Kolmogorov-Arnold-Moser Teorem (KAM teorem)

Domjan Barić, F-4204

PMF- Fizički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

31.08.2017.

Sažetak

Iskazali smo i dokazali formalno KAM teorem. Započinjemo s neformalnim iskazom i prezentiramo ideju dokaza. Zatim opisujemo difeomorfizam kružice. Primjenjujemo glavne ideje KAM teorije kako bi pronašli funkciju koja konjugira naš difeomorfizam s rotacijom. Zatim iskazujemo i dokazujemo formalno KAM teorem u njegovom orginalnom obliku.

Contents

1 Uvod

Kolmogorov-Arnold-Moserov teorem (KAM teorem) je rezultat o dinamičkim sustavim koji govori kako se ponašaju kvaziperiodične putanje pod utjecajem malih perturbacija. Teorem djelomično rješava problem malih nazivnika koji se pojavljuje u perturbacijskoj teoriji klasične mehanike.
Pitanje je rezultira li malena perturbacija konzervativnog dinamičkog sustava trajnom kvaziperiodičnom putanjom. Izvorni proboj napravio je Andrey Kolmogorov 1954. godine. To su rigorozno dokazali i proširili Moser 1962. i Vladimir Arnold 1963. a opći rezultat poznat je kao KAM teorem. Arnold je izvorno mislio da se teorem može upotrijebiti na dinamiku Sunčevog sustava ili druge probleme s n-tijela, ali se pokazalo suprotno. Primjenjiv je samo na probleme tri tijela zbog degeneracije u Arnoldovoj formulaciji problema za više tijela. Kasnije, Gabriella Pinzarin je pokazala kako ukloniti ovu degeneraciju[4].
Ako promatramo Sunčev sustav bez međudjelovanja planeta imamo integrabilan sustav, čije rješenje znamo napisati eksplicitno. Tada možemo pokušati sustavno dodavati interakciju između planeta perturbacijski. Fizičari i astronomi koristili su ovu metodu opsežno tijekom devetnaestog stoljeća, razvijajući redove za rješenja tih jednadžbi po malom parametru. Taj parametar je bio masa planeta podijeljena s masom Sunca. Međutim, konvergencija takvih redova nikad nije uspostavljena - čak ni kad je kralj Švedske ponudio vrlo značajnu nagradu svakome tko bi uspio. Teškoća u uspostavljanju konvergencije tih redova proizlazi iz činjenice da članovi reda imaju male nazivnike. Ako su periodi dvaju planeta razmjerni, javlja se "rezonancija" i nestabilnost. To stvara probleme u pertubacijskom postupku.
Ovaj problem je riješio KAM teorem. Dvije glavne ideje KAM teorema su:

- Linearizirajmo problem oko približnog rješenja i riješimo linearizirani problem - Sad se moramo suočiti s malim nazivnicima.
- Induktivno poboljšavajmo približno rješenje pomoću rješenja lineariziranog problema kao osnove Newtonove metode.

Prvo ćemo riješiti jednostavniji problem, difeomorfizam kružnice i kako je on povezan s rotacijom. Ovaj problem je jednostavniji, a ponudit će nam jako dobar pogled u detalje KAM teorije. Nakon toga ćemo promotriti KAM teorem u njegovoj originalnoj formulaciji.
Prije toga ćemo neformalno iskazati KAM teorem i opisati što on znači.

1.1 Neformalni iskaz KAM teorema

Teorem 1.1. Ako imamo integrabilni hamiltonijan $h_0(\mathbf{p})$ i dodamo mu malu smetnju $h_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, tako da generalizirani impulsi nisu očuvani,što se događa sa sustavom. Kako se invarijantni torusi ponašaju kad hamiltonijan promijenimo u $h = h_0 + h_1$. Preciznije promotrimo torus koji odgovara $\mathbf{p} = 0$. Uzmimo da $\omega = \partial h_0/\mathbf{p}$. Tada nam Kolmogorovljev teorem kaže da ako vrijedi

- $h_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ je dovoljno malo,
- $\omega_0 = \omega(\mathbf{0})$ je dovoljno iracionalno,
- $\omega(\mathbf{p})$ se mijenja dovoljno brzo na $\mathbf{p} = \mathbf{0}$,

tada postoji difeomorfizam $\Phi : (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ blizak identiteti takav da ako $H = h \circ \Phi$, onda

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = a + \omega_0 \cdot \mathbf{P} + R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \ \textit{gdje je} \ R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in O(|\mathbf{P}|^2). \tag{1}$$

Točnije, gibanje: $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0) + t\omega_0$, $\mathbf{P}(t) = 0$ je rješenje hamiltonovih jednadžbi, koje su konjugacija ne perturbiranog sustava, pa invarijantni torus $\mathbf{p}$=0 ostaje očuvan.
Pojednostavljeno, KAM teorem nam opisuje što se događa s invarijantnim torusima kada uvedemo perturbaciju. Zadaje nam kakva perturbacija mora biti da bi torusi bili očuvani.

2 Difeomorfizam kružnice

Započnimo raspravljajući o jednom od najjednostavnijih primjera u kojima se susrećemo s problemom malih nazivnika i za koje KAM teorem pruža rješenje. Možda odmah nije jasno kako je ovaj problem povezan s klasičnom mehanikom i KAM teoremom, ali mnoge tehničke detalje s kojima ćemo se ovdje susresti, pronaći ćemo i u dokazu klasične formulacije KAM teorema.
Razmotrit ćemo difemorfizme kružnice koji čuvaju orijentaciju, ili ekvivalentno, njihova povlačenja na realne brojeve:

$$\phi : R^1 \to R^1, \tag{2}$$

$$\phi(x) = x + \tilde{\eta}(x),\ \tilde{\eta}(1+x) = x,\ \tilde{\eta}'(x) > -1. \tag{3}$$

