DJiDS - zadaća 1

Z-1.1 Migracija žaba modelirana je modelom eksponencijalnog rasta $\frac{dA}{dt} = kA$ gdje je $A(t)$ površina zemlje (u km^2) koju nastanjuju žabe u trenutku t. Prilagodite model izmjerenim podacima (odredite konstantu k) ako je poznato da je 1939. godine kolonizirana površina od 32800 km^2, a 1944. godine površina nastanjena žabama iznosila je 55800 km^2. Predvidi koliku će povšinu zauzeti žabe 2050. godine.

rj: A=4.4·10^9 km^2

Z-1.2 Promotri diferencijalnu jednadžbu $\frac{dx}{dt} = x^3 - x^2 - 12x$

a) Odredi fiksne točke (ravnotežna rješenja).
b) Za koje vrijednosti x se $x(t)$ povećava, a za koje smanjuje?

rj: a) -3, 0 , 4

Z-1.3 Modeliraj diferencijalnu jednadžbu populacije životinja $P(t)$ uz pretpostavku da okolina osigurava dovoljno resursa za njihov život, ali i da su te životinje rijetke tj. ako je populacija premala, jedinke imaju teškoću s pronalaženjem partnera za parenje. Matematički, to znači da dP/dt mora postati negativan kad je P dovoljno malen. Postoji više mogućih modela za opis populacije s ovakvim biološkim pretpostavkama. Konstruiraj barem 2 najjednostavnija.

Z-1.4 Pronađite opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2 x + x}$

b) $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$

c) $\frac{dx}{dt} = t^2 x + 1 + x + t^2$

rj:

a) $x(t) = \sqrt{\ln\left[C(1+t^2)\right]}$, nije definirana za x=0

b) $x(t) = \frac{Ce^t}{1+Ce^t}$ i ravnotežna rješenja $x(t)$=0 i $x(t)$=1, gdje je C=±|const| za $\left|\frac{x}{1-x}\right| \gtrless 0$

c) $x(t) = Ce^{t+t^3/3} - 1$ i ravnotežno rješenje $x(t)$=-1, gdje je C=±|const| za $|1+x| \gtrless 0$

Z-1.5 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe sa zadanim početnim uvjetom:

a) $\frac{dx}{dt} = tx^2 + 2x^2, \quad x(0) = 1$

b) $\frac{dx}{dt} = -x^2, \quad x(0) = 1/2$

rj:

a) $x(t) = -\dfrac{2}{t^2 + 4t - 2}$

b) $x(t) = \dfrac{1}{t+2}$

Z-1.6 Hranom se u tijelo unosi kolesterol koji tijelo djelomično apsorbira i koristi za izgradnju staničnih stijenki. Označimo s $C(t)$ koncentraciju kolesterola u krvi [mg/dcl] u trenutku t [dani]. Model za opis u jednostavnom obliku glasi:

$$\frac{dC}{dt} = k_1(C_0 - C) + k_2 H,$$

gdje je:

C_0 - normalna koncentracija kolesterola u krvi

k_1 - parametar apsorpcije kolesterola iz krvi u tijelo

H - dnevna količina kolesterola unesenog hranom

k_2 - parametar produkcije (unosa) kolesterola

Neka je C_0=200, k_1=0.1, k_2=0.1, H=400, uz početni uvjet C(0)=150.

a) Odredi koncentraciju kolesterola nakon 2 dana.

b) Odredi koncentraciju kolesterola nakon dugo vremena (stacionarno rješenje).

c) Ako čovjek shvati da ima previše kolesterola u krvi tj. da si kopa grob vlastitim zubima te nakon dugo vremena takvog života odjednom prijeđe na dijetu i smanji unos kolesterola 4 puta, kolika će mu biti koncentracija kolesterola 5 dana nakon početka dijete?

rj:

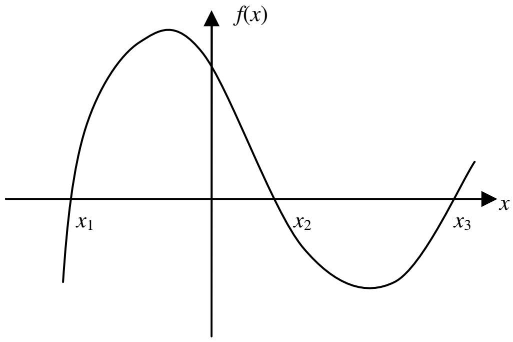
a) C=232 mg/dcl

b) C=600 mg/dcl

c) C=482 mg/dcl

Z-1.7 Za diferencijalnu jednadžbu $\dfrac{dx}{dt} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x+t)$ skiciraj tangentno polje (sa i bez računala), a potom skiciraj (bez računala) rješenje koje zadovoljava početni uvjet x(0)=1/2.

