Majumdar-Papapetrou prostor-vrijeme

Filip Huško

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

10. rujna 2018.

U ovom seminaru promatrana je Majumdar-Papapetrou klasa prostorvremena. Pokazano je da ovakva prostorvremena odgovaraju ili golim singularitetima ili sustavu nabijenih crnih rupa u međusobnoj ravnoteži. Iz ostalih razmatranja slijedi prirodan zaključak da su Majumdar-Papapetrou prostorvremena jedina koja su stacionarna te sadrže crne rupe, no ovo treba dokazati.

1 Uvod

U Newtonovoj fizici je moguće postići ravnotežnu situaciju u sustavu proizvoljnog broja nabijenih, masivnih tijela pod uvjetima da su svi naboji istog predznaka i da za svaki naboj vrijedi relacija

$$|e_i| = m_i, \tag{1}$$

gdje su uzete prirodne jedinice ($G = c = 1$). Ovo je lako za vidjeti iz izraza za elektrostatičku i gravitacijsku silu (između dva tijela) u ovim jedinicama:

$$\vec{F}_e = e_i e_j \frac{\vec{r_{ij}}}{r_{ij}^3} \qquad , \qquad \vec{F}_g = m_i m_j \frac{\vec{r_{ij}}}{r_{ij}^3} \tag{2}$$

Ravnoteža u ovoj situaciji ne ovisi o samoj raspodjeli tijela$-$ona vrijedi u svakom trenutku i neovisna je o ostalim silama između tijela.

Tema ovog seminara je analogon ove situacije u općoj teoriji relativnosti, a pripadno prostorvrijeme nazvano je po njenim otkrivateljima; radi se o Majumdar-Papapetrou prostor-vremenu [1][2]. Oni su (neovisno jedan od drugoga) otkrili klasu statičnih rješenja slobodnog sustava (bez izvora) Einstein-Maxwell jednadžbi. Problem s njihovim rješenjem, doduše, je taj što nisu geodetski potpuna. Drugim riječima, geodetska jednadžba na ovoj metrici (definiranoj na mnogostrukosti M) za krivulju γ s početnim uvjetima $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ nije dobro definirana za svaku točku $p \in M$ i svaki tangentni vektor $v \in T_pM$ na p.

Unatoč tom problemu, ovu metriku je moguće analitički produljiti na slične načine kao i poznatije metrike poput Schwarzschildove [3], Reissner-Nordstromove [4] ili Kerrove [5-6]. Sve ove metrike su asimptotski ravne, i sve uključuju (uz dobar odabir parametra) horizonte događaja koji predstavljaju rub skupa svih događaja koje može dostignuti promatrač čiji put počinje u beskonačnosti i završava u beskonačnosti. Uz to, svi singulariteti ovih metrika se nalaze unutar tih horizonta događaja. Ovakva rješenja nazivamo crnim rupama. Singularitete koji se ne nalaze unutar nekog horizonta događaja nazivamo golim singularitetima.

U 2. i 3. odjeljku promatramo Majumdar-Papapetrou geometriju te načine kako ju analitički produljiti. Pronalazimo da ova rješenja odgovaraju ili golim singularitetima ili sustavu nabijenih crnih rupa u ravnoteži pod međusobnim gravitacijskim i električnim silama. U 4. odjeljku promatramo generalizaciju Majumdar-Papapetrou geometrije, pronađenu od strane Israela i Wilsona [7]. Radi se o klasi stacionarnih rješenja u kojoj su svi singulariteti goli, ako se nametne uvjet da je prostorvrijeme asimptotski ravno. Prirodni zaključak iz ovih razmatranja bi bio da je jedino stacionarno rješenje s više od jedne crne rupa, a bez golih singulariteta, ono koje odgovara Majumdar-Papapetrou prostorvremenu.

