Entropija i Noetherini naboji

Filip Požar*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 19. studenoga 2021.)

U ovome seminaru ćemo promotriti vezu Noetherinog teorema i entropije. Proučit ćemo dva primjera sustava sa simetrijama koje proizvode entropiju za sačuvani Noetherin naboj. Prvi primjer će biti termodinamički sustav invarijantan na jednu posebnu neuniformnu vremensku translaciju, a drugi primjer će biti svemir sa crnom rupom invarijantan na difeomorfizam generiran jednim posebnim vektorskim poljem. Rezultat drugog primjera će biti prvi zakon mehanike crnih rupa. Usput pri izvodima ćemo uvesti lagranžijan kovarijantnih teorija i njima prikladan Noetherin teorem te ćemo definirati formalizam funkcionalnih derivacija i opravdati ga primjerom.

I. UVOD

Cilj ovog seminara je povezati Noetherin teorem i entropiju. Započeti ćemo definiranjem entropije i lagranžijanske n-forme.

I.1. Statistička mehanika

Za mikrokanonski ansambl s makroskopskim parametrima $\{\alpha_i\}$, koje ćemo skraćeno zvati α (npr., $\alpha = \{N, V, E\}$), definiramo *mikrokanonsku particijsku funkciju* Ω kao

$$\Omega(\alpha_0) = \sum_{i:\alpha(i)=\alpha_0} 1 \,. \tag{1}$$

Drugim riječima, Ω prebrojava konfiguracije koja imaju makroskopska svojstva jednaka nekim zadanim. U slučaju kontinuiranog skupa konfiguracija koje zadovoljavaju $\alpha = \alpha_0$, onda sumu treba zamijeniti integralom.

Definicija 1. Statistička entropija sustava od N nerasponatljivih čestica, S, definira se kao logaritam

$$S = k_B \ln\left(\frac{\Omega}{N!}\right) . \tag{2}$$

U klasičnom režimu bez obzira na broj čestica se u formuli uzima $N = 1$, jer se sve čestice u principu može razlikovati pomoću numeriranja i praćenja vremenske evolucije. Podsjetimo se definicije očekivane vrijednosti $\langle A\rangle_{E,\alpha}$ u mikrokanonskom ansamblu. Uz oznaku $\Gamma = (q,p)$, gdje je $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$ kanonski impuls, definiramo očekivanu vrijednost

$$\langle A\rangle_{E,\alpha} = \frac{1}{\Sigma(E,\alpha)} \int A(\Gamma)\delta(E - H(\Gamma,\alpha))d\Gamma \,. \tag{3}$$

Normalizacijska konstanta Σ se definira kao

$$\Sigma(E,\alpha) = \int \delta(E - H(\Gamma,\alpha))d\Gamma \tag{4}$$

i pomoću nje definiramo inverznu temperaturu β

$$\beta = \frac{\Sigma(E,\alpha)}{\Omega(E,\alpha)} \,. \tag{5}$$

Nakon ovih definicija smo spremni definirati entropiju S pomoću 2. zakona termodinamike iskazanog u varijablama statističke fizike

$$dS = \beta dE - \beta \left\langle \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right\rangle_{E,\alpha} d\alpha \,. \tag{6}$$

I.2. Lagranžijan kao n-forma

U ovom poglavlju ćemo definirati lagranžijan kao diferencijalnu n-formu i motivirati definiciju invarijantnosti na difeomorfizme.
U klasičnoj mehanici smo definirali funkcional, akciju, putanje γ kao vremenski integral veličine L koju zovemo *lagranžijan*

$$S[\gamma] = \int L(q,\dot q)dt \,. \tag{7}$$

Akcija je po pretpostavci sadržavala u sebi "svu fiziku" sistema, a putanja kojom se sistem mogao kretati je samo ona koja lokalno ekstremizira akciju.
Nadalje, u klasičnoj teoriji polja (u n+1 dimenzija) smo definirali tzv. *gustoću lagranžijana* $\mathcal{L}$ i pritom napravili korespodenciju između generaliziranih koordinata q i polja ϕ te generaliziranih brzina $\dot q$ i derivacija polja $\partial_a\phi$

$$L = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\phi, \partial_a\phi)dV \,.$$

Slijedi da je akcija u klasičnoj teoriji polja onda

$$S[\gamma] = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_a\phi)d^{n+1}x \,.$$

Ovakav zapis akcije nije nužno koordintno neovisan, a zahtjev za koordinatnom neovisnošću se pokazao duboko fizikalnim u Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti (OTR). Zato ćemo motivirani OTR-om umjesto u $n+1$

* fpozar.phy@pmf.hr

dimenzionalnom vektorskom prostoru Ω raditi na proizvoljnoj n dimenzionalnom mnogostrukosti M s metrikom g_{ab} koji definiraju prostorvrijeme (M, g_{ab}), a akciju ćemo definirati pomoću lagranžijanske n-forme $\mathbf{L}$ koja je invarijantna na difeomorfizme. Podsjetnik, za mnogostrukosti N i M, difeomorfizam $\psi : M \to N$ je glatka bijekcija čiji je inverz ψ^{-1} također gladak. U slučaju kada su domena i kodomena iste mnogostrukosti, ψ se može lokalno interpretirati kao promjena izbora koordinatnog sustava.