Z-1.8 Za diferencijalnu jednadžbu $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, gdje je f(x) kvalitativno opisana slikom



skiciraj ugrubo pripadno tangentno polje.

DJiDS - zadaća 2

Z-1.9 Pretpostavi da se za opis populacije tuna $P(t)$ može primijeniti logistički model s konstantom prinosa k, podrškom okoline N i vremenom t (mjerenom u godinama). Ribari godišnje izlove r posto populacije riba. :(Postavi model za opis populacije, konstruiraj bifurkacijski dijagram ovisno o parametru r, karakteriziraj bifurkaciju i komentiraj značenje rezultata.

rj: Radi se o bifurkaciji s promjenom stabilnosti. Ako postotak izlova premaši konstantu prirasta populacije, nastupa istrebljenje (P=0).

Z-1.10 Populacija vjeverica $P(t)$ opisana je modificiranim logističkim modelom

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)\left(\frac{P}{M} - 1\right),$$

gdje je po pretpostvci modela $N \geq M$ (kapacitet podrške okoline je veći od parametra minimuma populacije ispod kojeg se ova gasi). Pretpostavi da parametri k i M ostaju nepromijenjeni, ali, recimo zbog dolaska ljudi i sječe šume, podrška okoline N počne padati. Odredi kritičnu vrijednost N za koju nastupa bifurkacija u sustavu, skiciraj bifurkacijski dijagram i klasificiraj bifurkaiju.

rj: Radi se o varijanti tangencijalne bifurkacije koja nastupa za $N_c = M$.

Z-1.11 Jednoparametarski dinamički sustav opisan je jednadžbom $\frac{dx}{dt} = x^4 + \alpha x^2$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ parametar. Odredi fiksne točke sustava i karakteriziraj ih ovisno o parametru α. Odredi kritičnu vrijednost α za koju se javlja bifurkacija i skiciraj bifurkacijski dijagram.

rj: α_c=0, ispod koje postoje 4 F.T., a iznad koje 2 F.T nestaju

Z-1.12 Za dinamički sustav $\frac{dx}{dt} = x\left(r - e^x\right)$, karakterizirn parametrom $r \in \mathbb{R}$, odredi fiksne točke, karakteriziraj ih te potom skiciraj bifurkacijski dijagram i odredi kritičnu vrijednost r za koju nastupa bifurkacija.

rj: Za r_c=1 javlja se bifurkaija s promjenom stabilnosti između 2 F.T.

Z-1.13 Za dinamički sustav $\frac{dx}{dt} = -x + \beta \tanh x$, karakteriziran parametrom β>0, skiciraj bifurkacijski dijagram i karakteriziraj tip bifurkacije.
(napomena: Ovo je tip jadnadžbe koja npr. opisuje pojavu feromagnetizma u fizici čvrstog stanja, procese u neuralnim mrežama itd.)

rj: Za vrijednosti parametra veće od kritične β_c=1 nastupa klasična pitchfork bifurcation (jedna stabilna F.T: x_1=0 gubi stabilnost na račun nastanka 2 stabilne F.T. x_2=-x_3).

Z-2.1

a) Odredi opće rješenje dif. jednadžbe $\frac{dx}{dt} = x - 3e^{-t}$.

b) Odredi partikularno rješenje dif. jednadžbe $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t} + 2$ s početnim uvjetom $x(0)=3$.

<u>rj</u>: a) $x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + Ce^{t}$; b) $x(t) = \frac{t^2 + 2t + 3}{1+t}$

Z-2.2 Za električni RC krug opisan diferencijslnom jednadžbom $RC\frac{dv}{dt} + v = V(t)$, gdje je R=4Ω, C=0.5F, izračunaj napon na kondenzatoru $v(t)$ u trenutku t=10s uz početni uvjet $v(0)$=1V, za zadani vanjski napon $V(t)$=2cos(ωt) [V], ω=3s^{-1}. Zadatak riješi analitički i numerički.