2 Majumdar-Papapetrou prostorvremena

Metrika Majumdar-Papapetrou prostorvremena ima oblik

$$\mathrm{d}s^2 = -U^{-2}(\vec{x})\mathrm{d}t^2 + U^2(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}, \tag{3}$$

gdje je $\vec{x}$ vektor položaja u ravnom trodimenzionalnom prostoru (kojeg ćemo zvati pozadinski prostor u ostatku seminara). Na primjer, za Kartezijeve koordinate, gdje je $\vec{x} = (x, y, z)$, vrijedi

$$\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{4}$$

Jedina neiščezavajuća komponenta vektorskog potencijala $A_\mu(\vec{x})$ je elektrostatični potencijal $\Phi(\vec{x})$, koji je s metrikom povezan kroz relaciju

$$\Phi(\vec{x}) = A_t(\vec{x}) = U^{-1}(\vec{x}). \tag{5}$$

Uz ovu metriku, potreban nam je još Einstein-Maxwell sustav jednadžbi. Maxwellove jednadžbe s prisutnošću samo elektrostatskog potencijala imaju oblik

$$\nabla_i F^{it} = 0, \tag{6}$$

gdje je ∇ kovarijantna derivacija, a F^{ij} elektromagnetski tenzor dan s

$$F^{ij} = g^{ia}g^{jb}F_{ab} = g^{ia}g^{jb}(\partial_a A_b - \partial_b A_a). \tag{7}$$

Vakuumske Einsteinove jedadžbe dane su s

$$R_{ij} = 0. \tag{8}$$

Koristeći metriku iz jednadžbe (3) dobivamo sljedeće Christoffelove simbole:

$$\Gamma^t_{ti} = -\frac{\partial_i U}{U}\ ,\ \ i \neq t \qquad , \qquad \Gamma^i_{tt} = \frac{\partial_i U}{U^5}\ ,\ \ i \neq t \qquad , \qquad \Gamma^i_{ii} = -\frac{\partial_i U}{U}\ ,\ \ i \neq t \tag{9}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{\partial_j U}{U} \ , \ j \neq t \qquad , \qquad \Gamma^i_{jj} = -\frac{\partial_i U}{U} \ , \ j \neq i \ , \ i \neq t \tag{10}$$

Iz ovih Christoffelovih simbola slijede još mnogobrojnije komponente Riemannovog tenzora, koje ne zapisujemo ovdje. Iz njih pak slijedi da su sve četiri Einsteinove jednadžbe $R_{ii} = 0$ iste (kao i Maxwellove jednadžbe) te se svode na Laplaceovu jednadžbu:

$$\nabla^2 U = 0. \tag{11}$$

Singulariteti koji se mogu pojaviti u rješenjima ove jednadžbe su raznih tipova (monopoli, linijski naboji, itd.), no promotrimo za početak najjednostavniji slučaj. Radi se o sustavu monopola, te $U(\vec{x})$ u ovom slučaju ima oblik

$$U(\vec{x}) = 1 + \sum_i \frac{m_i}{r_i}, \tag{12}$$

gdje je r_i dan s

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}. \tag{13}$$

U je normaliziran na jedinicu u beskonačnosti, no radi se o proizvoljnom izboru. U je neiščezavajuć svugdje osim gdje $r_i = 0$, što očito predstavlja položaj singulariteta. Metrika je regularna svugdje osim u tim točkama. Računanjem naboja preko ukupnog toka električnog polja kroz sferu centriranu oko jednog od singulariteta dolazimo do relacije između naboja i masa koja je ista kao u klasičnoj gravitaciji:

$$e_i = m_i. \tag{14}$$

Usredotočimo se na situaciju s dva singulariteta. U poprima oblik

$$U(\vec{x}) = 1 + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}. \tag{15}$$

Pozadinski prostor za ovakav slučaj prikazan je na slici 1. Kao i u Reissner-Nordstromovoj metrici (nabijene crne rupe), singulariteti u $r_1 = 0$ i $r_2 = 0$ su u stvari samo posljedica izbora koordinata$-$geometrija je regularna čak i u samim točkama gdje se singulariteti nalaze.

Regularnu prirodu geometrije u $r_1 = 0$ moguće je pokazati transformacijom koordinata. Prvo transformiramo metriku u sferične koordinate oko monopola u $r_1 = 0$:

$$\mathrm{d}s^2 = -U^{-2}\mathrm{d}t^2 + U^2 r_1^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2), \tag{16}$$

a potom uvedemo transformaciju

$$t = u + F(r_1) \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_1} = \left(1 + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{a}\right)^2 = V^2(r_1), \tag{18}$$

gdje je a udaljenost između izvora u pozadinskim koordinatama. Koristeći formulu za transformaciju koordinata

$$g_{ij}(q) = g_{nm}(x)\frac{\partial x^n}{\partial q^i}\frac{\partial x^m}{\partial q^j} \tag{19}$$

sada imamo

$$\mathrm{d}s^2 = -U^{-2}\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r_1\left(\frac{V}{U}\right)^2 + (U^2 - V^2)\mathrm{d}r_1^2 + r_1^2 U^2(\mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{20}$$

Razvojem U oko r_1 imamo

$$U(r_1) = 1 + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{a} + O(r_1). \tag{21}$$

Uvrštavanjem ove relacije u novu metriku dobivamo

$$\mathrm{d}s^2 = -U^{-2}\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r_1 + r_1^2 U^2(\mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{22}$$

Metrika je onda očito regularna u $r_1 = 0$.