Definicija 2. Lagranžijan $\mathbf{L}(\phi)$, gdje ϕ predstavlja sva polja koja se transformiraju difeomorfizmima, kažemo da je invarijantan na difeomorfizme ako za svaki difeomorfizam ψ, $\mathbf{L}$ zadovoljava

$$\mathbf{L}(\psi^* \phi) = \psi^* \mathbf{L}(\phi) \,. \tag{8}$$

Motivacija ovakve definicije slijedi iz svojstva povlaka diferencijalne forme. Naime, za općeniti difeomorfizam $\chi : M \to N$ i n-formu ω vrijedi

$$\int_{U \subset N} \omega = \int_{\chi^{-1}(U)} \chi^* \omega \tag{9}$$

pa onda akcija S, definirana integralom lagranžijanske forme $\mathbf{L}$, ostaje invarijantna :

$$\begin{aligned} S[\phi'] &= \int_{\psi(M)} \mathbf{L}(\phi') = \int_M \mathbf{L}(\psi^* \phi) = [\text{Def. 1.}] = \\ &= \int_M \psi^* \mathbf{L}(\phi) = \int_{\psi^{-1}(M)} \psi^* \mathbf{L}(\phi) = [(2)] = \\ &= \int_M \mathbf{L}(\phi) = S[\phi] \,. \end{aligned} \tag{10}$$

II. TERMODINAMIČKI SUSTAV

Sada raspisujemo prvi primjer sustava s entropijom za Noetherin naboj. Promotrimo sustav s akcijom poput (3) koja još dodatno ovisi o parametru α

$$S(\gamma, \alpha) = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, \alpha(t)) dt \tag{11}$$

i napravimo neuniformnu vremensku translaciju[1] (koju ćemo nazivati G)

$$t' = t + \eta \xi(q, \dot{q}, \alpha)$$

gdje je ξ neka funkcija kojoj trenutno ne izlažemo točan oblik, a η mala veličina. Tada su transformacije koordinata $\gamma \to \gamma'$ dane kao

$$q'(t') = q(t) \,,$$

a parametara α kao

$$\alpha(t') = \alpha(t)$$

jer položaji čestica ne ovise o preimenovanju vremenske koordinate i jer parametar α držimo fiksnim. Varijacija u akciji uzrokovana ovakvom transfomacijom je

$$\delta_G S = S(\gamma', \alpha') - S(\gamma, \alpha) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\bar{\delta}_G L + \eta \frac{d(\xi L)}{dt} \right) .$$

Raspišimo ovaj izraz. Kao prvo,

$$\bar{\delta}_G L \approx \frac{\partial L}{\partial q} \bar{\delta}_G q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}_G \dot{q}$$

gdje je $\bar{\delta}_G f$ (konačna) razlika vrijednosti funkcije f nakon i prije transformacije G. Budući da je $\bar{\delta}_G q = -\eta \xi \dot{q}$, slijedi uz oznaku Euler-Lagrangeove derivacije $\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$\delta_G S = \eta \cdot \int_{t_i}^{t_f} \left\{ -\mathcal{E} \dot{q} \xi + \frac{d}{dt} \left[\xi \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \right\} dt \,. \tag{12}$$

Pretpostavimo sada da za neku konfiguraciju parametara α postoje funkcije ξ i ψ takve da

$$\delta_G S = \eta \cdot \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\psi}{dt} dt \,. \tag{13}$$

Slijedi uz izraz za kanonsku energiju $E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{E} \dot{q} \xi = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d(\psi + E\xi)}{dt} dt = -(\psi + E\xi) \Big|_{t_i}^{t_f} \,. \tag{14}$$

Za rješenja γ^* jednadžbi gibanja $\mathcal{E} = 0$ onda vrijedi zakon očuvanja :

$$(\psi_* + E_* \xi_*) \Big|_{t_i}^{t_f} = 0 \,. \tag{15}$$

Nadalje, može se pokazati da ako je $q_*(t)$ rješenje jednadžbi gibanja, onda je i $q_*(t') = q_*(t + \eta\xi)$ rješenje jednadžbi gibanja. Takvu simetriju G nazivamo *dinamičkom simetrijom*, a veličinu $\psi + E\xi$ Noetherinom invarijantom koja potječe od G.
Sada ćemo kvazistatički mijenjati parametar $\alpha(t)$ pomoću funkcije $\bar{\alpha}(t)$

