u svakoj točki puta usmjeren prema budućnosti (vremenska orijentacija M omogućuje da se odredi smjer budućnosti).

Definicija 2 *Neka je γ put te neka je $a = \inf(\Sigma)$ i $b = \sup(\Sigma)$. Tada za x kažemo da je krajnja točka ako za svaki niz $\{u_i\} \in \Sigma$, $u_i \to a$ implicira $\gamma(u_i) \to x$ ili $u_i \to b$ implicira $\gamma(u_i) \to x$. Ako je γ vremenolik i orijentiran u budućnost onda je u prvom slučaju x početna, a u drugom buduća krajnja točka.*

Teorem 1 *Neka su S i S' dvije kompaktne 3-mnogostrukosti, tada postoji kompaktna geometrija*

M čiji je rub disjunktna unija S i S' i u kojoj su S i S' prostornog tipa.

Teorem 1 je dokazan u [2] i fizikalno govori da uz proizvoljnu topologiju kompaktnog dijela prostorvremena prostornog tipa u sadašnjem trenutku, sama prisutnost Lorenztove metrike ne sprječava pojavljivanje drugog proizvoljnog kompaktnog dijela prostornog tipa u sljedećem trenutku. Sljedeći teorem pokazuje da ako se takva promjena topologije događa, kauzalnost ne može biti očuvana.



Slika 1: Slika uz teoreme 1 i 2.

Teorem 2 *Neka je M kompaktna geometrija čiji je rub disjunktna unija dvije kompaktne 3-mnogostrukosti prostornog tipa S i S'. Pretpostavimo da M nema CTC-a te da je izokrona, tada su S i S' difeomorfne te M je topološki* $S \times [0,1]$.

Dokaz: Kako je M izokrona, možemo[1] na njoj konstruirati vremenoliko vektorsko polje ξ^μ koje nigdje ne iščezava te nigdje nije tangentno na S i S'. Neka je γ krivulja koja počinje na S i svugdje je tangentna na ξ^μ.

Pretpostavimo da krivulja γ nema buduće krajnje točke. Tada možemo parametrizirati γ s parametrom t na intervalu od nula do beskonačnosti. Razmotrimo niz točaka $P_i = \gamma(i),\ i = 1,2,3,...$, koji se nalazi na kompaktnoj mnogostrukosti te zbog toga ima limes P. Neka je N dovoljno mala okolina oko P takva da svaka krivulja koje je tangentna na ξ^μ i prolazi kroz N, može biti iskrivljena unutar N tako da prolazi kroz P i ostaje vremenolika. Tada za svaki pozitivan broj s imamo t takav da je $t > s$, tako da je $\gamma(t)$ unutar N (jer je P limes od P_i) i imamo $t' > s$ takav da $\gamma(t')$ nije unutar N (jer γ nema buduću krajnju točku). Dakle, γ ulazi i izlazi iz N beskonačno puta. Sada iskrivljavanjem γ na dvama prolascima kroz N, tako da oba puta presiječe P dobivamo CTC (krivulja koja počinje i završava u P) koja je po pretpostavci zabranjena. Dakle, γ ima buduću krajnju točku.

Ta krajnja točka ne može biti unutar M jer ξ^μ ne iščezava nigdje, niti na S jer je M izokrona. Zbog toga se buduća krajnja točka nalazi na S'. Dakle, kroz svaku točku mnogostrukosti M prolazi jedna i samo jedna krivulja γ svugdje tangentna ξ^μ s dvije krajnje točke, jednom na S, drugom na S'.

Kroz svaku točku P na M provucimo sada krivulju γ. Neka je γ zapisana u koordinatnoj formi $x^\mu(t)$, gdje je t definiran jednadžbama:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \xi^\mu, \text{ gdje se } x^\mu \text{ nalazi na } S.$$

Pretpostavimo sada da t poprima vrijednosti t_1 i t_2 na P i S' respektivno. Definirajmo sada skalarno polje ϕ na M na sljedeći način:

$$\phi \equiv t_1/t_2.$$

Sada je ploha S dana s $\phi = 0$, a ploha S' s $\phi = 1$. Ova jednoparametarska familija ploha prolazi kroz cijeli M. Konačno, pomoću ξ^μ imamo korespondenciju između dvije proizvoljne plohe ove familije. Dakle, S i S' su difeomorfne i $M = S \times [0,1]$.

