

M5. Slobodne i prisilne oscilacije

1. Ključni pojmovi

Slobodno, prigušeno i prisilno titranje. Linearna diferencijalna jednačba. Logaritamski dekrement. Rezonantna krivulja. Kružno njihalo. Moment tromosti. Faktor dobrote.

2. Teorijski uvod

Kružno njihalo je tijelo učvršćeno tako da može rotirati oko jedne osi i oko te osi ima moment tromosti I . Spiralna opruga učvršćena je jednim krajem na osovinu koja nosi tijelo, a drugim krajem na čvrstu podlogu. Na taj način njihalo ima točno određen ravnotežni položaj, a spiralna opruga protivi se odstupanju od ravnoteže zakretnim momentom $T(\varphi)$ koji je proporcionalan kutu odklona φ :

$$T(\varphi) = -D\varphi, \quad (1)$$

gdje je D konstanta spiralne opruge.

Slobodne oscilacije. Pusti li se kružno njihalo da slobodno titra, diferencijalna jednačba njegova gibanja glasi:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D\varphi = 0. \quad (2)$$

Ova jednačba formalno je identična jednačbi za harmonijske oscilacije tijela na opruzi i ima općenito rješenje:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t - \psi), \quad (3)$$

gdje je φ_0 amplituda titranja, ψ početna faza, a ω_0 je vlastita kružna frekvencija njihala, određena relacijom:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (4)$$

Ovdje T_0 predstavlja period neprigušenog titranja.

U danom eksperimentalnom slučaju, konstante φ_0 i ψ utvrđuju se postavljanjem početnih uvjeta, tj. odklonom i brzinom u $t = 0$.

Prigušene oscilacije. Ako uvedemo prigušivanje proporcionalno kutnoj brzini, diferencijalna jednačba gibanja glasi:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \frac{d\varphi}{dt} + D \varphi = 0 , \quad (5)$$

gdje je C koeficijent gušenja, u našem slučaju uzrokovan vrtložnim strujama. Opće rješenje ove jednadžbe jest

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \psi) , \quad (6)$$

gdje je δ faktor gušenja

$$\delta = \frac{C}{2I} , \quad (7)$$

a kružna frekvencija ω_1 prigušenih oscilacija dana je relacijom:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} . \quad (8)$$

Uočavamo da je frekvencija ω_1 realna za potkritična prigušenja ($C^2 < 4DI$). Amplituda se eksponencijalno smanjuje s vremenom, a omjer uzastopnih amplituda je konstantan:

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{\varphi_0 e^{-\delta t_n} \cos(\omega_1 t_n - \psi)}{\varphi_0 e^{-\delta(t_n + T)} \cos(\omega_1 t_n + \omega_1 T - \psi)} = e^{\delta T} , \quad (9)$$

jer je $\omega_1 T = 2\pi$.

Definiramo logaritamski dekrement gušenja Λ :

$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} . \quad (10)$$

Faktor dobrote. Energija pohranjena u oscilatoru smanjuje se u vremenu prema zakonu:

$$\langle E(t) \rangle = \langle E_0(t) \rangle e^{-t/\tau} , \quad (11)$$

gdje je $\tau = 1 / 2\delta$. Faktor dobrote definira se kao:

$$Q = 2\pi \frac{\text{pohranjena energija}}{\text{gubitak energije u jednom periodu}} , \quad (12)$$

što za slabo gušeni oscilator iznosi (vidi "Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu" - Svezak I, str. 128):

$$Q \approx \frac{2\pi E}{\frac{E}{\tau}} \approx \omega_0 \tau . \quad (13)$$

Prisilno titranje. Ako na naš oscilator djelujemo vanjskom periodičnom pobudom, diferencijalna jednadžba glasi:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \frac{d\varphi}{dt} + D \varphi = M_v \cos \omega_v t, \quad (14)$$

gdje je M_v zakretni moment vanjske pobude, a ω_v njezina kružna frekvencija. Partikularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe jest

$$\varphi(t) = \varphi_v \cos(\omega_v t - \alpha), \quad (15)$$

što se lako može provjeriti uvrštavanjem. Tada se dobije

$$I \omega_v^2 \varphi_v \cos(\omega_v t - \alpha) - C \omega_v \varphi_v \sin(\omega_v t - \alpha) + D \varphi_v \cos(\omega_v t - \alpha) = M_v \cos \omega_v t. \quad (16)$$