S još jednom promjenom koordinata moguće je produljiti r_1 kroz 0. Naime, ako izaberemo

$$r_1' = -r_1 \qquad , \qquad r_2' = \sqrt{r_1^{2\prime} + a^2 + 2ar_1'\cos\theta}, \tag{23}$$

onda imamo novu metriku istog oblika kao stara (jednadžba 3), no s promijenjenim U:

$$U'(\vec{x'}) = 1 - \frac{m_1}{r_1'} + \frac{m_2}{r_2'}. \tag{24}$$

Dio prostora opisan s $r_1 > 0$ zovemo tip I, a dio opisan s $r_1 < 0$ zovemo tip II u ostatku seminara. Funkcija U' ima isti oblik kao elektrostatski potencijal naboja $-m_1$ u $r_1' = 0$ i naboja $+m_2$ u $r_2 = 0$. Mijenja se iz velikih negativnih vrijednosti blizu $r_1' = 0$ do velikih pozitivnih vrijednosti blizu $r_2' = 0$. Prirodni zaključak je da postoji neka ekvipotencijala na kojoj U' iščezava, a metrika je tamo singularna. Kako bi provjerili da se radi o pravom singularitetu, može se izračunati invarijanta polja:

$$J = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu t}F^{\mu t} = F_{\mu t}g^{\mu\mu}g^{tt}F_{\mu t} = -U'^2 g^{\mu\mu}(\partial_\mu U'^{-1})^2 = -\left(\frac{\nabla U'}{U'^2}\right)^2. \tag{25}$$

Iz ovog se lako vidi da J divergira tamo gdje je $U' = 0$.

Metriku dana s jednadžbom (20) moguće je i na druge načine produljiti kroz $r_1 = 0$. Na primjer, može se uvesti varijabla w umjesto u, dana preko

$$u + w = 2F(r_1). \tag{26}$$

Metrika u ovom slučaju glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -U^{-2}\mathrm{d}w^2 - 2\mathrm{d}w\mathrm{d}r_1\left(\frac{V}{U}\right)^2 + (U^2 - V^2)\mathrm{d}r_1^2 + r_1^2U^2(\mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{27}$$

Efektivno, varijabla u je zamijenjena s w. S obzirom da se cijeli raspon w može postići na fiksnom u dopuštanjem r_1 da ide preko pozitivnih ili negativnih vrijednosti, u stvari imamo dvije različite ekstenzije metrike iz jednadžbe (20), jedna za $r_1 < 0$ i jedna za $r_1 > 0$. Ako krenemo iz $r_1 < 0$, pronalazimo regiju tipa I. Ako pak krenemo iz $r_1 > 0$, pronalazimo regiju tipa II_1.

Ovakav tip regije je omeđen singularitetom te površinom $r_1' = 0$. Može se produljiti prolaskom kroz $r_1' = 0$ na jedan od dva načina diskutiranih iznad. Regija tipa I je omeđena s $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ i beskonačnosti. Može ju se produljiti samo prolaskom kroz $r_1 = 0$ ili $r_2 = 0$. Produljenjem kroz $r_2 = 0$ bi naišli na područje tipa II_2 koje očito ima ista svojstva kao tip II_1. Na ovaj način se postiže kompleksna struktura mogućih koordinatnih regija koje se međusobno poklapaju, kao i u Reissner-Nordstrom slučaju. Ovakva kompleksna struktura prikazana je na slici 2.

Majumdar-Papaetrou geometrija opisana u ovom odjeljku je očito dosta posebna. Njeni singulariteti imaju specifičnu relaciju između naboja i mase, ali i njeni dijelovi su tako posloženi da prolaskom kroz $r_1 = 0$ eventualno možemo doći do istih točaka koje su dostupne prolaskom kroz $r_2 = 0$.