Promatramo ϕ kao dinamički sustav, razmatramo njegove orbite, tj. zanima nas slijed točaka $\phi^{(n)}(x)(mod 1)_{n=0}^{\infty}$, gdje $\phi^{(n)}$ znači n-terostruka kompozicija ϕ-a s samim sobom. Često nas zanima jesu li orbite periodičke ili guste. Najjednostavniji ovakav difeomorfizam je rotacija $\phi(x) = x + \alpha$. Dinamiku rotacije u potpunosti razumijemo. Ako je α racionalan, sve orbite su periodičke, a ni jedna nije gusta.
Nas zanimaju kompliciraniji sustavi od jednostavne rotacije, stoga pretpostavljamo:

$$\phi(x) = x + \alpha + \tilde{\eta}(x), \tag{4}$$

gdje je $\tilde{\eta}(x)$ ona definirana u (2). Promatrati ćemo samo analitičke difeomorfizme. Definirajmo skup $S_\sigma = \{z \in \mathbb{C} | |Im(z)| < \sigma\}$. Pretpostavimo da je

$$\eta \in B_\sigma = \{\eta | \eta \textit{ iz (2) analitička na } S_\sigma, \eta(S_\sigma) = ||\eta||_\sigma < \infty\}. \tag{5}$$

Možemo pretpostaviti $\sigma < 1$ bez gubitka općenitosti. Cilj ovog poglavlja je razumjeti dinamiku $\phi(x) = x + \alpha + \eta(x)$ kada η ima malu normu. Jedan od načina da to učinimo je da pokažemo da je dinamika ϕ "poput" dinamike sustava kojeg razumijemo - na primjer, pretpostavimo da možemo pronaći promjenu varijabli koje transformiraju ϕ u čistu rotaciju. Zatim, budući da razumijemo dinamiku rotacije, također bismo razumjeli i dinamiku preslikavanja ϕ. Ako izrazimo ovu promjenu varijabli kao $x = H(\xi)$, gdje $H(\xi + 1) = 1 + H(\xi)$ čuva periodičnost preslikavanja ϕ, onda želimo pronaći H takav da

$$H^{-1} \circ \phi \circ H(\xi) = R_\rho(\xi), \tag{6}$$

gdje je $R_\rho(\xi)$ rotacija. Kažemo da ovakva promjena varijabli konjugira ϕ s rotacijom R_ρ. Sličan primjer je gibanja planeta u sunčevom sustavu. Znamo

riješiti gibanje planeta ako zanemarimo njihovo međusobno djelovanje. Želimo promatrati gibanje s međudjelovanjem "poput" gibanja bez međudjelovanja.
Uvodimo **rotacijski broj** ρ:

Definicija 2.1. $\rho(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{(n)}(x)-\phi(x)}{n}$.

Poincaré je pokazao da limes uvijek postoji i da je neovisan o x. Također treba napomenuti da bilo koji $\tilde{\phi} = H^{-1} \circ \phi \circ H$, ima isti rotacijski broj kao i ϕ. Ako je ϕ dan kao $\phi(x) = x+\alpha+\eta(x)$, i vrijedi da je rotacijski broj $\rho = \alpha$, onda imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Sigma_{j=0}^{n-1}\eta \circ \phi^{(j)}(x) = 0. \tag{7}$$

Iz ovoga odmah slijedi da ako je $\phi(x) = x+\rho+\eta(x)$ i ρ rotacijski broj, onda nužno postoji x_0 takav da vrijedi $\eta(x_0) = 0$.
Moramo se pitati o svojstvima koje želimo da promjena varijabli H zadovoljava. Ako tražimo samo da H bude homeomorfizam, tada Denjoyjev teorem[2] kaže da ako je rotacijski broj za ϕ iracionalan, uvijek možemo pronaći H koji konjugira ϕ u rotaciju. Međutim, ako želimo detaljnije informacije o dinamici, želimo da H ima dodatnu glatkoću. Zapravo, prirodno je tražiti da je H jednako glatko kao i sam difemomorfizam - u ovom slučaju, analitički. (općenito postoji gubitak glatkoće. Vidjet ćemo da u ovom slučaju postoji analitička konjugacijska funkcija H, ali je njegova domena nešto manja od domene preslikavanja ϕ). Iznenađujuće , tehnike koje je Denjoy koristio, neupotrebljive su u ovom slučaju. Problem se javlja kad je η mali. Kako bi uopće mogli raspravljati o KAM teoremu moramo se upoznati s teorijom brojeva.
Bilo koji iracionalni broj može se proizvoljno dobro aproksimirati racionalnim brojevima, i zapravo Dirichletov teorem[3] čak daje procjenu koliko je dobra aproksimacija. Točnije, kaže da, s obzirom na bilo koji iracionalni broj ρ, postoji beskonačno mnogo parova cijelih brojeva (m, n) tako da $|\rho - (m/n)| < 1/n^2$. S druge strane, većina iracionalnih brojeva ne može se aproksimirati mnogo bolje od ovoga.

Definicija 2.2. Realni broj ρ je tipa (K, ν), ako postoje pozitivni brojevi K i ν takvi da $|\rho - (m/n)| > K|n|^{-\nu}$, za sve parove cijelih brojeva (m, n).

Za svaki $\nu > 2$, skoro svaki iracionalni broj je tipa (K, ν) za $K > 0$. Sada ćemo iskazati Arnoldov teorem. Arnold ga je dokazao koristeći KAM teoriju. Dokaz se može rastaviti na 2 dijela. Prvi dio je linearizacija jednadžbe, a drugi iteracija Newtonove metode za traženje nultočaka. Ovi koraci će se pojaviti kada budemo opisivali procese u Hamiltonovoj mehanici.

Teorem 2.1. Neka je ρ tipa (K, ν). Tada postoji $\epsilon(K, \nu, \sigma)$ takav da ako $\phi(x) = x + \rho + \eta(x)$ ima rotacijski broj ρ i $||\eta||_\sigma < \epsilon(K, \nu, \sigma)$, onda postoji analitička i invertibilna promjena varijabli H koja konjugira ϕ i rotaciju.