Možemo iskoristiti trigonometrijske formule za kosinus i sinus razlike kutova (tj. $\omega_v t$ i α) pa gornju jednadžbu napisati u obliku

$$[-I \omega_v^2 \cos \alpha + C \omega_v \sin \alpha + D \cos \alpha] \varphi_v \cos \omega_v t + [-I \omega_v^2 \sin \alpha - C \omega_v \cos \alpha + D \sin \alpha] \varphi_v \sin \omega_v t = M_v \cos \omega_v t. \quad (17)$$

Ova jednadžba može biti zadovoljena za svaki t samo ako je

$$[-I \omega_v^2 \cos \alpha + C \omega_v \sin \alpha + D \cos \alpha] \varphi_v = M_v, \quad (18a)$$

$$[-I \omega_v^2 \sin \alpha - C \omega_v \cos \alpha + D \sin \alpha] \varphi_v = 0. \quad (18b)$$

Naime, tada $\cos \omega_v t$ i $\sin \omega_v t$ mogu poprimiti sve moguće vrijednosti, a jednadžba (17) će ostati zadovoljena. Do istoga zaključka možemo doći i sljedećim razmatranjem. U trenutku kada je $\cos \omega_v t = 1$, a $\sin \omega_v t = 0$, jednadžba (17) svodi se na jednadžbu (18a). Kada je pak $\cos \omega_v t = 0$, a $\sin \omega_v t = 1$, dobivamo jednadžbu (18b). U jednadžbama (18a) i (18b) nema vremena t što znači da one moraju stalno biti zadovoljene.

Iz jednadžbe (18b) lako dobivamo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C \omega_v}{D - I \omega_v^2} = \frac{2 \delta \omega_v}{\omega_0^2 - \omega_v^2}, \quad (19)$$

gdje su iskorištene jednadžbe (4) i (7).

Iz jednadžbe (18a) slijedi amplituda titranja

$$\begin{aligned} \varphi_v &= \frac{M_v}{(D - I \omega_v^2) \cos \alpha + C \omega_v \sin \alpha} = \\ &= \frac{M_v}{I \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + 4 \delta^2 \omega_v^2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

gdje su $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ izraženi najprije putem trigonometrijskih relacija pomoću $\operatorname{tg} \alpha$, a zatim je iskorištena jednadžba (19). Valja uočiti da su

konstante φ_v i α u rješenju (15) dobivene uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu (14), a ne iz početnih uvjeta kako je to bilo za konstante φ_0 i ψ u jednadžbama (3) i (6).

Opće rješenje jednadžbe (14) je superpozicija partikularnog rješenja (15) i općeg rješenja (6) homogene diferencijalne jednadžbe. Budući da ovo potonje brzo trne, nakon dovoljno dugog vremena uspostavi se stacionarno stanje titranja dano jednadžbom (15). U stacionarnom stanju amplituda i faza ne ovise o početnim uvjetima, nego o odnosu prema vanjskoj sili, tj. o razlici $\omega_0^2 - \omega_v^2$. Kad se frekvencija pobude poklapa s vlastitom frekvencijom oscilatora, amplituda postiže rezonantni maksimum koji prema jednadžbi (20) iznosi

$$\varphi_v = \frac{M_v}{2I\delta\omega_0} . \quad (21)$$

Možemo naći širinu rezonancije ako postavimo uvjet

$$(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 = 4\delta^2 \omega_v^2 \quad (22)$$

u nazivniku izraza za amplitudu. Uz taj će uvjet snaga pohranjena u oscilatoru iznositi polovicu maksimalne. Za maleno će gušenje frekvencije ω_v biti u blizini ω_0 , pa možemo aproksimirati $\omega_0^2 - \omega_v^2 = (\omega_0 - \omega_v)(\omega_0 + \omega_v) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega_v)$. Označimo li $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_v|$ kao poluširinu rezonancije, dobivamo iz jednadžbe (22)