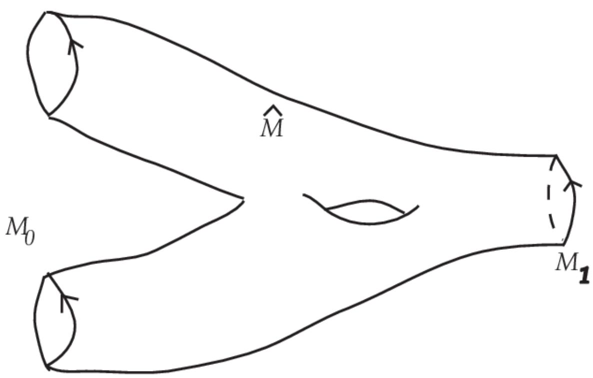
Na sličan način se dokazuje i sljedeći teorem:

Teorem 3 *Svaka kompaktna geometrija (bez granice) ima CTC.*

3 Promjena topologije kobordizmom Lorentzovog tipa

Za početak uvedimo osnovne pojmove prema [4]. Radi jednostavnosti ograničit ćemo razmatranja na zatvorene (=kompaktne, bez ruba) hiperravnine prostornog tipa M_0 i M_1. Neka je dana kompaktna, glatka n-mnogostrukost M, čiji je rub ∂M dan kao disjunktna unija (ne nužno povezanih niti nepraznih) $(n-1)$-mnogostrukosti M_0 i M_1. M nazivamo topološkim kobordizmom. Kobordizam Lorentzovog tipa je topološki kobordizam zajedno s (nedegeneriranom) vremenski-orijentiranom metrikom Lorentzovog tipa s obzirom na koju je M_0 početni, a M_1 konačni rub mnogostrukosti prostornog tipa M. Na slici 2 dan je prikaz kobordizma.

[1] Vidi [3]



Slika 2: Prikaz kobordizma. Slika posuđena iz [5].

Pretpostavimo da kobordizam Loretnzovog tipa postoji. Tada iz Teorema 3 znamo da sadrži CTC. Ako bi se one pojavljivale samo u mikroskopski malenim dijelovima prostora, takve kauzalne anomalije bi bile bezopasne, ili barem ne bi doprinosile više od akauzalnosti dobivene kvantnim fluktuacijama metrike prostor-vremena. Mogućnost da se kauzalne anomalije, jednom prihvaćene u fiziku, pojavljuju i na velikim skalama je zabranjena sljedećim teoremom:

Teorem 4 *Proizvoljan (dovoljno gladak) kobordizam Lorentzovog tipa koji sadrži CTC, mora narušavati ili uvjet slabih energija (engl. weak energy condition) ili općeniti Hawking - Penrose uvjet.*

Uvjet slabih energije jest ograničenje nametnuto na teorije koje opisuju materiju s nadom da ga svi "pristojni" oblici materije moraju zadovoljavati, a govori o toma da za svaki tangentni vektor koji je usmjeren prema budućnosti u^a, gustoća materije koju vidi pripadni promatrač mora uvijek biti nenegativna:

$$\rho = T_{ab}u^a u^b \geq 0.$$

S druge strane, općeniti Hawking - Penrose uvjet služi tomu da se isključe posebne metrike za koje zakrivljenost konzistentno iščezava u nekim smjerovima te je potreban u dokazima Hawkingovih i Penroseovih teorema o singularitetima. Za geodezik koji nije prostornog tipa (tangentni vektori na geodeziku nisu prostornog tipa) te je na njemu tangentni vektor u^a, kažemo da zadovoljava općeniti Hawking - Penrose uvjet ako na njemu postoji točka u kojoj vrijedi:

$$u_{[\alpha}R_{\rho]\mu\nu[\sigma}u_{\beta]}u^{\mu}u^{\nu} \neq 0.$$

Traženje kobordizma Lorentzovog tipa između M_0 i M_1 može ići traženjem topološkog kobordizma te onda pripadne metrike na M. Prema [4] topološki kobordizam između M_0 i M_1 će postojati ako su tzv. "Stiefel-Whitney brojevi" mnogostrukosti M_0 i M_1 jednaki. U dimenziji $(n-1)$ postoji samo konačnan broj mogućnosti za te brojeve pa postoji i samo konačan broj klasa kobordizama zatvorenih $(n-1)$-mnogostrukosti. Na primjer u tri dimenzijame postoji jedna klasa, dok u četiri postoje četiri klase.

Traženu metriku možemo postaviti na topološku mnogostrukost M ako postoji vektorsko polje v koje nigdje ne iščezava te je usmjereno unutra na M_0 (pa je M_0 početna hiperravnina prostornog tipa), te prema van na M_1 (pa je M_1 konačna hiperravnina prostornog tipa) (takav izbor vektorskog polja odgovara kontinuiranom izboru budućeg svjetlosnog stošca preko cijelog M). Vektorsko polje koje zadovoljava ove uvjete transverzalnosti na M_0 i M_1 i s najviše konačnim brojem točaka u kojima iščezava nazivamo Morseovo vektorsko polje. Sada dokazujemo sljedeću lemu.

Lema 1 *Neka je v Morseovo vektorsko polje na M. Tada je*

$$ind(v) = \chi(M) - \chi(M_0),$$
$$ind(-v) = \chi(M) - \chi(M_1),$$

gdje je χ Eulerova karakteristika, a $ind(v)$ suma indeksa od v u njegovom (po definiciji konačnom) skupu nula (točkama u kojima v iščezava). (Eulerov) indeks vektorskog polja u izoliranoj nuli je stupanj preslikavanja koje ono definira s male kugle S^{n-1} oko nule na S^{n-1} jediničnih vektora (vidi. [5]).