2.1 Korak 1: Analiza linearizirane jednadžbe

Kako je $||\eta||_\sigma$ mali, difeomorfizam ϕ je "blizu" rotaciji. Stoga, pretpostavljamo da je promjena varijabli blizu identiteti t.j. $H(x)x + h(x)$, gdje je h "malo". Ako uvrstimo H u (5), te razvijemo h u η do prvog reda, imamo:

$$h(x + \rho) - h(x) = \eta(x). \tag{8}$$

Kako su sve funkcije periodičke, možemo odmah napisati rješenje za Fourierove koeficijente funkcije h. Neka je $\hat{\eta}(n)$ n-ti Fourierov red funkcije η, tada je n-to Fourierov koeficijent funkcije h dan s:

$$\hat{h}(n) = \frac{\hat{\eta}(n)}{e^{2\pi i n\rho} - 1}, n \neq 0. \tag{9}$$

Treba napomenuti da i ako je h dana s ovim koeficijentima dobro definirana, ona nije rješenje jednadžbe (8) već rješenje jednadžbe

$$h(x + \rho) - h(x) = \eta(x) - \int_0^1 \eta(x)dx = \eta(x) - \hat{\eta}(0). \tag{10}$$

To je zato što se nulti Fourierov koeficijent funkcije h izgubi u jednadžbi (8). Činjenica da h ne riješava (8) komplicira procjene u nastavku. Problemi s konvergencijom koeficijenata h nastaju zbog prisutnosti faktora $e^{2\pi i n\rho} - 1$ u nazivniku sumanda, a to je dobro poznati problem malih nazivnika koji je KAM teorija napokon riješila. Prvo ćemo primijetiti da ako je ρ racionalan, suma koja određuje h neće konvergirati, jer će nazivnik biti jednak nuli za beskonačno mnogo n-ova za koje $\rho n = m$ za neke $m \in \mathbf{Z}$. Dakle, želimo da je ρ iracionalan. Ako pretpostavimo da je ρ tipa (K, ν), imamo određenu kontrolu nad time koliko se nazivnik približi nuli. Sljedeća lema odmah nam omogućuje da procijenimo $h(x)$.

Lema 2.1. Ako je ρ tipa (K, ν), onda

$$|e^{2\pi i n\rho} - 1| = |e^{2\pi i m}(e^{2\pi i(n\rho - m)} - 1)| \geqslant 4K|n|^{-\nu - q)} \tag{11}$$

ako $n \neq 0$.

Dokaz slijedi iz definicije broja tipa (K, ν). Koristeći ovu lemu, činjenicu da je $\eta \in B_\sigma$ i Cauchyev teorem o nejednakostima na kuglama[5], imamo procjenu za h, za bilo koji $\delta > 0$ i $4\pi\delta < 1$:

$$||h||_{\sigma-\delta} \leqslant \frac{\Gamma(\nu)}{K(2\pi\delta)^\nu}||\eta||_\sigma, \tag{12}$$

Gdje je Γ gama funkcija. Primijetimo da nemamo procjenu za h na cijelom B_σ. Izgubili smo dio analitičnosti. Ako idemo pronaći h klasičnim metodama, ubrzo bi vidjeli da naš rezultat nije više analitičan ni na jednom dijelu prostora. Ovdje se nalazi druga "velika" ideja KAM teorije:

2.2 Korak 2: Newtonova medtoda u Banachovom prostoru

Banachov prostor je potpun, normiran vektorski prostor. Newtonova metoda kaže da ako želite pronaći korijene neke nelinearne jednadžbe, trebate uzeti približno rješenje, a zatim upotrijebite linearnu aproksimaciju na funkciju čiji korijeni nastojite pronaći. Zatim koristite ovu poboljšanu aproksimaciju kao svoju novu početnu točku i ponavljate ovaj postupak iterativno. Mi promatramo ϕ kao aproksimaciju rotacije, koristimo linearnu aproksimaciju $H(x) = x + h(x)$, kako bismo poboljšali aproksimaciju. Ako $h(x)$ rješava (8), onda je $H^{-1} \circ \phi \circ H(\xi) = R_\rho(\xi)$ i gotovi smo. Ako h(x) nije riješenje, nadamo se da ako iskoristimo $H(x)$ koji je rješenje jednadžbe (8), $H^{-1} \circ \phi \circ H(\xi)$ će biti bliže rotaciji R_ρ nego ϕ i onda možemo iterativno tražiti bolje rješenje. Prvo moramo provjeriti je li H invertibilan. Kako je $H(z) = Z + h(z)$, H će imati analitički inverz na domeni za koju vrijedi $||h'|| < 1$. Cauchyev teorem[5] i jednadžba (12) nam daju

$$||h'||_{\sigma-2\delta} \leqslant \frac{2\pi\Gamma(\nu)}{K(2\pi\delta)^{\nu+1}}||\eta||_\sigma, \tag{13}$$

pa možemo zaključiti da ako vrijedi $2\pi\Gamma(\nu)||\eta||_\sigma < K(2\pi\delta)^{(\nu+1)}$ i $4\pi\delta < 1$, onda $H(z)$ ima analitički inverz na slici od $S_{\sigma-2\delta}$ Primijetimo da ako iskoristimo ovaj rezultat i jednadžbu (12) imamo $||h||_{\sigma-\delta} < \delta$. stoga, ako je $z \in S_{\sigma-2\delta}$, onda je $H(z) \in S_{\sigma-\delta}$. Nadalje, lako se može pokazatai da je $H^{-1}(z)$ definiran za sve $z \in S_{\sigma-3\delta}$.

Lema 2.2. Ako je $2\pi\Gamma(\nu)||\eta|| < K(2\pi\delta)^{\nu+1)}$ i $4\pi\delta < 1$, onda je H^{-1} dan s $H^{-1}(z) = z - h(z) + g(z)$, gdje je $||g||_{\sigma-4\delta} \leqslant \frac{2\pi\Gamma(\nu)^2}{K^2(2\pi\delta)^{(2\nu+1)}}||\eta||^2_\sigma$.