<u>rj</u>: opće rješenje $v(t) = \frac{2}{37}\left(\cos 3t + 6\sin 3t\right) + Ce^{-t/2}$ uz zadani poč. uvjet daje v(10s)=-0.3057V

Z-2.3 Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$, a potom partikularno rješenje za početne uvjete $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

<u>rj</u>: $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{-2t}$, $x_p(t) = -2e^{-3t} + 2e^{-2t}$

DJiDS - zadaća 3

Z-2.4 Nađi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + y = e^{x+3}$.

rj: $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{x+3}$

Z-2.5 Nađi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = \sin x$: (a) metodom neodređenih koeficijenata; (b) metodom varijacije konstanti

rj: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x$

Z-2.6 Nađi rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 5y = 8 \sin x$ koje zadovoljava rubne uvjete $y(0)=0$ i $y'(0)=0$.

rj: $y(x) = e^{-2x}(\cos x + \sin x) + \sin x - \cos x$

Z-2.7 Nađi rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = \cos\left(e^{-x}\right)$ koje zadovoljava rubne uvjete $y(0)=0$ i $y'(0)=1$.

rj: $y(x) = -(1 + \sin 1) e^x + (1 + \cos 1 + \sin 1) e^{2x} - e^{2x} \cos\left(e^{-x}\right)$
(uputa: pri varijaciji konstanti koristi supstituciju $t=\exp(-x)$)

Z-2.8 Nađi rješenje diferencijalne jednadžbe $\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = e^{-t/2}$ koje zadovoljava početne uvjete $x(0)=0$ i $x'(0)=0$.

rj: $x(t) = -\frac{1}{73} e^{-2t}(4 \cos 4t + \frac{3}{2} \sin 4t) + \frac{4}{73} e^{-t/2}$

Z-2.9 Harmonički oscilator realiziran je od utega mase m=2kg obješenog na oprugu konstante elastičnosti k=20N/m, a giba se u mediju koji stvara trenje proporcionalno brzini, karakterizirano konstantom η=4Ns/m. Na oscilator djeluje konstantna vanjska sila (tjeranja) F=20N.
a) Napiši difirencijalnu jednadžbu koja opisuje sustav i karakteriziraj tip gušenja.
b) Nađi rješenje koje zadovoljava početne uvjete $x(0)=0$, $x'(0)=0$, gdje je $x(t)$ pomak oscilatora od ravnotežnog položaja. Koliki je pomak $x(t)$ za velika vremena (t>>)?

rj: $x(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t\right)$

Z-3.1 Izračunaj Lievu derivaciju za:
a) linearni gušeni harmonički oscilator kojem je trenje proporcionalno brzini: $m\ddot{x}+\eta\dot{x}+kx=0$
b) linearni dinamički sustav opisan jednadžbom: $\dddot{x}-4\ddot{x}+3\dot{x}+7x=0$

<u>rj</u>: $a)L=-\frac{\eta}{m};\quad b)L=4$

Z-3.2 Izračunaj Ly-eksponent i odredi tip stabilnosti oko fiksne točke dinamičkog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom $\dddot{x}+\ddot{x}+\dot{x}+x=0$.

<u>rj</u>: λ=-1

DJiDS - zadaća 4

Z-4.1 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = x^2 - y$$

rj: $T_1(0,0)$ - sedlo, $T_2(1,1)$ - centar (eliptična F.T.)

