## ZADACI SA VJEŽBI IZ KOLEGIJA STATISTIKA I OSNOVNA MJERENJA

### Teorija slučajnih pogrešaka

1. Dužina $l$ izmjerena je 10 puta. Izračunajte aritmetičku sredinu, preciznost mjerenja (srednju pogreška), standardnu devijaciju (nepouzdanost), relativnu pogrešku i maksimalnu pogrešku. Prikažite rezultat!

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_i(mm)$ | 17.5 | 18.2 | 17.5 | 18.6 | 18.6 | 18.7 | 17.4 | 18.2 | 17.3 | 17.8 |

(R: $\bar{l} = 17.98$ mm; $m = 0.5453$ mm; $M = 0.172$ mm; $l = (18.0 \pm 0.2)$ mm; $R_l = 1.1$ %; $\Delta x = 0.7$ mm.)

2. Šest studenata vagalo je neki predmet neovisno jedan od drugoga. Njihovi su rezultati:

$$m_1 = (3.25 \pm 0.03) \text{ g}$$
$$m_2 = (3.27 \pm 0.06) \text{ g}$$
$$m_3 = (3.28 \pm 0.01) \text{ g}$$
$$m_4 = (3.25 \pm 0.08) \text{ g}$$
$$m_5 = (3.26 \pm 0.06) \text{ g}$$
$$m_6 = (3.297 \pm 0.001) \text{ g}$$

(a) Izračunajte opću aritmetičku sredinu, nepouzdanost i relativnu nepouzdanost mase predmeta.

(b) Ustanovljeno je da je šesti student varao. Zanemarite njegov rezultat i ponovo izračunajte veličine iz a)

(R: (a) $m = (3.297 \pm 0.001)$ g; $R = 0.03$ %. (b) $m = (3.277 \pm 0.009)$ g; $R = 0.3$ %

3. Mjerenjem duljine niti $l$ i perioda $T$ titranja matematičkog njihala možemo odrediti gravitacijsku konstantu $g$. Izmjereno je:

$$l = (0.850 \pm 0.002)\ m; \qquad \Delta l = 0.008 \text{ m}$$
$$T = (1.849 \pm 0.003)\ s; \qquad \Delta T = 0.01 \text{ s}$$

(R: $g = (9.82 \pm 0.04)$ m/s$^2$; $R = 0.4$ %.)

4. Boltzmannova konstanta $k$ određuje se na osnovi relacije za zračenje crnog tijela $E = kST^4$. Izmjereno je:

$$T = (502.47 \pm 0.04)\ K;$$
$$E = (8.978 \pm 0.008)\ ergs^{-1};$$
$$S = (24.845 \pm 0.002)\ cm^2$$

Izračunajte konstantu $k$!

(R: $k = (5.669 \pm 0.005) \cdot 10^{-12}$ erg/s cm$^2$ K$^4$; $R = 0.09$ %.)

**Metoda najmanjih kvadrata**

5. Istraživan je broj topoloških defekata $n$ po jedinici volumena u nekoj kristalnoj strukturi. Pretpostavlja se da rezultati slijede izraz

$$n = Ne^{-\frac{E_D}{k_B T}}$$

gdje je $N$ broj atoma po jedinici volumena, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-2}$ J/K Boltzmannova konstanta, $T$ je temperatura, a $E_D$ aktivacijska energija stvaranja defekata. Dobiveni su rezultati

| $T(K)$ | 600 | 610 | 620 | 630 | 640 | 650 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n(10^{14}cm^{-3})$ | 1.21 | 1.67 | 2.26 | 3.05 | 4.07 | 5.37 |

Metodom najmanjih kvadrata nađite $E_D$.

(R: $E_D = (11620 \pm 20) \cdot k_B$ J; $N = (3.1 \pm 0.1) \cdot 10^{22}$.)

6. Dobiveni su podaci o zavisnosti neke veličine $y$ o nekoj veličini $x$. Pretpostavlja se da postoji veza

$$y = \frac{1}{ax + b}.$$

Metodom najmanjih kvadrata nađite $a$ i $b$ i njihove pogreške koji najbolje opisuju slijedeće rezultate:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1.02 | 0.24 | 0.14 | 0.10 | 0.08 | 0.06 | 0.05 |

(R: $a = (3.12 \pm 0.09)$, $b = (0.8 \pm 0.3)$.)