Dokaz ovdje neću iznositi, ali ideja je napisati $z = H^{-1} \circ H(z)$, te zatim riješiti jednadžbu po g(z).

Promotrimo sad transformirani difeomorfizam $\tilde{\phi}(x) = H^{-1} \circ \phi \circ H(x)$. Kako je h samo približno rješenje linearizirane jednadžbe, $\tilde{\phi}$ nije rotacija, ali se nadamo da će se razlikovati od prave rotacije samo u kvadratično u članovima h i η. Koristeći rezultat prethodne leme možemo pokazati:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) = x + \rho + \{h(x) - h(x+\rho) + \eta(x)\} + \{\eta(x + h(x)) - \eta(x)\} \\ + \{h(x+\rho) - h(x + \rho + h(x) + \eta(x + h(x)))\} \\ + g(x + h(x) + \rho + \eta(x + h(x))).\end{aligned} \tag{14}$$

Primijetimo prvo da je izraz u prvim zagradam jednak $\hat{\eta}_0$. Slijedeći izraz u zagradama možemo napisati kao $\int_0^1 \eta'(x+sh(x))h(x)ds$. Ako je $2\pi\Gamma(\nu)|\eta||_\sigma < K(2\pi\delta)^{(\nu+1)}, 4\pi\delta < 1, x \in S_{\sigma-4\delta}$, možemo ograničiti izraz na $B_{\sigma-4\delta}$ s $2\pi||\eta||_\sigma \frac{\Gamma(\nu)}{K(2\pi\delta)^{(\nu+1)}}||\eta||_\sigma$. Isto možemo napraviti i za izraz u slijedećim zagradama. Naposlijetku, ako vrijedi $|Imx| < \sigma - 6\delta$, posljedni izraz je ograničen s Lemom 1.2.
Definirajmo $\tilde{\eta}(x)$ kao $\tilde{\phi}(x) = x + \rho + \tilde{\eta}(x)$. Kako je ρ rotacijski broj, znamo da postoji x_0 takav da$\tilde{\eta}(x_0) = 0$. Slijedi:

$$|\hat{\eta}(0)| \leqslant 2\pi||\eta||_\sigma^2 \frac{\Gamma(\nu)}{K(2\pi\delta)^{\nu+1}} + \frac{4\pi(\Gamma(\nu))^2}{K^2(2\pi\delta)^{2\nu+1}}||\eta||_\sigma^2 + \frac{2\pi\Gamma(\nu)^2}{K^2(2\pi\delta)^{2\nu+1}}||\eta||_\sigma^2 \tag{15}$$

Iz ovoga slijedi rezultat:

$$||\tilde{\eta}||_{\sigma-6\delta} \leqslant \frac{16\pi(\Gamma(\nu))^2}{K^2(2\pi\delta)^{2\nu+1}}||\eta||_\sigma^2. \tag{16}$$

Iz svega ovog najvažnije je primijetiti da je procjena $\tilde{\eta}$ kvadratična u maloj vrijednosti $||\eta||_\sigma$.
Dokaz Arnoldovog teorema dovršen je induktivnim ponavljanjem gore navedenog postupka. Glavna stvar koju moramo provjeriti je da ne izgubimo svu našu domenu analitičnosti. Napomenimo da $\tilde{\phi}$ je analitička na užoj traci nego što je bio naš izvorni difeomorfizam ϕ. Bitni razlog da postoji konačna domena analitičnosti po završetku postupka jest da se količina za koju se prostor smanjio nakon n-tog koraka proporcionalna razlici difeomorfizma od rotacije nakon n-tog koraka, i zahvaljujući brzoj konvergenciji Newtonove metode, to je jako malo.
Induktivni argument:
Neka je $\phi_0(x) \equiv \phi(x)$, naš originalni difeomorfizam, i definirajmo $\eta_0(x) \equiv \eta(x)$. Neka je $\phi_{n+1}(x) = H_n^{-1} \circ \phi_n \circ H_n(x) = x + \rho + \eta_{n+1}(x)$,gdje je $H_n(x) = x + h_n(x)$, i h_n je rješenje jednadžbe $h_n(x+\rho) - h_n(x) = \eta_n(x) - \hat{\eta}(0)$. Nadalje definirajmo niz induktivnih konstanti:

- $\delta = \frac{\sigma}{36(1+n^2)}, n \geqslant 0$

- $\sigma_0 = \sigma$ i $\sigma_{n+1} = \sigma_n - 6\delta_n$, za $n \geqslant 0$.
- $\epsilon_0 = ||\eta||_\sigma$ i $\epsilon_0^{(3/2)^n}$ za $n \geqslant 0$.

Lema 2.3. Ako vrijedi $\epsilon < \left(\frac{K}{16\pi\Gamma(\nu)}(\frac{\sigma}{36})^{(\nu+1)}\right)^8$, onda $\phi_{n+1}(x) = x + \rho + \eta_{n+1}(x)$, gdje je $\eta_{n+1} \in B_{\sigma_{n+1}}$, i $||\eta_{n+1}||_{\sigma_{n+1}} \leqslant \epsilon_{n+1}$. Nadalje, $H_n(x) = x + h_n(x)$ zadovoljava $||h_n||_{\sigma_n-\delta_n} \leqslant \frac{\Gamma(\nu)\epsilon_n}{K(2\pi\delta_n)^\nu}$, dok je $H_n^{-1}(x) = x - h_n(x) + g_n(x)$, gdje je $||g_n||_{\sigma_n-4\delta_n} \leqslant \frac{2\pi\Gamma(\nu)^2\epsilon_n^2}{K^2(2\pi\delta_n)^{2\nu+1}}$.