Dokaz: Neka je $\hat{M}$ mnogostrukost dobivena na način da se kopija od $M_0 \times [0,1]$, N, zalijepi na M_0 na način da je $\hat{M} = M \cup N$, gdje je $N = M_0 \times [0,1]$, a $M_0 \times \{1\}$ je identificirano s $M_0 \subseteq M$. Također, neka je $\hat{v}$ vektorsko polje dobiveno proširenjem v na $\hat{M}$ koji ima izolirane nule te je orijentirano prema van na $M_0 \times \{0\} \subseteq N$. Sada imamo da je $\hat{v}$ orijentirano prema van na cijelom $\hat{M}$ i restrikcija $\hat{v}_N$ vektorskog polja $\hat{v}$ na N je orijentirana prema van na ∂N. Prema Poincaré-Hopfovom teoremu vrijedi:

$$ind(\hat{v}) = \chi(\hat{M})$$

i slično:

$$ind(\hat{v}_N) = \chi(N).$$

Željenu relaciju $ind(v) = \chi(M) - \chi(M_0)$ dokazujemo iz sljedeće tri jednakosti: $\chi(\hat{M}) = \chi(M)$, $ind(\hat{v}) = ind(v) + ind(\hat{v}_N)$ i $\chi(N) = \chi(M_0)$. Prva jednakost slijedi iz toga što su $\hat{M}$ i M difeomorfne, druga jednakost slijedi iz definicije jer ne postoje nule na $M_0 = M \cap N$, a treća jednakost iz svojstva Eulerove karakteristike $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$. Konačno, relaciju $ind(-v) = \chi(M) - \chi(M_1)$ dobivamo zamjenom uloga M_0 i M_1.

Kako bismo izveli kriterij za kobordizme Lorentzovog tipa potrebna nam je sljedeća činjenica: $ind(-v) = (-1)^n ind(v)$. To se može razumjeti na način da se uvidi da inverzija S^{n-1} mijenja orijentaciju samo ako je n neparan. Sada možemo dokazati sljedeći teorem:

Teorem 5 *Neka je ^nM topološki kobordizam između M_0 i M_1 i neka je M povezan, tada je nužan i dovoljan uvjet za postojanje kobordizma Lorentzovog tipa na M:*

$$\chi(M) = 0, \ (n \text{ je paran}),$$

$$\chi(M_0) = \chi(M_1), \ (n \text{ je neparan}).$$

Dokaz: Neka je v Morseov vektor i neka je n paran. U tom slučaju $\chi(M_0) = 0$ jer je $dim(M_0) = n-1$ neparna [Ako je w vektorsko polje nad zatvorenom mnogostrukosti neparne dimenzije s izoliranim nulama, tada je $\chi = ind(w)$, ali i $\chi = ind(-w) = -ind(w)$. Dakle $\chi = 0$.] Lema 1 tada implicira da je $ind(v) = \chi(M)$, a ako v nigdje ne iščezava $\chi(M) = 0$.

Pretpostavimo sada da je n neparan. Tada Lema 1 i činjenica da $ind(-v) = -ind(v)$ (jer je n neparan) zajedno daju:

$$2ind(v) = \chi(M_1) - \chi(M_0),$$

što opet za nigdje iščezavajući v daje željeni rezultat.

4 Zaključak

U ovom su seminaru iskazani i dokazani teoremi koji omogućuju bolje razumijevanje globalne strukture modela relativističkog svijeta. Kao jedan od rezultata ovih teorema možemo navesti sljedeći primjer. Ako pretpostavimo da u sadašnjem trenutku svemir ima topologiju 3-sfere (zatvoreni Friedmannov model čija evolucija ide od prvotnog širenja do sažimanja). Možemo zamisliti da tijekom jako kontrahirane faze nehomogenosti narastu toliko da dolazi do topološkog uvijanja. Nakon kontrahirane faze slijedi širenje dijelova prostorvremena prostornog tipa. Na ovaj način mogao bi se izbjeći singularitet te bismo imali svemir koji se periodično širi i sažima. No takav svemir, s topološkim uvijanjem, je prema teoremu 2 nužno akauzalan.

Literatura

[1] R. Penrose, Techniques of Differential Topology in Relativity, (Birbeck College, University of London, 1972.).

[2] R. P. Geroch, Topology in General Relativity, J. Math. Phys. 8, 782 (1967).

[3] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951)

[4] R. D. Sorkin, Topology change and monopole creation, Phys. Rev. D 33 (1986).

[5] J. W. Milnor, Topology from the Differential Viewpoint (University Press, Charlottesville, Virginia, 1965.).

[6] https://www.researchgate.net/publication/228936670_Topics_in_topology_Fall_2008_The_signature_theorem_and_some_of_its_applications