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(\epsilon t)$$

i uvesti varijablu $\tau = \epsilon t$ sa $\tau_i = \epsilon t_i$ i $\tau_f = \epsilon t_f$. Budući da je $\frac{d\alpha}{dt} = \epsilon \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \in O(\epsilon)$, vidi se da je u limesu $\epsilon \to 0$ promjena parametra α doista kvazistatička. Također u kontekstu kvazistatičnih promjena je važno definirati termodinamički konzistentne putanje.

Definicija 3. Termodinamički konzistentne trajektorije su sve putanje koje zadovoljavaju relaciju

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\tau_i'}^{\tau_f'} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \left[\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right\rangle_{\bar{E}(\tau), \bar{\alpha}(\tau)} \right] d\tau = 0 \tag{16}$$

za svake $\tau_i \le \tau_i' \le \tau_f' \le \tau_f$. $\bar{E}$ je kvazistatički varirana energija, analogno parametru α.

Kako bismo pokazali da je izraz (15) povezan s entropijom, sljedeće ćemo izvesti koristan identitet

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = \\ &= \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - (\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial \alpha}\dot{\alpha}) = \\ &= -\dot{q}\mathcal{E} - \frac{\partial L}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = -\dot{q}\mathcal{E} + \frac{\partial E}{\partial \alpha}\dot{\alpha}\,.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za $\mathcal{E}\dot{q}$ u (14) dobivamo

$$\int_{t_i}^{t_f} \xi\left[\frac{dE}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\dot{\alpha}\right]dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\,(\psi + E\xi)}{dt}dt \tag{17}$$

što za termodinamički konzistentne putanje (one koje nas i zanimaju) u kvazistatičkoj aproksimaciji daje

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} \xi\left[\frac{d\bar{E}}{d\tau} - \left\langle\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right\rangle_{\bar{E},\bar{\alpha}}\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}\right]d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d\left(\psi + \bar{E}\xi\right)}{d\tau}d\tau.$$

Kako je ova jednakost valjana za svaki izbor $\tau_i \leq \tau_f$ zaključujemo da vrijedi jednakost

$$\xi\left[d\bar{E} - \left\langle\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right\rangle_{\bar{E},\bar{\alpha}} d\bar{\alpha}\right] = d(\psi + \bar{E}\xi)\,. \tag{18}$$

Desna strana jednakosti (18) je totalni diferencijal pa znamo da za rješenje nužno vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial \bar{E}}(\xi) + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}\left(\xi\left\langle\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right\rangle_{\bar{E},\bar{\alpha}}\right) = 0\,. \tag{19}$$

Koristeći relaciju (6) zaključujemo

$$1 = \beta^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)$$

$$\left\langle\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right\rangle_{\bar{E},\bar{\alpha}} = -\beta^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)$$

tj.,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\xi\beta^{-1}\frac{\partial S}{\partial E}\right) - \frac{\partial}{\partial E}\left(\xi\beta^{-1}\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) \\ &= \frac{\partial\left(\xi\beta^{-1}\right)}{\partial \alpha}\frac{\partial S}{\partial E} - \frac{\left(\xi\beta^{-1}\right)}{\partial E}\frac{\partial S}{\partial \alpha}\,.\end{aligned}$$

Ova jednadžba je zadovoljena ako je

$$\xi\beta^{-1} = \mathcal{F}(S) \tag{20}$$

jer je $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \frac{d\mathcal{F}}{dS}\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ i $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial E} = \frac{d\mathcal{F}}{dS}\frac{\partial S}{\partial E}$. Slijedi da je Noetherina invarijanta za ovaj sustav