Dokaz: Leme 1.1 i 1.2 potvrđuju procjenu za h_n i g_n za $n = 0$. Iz rezultata (16) slijedi procjena za $||\eta_1||_{\sigma_1}$. Napomenimo da su induktivne konstante odabrane tako da vrijedi $\epsilon_0^{(3/2)} = \epsilon_1$. Zadovoljili smo prvi korak indukcije.
Sada pretpostavimo da indukcija vrijedi za sve $n = 0, 1, ..., N-1$, pa znamo da vrijedi $||\eta_N||_{\sigma_N} \leqslant \epsilon_N$. Kako bi dokazali da vrijedi i za $n = N$, prvo odaberimo h_N koji rješava jednadžbu $h_N(x+\rho) - h_N(x) = \eta_N(x) - \hat{\eta}(0)$. Lema 1.1 nam daje procjenu $||h_N||_{\sigma_N-\delta_N}$, a lema 1.2 nam daje H_N^{-1} i procjenu $||g_N||_{\sigma_N-4\delta_N}$. Na kraju ako definiramo $\phi_{N+1} = H_N^{-1} \circ \phi_N \circ H_N = x + \rho + \eta_{N+1}$, s η_{N+1} definiranim analogno kao i $\tilde{\eta}$ u rezultatu (16), slijedi:

$$||\eta_{N+1}||_{\sigma_{N+1}} \leqslant \frac{16\pi(\Gamma(\nu))^2}{K^2(2\pi\delta_N)^{2\nu+1}}\epsilon_N^2. \tag{17}$$

Ako opet iskoristimo definicju induktivnih konstanti vidimo da je izraz ograničen s $\epsilon_N^{(3/2)} = \epsilon_{N+1}$, čime smo dokazali lemu.
Arnoldov teorem je lako dokazati koristeći induktivnu lemu. Definirajmo:

$$\mathcal{H}_N(x) = H_0 \circ H_1 \circ ... H_N(x). \tag{18}$$

Koristeći induktivnu lemu $\mathcal{H}_N$ je analitički na $S_{\sigma_N-2\delta_N}$ i $\mathcal{H}_N(z) - z$ je ograničen s

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu)\epsilon_N}{K(2\pi\delta_N)^\nu} \equiv \Delta. \tag{19}$$

Ova suma konvergira zbor izbora induktivnih konstanti. Nadalje
$\mathcal{H}_{N+1}(z) - \mathcal{H}_N(z) = \mathcal{H}_N \circ H_N(z) - \mathcal{H}_N(z) = \int_0^1 \mathcal{H}_N'(z + th_N(z))h_N(z)ds$,
pa imamo

$$\mathcal{H}_{N+1} - \mathcal{H}_N||_{\sigma_{N+1}} \leqslant (\frac{4\Delta}{\delta_N} + 1)\frac{\Gamma(\nu)\epsilon_N}{K(2\pi\delta_N)^\nu}. \tag{20}$$

Primjetimo da zbog definicjie induktivnih konstanti, desni član nejednadžbe konvergira ako ga sumiramo po N. Stoga $\mathcal{H}_N$ konvergira u neki analitički limes $\mathcal{H}$ na S_σ. Nadalje, $\mathcal{H}(z) = z + \tilde{h}(z)$, gdje procjena na $\mathcal{H}_N(z) - z$ i Cauchyev teorem[5] impliciraju da $\delta^* = \sigma^*/16$, onda slijedi $||\tilde{h}'||_{\sigma^*-\delta^*} \leqslant$

$\Delta/\delta^* < \delta^*$. Može se pokazati da je $\mathcal{H}$ invertibilan na slici $S_{\sigma^*-\delta^*}$ i da ova slika sadrži $S_{\sigma^*-2\delta^*}$.
Primjetimo da $\phi \circ \mathcal{H}_N(z) = \mathcal{H}_N \circ \phi_N(z) = \mathcal{H}_N(z + \rho + \eta_N(z))$. Ako N ide u beskonačno imamo $\phi \circ \mathcal{H}(z) = \mathcal{H} \circ R_\rho(z)$, za sve $z \in S^*_\sigma - 2\delta^*$. Kako je $\mathcal{H}$ invertibilan na ovoj domeni slijedi $\mathcal{H}^{-1} \circ \phi \circ \mathcal{H} = R\rho$, pa je $\mathcal{H}$ difeomorfizam čije smo postojanje definirali u Arnoldovom teoremu.

3 Precizni iskaz KAM teorema

Kao što smo opisali u uvodu, originalno je KAM teorem iskorišten za opisivanje skoro integrabilnih Hamiltonijanskih sustava. Integrabilni sustavi se često opisuju u varijablama kuta i djelovanja. One su zapravo prirodne varijable takvog problema. Ako imamo integrabilni sustav $h(\mathbf{I})$ i dodamo mu mu malu perturbaciju, koja ovisi i o varijabli kuta i o varijabli djelovanja. Tada, naš hamiltonijan glasi

$$H(\mathbf{I}, \phi) = H(\mathbf{I}) + f(\mathbf{I}, \phi). \tag{21}$$

Opet pretpostavljamo da je Hamiltonijan analitičan kako bi izbjegli nepotrebne komplikacije. Točnije, ako razmišljamo o $f(\mathbf{I}, \phi)$ kao funkciji na $R^N \times R^N$, koja je periodična u ϕ, onda pretpostavljamo da postoji $\mathbf{I}^* \in R^N$ takav da H možemo proširiti u analitičku funkciju na skupu $\mathcal{A}_{\sigma,\rho}(\mathbf{I}) = \{(\mathbf{I}, \phi) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^N || \mathbf{I} - \mathbf{I}^* < \rho, |Im(\phi_j)| < \sigma, j = 1, ..., N\}$.
Još nam je potreban analogon brojeva tipa (K, ν) za vektore.