$$\Delta\omega = \delta . \quad (23)$$

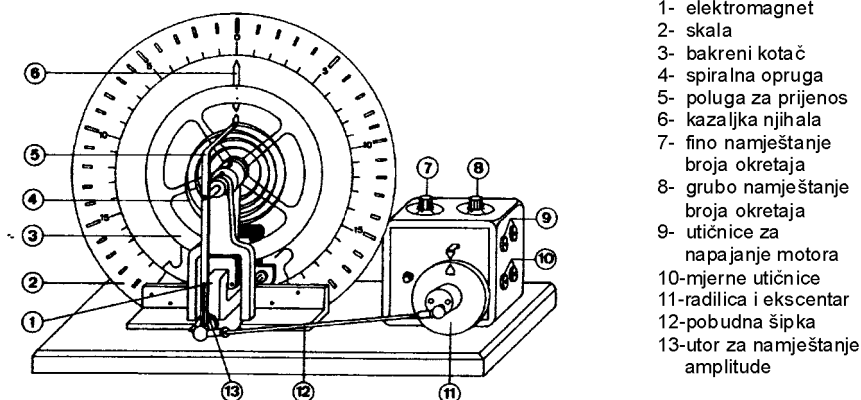
Razmatrajući jednadžbe (21) i (23), možemo zaključiti da s povećanjem faktora gušenja δ opada maksimalna amplituda, a raste širina rezonancije.

Iz jednadžbe (19) vidimo da se fazni pomak mijenja od 0 za vrlo niske frekvencije pobude, preko $\pi/2$ u rezonanciji do π za vrlo visoke frekvencije pobude. Promatranjem faznog odnosa između titranja oscilatora i vanjske sile možemo također ustanoviti je li dana frekvencija ω_v niža, jednaka ili viša od ω_0 .

3. Mjerni uređaj i mjerenje

Kružno njihalo (slika 1) sastoji se od bakrena kotača (3) čija je osovinica kugličnim ležajevima učvršćena na postolje. Kotač je pričvršćen na jedan kraj spiralne opruge (4). Drugi kraj spiralne opruge nepomičan je prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija. Kod prisilnih oscilacija elektromotor kojemu se broj okretaja može grubo i fino ugađati, stvara preko

ekscentra (11) pobudu koja putem pobudne šipke (12) i poluge za prijenos (5) dolazi na drugi kraj opruge. Prigušivanje titranja postiže se vrtložnim strujama koje elektromagnet (1) izaziva u bakrenom kotaču. Jačina prigušenja može se kontinuirano regulirati pomoću jakosti struje kroz elektromagnet.

