

## ZADACI ZA VJEŽBU IZ KOLEGIJA STATISTIKA I OSNOVNA MJERENJA

### Metoda najmanjih kvadrata

1. Titranje kristalne rešetke na niskim temperaturama doprinosi toplinskom kapacitetu kristala kao

$$C(T) = AT^\gamma.$$

Izmjereno je:

$T(K)$	20	30	40	50	60	70
$C(J/Kmol)$	1.94	6.55	15.53	30.34	54.43	83.27

Metodom najmanjih kvadrata nađite  $\gamma$ .

(R:  $\gamma = (3.03 \pm 0.02)$ ,  $A = (2.2 \pm 0.2)10^{-4}$  J/molK<sup>4</sup>.)

Ovisnost kapaciteta o temperaturi transformiramo u linearnu ( $y = ax + b$ ) pomoću logaritma:

$$\ln(C(T)) = \ln(A) + \gamma \ln(T)$$

Nove varijable su sada:

$$\ln(C(T)) = y$$

$$\ln(A) = b$$

$$\gamma = a$$

$$\ln(T) = x$$

Tada dobivamo novu tablicu podataka:

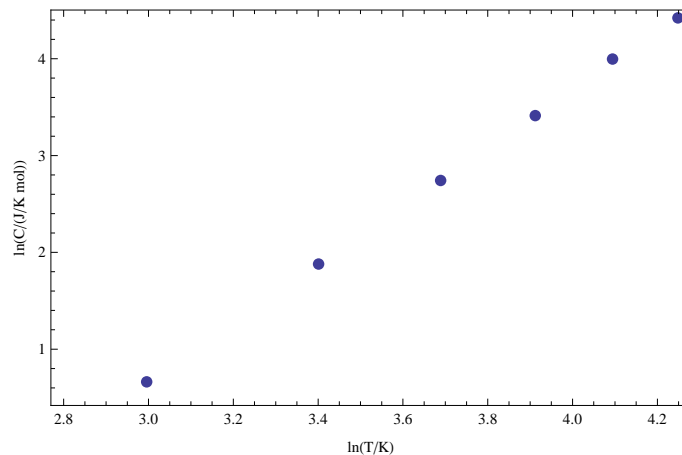
$\ln(T/K)$	3.00	3.40	3.69	3.91	4.09	4.25
$\ln(C/(J/molK))$	0.66	1.88	2.74	3.41	4.00	4.42

iz koje računamo parametre a i b.

Napomena: Primjetimo da je na u tablici kod funkcije logaritam napisana "izmjerena veličina" / jedinica, a ne "izmjerena veličina" (jedinica). To je zato što

funkcija logaritam izvrednjuje broj, a ne veličinu. Tj., on računa logaritam-od-omjera brojeva  $T(K)/(1K)$ =broj bez jedinice. Također, vrijednosti su zaokruženi na dvije decimale, što nije općenito pravilo(!)

Prvo crtamo graf(!):



Vidimo da točke zadovoljavaju linearnu ovisnost i možemo pomoću njih provesti račun metode najmanjih kvadrata.

$\sum x_i = 22.34$
$\sum x_i^2 = 84.2548$
$(\sum x_i)^2 = 499.0756$
$\sum y_i = 17.11$
$\sum y_i^2 = 58.6421$
$(\sum y_i)^2 = 292.7521$
$\sum y_i x_i = 66.9607$

$$a = (\text{preko formule 11.}) = \frac{19.5268}{6.4532} = 3.0259$$

$$b = (\text{preko formule 12.}) = \frac{-54.3024}{6.4532} = -8.4148$$

$$M_a = (\text{preko formule 13.}) = \frac{59.1005}{6.4532} = 0.023 \approx 0.02$$

$$M_b = (\text{preko formule 14.}) = 0.088 \approx 0.09$$

Što znači da je  $a = \gamma = (3.03 \pm 0.02)$ ,  $b = -(8.41 \pm 0.09)$

Iz  $a$  računamo konstantu  $A$  (preko formule 10.):

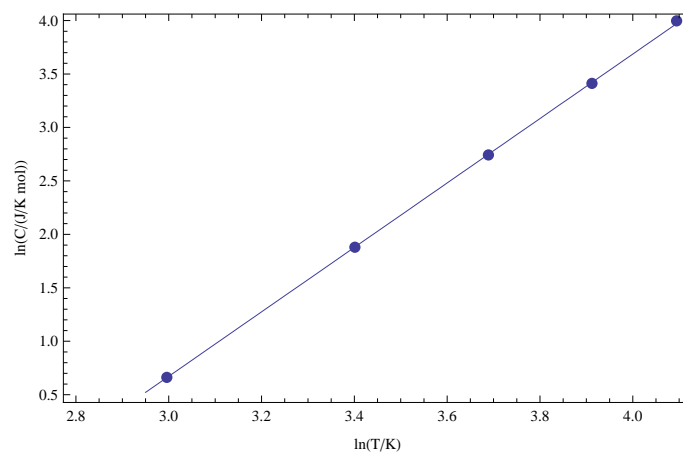
$$\bar{A} = e^{\bar{a}}$$

$$M_A = M_b e^{\bar{a}}$$

tj.,

$$A = (2.2 \pm 0.2) 10^{-4} \text{ J/Kmol}$$

Pravac koji ucrtavamo je onaj koji smo izračunali (bez zaokruživanja(!)):



Sljedeći zadaci neće biti prikazani korak po korak, već su za vježbu.

2. Ovisnost koercitivnog polja nekog materijala o temperaturi dana je sljedećom tablicom:

$T(K)$	4.5	10	20	30	40	50
$H(Oe)$	200.32	139.97	85.24	60.96	51.33	43.23
$T(K)$	60	70	80	90	100	120
$H(Oe)$	37.32	30.48	25.51	20.53	15.87	5.91

Ako pretpostavimo da koercitivno polje opada linearno s korijenom temperature ( $H = a\sqrt{T} + b$ ), pronađite temperaturu na kojoj dolazi do magnetskog uređenja (za koju je  $H = 0$ ). (Napomena: Korijen mjerene temperature zaokružite na dvije decimale.)

(R:  $T = (133 \pm 3)$  K.)

3. Polarizacija nekog sustava opisana je izrazom

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

gdje je  $\tau$  karakteristično vrijeme relaksacije. Metodom najmanjih kvadrata nađite  $\tau$ .

$t(s)$	60	300	600	900	1200	1500
$P/P_0$	0.98	0.92	0.85	0.78	0.72	0.66

(R:  $\tau = (3640 \pm 30)$  s.)

Napomena: a) Pazite na to koji fizikalni zakon prate vaše točke, b) dobiveni je rezultat dobiven zaokruživanjem (x,y) na 3 decimale.