$$\xi + E\psi = \int \mathcal{F}(S)dS \tag{21}$$

pa još samo treba odrediti točan oblik funkcije $\mathcal{F}(S)$. Za početak, dozvolimo da $\mathcal{F}$ može ovisiti o broju čestica (N) i o materijalu sustava (M). Iz relacije (13) se vidi da je ψ ekstenzivna varijabla, jer ako bismo gledali sustav sastavljen od dva identična podsustava, dobili bismo dvostruko veću akciju nego u samo jednom pojedinom podsustavu. Onda je $\psi + E\xi$ ekstenzivna varijabla, ali je ξ intenzivna varijabla. Kako je i β intenzivna varijabla, mora i $\mathcal{F} = \beta^{-1}\xi$ biti intenzivna. Dakle, zaključujemo da onda $\mathcal{F}(S : M, N) = \mathcal{F}(\frac{S}{N} \equiv s : M)$, jer inače $\mathcal{F}$ ne bi mogla biti intenzivna veličina. Ako promotrimo funkciju $\mathcal{F}$ za sustave A i B u termalnom ekvilibriju, zaključujemo da mora biti $\mathcal{F}(s_A : M_A) = \mathcal{F}(s_B : M_B)$ jer će $\beta_A = \beta_B$ budući da su temperature sustava A i B jednake, ali će i $\xi_A = \xi_B$ jer na isti način mjerimo vrijeme u sustavima A i B nad kojima smo napravili vremensku translaciju $t' = t + \eta\xi$. Iz proizvoljnosti s_A i s_B te M_A i M_B zaključujemo da je $\mathcal{F}$ konstantna funkcija s konstantom dimenzije Js, tj. $\hbar$. Na kraju, Noetherina invarijanta za transformaciju G je :

$$\psi + \xi E = b\hbar S \tag{22}$$

gdje je b bezdimenzionalna konstanta. Zaključujemo da je entropija Noetherin naboj sustavima invarijantnim na G.

III. NOETHERIN TEOREM ZA KOVARIJANTNE TEORIJE

U sljedećem pogavlju ćemo precizno definirati varijaciju polja i funkcionalnu derivaciju (deriviranje funkcionala po funkcijskom argumentu) koje smo do sada uzimali na teorijama polja bez stroge definicije, ili uopće bez definicije. Potom ćemo definirati Noetherinu $(n-1)$-formu struje $\mathbf{J}$ i Noetherinu $(n-2)$-formu naboja $\mathbf{Q}$ i pomoću njih doći do sačuvane veličine za simetriju na difeomorfizam, prikazanu kao integral po sferi u beskonačnosti.

III.1. Varijacije i funkcionalna derivacija

Definicija 4. Neka je Ψ_ϵ 1-parametarska familija konfiguracija (tenzorskih) polja ψ. Varijaciju polja ψ, $\delta\psi$, definiramo na sljedeći način :

$$\delta\psi := \frac{d\psi_\epsilon}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\,. \tag{23}$$

Pogledajmo odmah dva česta primjera 1-parametarskih familija polja :

$$\psi_\epsilon = \psi + \epsilon\phi\,, \tag{i}$$

ili npr.

$$\psi_\epsilon = \phi_\epsilon^*\psi \tag{ii}$$

gdje je u (ii) ϕ_ϵ^* povlak elementom 1-parametarske grupe difeomorfizama generirane vektorskih poljem ξ^a. Valja primijetiti da iz svojstava grupe znamo da joj je neutralni element upravo postignut izborom $\epsilon = 0$, tj. $\phi_0^* = id_{TM}$. Slijedi onda po definiciji

$$\delta\psi_{(i)} = \phi$$
$$\delta\psi_{(ii)} = \pounds_\xi \psi \,.$$

Sljedeće nas mogu zanimati varijacije funkcija (ali funkcija koje nisu funkcionali) kojima je argument polje.

Definicija 5. Za kompoziciju $f(\psi)$, koja za argument ima (konačan) skup polja ψ i polja za elemente kodomene, definiramo varijaciju δf i funkcionalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial \psi_i}$:

$$\delta f := \frac{d f(\psi_\epsilon)}{d\epsilon} \left(\equiv \frac{df}{d\epsilon} \right) = \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \delta\psi_i$$

gdje su ψ_i elementi skupa polja ψ.

Na kraju, u lagranžijanskoj mehanici je akcija funkcional $S[\psi]$ kojeg se derivira po polju ψ (ψ može biti i skup polja kao i maloprije, onda će derivacija po ψ podrazumijevati sumu po svim elementima skupa).

Definicija 6. Definiramo funkcionalnu derivaciju po polju ψ, $\frac{\delta S}{\delta \psi}$, kao tenzor dualnog tipa tenzoru ψ koji zadovoljava sljedeću relaciju za svaku varijaciju $\delta\psi$[2]:

$$\frac{dS[\psi_\epsilon]}{d\epsilon} \left(\equiv \frac{dS}{d\epsilon} \right) = \int_M \frac{\delta S}{\delta \psi} \delta\psi \,.$$

Ovdje nas pojava integrala ne treba iznenaditi jer nam Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala garantira da se svaki funkcional može prikazati kao integral po nekoj mjeri.