Definicija 3.1. Kažemo da je vektor $\omega \in \mathbf{R}^N$ tipa (L, γ) ako vrijedi

$$|\langle \omega, \mathbf{n} \rangle = |\sum_{j=1}^{N} \omega_j n_j| \geqslant L|n|^{-\gamma}, \ \textit{za sve } \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N \setminus \mathbf{0}. \tag{22}$$

Teorem 3.1. (**KAM Teorem**):
Neka je $\omega(\mathbf{I}^*) \equiv \omega^*$ je tipa (L, γ) i da je Hessijan $\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}$ je invertibilan na $\mathbf{I}^*$. Onda postoji $\epsilon_0 > 0$ takav da ako vrijedi $||f||_{\sigma,\rho} < \epsilon_0$, Hamiltonijanski sustav ima kvazi-periodičko rješenjes frekvencijom $\omega(\mathbf{I}^*)$.

Teorem kažem da postoji barem jedno kvaziperiodičko riješenje, ali vidjeti ćemo da cijeli torus $\mathbf{I}{=}\mathbf{I}^*$, preživi. Mogli bi se zapitati zašto proučavamo kvazi-periodične orbite, a ne očito jednostavnije periodičke orbite. Ako se uzmu u obzir vrijednosti varijabli djelovanja za koje su frekvencije $\omega_j(\mathbf{I})$ racionalno povezane, onda integrabilni hamiltonijan ima invarijantni torus, ispunjen periodičkim orbitima. Međutim, pod tipičnim perturbacijama, sve osim konačno mnogo ovih periodičnih orbita će nestati. Dakle, kvazi-periodični orbite su u tom smislu stabilnije od periodičnih.
Dokaz slijedi isti proces kao i dokaz u prošlom odjeljku.

3.1 Korak 1: Analiza linearizirane jednadžbe

Tražimo nove varijable $(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\phi})$ takve da je zadovoljena jednadžba (21). Međutim, želimo da Hamiltonove jednadžbe budu očuvane. Takve transformacije varijabli zovemo kanonske promjene varijable[1]. Neka je Σ funkcija koja generira kanonske varijable. Mi tražimo takvu promjenu varijabli da vrijedi:

$$H(\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\phi}),\phi)=\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}}). \tag{23}$$

Ovu jednadžbu možemo prepoznati kao Hamilton-Jacobi jednadžbu. U našem problemu, ova jednadžba prelazi u:

$$h(\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\phi}))+f((\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\phi}),\phi)=\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}}). \tag{24}$$

Kako je H blizu integrabilnom hamitlonijanu kada je f mali, pretpostavljamo da je kanonska transformacija blizu idnetitete. Znamo kako izgleda kanonska transformacija za identitetu, pa pretpostavljamo da je tražena funkcija izvodnica oblika: $\Sigma(\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}})=\langle\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}}\rangle+S(\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}})$, gdje $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt. Ako ovo ubacimo u jednadžbu (24) i razvijemo po f i S do prvog reda, imamo

$$\langle\omega(\tilde{\mathbf{I}}),\frac{\partial S}{\partial\phi}(\tilde{\mathbf{I}},\phi)\rangle+f(\tilde{\mathbf{I}},\phi)=\tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}})-h(\tilde{\mathbf{I}}) \tag{25}$$

Isto kao i u prošlom poglavlju, sve funkcije su periodičke, pa je rješenjeza S dano s:

$$S(\tilde{\mathbf{I}},\phi)=\frac{i}{2\pi}\sum\nolimits_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^N\backslash\mathbf{0}}\frac{\hat{f}(\tilde{\mathbf{I}},\mathbf{n})e^{i2\pi\langle\mathbf{n},\phi\rangle}}{\langle\omega(\tilde{\mathbf{I}}),\boldsymbol{n}\rangle} \tag{26}$$

Treba napomenuti opet da ovako zadana funkcija S ne riješava lineariziranu Hamilton-Jacobi jednadžbu, već:

$$\langle\omega(\tilde{\mathbf{I}}),\frac{\partial S}{\partial\phi}(\tilde{\mathbf{I}},\phi)\rangle+f(\tilde{\mathbf{I}},\phi)=0. \tag{27}$$

Imajmo na umu da ćemo se ponovno suočiti s problemom malih nazivnika. Doista, za gust skup točaka $\mathbf{I}$, nazivnik u (26) će nestati za beskonačno mnogo različitih $\mathbf{n}$-ova. To je razlog zbog kojeg su mnogi ljudi (uključujući Poincaré a) krajem prošlog stoljeća vjerovali da suma divergira. Ipak, rezultati Kolmogorova, Arnolda i Mosera pokazuju da suma konvergira. Problem je što smo S definirali samo na komplementu gustog skupa točaka $\tilde{\mathbf{I}}$. Stoga ćemo iskoristiti činjenicu da je f analitički, pa Fourierovi koeficijenti $\hat{f}$ idu u nulu eksponencijalno brzo kad $\mathbf{n}$ postane velik. Dakle, sumu zaustavimo na nekom velikom M, i promatramo članove za koje vrijedi $|\mathbf{n}|<M$. Za dovoljno veliki M, greška je jako mala. S druge strane, kako sad imamo konačno mnogo članova koji definiraju S, možemo probaći otovoreni skup varijabli djelovanja za koje je funkcija izvodnica Σ definirana. Prvo uvedimo nekoliko vrijednosti, koje će nam poslije biti potrebne. Prvo definirajmo $\Omega\geqslant 1$, takvu da

je uvijek veća od maksimuma supremuma $||\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}||$ i supremuma inverza, na području za koje vrijedi $|\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{I}}| \leqslant \rho$. Analogno, definiramo$\tilde{\Omega}$ kao vrijednost veću od maksimuma supremuma treće derivacije i supremuma inverza treće derivacije (Ovdje pod inverz mislim na operaciju množenja). Nadalje uvedimo $S^<$, koji je isto definiran kao i S, samo suma ne ide do beskonačno nego do M. $S^<$ nije rješenje jednadžbe (27) već:

$$\langle \omega(\tilde{\mathbf{I}}), \frac{\partial S}{\partial \phi}(\tilde{\mathbf{I}}, \phi) \rangle + f^<(\tilde{\mathbf{I}}, \phi) = 0, \tag{28}$$