7. Titranje kristalne rešetke na niskim temperaturama doprinosi toplinskom kapacitetu kristala kao

$$C(T) = AT^{\gamma}.$$

Izmjereno je:

| $T(K)$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C(J/Kmol)$ | 1.94 | 6.55 | 15.53 | 30.34 | 54.43 | 83.27 |

Metodom najmanjih kvadrata nađite $\gamma$.

(R: $\gamma = (3.01 \pm 0.02)$, $A = (2.3 \pm 0.1)$ J/molK$^4$.)

8. Ovisnost koercitivnog polja nekog materijala o temperaturi dana je sljedećom tablicom:

| $T(K)$ | 4.5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $H(Oe)$ | 200.32 | 139.97 | 85.24 | 60.96 | 51.33 | 43.23 |
| $T(K)$ | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 120 |
| $H(Oe)$ | 37.32 | 30.48 | 25.51 | 20.53 | 15.87 | 5.91 |

Ako pretpostavimo da koercitivno polje opada linearno sa korijenom temperature, pronađite temperaturu na kojoj dolazi do magnetskog uređenja.

(R: $T = (133 \pm 4)$ K.)

9. Polarizacija nekog sustava opisana je izrazom

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

gdje je $\tau$ karakteristično vrijeme relaksacije. Metodom najmanjih kvadrata nađite $\tau$.

| $t(s)$ | 60 | 300 | 600 | 900 | 1200 | 1500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P/P_0$ | 0.98 | 0.92 | 0.85 | 0.78 | 0.72 | 0.66 |

(R: $\tau = 3650 \pm 30$ s.)

## Vjerojatnost

10. Novčić bacamo 5 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo pritom ostvariti 3 puta pismo i 2 puta glava?

    (R: P = $\frac{5}{16}$.)

11. Nekom studentu preostala su još 4 ispita na koja može izaći na ukupno 6 rokova. Na koliko načina može rasporediti ispite ako:

    (a) u svakom roku može izaći na proizvoljan broj ispita

    (b) u jednom roku može izaći najviše na jedan ispit?

    (c) kolika je vjerojatnost da na sva 4 ispita izađe u različitim rokovima?

    (R: (a) 1296; (b) 360; (c) P = 0.28.)

12. U skupu od 50 proizvoda nalazi se 40 dobrih i 10 loših. Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 proizvoda od kojih su 3 dobra, a 2 loša?

    (R: 444600.)

13. Zgrada ima 10 katova. U lift ulazi 6 ljudi koji slučajno izlaze po katovima neovisno jedni od drugih. Kolika je vjerojatnost da:

    (a) svi izadu na istom katu

    (b) svi izadu na različitim katovima

    (c) izađu na 6 uzastopnih katova

    (d) bar dva izađu na istom katu?

    (R: (a) $10^{-5}$; (b) 0.1512; (c) 0.0036; (d) 0.8488.)

14. Kolika je vjerojatnost da će se 7 kuglica rasporediti u 7 ćelija tako da

    (a) distribucija bude (1111111) (u svakoj ćeliji po jedna)

    (b) u jednoj budu 2 kuglice, u jednoj niti jedna, a u 5 po jedna (2111110)

    (c) (2211100)

    (R: (a) 0.00612; (b) 0.12852; (c) 0.3213.)

15. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabran dvoznamenkasti broj djeljiv ili sa 2 ili sa 5?

    (R: P = 0.6.)

16. Kocku bacamo ukupno 5 puta. kolika je vjerojatnost da se broj 4

    (a) ne pojavi niti jednom
    (b) pojavi točno 2 puta
    (c) pojavi više od 2 puta
    (d) pojavi bar jednom?

    (R: (a) 0.402 (b) 0.161; (c) 0.035 (d) 0.598.)

17. U jednoj posudi su 4 bijele i 3 crvene kuglice. Nasumice tvorimo uzorak od 3 kuglice. Neka je $x$ broj bijelih kuglica u uzorku, a $P(x)$ vjerojatnost da u uzorku bude $x$ kuglica.

    (a) Kako glasi zakon za $P(x)$?
    (b) Kolike vrijednosti $P(x)$ pripadaju $x = 0, 1, 2, 3$?

    (R: (b) 1/35, 12/35, 18/35, 4/35.)

## Uvjetna vjerojatnost

18. U prvoj posudi nalazi se 7 bijelih i 5 crvenih kuglica, a u drugoj 6 bijelih i 3 crvene. Na sreću izaberemo jednu kuglicu iz prve posude i prebacimo ju u drugu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga od ukupno 3 kuglice izvučene jedna za drugom iz druge posude bar jedna bude bijela?

    (R: P = 0.98.)