III.1.1. Primjer - Klein-Gordonovo polje

Promotrimo funkcional akcije Klein-Gordonovog skalarnog polja u 3+1 dimenzija:

$$S_{KG}[\psi] = \int_M \mathcal{L}_{KG}(\psi) d^4x$$

gdje je (uz povijesno preimenovanje polja u ϕ)

$$\mathcal{L}_{KG}(\phi) = -\frac{1}{2} \left(\partial_a \phi \partial^a \phi + m^2 \phi^2 \right)$$

Sada ćemo koristiti definicije 2. i 4. na akciji :

$$\begin{aligned}
\frac{dS_{KG}}{d\epsilon} &= \int_M -\frac{1}{2} \left(\partial_a \delta\phi \partial^a \phi + \partial_a \phi \partial^a \delta\phi + 2m^2 \phi \delta\phi \right) \\
&= \int_M -\left(\partial_a \delta\phi \partial^a \phi + m^2 \phi \delta\phi \right) \\
&= [\text{parcijalna integracija 1. člana}^3] \\
&= \int_M -\left(-\partial_a \partial^a \phi + m^2 \phi \right) \delta\phi \,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je derivacija Klein-Gordonove akcije po polju ϕ jednaka :

$$\frac{\partial S_{KG}}{\partial \phi} = \partial_a \partial^a \phi - m^2 \phi \tag{24}$$

pa uvjet ekstremnosti akcije nam daje upravo Klein-Gordonovu jednadžbu.

III.2. Noetherin teorem

Razmatramo lagranžijan oblika[4]

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{ab}, R_{bcde}, \nabla_{a_1} R_{bcde}, ..., \nabla_{(a_1 \ldots} \nabla_{a_m)} R_{bcde}, \\ , \psi, \nabla_{a_1} \psi, \nabla_{(a_1 \ldots} \nabla_{a_m)} \psi)$$

i promatramo njegovu varijaciju $\delta\mathbf{L}$:

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}\delta\psi + d\mathbf{\Theta} \tag{25}$$

gdje je $\mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{\Theta}(\psi, \delta\psi)$ tzv. *simplektička potencijalna forma*, a $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\psi)$ je forma jednadžbe gibajnja polja ψ, tj., jednadžba gibanja $\mathbf{E} = 0$ je zadovoljena onda kada ψ ekstremizira akciju. U literaturi se spominje i *linearizirana jednadžba gibanja* $\delta\mathbf{E}(\psi) = 0$. Vidi se da je $\mathbf{\Theta}$ pomoću (25) određena do na zatvorenu formu. Ipak, u sljedećem članku[5] se može naći jedan mogući univerzalni izbor $\mathbf{\Theta}$ kao i izvod jednadžbe (25). Nadalje, ograničiti ćemo se samo na varijacije definirane 1-parametarskim familijama tipa (ii). To povlači

$$\delta\psi = \pounds_\xi \psi$$
$$\delta\mathbf{L} = \pounds_\xi \mathbf{L} \quad \text{(zbog Definicije 1.)} \,.$$

Nadalje, difeomorfizmu generiranom poljem ξ^a pridijeljujemo (n-1)-formu Noetherine struje $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Theta} - i_\xi \mathbf{L} \,. \tag{26}$$

Djelujmo diferencijalom na (26) :

$$\begin{aligned}
d\mathbf{J} &= d\left(\mathbf{\Theta} - i_\xi \mathbf{L} \right) = [\text{linearnost od } d] = \\
&= d\mathbf{\Theta} - d(i_\xi \mathbf{L}) = [\text{Cartanov identitet}] = \\
&= d\mathbf{\Theta} - \pounds_\xi \mathbf{L} + i_\xi d\mathbf{L} = \\
&= [\mathbf{L} \text{ je } n\text{-forma nad n-dim. mnogostrukosti}] = \\
&= d\mathbf{\Theta} - \pounds_\xi \mathbf{L} = d\mathbf{\Theta} - \delta\mathbf{L} = [(6)] = \\
&= d\mathbf{\Theta} - \mathbf{E}\delta\psi - d\mathbf{\Theta} = \\
&= -\mathbf{E}\delta\psi = -\mathbf{E}\pounds_\xi \psi \,.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{J}$ je zatvorena forma za svaki ξ^a kada je ψ rješenje jednadžbe gibanja. Iz proizvoljnosti ξ^a slijedi[7] da egzistencija $(n-2)$-forme $\mathbf{Q}$, za koju vrijedi

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q} \,. \tag{27}$$

Formu $\mathbf{Q}$ ćemo zvati $(n-2)$-formom Noetherinog naboja u odnosu na ξ^a, a njezin integral po zatvorenoj plohi, Σ, ćemo zvati Noetherinim nabojem plohe Σ u odnosu na ξ^a.

III.2.1. Hamiltonijan kao površinski član

Sada ćemo primijeniti Notherin teorem i izvesti oblik sačuvanog Hamiltonijana koji će nam biti koristan u izvodu 1. zakona mehanike crnih rupa.