Z-4.2 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = 1 - e^x$$

Zatim nađi svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti u okolini fiksnih točaka te napiši opće rješenje (lineariziranog) sustava koje vrijedi u tom području.

rj: T(0,0) - sedlo, $\vec{\chi}(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$

Z-4.3 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = 1 + y - e^{-x}$$
$$\dot{y} = x^3 - y$$

(napomena: Pri rješavanju transcedentne jednadžbe pomozi si grafički pogodnim grupiranjem članova na lijevu i desnu stranu te njihovim grafičkim prikazom.)

rj: T(0,0) - sedlo

Z-4.4 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = xy - 1$$
$$\dot{y} = x - y^3$$

rj: $T_1(1,1)$ - sedlo, $T_2(-1,-1)$ - stabilna zvijezda

Z-4.5 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = y + x - x^3$$
$$\dot{y} = -y$$

rj: $T_1(0,0)$ - sedlo, $T_2(\pm 1,0)$ - stabilni čvorovi

Z-4.6 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2$$

rj: $T_1(0,0)$ - centar, $T_{2,3}(-1, \pm 1)$ - sedla

Z-4.7 Karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret dinamičkog sustava

$$\dot{x} = \sin y$$
$$\dot{y} = \cos x$$

rj: $T_{n,m}((n+1/2)\pi, m\pi)$, gdje su n i m cijeli brojevi, su centri za (n,m): (paran, paran) i (neparan,neparan), a sedla za (n,m): (paran, neparan) i (neparan,paran)

Z-4.8 Za <u>linearni</u> sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{x} = 2x + 6y$$
$$\dot{y} = 2x - 2y$$

a) odredi svojstvene vrijednosti i vektore te napiši opće rješenje sustava
b) karakteriziraj fiksnu točku i skiciraj fazni portret
c) odredi partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $(x(0),y(0))=(0,-1)$

rj: T(0,0) je sedlo;

$\vec{\chi}(t) = C_1 e^{4t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ - opće rj.; $\vec{\chi}(t) = -\frac{1}{4}e^{4t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ - partikularno rj.

Z-4.9 Za *linearni* sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = \begin{pmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}\vec{\chi}$$

a) odredi svojstvene vrijednosti i vektore te napiši opće rješenje sustava
b) karakteriziraj fiksnu točku i skiciraj fazni portret
c) odredi partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $\boldsymbol{\chi}(0)=(1,0)$ i skiciraj ga

rj: T(0,0) je centar;

$\vec{\chi}(t) = C_1 e^{i2t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + C_2 e^{-i2t}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ - opće rješenje; $\vec{\chi}(t) = \begin{pmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\end{pmatrix}$ - partikularno rješenje

Z-4.10 Za *linearni* sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}\vec{\chi}$$

odredi svojstvene vrijednosti i vektore, napiši opće rješenje sustava i partikularno rješenje za početni uvjet $\boldsymbol{\chi}(0)=(1,0)$ te skiciraj fazni portret sustava.

rj: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ - jedna sv. vrijednost isčezava; sv. vektori: $\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(-2,1)$

$\vec{\chi}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ - opće rješenje; $\vec{\chi}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ - partikularno rješenje: koincidira sa ravnotežnim jer je početni uvjet (1,0) upravo fiksna točka - $T(x_0,0)$, za svaki realni x_0 (radi se o kontinuiranoj liniji fiksnih točaka duž vektora $\mathbf{v}_1$ u koje se slijeva fazni tok paralelno s vektorom $\mathbf{v}_2$)

DJiDS - zadaća 5

Z-4.11 Za dinamički sustav

$$\dot{x} = y^3 - 4x$$
$$\dot{y} = y^3 - y - 3x$$

a) karakteriziraj fiksne točke i skiciraj fazni portret
b) odredi svojstvene vrijednosti i vektore za svaku fiksnu točku i pomoću njih napiši opće rješenje u okolini pripadne fiksne točke
c) pokaži da rješenje $|x(t)-y(t)| \to 0$, za $t \to \infty$

rj:

T$_1$(0,0); $\vec{\chi}(t) = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, T$_{2,3}$(±2, ±2); $\vec{\chi}(t) = C_1 e^{8t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

c) uputa: svedi sustav na dif. jednadžbu za x-y i riješi ju te nađi asimptotsko rješenje

Z-4.12 Numerički nacrtaj fazni portret sljedećih dinamičkih sustava:

a) dipolna fiksna točka:

$$\dot{x} = 2xy$$
$$\dot{y} = y^2 - x^2$$

b) "papagaj":

$$\dot{x} = y + y^2$$
$$\dot{y} = -x + \tfrac{1}{5}y - xy + \tfrac{6}{5}y^2$$

Što dobijaš analitičkom karakterizacijom fiksnih točaka? Uoči kako nelinearni članovi modificiraju fazni portret dalje od fiksne točke.