3 Majumdar-Papapetrou geometrije s golim singularitetima

Majumdar-Papapetrou metrika (jednadžba 3) dopušta izvore različite od monopola. Drugim riječima, funkcija U može poprimiti neki oblik različit od $1/r$, što odgovara točkastim izvorima. U ovom odjeljku ćemo pokazati da svi izbori osim monopola vode do golih singulariteta.

Pretpostavimo da je izvan neke sfere u pozadinskom prostoru dano rješenje Laplaceove jednadžbe za U koje asimptotski prilazi jedinici. Ovakva funkcija U predstavlja asimptotski ravnu Majumdar-Papapetrou metriku koja se može analitički produljiti (prema unutrašnjosti sfere) sve dok U ne bude beskonačan. Mogući slučajevi su da je U beskonačan u točki ili u liniji u pozadinskom prostoru.

Ako želimo da beskonačnosti u U nisu goli singulariteti, mora postojati ekvipotencijala koja sadržava točku gdje U je beskonačan. Također, U mora postojati beskonačan iz svih smjerova u isto vrijeme. U protivnom, gibanjem po ekvipotencijali bi U ostao konstantan, a $(\nabla U)^2$ bi divergirao, dajući beskonačnu elektromagnetsku invarijantu J te goli singularitet. Teorem iz potencijalne teorije [8] govori da u slučaju točkastih beskonačnosti U mora poprimiti oblik

$$U(\vec{x}) = w(\vec{x}) + c/r, \tag{28}$$

gdje je c konstanta, r udaljenost od singulariteta, a w funkcija koja je tamo regularna. No, ovakav potencijal je već diskutiran u prošlom odjeljku, a radi se o monopolnim singularitetima.

U slučaju linijskih singulariteta, rezultat iz potencijalne teorije se može izgeneralizirati te se može pokazati da U ne smije divergirati brže od

$$U(x) \approx f(z) \ln(\rho), \tag{29}$$

gdje su ρ i z cilindrične koordinate s osi z koja je paralelna tangentni na linijski singularitet u toj točki. Ponašanje ovakvog potencijala, doduše, također vodi do divergirajuće elektromagnetske invarijante J.

Zaključak iz razmatranja u ovom odjeljku je da su točkasti monopoli u Majumdar-Papapetrou geometriji jedini singulariteti koji predstavljaju crne rupe, a ne gole singularitete.

4 Israel-Wilson metrike

Israel-Wilson metrika je generalizirana klasa Majumdar-Papapetrou metrika, a radi se o stacionarnim rješenjima Einstein-Maxwellovog sustava jednadžbi bez izvora. Oblik metrike u pitanju je

$$\mathrm{d}s^2 = -|U|^{-2}(\mathrm{d}t + \vec{\omega} \cdot \mathrm{d}\vec{x})^2 + |U|^2 \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}, \tag{30}$$

gdje je U bilo koje kompleksno rješenje Laplaceove jednadžbe u pozadinskom prostoru. Vektor ω pronalazimo rješavanjem jednadžbe

$$\nabla \times \vec{\omega} = i[U \nabla U^* - U^* \nabla U] = \vec{\tau}. \tag{31}$$

Elektrostatski potencijal Φ te magnetski skalarni potencijal χ su definirani relacijama

$$F_{ti} = \partial_i \Phi, \tag{32}$$

$$F^{ij} = |U|^2 \varepsilon^{ijk} \partial_k \chi, \tag{33}$$

a njihova veza s funkcijom U je

$$\Phi + i\chi = 1/U. \tag{34}$$

Radi jednostavnosti, U i Φ će uvijek biti normalizirani na 1 u beskonačnosti, a χ na 0.

Israel-Wilson metrika je još bogatija od Majumdar-Papapetrou metrike, no ovdje se opet koncentriramo samo na jednostavnije primjere. Konkretno, pretpostavljamo da U predstavlja diskretne izvore:

$$U(\vec{x}) = 1 + \sum_i \frac{m_i}{r_i}, \tag{35}$$

gdje je r_i dan s

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}. \tag{36}$$

Bitno je naglasiti da Israel-Wilson slučaj dopušta kompleksne m_i te $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, za razliku od Majumdar-Papapetrou metrike. No, Israel i Wilson su dokazali da kompleksni $\vec{x}_i$ vode do golih singulariteta čak i u slučaju točkastih izvora. Zato pretpostavljamo da su $\vec{x}_i$ realni, dok mase m_i mogu biti kompleksne:

$$m_i = M_i + iN_i. \tag{37}$$

Najjednostavniji primjer je onaj s jednim diskretnim izvorom,

$$U = 1 + \frac{M + iN}{r}. \tag{38}$$

Jednadžba (30) za $\vec{\omega}$ se u ovom slučaju svodi na sljedeći sustav jednadžbi:

$$\frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_\phi \sin\theta) - \frac{\partial\omega_\theta}{\partial\phi}\right) = \frac{2N}{r^2}, \tag{39}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\omega_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\phi) = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) - \frac{\partial\omega_r}{\partial\theta} = 0. \tag{41}$$