19. Tri igrača međusobno dijele karte obilježene brojevima 1, 2, 3. Igrači također nose brojeve od 1 do 3.

    (a) Kolika je vjerojatnost da bar jedan dobije svoj broj?
    (b) Kolika je vjerojatnost da niti jedan ne dobije svoj broj?

    (R: (a) P = 2/3; (b) P = 1/3.)

20. Na avion su ispaljena tri pojedinačna metka. Vjerojatnost pogotka prvim metkom je 0.5, drugim 0.6, a trećim 0.8. Od jednog pogotka avion će biti oboren s vjerojatnošću 0.3, od dva pogotka s vjerojatnošću 0.6, dok će od tri pogotka sigurno biti oboren. Naći vjerojatnost da će avion biti oboren.

    (R: P = 0.594.)

21. U jednoj velikoj seriji 96% proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju gruboj kontroli koja proglašava proizvod dobrim uz vjerojatnost 0.98 ako je proizvod stvarno dobar i uz vjerojatnost 0.05 ako je proizvod stvarno loš. Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila dobrim?

    (R: P = 0.998.)

22. Dva strijelca gađali su istu metu neovisno jedan od drugog. Svaki je ispalio jedan hitac. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi cilj je 0.8, a da drugi pogodi 0.4. Poslije gađanja ustanovljeno je da je meta pogođena jednim metkom. Kolika je vjerojatnost da je metu pogodio prvi strijelac?

    (R: P = 6/7.)

## Geometrijska vjerojatnost

23. Broj $x$ se bira na slučajan način iz intervala $0 \leq x \leq 10$. Odredite vjerojatnost da je $x \geq 7$ ako je $x$:

    (a) cjelobrojna varijabla

    (b) realna varijabla

    (R: (a) P = 4/11; (b) P = 3/10.)

24. Brojevi $x$ i $y$ biraju se na slučajan naćin iz intervala $-2 \leq x \leq 0$ i $0 \leq y \leq 3$. Odredite vjerojatnost da je razlika $y - x$ veća ili jednaka 3

    (a) ako su $x$ i $y$ cijeli brojevi

    (b) ako su $x$ i $y$ realni brojevi.

    (R: (a) P = 1/2; (b) P = 1/3.)

25. Mirko i Slavko su zakazali sastanak između 0 i 1 sat uz obavezu čekanja 20 minuta. Kolika je vjerojatnost susreta ako je dolazak svake osobe nezavisan i slučajan u toku dogovorenog vremena?

    (R: P = 5/9.)

26. Dva broda pristaju na isti vez. Vremena dolaska brodova su neovisna i slučajna u toku 24 sata. Odredite vjerojatnost da jedan od brodova čeka na oslobađanje veza, ako se zna da jedan brod stoji na vezu 1 $h$, a drugi 2 $h$.

    (R: P = 0.121.)

27. Pravac $p$ rotira jednolikom brzinom u $(x, y)$ ravnini oko točke $T = (0, a)$ za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Rotacija se zaustavlja u slučajnom trenutku.

   (a) Odredite gustoću vjerojatnosti da pravac siječe os $x$ na udaljenosti $b$ od ishodišta.

   (b) Odredite vjerojatnost da je $a \leq b \leq \sqrt{3}a$

   (R: (a) $\frac{2a}{\pi}\frac{1}{a^2+b^2}$; (b) P = 0.1667.)

**Diskretna ili diskontinuirana slučajna varijabla**

28. Od ukupno 300 proizvoda, 30 je oštećeno. Kupac odabire nasumično 4 proizvoda.

   (a) Nađite vjerojatnost da će se u ta 4 proizvoda naći $x$ oštećenih.

   (b) Odredite očekivanje i varijancu varijable $x$; koristite opće formule za $E(x)$ i $V(x)$ te gotove formule za hipergeometrijsku raspodjelu i usporedite rezultate.

   (c) nađite vjerojatnosti varijable $x$, kao i očekivanje i varijancu binomnom raspodjelom.

29. Za odvijanje jednog proizvodnog procesa potrebno je da istovremeno radi 10 istovrsnih strojeva. Vjerojatnost da jedan stroj prestane raditi je 0.05. Rad pokvarenog stroja nastavlja rezervni stroj.

   (a) Koliko treba imati rezervnih strojeva da uz vjerojatnost 0.99 možemo očekivati kontinuirani proizvodni proces?

   (b) U koliko posto slučajeva bi proces bio prekinut ako ne bi bilo niti jednog rezervnog stroja?