Z-4.13 Dvije mase, m_1 i m_2, nalaze se u svemiru na fiksnoj udaljenosti a. Masa m giba se između njih dvije točno po pravcu koji ih spaja (nema perpendikulanih komponenti brzine). S x označi udaljenost m od m_1.
a) Napiši jednadžbu gibanja mase m.
b) Odredi ravnotežni položaj mase m te odredi da li je ravnoteža stabilna ili nestabilna.
(uputa: Zapiši jednadžbu gibanja kao dinamički sustav i izvrši karakterizaciju fiksne točke tj. analizu stabilnosti trajektorije u njenoj okolini.)

rj:

b) $x_0 = \dfrac{a}{1+\sqrt{m_2/m_1}}$ je sedlena točka (po definiciji - nestabilna)

Z-4-14 Razmotri modificirani lovac (y) - lovina (x) model prilagođen opisu populacije lovine koja nema ograničenja na resurse i lovaca koji su ograničeni podrškom okoline N.

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy$$
$$\dot{y} = \gamma y\left(1 - \frac{y}{N}\right) + \delta xy$$

α, β, γ, δ, $N > 0$. Analiziraj sustav pomoću karakterizacije fiksnih točaka i odredi bifurkacijske vrijednosti.
Za parametre α=0.3, β=0.1, γ=3, δ=5 te N=2, 3, 4 računalom nacrtaj fazni portret i po jedno rješenje s poč. uvjetima odabranim u fizikalnom području parametara.

rj:

Fiksne točke $T_1(0,0)$, $T_2(0,N)$ i $T_3((\alpha/\beta N\text{-}1)\gamma/\delta,\alpha/\beta)$ promjenom N prolaze čvor-sedlo prijelaz na kritičnoj vrijednosti $N_C=\alpha/\beta$. Za $N>N_C$ (kad je populacija lovaca prejako podržana od okoline) do tada stabilna i konačna populacija lovine pada na nulu i ostaje 0.

Z-4.15 U izoliranoj skupini od ukupno N pojedinaca izbila je epidemija zarazne bolesti. Zaraza se širi bilateralnim kontaktom (između 2 osobe) čija je frekvencija μ. U svakom trenutku u skupini se nalazi x zdravih ljudi, y oboljelih ljudi, koji šire zarazu, i z umrlih ljudi na koje živi nailaze tj. "susreću" ih, ali ovi *ne šire* zarazu. Pretpostavi da se zaraza širi brzo, tako da se broj eventualno novorođenih, ozdravljelih, umrlih prirodnom smrću, odbjeglih iz skupine itd. može zanemariti. Postavi model koji opisuje širenje epidemije. Ako je u početnom trenutku u skupini 1 zaražena osoba, pokaži da je broj osoba, koji će nakon dugo vremena biti nezaraženo x_∞, dano jednadžbom

$$2N-1-2x_\infty+(N-1)\ln\frac{x_\infty}{N-1}=0.$$

Pogodnim skaliranjem μ u skalu s vremenom, riješi sustav numerički i uvjeri se u točnost gornjeg izraza.

rj:

uputa: Brzina promjene broja zdravih i zaraženih osoba proporcionalna je broju susreta njih s onim drugima (pazi još i na predznak!) s tim da brzina promjene broja zdravih ovisi samo o broju susreta sa zaraženima, a brzina promjene broja zaraženih raste s brojem susreta zaraženih sa zdravima, ali pada proporcionalno broju susreta s mrtvima i s preostalih y-1 zaraženih jer takvi susreti ne doprinose širenju zaraze ("potroše" se bez rezultata). Uzevši još u obzir izraz za ukupan broj ljudi u skupini $x+y+z=N$, dolazi se na sustav

$$\dot{x}=-\mu xy$$
$$\dot{y}=\mu\left[2xy-(N-1)y\right]$$

Odatle, konstruiranjem jednadžbe za dy/dx, ova se lako rješava separacijom varijabli te, uzimanjem u obzir početnih uvjeta (za određivanje integracijske konstante) i uvrštavanjem tog rješenja za $y(x)$ u prvu jednadžbu sustava, uz činjenicu da stacionarno rješenje znači izjednačavanje lijeve strane x' s nulom, dobiva se tražno rješenje.