Jednostavno rješenje ovog sustava slijedi izborom $\omega_r = \omega_\theta = 0$. U ovom slučaju, prva jednadžba sustava se svodi na

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_\phi \sin\theta) = \frac{2N}{r}\sin\theta. \tag{42}$$

Rješenje ove jednadžbe vodi na konačni oblik vektora $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{2N}{r}\right)\left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)\hat{\phi}. \tag{43}$$

Uvođenjem nove radijalne koordinate R definirane s

$$R = r + M \tag{44}$$

metrika poprima oblik

$$\mathrm{d}s^2 = -V^2\left(\mathrm{d}t + 4N\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + V^2\mathrm{d}R^2 + (R^2 + N^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{45}$$

$$V^2 = \left(1 + \frac{M}{R}\right)^2 + \frac{N^2}{R^2}. \tag{46}$$

Ova metrika predstavlja elektromagnetsku generalizaciju NUT prostorvremena s konstantom $8(N^2 + M^2)$. Najzanimljivije svojstvo ovog prostorvremena je da je za $r > 0$ geometrija regularna ako se za $r = const.$ površine pretpostavi da je topologija tipa S^3, dok je singularna ako se pretpostavi uobičajeni $R \times S^2$. Singularitet se u ovom slučaju nalazi na osi $\theta = \pi$.

Ovakav tip singulariteta se javlja općenito kod Israel-Walker metrika, iako to ovdje nećemo dokazivati. Kao i u nabijenom NUT slučaju, ovi singulariteti su pravi singulariteti ako inzistiramo na tome da je prostor asimptotski ravan. Također, moguće je pokazati da su ovi singulariteti goli osim ako su svi $N_i = 0$, te da su svi točkaste prirode. No, ako je to slučaj, onda se ionako radi o Majumdar-Papapetrou prostorvremenu, koje je ne samo stacionarno nego i statično.

5 Zaključak

U ovom seminaru smo promatrali posebnu klasu metrika prostorvremena, tzv. Majumdar-Papapetrou metrike. Pokazali smo da ove metrike odgovaraju ili golim singularitetima, ili sustavu nabijenih crnih rupa u ravnoteži pod međusobnim silama. Uvjet za ovu ravnotežu je da njihovi naboji i mase budu jednake u sustavu prirodnih jedinica, kao i u Newtonovskom slučaju. Promatranjem generaliziranih Majumdar-Papapetrou metrika (Israel-Wilson metrike, koje odgovaraju stacionarnom, a ne statičnom slučaju) smo pokazali da su statične metrike tog tipa jedine koje mogu sadržavati singularitete s horizontima događaja.

6 Literatura

J.B. Hartle, S. W. Hawking: Solutions of the Einstein-Maxwell Equations with Many Black Holes, Commun. Math. Phys. 26 (1972) 87-101

[1] Majumdar, S.D.: Phys. Rev. 72, 930 (1947)

[2] Papapetrou, A.: Proc. Roy. Irish Acad. A51, 191 (1947)

[3] Kruskal, M.: Phys. Rev. 119, 1742 (1960)