, gdje je f <, suma Fourierovih koeficijenata funkcije f za sve **n**<M. Ako sad odaberemo δ takav da $0 < \delta < \sigma$ i $M = |log(||f||_{\sigma,\rho})|/(\pi\delta)$. Ako vrijedi $\rho < L/(2\Omega M^{\gamma+1})$ i $4\pi\delta < 1$, onda je $S^<$ analitički na $\mathcal{A}_{\sigma-\delta,\rho}(\mathbf{I}^*)$ i vrijedi:

$$||S^<||_{\sigma-\delta,\rho} \leqslant \left(\frac{8\Gamma(\gamma+1)}{(2\pi\delta)^{\gamma+1}}\right)^N \frac{(2N^\gamma)||f||_{\sigma,\rho}}{2\pi L}. \tag{29}$$

Ovo je ekvivalent rezultatu (12) i izvod je analogan. Nadalje, može se pokazati da ako vrijedi
$\left(\frac{8\Gamma(\gamma+1)}{(2\pi\delta)^{\gamma+1}}\right)^N \frac{(16N^{\gamma+1})||f||_{\sigma,\rho}}{2\pi\delta\rho L} \leqslant 1$, $\rho < L/(2\Omega M^{\gamma+1})$ i $4\pi\delta < 1$ onda jednadžbe

$$I = \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\partial S^<}{\partial \phi},\ i\ \tilde{\phi} = \phi + \frac{\partial S^<}{\partial \tilde{\mathbf{I}}}. \tag{30}$$

definiraju analitičku i invertibilnu kanonsku transformaciju $(\mathbf{I}, \phi) = \Phi(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})$ na skupu $\mathcal{A}_{\sigma-3\delta,\rho/4}$.

3.2 Korak 2: Newtonova metoda

Sada, baš kao što smo to učinili u slučaju difomorfizma kružnice, gdje smo transformirali naš izvorni difeomorfizam s približnom funkcijom konjugacije koju smo dobili rješavanjem linearizirane konjugacijske jednadžbe, transformiramo naš izvorni Hamiltonijan približnom kanonskom transformacijom čija je funkcija izvodnica $S^<$. Pokazat ćemo da je razlika između transformiranog Hamiltonijana i integrabilnog Hamiltonijana drugog reda u maloj funkciji $||f||_{\sigma,\rho}$. Kao i prije, koristit ćemo ovu činjenicu kao osnovu za argument Newtonove metode.

Lema 3.1. Definirajmo $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\phi}) = H \circ \mathbf{\Phi}(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\phi}) \equiv \tilde{h}(\tilde{\mathbf{I}}) + \tilde{f}(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\phi})$. Ako vrijede pretpostavke rezultata (29), onda je $\tilde{H}$ analitičan na $\mathcal{A}_{\sigma-3\delta,\rho/4}$, i imamo procjene

$$||h - \tilde{h}||_{\sigma-3\delta,\rho/4} \leqslant (\Omega+2)\left(\left(\frac{8\Gamma(\gamma+1)}{(2\pi\delta)^{\gamma+1}}\right)^N \frac{(2N^{\gamma+1})||f||_{\sigma,\rho}}{2\pi\delta\rho L}\right)^2, \tag{31}$$

$$||\tilde{f}||_{\sigma-3\delta,\rho/4} \leqslant 2(\Omega+2)\left(\left(\frac{8\Gamma(\gamma+1)}{(2\pi\delta)^{\gamma+1}}\right)^N \frac{(2N^{\gamma+1})||f||_{\sigma,\rho}}{2\pi\delta\rho L}\right)^2. \quad (32)$$

Dokaz možete pronaći u [4].

Induktivni argument: Ovaj korak je isti kao i kod difeomorfizma kružnice. Moramo pratiti dvije inuktivne konstante ρ_n, koji nam određuje domenu varijabli djelovanja, te M_n koji nam određuje na kojem koraku zaustavljamo sumu. Stoga definirajmo originalni hamiltonijan kao $H(\mathbf{I},\phi) = H_0(\mathbf{I},\phi)$, $h(\mathbf{I}) = h_0(\mathbf{I})$ i $f(\mathbf{I},\phi) = f_0(\mathbf{I},\phi)$. Nadalje, definirajmo:

- $\delta_n = \frac{\sigma}{36(1+n^2)}, n \geqslant 0$.
- $\sigma_0 = \sigma$ i $\sigma_{n+1} = \sigma_n - 4\delta_n$, ako $n \geqslant 0$.
- $\rho_0 \leqslant \rho$, i $\rho_{n+1} = \rho_n/8$. ρ_0 biramo tako da zadovolji slijedeću lemu.
- $\epsilon_0 = ||f||_{\sigma,\rho}$ i $\epsilon_n = \epsilon^{(3/2)^{n/\gamma}}$, ako $n \geqslant 0$.
- $M_n = |\log \epsilon_n|/(\pi\delta_n)$

Biramo $H_{n+1} = H_n \circ \mathbf{\Phi}_n = h_{n+1} + f_{n+1}$ i $\hat{f}_{n+1}(\mathbf{I},0) = 0$.

Lema 3.2. KAM Indukcijska lema: Postoji pozitivna konstanta c_1 takva da:

$$\epsilon_0 < 2^{-c_1 N(\gamma+1)} \frac{\sigma^{8N(4\gamma+1)}\rho_0^8 L^{16}}{\Gamma(\gamma+1)^{16N}\Omega^8}, \; i \; \rho_0 < \frac{2^{-c_1}L}{\Omega M_0^{\gamma+1}} \quad (33)$$

Onda:

- $\mathbf{\Phi}_n$ je definirano i analitičko na $\mathcal{A}_{\sigma_n-3\delta_n,\rho_n/4}$ i preslikava ovaj skup u $\mathcal{A}_{\sigma_n-2\delta_n,\rho_n/4}$
- $||f_{n+1}||_{\sigma_{n+1},\rho_{n+1}} \leqslant \epsilon_{n+1}$
- $||h_{n+1} - h_n||_{\sigma_{n+1},\rho_{n+1}} \leqslant \epsilon_{n+1}$
- $||\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{I}_n|| < \rho/8$.