DJiDS - zadaća 6

Z-5.1 Dinamički sustav zadan je u polarnim koordinatama

$$\dot{r} = r(4 - r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1$$

Rješenje u Kartezijevim koordinatama (npr. laboratorijske obzervable) može se zapisati u obliku $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$. Skiciraj rješenje $x(t)$ za početni uvjet $x(0)=0.5$ samo na temelju kvalitativne analize sustava (bez numeričkog računa).

Z-5.2 Za dinamičke sustave zadane u polarnom sustavu

a) $\begin{aligned}\dot{r} &= r\sin r\\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2)(4-r^2)\\ \dot{\theta} &= 2-r^2\end{aligned}$

odredi fiksne točke i *skiciraj* kako bi izgledao fazni prostor u Kartezijevim (x,y) koordinatama. Zatim jednadžbe transformiraj u Kartezijev sustav i numerički nacrtaj fazni portret i izračunaj numeričko rješenje $x(t)$, $y(t)$ za nekoliko početnih uvjeta iz karakterističnih područja te se uvjeri u ispravnost skice iz prvog dijela zadatka.

rj: Sustavi sadrže koncentrična stabilna i nestabilna granična kola oko nestabilne F.T. u centru. U Kartezijevim koordinatama jednadžbe glase:

a) $\begin{aligned}\dot{x} &= x\sin\sqrt{x^2+y^2} - y\\ \dot{y} &= y\sin\sqrt{x^2+y^2} + x\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2) - y(2-x^2-y^2)\\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2) + x(2-x^2-y^2)\end{aligned}$

Z-5.3 Za nelinearni oscilator opisan jednadžbom $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}(x^2 + \dot{x}^2 - 1) + x = 0, \quad \varepsilon \ll 1\,(\varepsilon > 0)$ analitički odredi amplitudu stacionarnog titranja (radijus graničnog kola). Zatim numerički riješi sustav i uvjeri se izborom različitih iznosa parametra ε da on određuje samo izgled faznog prostora i formu trajektorije (rješenja), ali ne i konačni oblik graničnog kola.

rj:
Usrednjavanjem po brzoj varijabli za slabo nelinearni sustav dobiva se jednadžba za amplitudu rješenja $\dot{A} = \frac{1}{2}A(1 - A^2)$, odakle se vidi postojanje stabilnog graničnog kola radijusa 1 (oko nestabilne F.T. u centru).
napomena: Ako se koristi "ručno" usrednjavanje polazeći od ansatza rješenja s predavanja, treba zanemariti sve članove koji sadrže *A*' i njegovu kombinaciju s *A* reda višeg od linearnog.

Z-5.4 Provjeri da li nelinearni oscilator opisan jednadžbom $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}(x^2 - 1) + \tanh x = 0, \quad \varepsilon > 0$ u faznom prostoru sadrži granično kolo.

rj: Da. (Koristi Lienardov teorem.)

Z-5.5 Van der Polov oscilator, realiziran u sustavu s negativnim diferencijalnim otporom, spojen je na dodatni vanjski prednapon (bias) što se može opisati jednadžbom

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x} + x = \alpha$$

gdje je $\mu>0$ koeficijant nelinearnosti, a α parametar konstantne vanjske sile (bias).

a) Odredi Lienardovu transformaciju za zadani sustav. Analitički odredi interval parametra prednapona α za koji sustav razvije granično kolo. Skiciraj ponašanje rješenja u Lienardovim koordinatama u granici jake nelinearnosti $\mu>>1$.

b) Riješi sustav numerički za nekoliko karakterističnih izbora a u granici $\mu>>1$, nacrtaj fazni portret i rješenje $(x(t),y(t))$ za nekoliko početnih uvjeta.

c)* Analitički približno izračunaj period stacionarnih oscilacija u granici $\mu>>1$. Usporedi rezultat s numeričkim dobivenim crtanjem $x(t)$.

rj:

a) $\dot{x}=\mu\left[y-(\frac{1}{3}x^3-4x)\right]$, $\dot{y}=\frac{1}{\mu}(\alpha-x)$; analiza F.T. pokazuje da je sustav "biased" na nestabilnom dijelu karakteristike ako je $|\alpha|<2$ i za $\mu>>1$ razvija se granično kolo sa fast/slow granama.