Definicija 7. Neka su $\delta_1\psi$ i $\delta_2\psi$ dvije nezavisne varijacije konfiguracija polja. Definiramo (n-1)-formu *simplektičke struje* $\boldsymbol{\omega}(\psi,\delta_1\psi,\delta_2\psi)$

$$\boldsymbol{\omega}(\psi,\delta_1\psi,\delta_2\psi)=\delta_2\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta_1\psi)-\delta_1\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta_2\psi)\,. \tag{28}$$

Za Cauchyjevu hiperplohu[9] C s vektorom normale n^a orijentiranim prema budućnosti definiramo još *simplektičku formu* $\Omega(\psi,\delta_1\psi,\delta_2\psi)$

$$\Omega=\int_C \omega(\psi,\delta_1\psi,\delta_2\psi)\,. \tag{29}$$

Korisno je izračunati proizvoljnu varijaciju Noetherine struje (uzimajući da je ξ^a fiksan za varijacije):

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{J}&=\delta\boldsymbol{\Theta}(\psi,\pounds_\xi\psi)-i_\xi\delta\boldsymbol{L}=[(25),\boldsymbol{E}=0]=\\&=\delta\boldsymbol{\Theta}(\psi,\pounds_\xi\psi)-i_\xi d\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)=[\text{Cartan}]=\\&=\delta\boldsymbol{\Theta}(\psi,\pounds_\xi\psi)-\pounds_\xi\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)+d\left(i_\xi\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)\right)=\\&=\boldsymbol{\omega}(\psi,\pounds_\xi\psi,\delta\psi)+d\left(i_\xi\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)\right)\\&\iff\boldsymbol{\omega}(\psi,\pounds_\xi\psi,\delta\psi)=\delta\boldsymbol{J}-d\left(i_\xi\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)\right)\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Po definiciji, Hamiltonove jednadžbe gibanja za dinamiku generiranu vremenskom evolucijom polja ξ^a su

$$\delta H=\Omega(\psi,\pounds_\xi\psi,\delta\psi)\,. \tag{31}$$

Dakle, uvrštavanjem u (28) $\delta_1=\pounds_\xi$ i korištenjem izvoda (30) dobivamo :

$$\begin{aligned}\delta H&=\Omega(\psi,\pounds_\xi\psi,\delta\psi)=\int_C\boldsymbol{\omega}(\psi,\pounds_\xi\psi,\delta\psi)=[(30)]=\\&=\int_C\delta\boldsymbol{J}-d\left(i_\xi\boldsymbol{\Theta}(\psi,\delta\psi)\right)=\\&=\delta\int_C\boldsymbol{J}-\int_{\partial C=\infty}i_\xi\boldsymbol{\Theta}\,.\end{aligned} \tag{32}$$

Kako bi Hamiltonijan postojao, potrebno je da postoji $(n-1)$-forma $\boldsymbol{B}$ takva da je

$$\int_\infty i_\xi\boldsymbol{\Theta}=\delta\int_\infty i_\xi\boldsymbol{B}\,.$$

Slijedi onda iz jednakosti varijacija :

$$\begin{aligned}H(\xi)&=\int_C\boldsymbol{J}-\int_\infty i_\xi\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{J}=d\boldsymbol{Q}]=\\&=\int_\infty\boldsymbol{Q}-i_\xi\boldsymbol{B}\equiv\int_\infty\boldsymbol{Q}(\xi)-i_\xi\boldsymbol{B}\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Vidimo da je Hamiltonijan, ako postoji, u potpunosti određen integralom po sferi u beskonačnosti. Ako dodatno pretpostavimo da polje ξ^a definira simetriju svih dinamičkih polja, tj., $\pounds_\xi\psi=0$, to onda u (30) čini da $\boldsymbol{\omega}=0$. To ima za posljedicu $\delta H=0$ i sljedeći izraz dobiven uvrštavanjem $\delta\boldsymbol{J}=\delta d\boldsymbol{Q}=d\delta\boldsymbol{Q}$ u 2. red izvoda (32):

$$\int_\infty\delta\boldsymbol{Q}(\xi)-i_\xi\boldsymbol{\Theta}=0\,. \tag{34}$$

Valja još samo napomenuti da izraz za Hamiltonijan (33) ćemo ovisno o simetriji koju generira polje ξ^a interpretirati na različite načine, npr. kao energiju ili impuls sustava itd., poput u radu[8] gdje se sačuvane veličine prepoznaju kao površinski članovi dodani na Hamiltonijan.