   (R: (a) 3; (b) P = 40 % .)

**Binomna raspodjela**

30. Pri svakom gađanju cilja iz oružja, vjerojatnost promašaja je 0.9. Naći vjerojatnost da od 20 gađanja broj pogodaka ne bude manji od 6 niti veći od 10.

   (R: P = 0.0117.)

31. Naći vjerojatnost da u nekoj obitelji od 4 djece bude:

   (a) najmanje jedan dječak

(b) najmanje 1 dječak i 1 djevojčica.

Vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice je ista.

(R: (a) P = 0.9375; (b) P = 0.875.)

32. Postotak loših proizvoda je 5%. Koji je najvjerojatniji broj loših proizvoda u uzorku od 100 slučajno odabranih proizvoda? Kolika je pripadna vjerojatnost?

    (R: x = 5; P = 0.18.)

## Poissonova raspodjela

33. Vjerojatnost pogotka u cilj pri svakom gađanju je 0.001. Naći vjerojatnost pogotka cilja s najmanje 2 zrna ako je broj gađanja 5000.

    (R: B = 0.9556; P = 0.9596.)

34. Pri prijevozu nekog proizvoda procjenjuje se da oko 0.3% nesipravnih komada stigne na odredište. Naručioc zahtijeva da mu se u pošiljci dostavi 1000 ispravnih proizvoda. Ako radnici isprva zapakiraju 1000 komada, koliko ispravnih proizvoda moramo dodati da bi vjerojatnost da se u pošiljci nalazi 1000 ispravnih komada bila veća od 97%?

    (R: 7.)

35. Izračunati vrijednosti Poissonove raspodjele za $m = 1.2$ i $x = 0, 1, 2, 3, 4$ kao i odgovarajuće parametre raspodjele $(E(x), V(x), \alpha_3, \alpha_4)$.

    (R: E(x) = V(x) = m = 1.2; $\alpha_3$ = 0.91; $\alpha_4$ = 3.83.)

## Kontinuirana slučajna varijabla

36. Kontinuirana slučajna varijabla poprima vrijednosti iz intervala $(0, \infty)$, a njena funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$f(x) = ax^2e^{-x} \quad .$$

   (a) Nađite konstantu $a$.

   (b) Izračunajte $P(0 < x < \frac{1}{k})$.

   (c) Nađite očekivanje i varijancu.

   (R: (a) $a = \frac{k^3}{2}$; (b) P = $8.03 \cdot 10^{-2}$; (c) E(x) = 3/k, V(x) = 3/k$^2$.)

37. Slučajna varijabla $x$ ima funkciju gustoće vjerojatnosti (Cauchyjeva raspodjela)

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti varijable $y = \frac{1}{x}$.

## Gaussova raspodjela

38. Slučajna varijabla $x$ ima Gaussovu raspodjelu s parametrima $\mu$ i $\sigma$. Izračunajte vjerojatnosti da je $\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma$ ($k = 1, 2, 3$).

39. U proizvodnji nekog proizvoda propisana tolerancija za jednu dimenziju je u granicama od 4 do 16 $mm$. Postotak škarta ispod donje granice tolerancije je 3%, a iznad gornje 8%. Uz pretpostavku da je dimenzija slučajna varijabla s Gaussovom raspodjelom, naći $\mu$ i $\sigma$.

(R: $\mu = 10.86$, $\sigma = 3.65$.)

## Aproksimacija binomne raspodjele normalnom

40. Istovremeno bacamo 10 idealnih novčića. Odredite vjerojatnost da pismo padne:

    (a) točno 6 puta

    (b) ne manje od 6 puta.

    Zadatak riješite "egzaktno", a zatim provjerite da li je moguće primijeniti Gaussovu aproksimaciju, te je, ako je moguće, primijenite.

    (a) P = 0.2051; (b) P = 0.376953.)

41. Kocku bacamo 100 puta. Kolika je vjerojatnost da se dvojka okrene 17 puta? Kolika je vjerojatnost da se okrene više od 4 puta, a manje od 25 puta?

    (R: P = 0.1031, P = 0.98154.)

42. Test na klasifikacijskom ispitu za fiziku sadrži 40 zadataka. Za svaki zadatak ponuđeno je 5 odgovora, od kojih je samo jedan točan. Točan odgovor donosi 15 bodova, a netočan -4 boda. Izračunajte vjerojatnost da ispitanik koji nasumice odgovara na pitanja prijeđe upisni prag od 135 bodova.

    (R: P = 0.00154.)