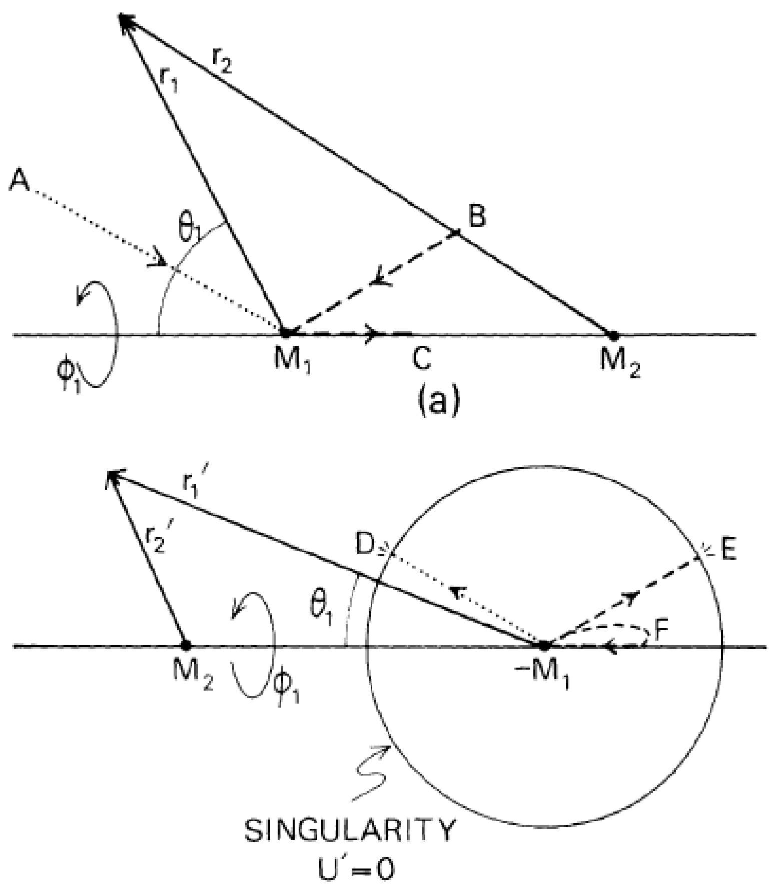
[4] Graves, J., Brill, D.: Phys. Rev. 120, 1507 (1960)

[5] Boyer, R.H., Lindquist, R. W.: J. Math. Phys. 8, 265 (1967)

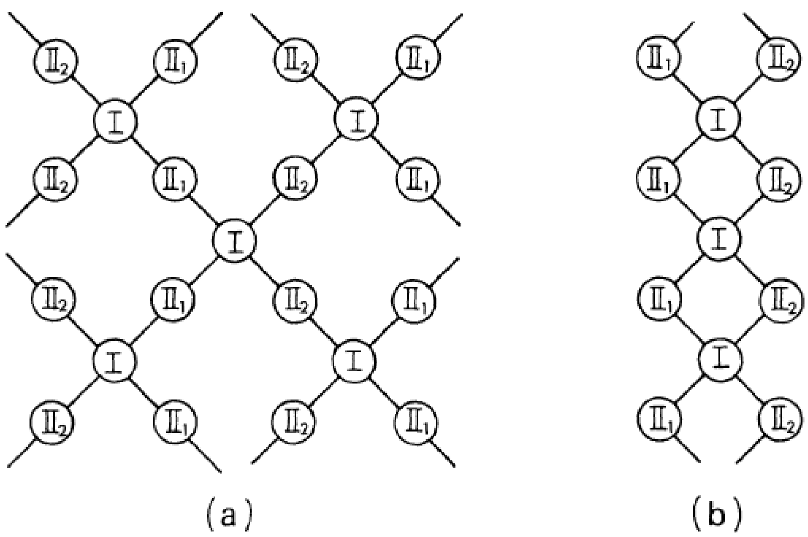
[6] Carter, B.: Phys. Rev. 174, 1559 (1968)

[7] Israel, W., Wilson, G. A.: J. Math. Phys. 13, 865 (1972)

[8] Kellog, O. D.: Foundations of potential theory. Frederick Ungar, p. 270



Slika 1: Pozadinski prostor za slučaj dviju crnih rupa jednakih masa i naboja. Horizonti događaja odgovaraju točkama $r_1 = 0$ i $r_2 = 0$, iako imaju konačnu površinu. Prolaskom kroz horizont događaja od crne rupe m_1, tipičnim iscrtkanim putem na slici (a) završavamo u drugom pozadinskom prostoru, koji je prikazan na slici (b). U ovom prostoru ne možemo dostići beskonačnost jer nas sprječava pravi singularitet u $U = 0$.



Slika 2: (a) Najopćenitije moguće produljenje Majumdar-Papapetrou metrike za dvije crne rupe. Potpuno rješenje može se dobiti postupnim spajanjem regija I, II_1 te II_2. (b) Podskup regija sa slike (a). Ovdje se vidi da se dva promatrača koji upadnu u dvije različite crne rupe mogu kasnije susresti u replikama njihovih originalnih regija I.