IV. PRVI ZAKON MEHANIKE CRNIH RUPA

Sada ćemo izvesti prvi zakon mehanike crnih rupa kao drugi primjer sustava s entropijom za Noetherin naboj. Pretpostavimo, za početak, da je horizont događaja crne rupe koju promatramo *Killingovog tipa*.

Definicija 8. Neka je $\mathcal{H}$ hiperploha i ξ^a njezina normala. Kažemo da je $\mathcal{H}$ Killingov horizont ako je ξ^a Killingov vektor kojem je norma 0, tj.

$$\begin{aligned}&\xi^a\xi_a=0\\&\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a=0\end{aligned}$$

Nadalje, za plohu Σ dobivenu presjekom hiperplohe $\mathcal{H}$ kažemo da je *bifurkacijska* ako je prostornolika (svi tangentni vektori na Σ su prostornog tipa) i ako Killingov vektor ξ^a na njoj iščezava. Na kraju, Killingov horizont koji posjeduje bifurkacijsku plohu (u smislu kao maloprije) zovemo *bifurkacijskim Killingovim horizontom*.

U OTR stacionarne crne rupe zaista imaju[10] bifurkacijski Killingov horizont. Štoviše, nad stacionarnim crnim rupama u OTR se može definirati[11] *površinska gravitacija* κ definirana relacijom

$$\xi^b\nabla_b\xi^a|_p=\kappa\xi^a|_p\quad\forall p\in\mathcal{H}\,. \tag{35}$$

Nulti zakon mehanike crnih rupa nalaže da je κ konstanta po horizontu događaja stacionarne crne rupe.

Vratimo se sada na površinski integral zadan s (33). Ako za ξ^a izaberemo vektor t^a koji asimptotski odgovara vremenskoj translaciji, $H(\xi)$ ćemo prepoznati kao kanonsku energiju $\mathcal{E}$. S druge strane, ako za ξ^a izaberemo vektorsko polje ϕ^a koje asimptotski odgovara rotaciji, $H(\xi)$ ćemo prepoznati kao kanonski moment impulsa $\mathcal{J}$. Sve skupa, izrazi za $\mathcal{E}$ i $\mathcal{J}$ i njihove varijacije su :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}&=\int_\infty\delta\boldsymbol{Q}(t)-i_t\boldsymbol{\Theta}\\\mathcal{E}&=\int_\infty\boldsymbol{Q}(t)-i_t\boldsymbol{B}\\\delta\mathcal{J}&=-\int_\infty\delta\boldsymbol{Q}(\phi)-i_\phi\boldsymbol{\Theta}=-\int_\infty\delta\boldsymbol{Q}(\phi)\\\mathcal{J}&=-\int_\infty\boldsymbol{Q}(\phi)-i_\phi\boldsymbol{B}=-\int_\infty\boldsymbol{Q}(\phi)\end{aligned} \tag{36}$$

pri čemu su -1 predfatori u $\delta\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}$ dodani konvencionalno te integrali po sferi u beskonačnosti formi $i_\phi\boldsymbol{\Theta}$ i $i_\phi\boldsymbol{B}$ su 0 jer je ϕ^a tangencijalan na normalu sfere.
Sada smo spremni primijeniti rezultate na stacionarnu crnu rupu s bifurkacijskim Killingovim horizontom. Neka je ξ^a Killingovo polje (koje iščezava na bifurkacijskoj plohi Σ) dano kao suma

$$\xi^a = t^a + \Omega_H^{(\mu)} \phi^a_{(\mu)} \tag{37}$$

gdje je $\phi^a_{(\mu)}$ familija vektorskih polja rotacije. Za $n \leq 4$ ta familija ima samo jedan element[5] pa nema sume po indeksu μ. Neka je još Ξ hiperploha kojoj je ploha Σ jedini kompaktni podskup ruba (ovaj uvjet nalaže da imamo samo jednu crnu rupu).
Sada raspisujemo varijaciju $\delta\boldsymbol{Q}(\xi)$

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{Q}(\xi) &= \delta\boldsymbol{Q}(t + \Omega_H^{(\mu)}\phi_{(\mu)}) = [\text{Def. 5.}] = \\ &= \delta\boldsymbol{Q}(t) + \Omega_H^{(\mu)}\delta\boldsymbol{Q}(\phi_{(\mu)})\end{aligned}$$

i sređujemo lijevu stranu jednakosti izraza (34):

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \delta\boldsymbol{Q}(\xi) - i_\xi\boldsymbol{\Theta} = \\ &= \int_\Sigma \delta\boldsymbol{Q}(t) + \Omega_H^{(\mu)}\delta\boldsymbol{Q}(\phi_{(\mu)}) - i_t\boldsymbol{\Theta} - \Omega_H^{(\mu)} i_{\phi_{(\mu)}}\boldsymbol{\Theta} = \\ &= [(36)] = \delta\mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)}\delta\mathcal{J}_{(\mu)} \\ &\xrightarrow{\xi^a|_\Sigma = 0} \int_\Sigma \delta\boldsymbol{Q}(\xi) = \delta\mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)}\delta\mathcal{J}_{(\mu)}\,.\end{aligned} \tag{38}$$