c) Za $\mu>>1$ sustav većinu perioda provede na lijevoj i desnoj sporoj grani $y=x^3/3-4x$. Iz jednadžbi treba odrediti $dt=\mu(x^2-4)/(\alpha-x)dx$ kao funkciju koordinate x i integrirati duž grana u smjeru gibanja sustava tj. po x od 4 do 2 i -4 do -2. Ukupni period je:

$$T=\mu\left[(4-\alpha^2)\ln\frac{4-\alpha^2}{16-\alpha^2}+12\right]$$

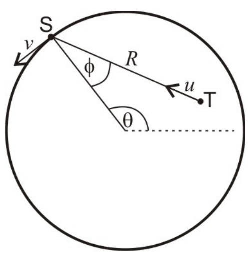
Z-5.6 Dinamički sustav zadan jednadžbama

$$\dot{x}=\mu x+y-xy^2$$
$$\dot{y}=-x+\mu y+y^3$$

podliježe Hopfovoj bifurkaciji u ishodištu. Odredi kritičnu vrijednost parametra μ za koju nastupa bifurkacija te izračunaj frekvenciju graničnog kola u bliskoj okolini te vrijednosti. Odredi da li je formirano granično kolo stabilno ili nestabilno i skiciraj bifurkacijski dijagram.

rj: Za $\mu<0$ formira se nestabilno granično kolo s frekvencijom orbitiranja 1 (*naputak*: iz sv. vrijednosti Jacobiana ishodištu odrediti μ_c i frekvenciju, a prelaskom u polarni sustav stabilnost).

Z-5.7* U kružnom bazenu jediničnog radijusa nalaze se srdela i tuna koja ju progoni. Srdela se nalazi uz rub bazena i bježi tako da uvijek pliva uz rub u istom smjeru "counterclockwise" brzinom v. Tuna ju pak progoni brzinom u na način da u svakom trenutku usmjerava gibanje prema trenutnom položaju srdele. Omjer brzina $\alpha=u/v$ je parametar modela. Koristeći koordinate na slici postavi jednadžbe modela $dR/d\theta$ i $d\phi/d\theta$ te odredi kritičnu vrijednost parametra za koju tuna uspije uhvatiti srdelu.



rj: U pitanju je problem tzv. "cirkularnog progona". Do danas nije poznato analitičko rješenje trajektorije. Jednadžbe koje opisuju sustav su: $dR/d\theta=\sin\phi-\alpha,\ d\phi/d\theta=\cos\phi/R-1$.

Stacionarno rješenje je asimptotsko gibanje tune prema kružnici radijusa $R=\sqrt{1-\alpha^2}$ (granično kolo) odakle je očigledno da srdela biva uhvaćena (R=0) ako je omjer brzina α jednak barem 1. Numeričkim rješavanjem jednadžbi ovisno o α možemo izrčunati putanju tune i uvjeriti se u rezultat.

DJiDS - zadaća 7

Z-6.1 Za tjerani Duffingov oscilator

$$\ddot{x} - x + 0.7x^3 = 0.4\cos 3t$$

numerički nacrtaj Poincareov presjek u (x, $y=x'$) ravnini gdje je diskretno preslikavanje određeno vremenskom fazom sile tjeranja $3t$ MOD 2π.

Z-6.2 Za dinamički sustav reda 2, zadan u polarnim koordinatama,

$$\dot{r} = r(a-r)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

povuci hiperravninu (pravac) duž polarne osi ($\theta=0$). Konstruiraj Poincareov presjek tj. nađi preslikavanje koje opisuje generiranje točaka - probodišta hiperravnine trajektorijom. Pronađi fiksne točke preslikavanja i odredi stabilnost. Zaključi koje su karakteristike zadanog sustava u potpunom faznom prostoru?

rj: Druga jednadžba ukazuje na periodičnost preslikavanja $T=2\pi$. Separacijom varijabli u prvoj jednadžbi $dt=-dr/r(r-a)$ i integriranjem preko jednog perioda, za početni uvjet $r(0)=r_0$, nalazimo sliku r_1 i konstruiramo preslikavanje $P(r) = a\dfrac{r}{r-(r-a)e^{-2\pi}}$ s fiksnim točkama $r_1^*=0$ i $r_2^*=a$. Za 1D preslikavanje $M=P'(r^*)$ pokazuje se da je $M_1=e^{2\pi}$ nestabilno i $M_1=e^{-2\pi}$ stabilno tj. da sustav ima stabilno granično kolo (to se vidi i iz konstrukcije $r_n=f(r_0)$ i računanjem limesa $n\to\infty$).