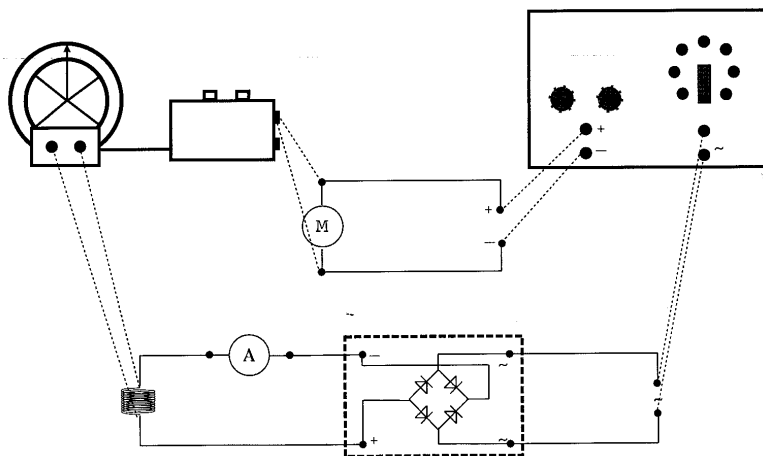


Slika 1. Kružno njihalo

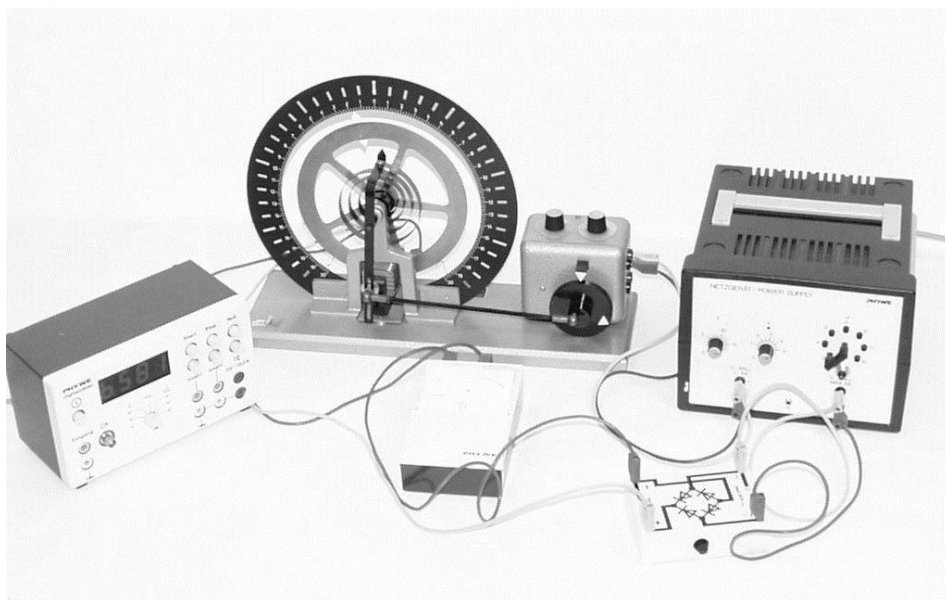
Prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija, najprije je potrebno kazaljku poluge za prijenos (5) namjestiti u nulti položaj. Zatim se kazaljka njihala (6) rukom pomakne iz ravnotežnog položaja do neke amplitude te pusti da bi se promatralo titranje. Amplituda titranja očitava se na skali (2), a period titranja određuje se zapornom urom. Za preciznije određivanje perioda titranja mjeri se vrijeme potrebno za npr. 10 titraja (kada je to moguće) pa se izmjereno vrijeme podijeli s brojem titraja. Za proučavanje prigušenih oscilacija, iz napajanja se uzima izmjenična struja koja se ispravlja pomoću ispravljača i dovodi na zavojnice (slika 2). Struja I_B mjeri se ampermetrom spojenim u seriju. Izborom napona u rasponu od 4V do 10V mijenja se struja I_B , a time i prigušenje.

Za proučavanje prisilnih oscilacija spoji se istosmjerni napon iz napajanja na istosmjerni motor (gornji dio slike 2).

Mjerni postav prikazan je na slici 3.



Slika 2. Shema spajanja eksperimentalnog uređaja



Slika 3. Mjerni postav

4. Zadaci

1. Odredite period titranja i karakterističnu frekvenciju za neprigušeno titranje. Učinite po 3 mjerenja deseterostrukih perioda za 2 različite početne amplitude i provjerite ovisi li rezultat o početnoj amplitudi. Zatim odredite period i frekvenciju prigušenog titranja za dvije različite struje prigušenja.

2. Odredite logaritamski dekrement $\Lambda = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}$ za 3 različite struje

prigušenja. U tu svrhu izmjerite amplitude φ_n u ovisnosti o broju perioda n . Pritom se očitava desetak uzastopnih amplituda uvijek s iste strane skale. Grafički prikaz $\ln \varphi - n$ daje pravac s negativnim nagibom $-\Lambda$. Odredite faktor dobrote za ta 3 prigušenja.

3. Promatrajte prisilne oscilacije. Prikažite grafički rezonantne krivulje za različite struje prigušenja. Za svaku krivulju potrebno je odrediti amplitude oscilacija u *stacionarnom* stanju za po 5 pobudnih frekvencija ispod i iznad rezonantne frekvencije.

Naputak: Čisto prisilno titranje, opisano jednadžbom (15), opaža se nakon duljeg djelovanja pobude. U početku titranje sadržava dva dijela: titranje vlastitom frekvencijom oscilatora (jedm. (6)) i titranje pobudnom frekvencijom (jedm. (15)). U tom razdoblju opažamo nepravilno titranje sve dok ne prevlada titranje pobudnom frekvencijom. Trajanje prijelaznog titranja ovisi o pobudnoj frekvenciji i o jakosti prigušenja. U blizini rezonancije s malim prigušenjem potrebno je oko 5 minuta za nastanak stacionarnog stanja. Prijelazni period moguće je skratiti ako se za danu pobudnu frekvenciju najprije uključi jako prigušenje, a zatim se postupno smanjuje (priključak na 10V-8V-6V-4V).