Jednadžba (38) u sebi sadrži traženi rezultat, ali do eksplicitne forme ćemo doći tehničkim algoritmom supstitucija[6] koji na Σ dokazuje jednakost $\delta\boldsymbol{Q}(\xi) = \kappa\delta\tilde{\boldsymbol{Q}}$, gdje je $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ lokalna, potpuno geometrijski određena $(n-2)$-forma. Uz definiciju entropije crne rupe

$$S = 2\pi \int_\Sigma \tilde{\boldsymbol{Q}} \tag{39}$$

dobivamo relaciju

$$\frac{\kappa}{2\pi}\delta S = \delta\mathcal{E} - \Omega_H^{(\mu)}\delta\mathcal{J}_{(\mu)} \tag{$\star$}$$

analognu termodinamičkoj relaciji

$$T dS = dU - đW$$

tj., relaciji (6) pomnoženoj s temperaturom. Dakle, u ovom kontekstu ima smisla poistovjetiti Noetherin naboj plohe Σ s termodinamičkom entropijom.

V. ZAKLJUČAK

U ovom seminarskom radu smo proučili dva primjera sustava sa simetrijama koje generiraju entropiju kao sačuvani naboj. U prvom, termodinamičkom primjeru, nemamo fizikalno objašnjenje ili motivaciju za vrstu simetrije koju smo nametnuli. Tijekom pripreme za 2. rezultat smo uveli lagranžijansku formulaciju kovarijantnih teorija (za to nas je pripremila literatura[12]) pomoću lagranžijanske n-forme i iskazali Noetherin teorem za simetriju na difeomorfizam. Budući da smo dosta koristili formalizam varijacija, prvo smo ga definirali kao u[12]. Vrijedi još napomenuti da sačuvane veličine poput (33) ili (36) su posljedica invarijantnosti na difeomorfizme generirane vektorskim poljem. Moglo bi se razumno pomisliti da bismo onda zbog beskonačno različitih mogućih izbora vektorskih polja koji bi asimptotski odgovarali, npr. vremenskoj translaciji, imali beskonačno različitih kanonskih energija. Unatoč tome, sve te vremenske translacije imaju istu sačuvanu veličinu, energiju, i pružaju samo jednu informaciju. Takva "degeneracija" proizlazi iz toga što na sačuvane veličine utječe samo asimptotski dio difeomorfizma, a ostalo "nije bitno". Više o toj raspravi se može naći u članku[8]. Na kraju, spomenuli smo 0. zakon i izveli 1. zakon mehanike crnih rupa ($\star$) koji povezuje Noetherin naboj plohe Σ s termodinamičkom entropijom i time završili analizu našeg drugog primjera u seminaru.

---

[1] Prvi su se sjetili ovakve transformacije Sasa i Yokokura u svojem izvodu (na kojem se bazira izvod u seminaru) u članku Termodynamic Entropy as a Noether Invariant, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 140601

[2] Zapravo je $\delta\psi$ test funkcija s kompaktnim nosačem ili ima odgovarajuće trnjenje u beskonaćnosti.

[3] Parcijalna integracija člana $\partial_a\delta\phi\partial^a\phi$ nam daje i član $\partial^a(\delta\phi\partial_a\phi)$, ali $\delta\phi$ ima kompaktan nosač pa će integral po sferi u beskonačnosti propasti.

[4] Pokazuje se u[5,6] da bilo koji lagranžijan invarijantan na difeomorfizme mora biti tog oblika za neke l i $m \in \mathbb{N}$.

[5] V. Iyer, R.M. Wald: Some properties of the Noether charge, Phys. Rev. D **50** (1994) 846–864

[6] R.M. Wald: Black hole entropy is the Noether charge, Phys. Rev. D **48** (1993) R3427

[7] R. M. Wald, J. Math. Phys, **31**, 2378 (1993)

[8] T. Regge and C. Teitelboim, Ann. Phys. **88**, 286 (1974)

[9] Cauchyjeva hiperploha je ona koju svaka vremenolika krivulja siječe točno jednom. Više u knjizi od Walda[12]

[10] S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. **25** (1972) 152; S.W. Hawking and G.R.F. Ellis, The Large Scale Structure of Spacetime (Cambridge University Press, 1973).

[11] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973)

[12] General Relativity, Wald - The University of Chicago Press - Appendix E