Z-6.3 Izračunaj Hausdorff-Besichovichevu dimenziju sljedećih objekata te skiciraj objekte:

a) kvadratna ploča stranice 1 (objekt je površina)

b) jednakostranični trokut stranice 1 kojem u sredinu upišemo trokut duplo kraće stranice i tako nastavimo u beskonačnost (objekt je slijed dužina)

c) kvadratnu ploču stranice 1 podijelimo na 9 jednakih kvadrata (kao u igri križić-kružić), zadržimo onaj u sredini i 4 na dijagonalama, a preostala 4 odbacimo te postupak ponovimo na svim zadržanim kvadratima do u beskonačnost (objekt je slijed površina)

d) nacrtaj X duljina linija 1 pod pravim kutom, svakoj od 4 nastale linije kroz poloviše pod pravim kutom provuci dužinu iste duljine (napravi novi X) te taj postupak ponavljaj do u beskonačnost (objekt je slijed dužina)

e) trokut Sierpinskog (Sierpinski triangle)

rj:

a) D=2

b) D=1

c) D=ln5/ln3=1.465

d) D=2

e) D=ln3/ln2=1.5847

DJiDS - zadaća 8

Z-7.1 Za 1-dimenzionalno preslikavanje $x_{n+1}=rx_n$, ovisno o parametru r, odredi fiksne točke i Liapunovljev eksponent λ te iz njega karakteriziraj stabilnost fiksnih točaka. Potom napravi grafičku konstrukciju preslikavanja i potvrdi analitički rezultat.

rj: F.T. je $x^*=0$, $\lambda=\ln(r)$, stabilno za $r<1$, nestabilno za $r>1$

Z-7.2 Za 1-dimenzionalno preslikavanje $x_{n+1}=\sqrt{x_n}$, odredi fiksne točke i Liapunovljev eksponent λ te iz njega karakteriziraj stabilnost fiksnih točaka. Potom napravi grafičku konstrukciju preslikavanja i potvrdi analitički rezultat.

rj: F.T. su $x^*=0, 1$; $\lambda=-\ln(2)$ - stabilno

Z-7.3 Za 1-dimenzionalno preslikavanje $x_{n+1}=r\exp(x_n)$, ovisno o parametru r, odredi vrijednost parametra r u okolini koje se javlja prozor periodičnosti (intermitencija) u bifurkacijskom dijagramu (FT ovisno o r). Grafički konstruiraj (skiciraj) preslikavanje ovisno o karakterističnom izboru r i objasni rezultat.

rj: (y=x mora biti tangenta funkcije preslikavanja za kritičnu vrijednost r gdje se događa intermitencija); $r=1/e$.

Z-7.4 Za 1-dimenzionalno preslikavanje $x_{n+1}=r+x_n^4-x_n^2$, ovisno o parametru r, odredi vrijednost parametra r u okolini koje se javlja prozor periodičnosti (intermitencija) u bifurkacijskom dijagramu (FT ovisno o r). Grafički konstruiraj (skiciraj) preslikavanje ovisno o karakterističnom izboru r i objasni rezultat.

rj: $r=1.055$

Z-7.5 Superstabilnost fiksne točke je karakteristika za koju vrijedi da derivacija funkcije preslikavanja u fiksnoj točki iščezava. Za logistički model $x_{n+1}=4rx_n(1-x_n)$ odredi vrijednost parametra r i fiksnu točku koja je superstabilna.

rj: $x^*=1/2$; $r=1/2$

Z-7.6 Newtonova metoda je algoritam za traženje nultočaka funkcije $g(x)$ koji koristi iterativnu formulu $x_{n+1}=x_n-\dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$ koja konvergira nultočki x. Za funkciju $g(x)=x^2-4$ pokaži da su fiksne točke superstabilne.

rj: $x^*=\pm 2$