Dokaz: Dokaz je sličan onome za difeomorfizam kružnice. Postojeći rezultati i definicije konstanti indukcije nam daju bazu indukcije. Jedino što treba pokazati jest da vrijedi $\mathcal{A}_{\sigma_0-3\delta_0,\rho_0/4}(\mathbf{I}_0) \supset \mathcal{A}_{\sigma_1,\rho_1}(\mathbf{I}_1)$. Ovo vrijedi ako $|\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1| < \rho_0/8$ vrijedi. Kako bismo ovo pokazali primjetimo $\omega_0(\mathbf{I}_0) = \omega_1(\mathbf{I}_1)$. Stoga, $\omega_0(\mathbf{I}_0) - \omega_0(\mathbf{I}_1 = \frac{\partial(h_1-h_0}{\partial\mathbf{I}})$. Ali norma ovoga je ograničena s $12\epsilon_1/\rho_0$.

$$\omega_0(\mathbf{I}_0)-\omega_0(\mathbf{I}_1) = \frac{\partial\omega_0}{\partial\mathbf{I}}(\mathbf{I}_0)(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)+\int_0^1\int_0^t(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\mathbf{I}^2}(\mathbf{I}_0+s\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_0))^2 dsdt. \quad (34)$$

Kako vrijedi $||(\frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{I}}|| \leqslant \Omega$ i $||\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \mathbf{I}^2}|| \leqslant \tilde{\Omega}$, slijedi da je $|\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1| < \rho_0/8$,ako vrijedi $\Omega\tilde{\Omega}\rho_0 < 1/2$, što će vrijediti ako je c_1 dovoljno veliko. Ovim smo dokazali bazu indukcije. Korak indukcije se svodi na isti proces samo je sad potrebno pokazati: $\mathcal{A}_{\sigma_{K+1},\rho_{K+1}}(\mathbf{I}_{K+1}) \subset \mathcal{A}_{\sigma_K - 3\delta_K,\rho_K/4}(\mathbf{I}_K)$ KAM teorem slijedi iz induktivne leme. Ako je $\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Phi}_0 \circ \mathbf{\Phi}_1 \circ ...\mathbf{\Phi}_n$, i $H_n = H_0 \circ \mathbf{\Psi}_{n-1}$. Lako se pokaže da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Psi}_n(\mathbf{I}^n(t), \phi^n(t)) = (\mathbf{I}^*(t), \phi^*(t))$, pa je $(\mathbf{I}^*(t), \phi^*(t))$ kvazi-periodičko rješenjeHamiltonovih jednadžbi sistema s početnim hamiltonijanom H_0. Bitno je da primjetimo da rješenjene ovisi o ϕ_0, pa je svaka putanja, tj. cijeli torus je sačuvan.

4 Zaključak

Iskazali smo i dokazali KAM teorem. Dvije glavne ideje KAM teorije su linearizacija problema oko približnog riješenja i induktivno poboljšavanje približnog riješenja koristeći Newtonovu metodu. Koristeći ove dvije ideje KAM teorija nam omogućuje da riješimo većinu problema koje možemo karakterizirati malom perturbacijom.

Prvi primjer koji smo riješili je difeomorfizam kružnice. Pokazali smo da koristeći dvije ideje KAM teorije, možemo pronaći funkciju koja konjugira naš difeomorfizam ϕ s rotacijom. Pri tom smo morali paziti što se događa s područjem na kojem je naša funkcija analitička. Svakim korakom se to područje smanjuje, ali zahvaljujući brzoj konvergenciji Newtonove metode smo sigurni da postoji konačno područje analitičnosti.

Nakon toga smo iskazali i dokazali KAM teorem u njegovom orginalnom obliku. Postupak je isti tražimo kanonsku transformaciju koja će pretvoriti naš neintgrabilni sustav s perturbacijom u integrabilni početni sustav. Lineariziramo Hamilton-Jacobi jednadžbu, zatim primjenimo Newtonovu metodu te iterativno ponavljamo postupak. Opet moramo paziti što se događa s područjem na kojem je naša funkcija analitička. Brza konvergencija Newtonove metode nam osigurava da znamo da je područje na kojem je funkcija analitička konačno. Možda se možemo upitati je li nužno da funkcija bude analitička. Moser je pokazao za difeomorfizam kružnice da ako je originalni difeomorfizam C^k, i ako je rotacijski broj tipa (K, ν), te ako je k dovoljno velik (s obzirom na ν) i ako je difeomorfizam dovoljno mala perturbacija rotacije, difeomorfizam konjugira rotaciji, s nekom $C^{k'}$ konjugacijskom funkcijom za neki $1 \leqslant k' < k$.

Ono što nam KAM teorem govori, najbolje se vidi iz neformalnog iskaza. On nam daje mjeru koliko je sustav otporan na perturbaciju.

5 Literatura

1. Herbert Goldstein: Classical Mechanics
2. Jordan Bell: Denjoy's theorem on circle diffeomorphisms
3. Wolfgang M. Schmidt. Diophantine approximation, Springer
4. C. Eugene Wayne: An Introduction to KAM Theory
5. John Hubbard and Yulij Ilyashenko: A proof of Kolmogorov's theorem
6. V.I. Arnold: Mathematical methods of classical mechanics.
7. Michael Tabor: Chaos and integrability in nonlinear dynamics
8. Edward Ott: Chaos in dynamical systems
9. Steven H. Strogatz: Nonlinear dynamics and chaos